

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный технологический университет»  
Минское областное отделение РГОО  
«Белорусское общество «ЗНАНИЕ»  
Международное общество ученых технического образования



**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ**  
**Тезисы докладов 82-й научно-технической конференции**  
**профессорско-преподавательского состава,**  
**научных сотрудников и аспирантов**  
**(с международным участием)**

Минск 2018

УДК 53:51:005.745(0.034)

ББК 22я73

Ф 50

**Физико-математические науки** : тезисы 82-й науч.-техн. конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 1-14 февраля 2018 г. [Электронный ресурс] / отв. за издание И. В. Войтов; УО БГТУ. – Минск : БГТУ, 2018. – 57 с.

Сборник составлен по материалам докладов научно-технической конференции сотрудников Белорусского государственного технологического университета и зарубежных участников. Представлены результаты расчета термодинамических характеристик микросхем, численного моделирования актуальных задач, которые необходимо решить при создании топливных элементов с твердым электролитом. Изучены характеристики тонкопленочных материалов, методы модификации вещества потоками ионов, обсуждены характеристики органических хромофоров.

Рассмотрены вопросы применения методов статистической физики для решения ряда прикладных задач. Проведено квантово-химическое исследование неплоскостных искажений макроцикла алкилированных корролов и описан временной профиль флуоресценции красителя при стационарном фотовозбуждении.

Приведены новые результаты по теории обобщенных функций и синтезе линейных регуляторов в динамических сложных системах. Рассмотрены некоторые свойства спектра обобщенного оператора и разностного уравнения. Показана возможность применения интегралов дробного порядка к решению некоторых интегральных уравнений 1-го рода и описаны особенности решения граничных задач с пограничным слоем

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры теоретической механики В.С. Вихренко  
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой физики Н.Н. Крук  
канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры высшей математики И. К. Асмыкович

Главный редактор

ректор, профессор И.В. Войтов

© УО «Белорусский государственный технологический университет», 2018

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Наркевич И. И., Цях А.</i> Статистическое исследование адсорбции коллоидных частиц из водных растворов.....	5
<i>Фарафонтова Е. В.</i> Сопоставление термодинамических характеристик двухкомпонентной системы в рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода и бинарного сплава в решеточной модели.....	7
<i>Мисевич А. В., Почтенный А. Е.</i> Особенности адсорбционно-резистивных свойств пленок на основе фталоцианинов, обусловленные их неоднородностью.....	9
<i>Почтенный А. Е., Лапто А. Н., Ильющонок И. П.</i> Исследование пленок диметилдимида перилентетракарбонной кислоты методами циклической термодесорбции и сканирующей зондовой микроскопии.....	10
<i>Почтенный А. Е., Долгий В. К.</i> Компенсационный эффект в пленках безметалльного фталоцианина.....	11
<i>Почтенный А. Е., Лугин В. Г., Волобуев В. С., Шиканов С. С.</i> Механизм адсорбционно-резистивного отклика на кислород в тонких пленках оксида индия.....	12
<i>Чаевский В. В., Жилинский В. В., Кулешов А. К., Русальский Д. П.</i> Исследование адгезии Cr-УДА/Mo-N-покрытия к твердосплавной основе...	13
<i>Поплавский В. В., Бобрович О. Г., Комаров Ф. Ф.</i> Исследование состава каталитических слоев, формируемых ионно-ассистируемым осаждением металлов на углеродные носители, с применением спектроскопии резерфордовского рассеяния.....	15
<i>Поплавский В. В.</i> Состав слоев, формируемых на поверхности полимерного мембранного электролита NaFion ионно-ассистируемым осаждением платины и редкоземельных металлов.....	16
<i>Тульев В.В.</i> Изучение поверхности структур метал/титан, полученных ионно-ассистируемым нанесением металлосодержащих покрытий.....	17
<i>Кленицкий Д. В., Крук Н. Н.</i> Временной профиль флуоресценции красителя при стационарном фотовозбуждении.....	18
<i>Карлович Т.Б., Аджиб Ю.Х., Крук Н.Н.</i> Температурная зависимость NH-таутомеризации свободных оснований корролов.....	19
<i>Крук Н. Н., Кленицкий Д. В., Маес В.</i> Квантово-химическое исследование неплоскостных искажений макроцикла алкилированных корролов.....	20
<i>Мадьяров В.Р.</i> Диагностика полупроводников с помощью магнитооптических и магнитоплазменных эффектов.....	21
<i>Егочина В.И., Копосов С.Г., Тягунин А.В.</i> Влияние направления гравитационного поля на влагопереход с поверхности льда в порошок модели марсианского грунта при отрицательных температурах.....	22
<i>Перфильев Р.О., Копосов Г.Д., Волков А.С.</i> Зависимость диэлектрической проницаемости мёрзлой дисперсной среды на основе кварца от влажности...	24
<i>Штефан Н.И.</i> Математическая модель нестационарного взаимодействия упругой конструкции с пузырьковой жидкостью.....	25
<i>Наркевич И.И.</i> Статистический расчет параметров унарных функций распределения атомов или молекул в кристаллической наночастице с заданным радиальным профилем средней плотности.....	29

<i>Штефан Н.И.</i> Исследование динамического поведения пузырьков газа, находящихся в жидкости.....	30
<i>Ловчий И.Л.</i> Моделирование в среде LABVIEW параметров поляриметрических волоконно-оптических датчиков электрического тока.....	32
<i>Момбекова С.С., Шаймерденова Г.С., Кыдырбекова А.С.</i> Обучение школьников логическим приемам мышления в курсе математики.....	33
<i>Бокун Г. С. Д. ди Каприо, Головки М. Ф., Вихренко В. С.</i> Емкость приэлектродной области твердого электролита.....	35
<i>Бокун Г. С., Д. ди Каприо</i> Структуризация приэлектродной области в твердоэлектролитной системе с подвижностью зарядов одного знака.....	36
<i>Бокун Г.С., Головки М. Ф., Вихренко В. С.</i> Распределение потенциала в пространстве между электродными пластинами.....	37
<i>Вихренко В. С., Гапанюк Д. В., Головки М. Ф.</i> Экранирование зарядов в твердых электролитах.....	38
<i>Грода Я. Г., Д. ди Каприо, Гапанюк Д. В.</i> Фазовая диаграмма решеточного флюида с salt-потенциалом на квадратной решетке.....	39
<i>Ласовский Р. Н., Пацаган Т. Н.</i> Диффузия частиц в одномерных каналах.....	40
<i>Асмыкович И. К.</i> Об относительном порядке дескрипторных систем.....	41
<i>Борковская И.М.</i> К вопросу управляемости гибридных динамических систем.....	43
<i>Ветохин С. С., Терешко Е. В.</i> К вопросу об обнаружении аналитических сигналов.....	44
<i>Игнатенко В.В., Крахотко В.В., Размыслович Г.П.</i> Некоторые вопросы управляемости линейных систем с помощью динамических регуляторов.....	45
<i>Мазель М.Х., Пиндрик О.И.</i> Некоторые свойства спектра обобщенного оператора.....	46
<i>Пономарева С.В., Пыжкова О.Н.</i> Применение интегралов дробного порядка к решению некоторых интегральных уравнений 1-го рода.....	48
<i>Соловьева И.Ф.</i> Особенности решения граничных задач с пограничным слоем.....	49
<i>Якименко А.А.</i> Модальное управление системой нейтрального типа в одном специальном случае.....	50
<i>Яроцкая Л. Д.</i> К вопросу построения композиционных сверток для интегральных преобразований по индексу.....	52
<i>Шагова Т. Г.</i> Обобщенные функции, ассоциированные с рациональными мнемифункциями.....	54
<i>Архипенко О. А.</i> Спектр краевой задачи для разностного уравнения.....	56

УДК 538.911; 544.7

И. И. Наркевич, проф., д-р физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);  
Цях А., проф., д-р физ.-мат. наук (ИФХ Польской АН, Варшава)

## СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АДСОРБЦИИ КОЛЛОИДНЫХ ЧАСТИЦ ИЗ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ

В работе проведено исследование микроструктуры однородного коллоидного водного раствора в рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода [1] с использованием потенциала SALR (Short-range Attraction Long-range Repulsion [2]), который в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\Phi(r) = 4 \left( \frac{1}{r^{12}} - \frac{1}{r^6} \right) + \frac{A}{r} e^{-kr}, \quad A = 1,27, \quad k = 0,5. \quad (1)$$

Первое слагаемое является потенциалом Леннард-Джонса, а второе – потенциалом Юкавы. Суммарный потенциал  $\Phi(r)$  учитывает наличие отталкивания между коллоидными частицами раствора на малых расстояниях ( $r < 1,15$ ), притяжения на промежуточных расстояниях ( $1,15 \leq r \leq 1,9$ ) и отталкивания на больших расстояниях ( $1,9 \leq r < \infty$ ). Этот необычный вид межчастичного взаимодействия коллоидных частиц (по сравнению с обычным взаимодействием между молекулами простых веществ) является следствием того, что коллоидные частицы взаимодействуя с растворителем (в данном случае водой) приобретают сольватную оболочку и их взаимодействие друг с другом описывается с помощью экранированного кулоновского потенциала, так называемого потенциала Юкавы.

Микроструктура однородного коллоидного раствора (без учета силового поля адсорбирующей поверхности) в используемом двухуровневом статистическом подходе [1] описывается с помощью условных функций распределения центров тяжести коллоидных частиц в микроячейках метода условных распределений [3], центры которых образуют гексагональную кристаллическую решетку. Используя ранее полученные общие уравнения и формулы [4] модифицированного метода условных распределений (двухуровневый подход) рассчитаны среднеквадратичные отклонения центров коллоидных частиц от узлов гексагональной решетки при безразмерной температуре  $\theta = 0,4$ , которая меньше температуры тройной точки ( $\theta_{тр} = 0,7$ ) простых молеку-

лярных систем, описываемых с помощью потенциала Леннарда-Джонса.

В результате рассчитана изотерма свободной энергии изучаемой коллоидной системы и обнаружена область значений чисел заполнения  $n$  ячеек для однородной системы, в которой имеется одно решение при  $n < 0,5$ . При  $n > 0,5$  существуют два решения ( $n \cong 0,5$  – точка бифуркации решения), одно из которых описывается унарной функцией распределения с сильной локализацией в окрестности узлов решетки. Это квазикристаллическое состояние среды характеризуется меньшими значениями свободной энергии и является термодинамически более устойчивым по сравнению с состоянием, отвечающим второму решению с делокализованным распределением центров коллоидных частиц.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Наркевич, И. И. Молекулярно-статистическая теория неоднородных конденсированных сред: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.14. СПб., 1993. 242 л.
2. A. Ciach, W. T. Gózdź. Mesoscopic description of network-forming clusters of weakly charged colloids. *Condensed Matter Physics* 2010, Vol. 13, № 2, 23603.
3. Ротт, Л. А. Статистическая теория молекулярных систем. М.: Наука, 1979. 280 с.
4. Наркевич, И. И., Квасов Н.Т., Козич Е.Ю. Двухуровневое молекулярно-статистическое изучение структуры и термодинамических характеристик однородных макроскопических систем и сферических наночастиц / И. И. Наркевич, Н. Т. Квасов, Е. Ю. Козич // Труды БГТУ: №6 (188). 2016. С. 61–65.

УДК 531.19; 539.682

Е. В. Фарафонтова, ст. преп., канд. физ.-мат. наук  
(БГТУ, г. Минск)

**СОПОСТАВЛЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ  
В РАМКАХ ДВУХУРОВНЕВОГО МОЛЕКУЛЯРНО-  
СТАТИСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА И БИНАРНОГО СПЛАВА  
В РЕШЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ**

В рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода [1], который базируется на одновременном использовании метода коррелятивных функций ББГКИ, метода условных распределений Л. А. Ротта [2] и метода термодинамических функционалов плотности, получены общие статистические уравнения и формулы, описывающие микро- и макроструктуру, а также равновесные термодинамические характеристики неоднородных конденсированных многокомпонентных молекулярных систем.

Для двухкомпонентной (бинарной) системы частиц сортов  $a$ ,  $b$  (без вакансий) в приближении ближайших соседей в рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода выражение для свободной энергии принимает следующий вид:

$$F(n) = \theta M \left\{ n \ln \frac{Q_a}{n} + (1-n) \ln \frac{Q_b}{1-n} + \frac{Z}{2} \left( n_{aa} \ln \frac{n^2 Q_{aa}}{n_{aa} Q_a^2} + n_{bb} \ln \frac{(1-n)^2 Q_{bb}}{n_{bb} Q_b^2} + 2n_{ab} \ln \frac{n(1-n) Q_{ab}}{n_{ab} Q_a Q_b} \right) \right\}, \quad (1)$$

где  $\theta = kT$  – приведенная температура;  $M$  – число микроячеек, на которые делится весь объем  $V$  системы; числа заполнения  $n_a = n$  определяют концентрацию частиц сорта  $a$  для однородной бинарной системы;  $n_{\mu\nu}$  – двухъячеечные числа заполнения соседних пар ближайших ячеек ( $\mu, \nu = a, b$ );  $Q_\mu$  и  $Q_{\mu\nu}$  – величины, связанные с нормировочными множителями унарной и бинарной функций распределения молекул по объемам микроячеек, соответственно;  $Z$  – первое координационное число.

Проведем сопоставление выражения для свободной энергии бинарного бездефектного сплава, состоящего из атомов двух сортов  $a$  и  $b$  [3], с выражением (1), полученным в рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода. Рассмотрим бинарный сплав  $a$ – $b$ , имеющий идеальную кристаллическую решетку, в которой все  $M$  узлов заняты атомами.

Выражение для свободной энергии сплава примет вид:

$$F = U - TS \approx M \left[ \frac{1}{2} Z (P_{aa} \Phi_{aa} + P_{bb} \Phi_{bb} + 2P_{ab} \Phi_{ab}) + kT (c_a \ln c_a + c_b \ln c_b) \right]. \quad (2)$$

Здесь  $P_{\mu\nu}$  – вероятностные функции, описывающие ближний порядок в приближении регулярных твердых растворов, которые широко используются при построении микроскопической теории взаимной диффузии в металлах и сплавах [3] ( $\mu, \nu = a, b$ ),  $\Phi_{\mu\nu}$  – парный потенциал для двух частиц сортов  $\mu$  и  $\nu$ ;  $c_\mu$  – концентрации атомов сортов  $\mu = a, b$  однородного кристаллического сплава.

Для сопоставления выражения (1) для свободной энергии однородной бинарной системы без вакансий с выражением (2) учтем, что при понижении температуры амплитуды колебаний атомов вблизи узлов кристаллической решетки уменьшаются, т. е. функции распределения становятся сильно локализованными вблизи узлов. Поэтому, выполнив соответствующие усреднения с помощью дельта-функций, выражение (1) для свободной энергии однородной бинарной системы в приближении ближайших соседей примет следующий вид:

$$F(n) = M \left[ \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^M n_{ij}^{\mu\nu} \Phi_{ij}^{\mu\nu} + \theta [n \ln n + (1-n) \ln(1-n)] + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^M \sum_{\mu, \nu = a, b} n_{ij}^{\mu\nu} \ln \frac{n_{ij}^{\mu\nu}}{n_i^\mu n_j^\nu} \right]. \quad (3)$$

Можно отметить, что выражение (3) для свободной энергии, полученное в развиваемом двухуровневом молекулярно-статистическом подходе, содержит величину

$$\Delta S = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^M \sum_{\mu, \nu = a, b} n_{ij}^{\mu\nu} \ln \frac{n_{ij}^{\mu\nu}}{n_i^\mu n_j^\nu},$$

которая для однородного регулярного бинарного сплава равна нулю.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Наркевич И. И. Молекулярно-статистическая теория неоднородных конденсированных сред: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.14. СПб., 1993. 242 л.
2. Ротт Л. А. Статистическая теория молекулярных систем. М.: Наука, 1979. 280 с.
3. Боровский И. Б., Гуров К. П., Марчукова И. Д., Угасте Ю. Э. Процессы взаимной диффузии в сплавах. М.: Наука, 1973. 360 с.

УДК 539.213.2

А. В. Мисевич, канд. физ.-мат. наук, доц.;  
А. Е. Почтенный, канд. физ.-мат. наук, доц.  
(БГТУ, г. Минск)

## **ОСОБЕННОСТИ АДсорбЦИОННО-РЕЗИСТИВНЫХ СВОЙСТВ ПЛЕНОК НА ОСНОВЕ ФТАЛОЦИАНИНОВ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ИХ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ**

Проводимость пленок на основе фталоцианинов существенным образом зависит от состава окружающей газовой среды, в частности многие пленки фталоцианинов проявляют адсорбционно-резистивный отклик на окислы азота, озон, кислород, аммиак, сероводород. Пленки на основе фталоцианинов, получаемые вакуумными методами, имеют, как правило, поликристаллическую зеренную структуру, т. е. поверхность пленок является неоднородной, что должно сказываться на их адсорбционно-резистивных свойствах. Целью данной работы является установление особенностей влияния неоднородности пленок фталоцианина свинца (PbPc) и композита фталоцианин меди – полистирол (CuPc-PS) на их адсорбционно-резистивные свойства по отношению кислороду.

Адсорбционно-резистивные свойства пленок PbPc и CuPc-PS изучались методом измерения температурных зависимостей проводимости на постоянном токе при циклической термодесорбции кислорода в высоком вакууме. Анализ температурных зависимостей проводимости, основанный на двухуровневой модели прыжковой проводимости, позволил получить зависимость относительной концентрации адсорбированного кислорода от температуры прогрева пленки в вакууме, т.е. изобару адсорбции. Полученные изобары адсорбции являются линейными в координатах относительная концентрация примеси – температура, что в соответствии со статистической теорией адсорбции на неоднородной поверхности указывает на равномерное распределение участков поверхности по теплоте адсорбции. Это согласуется с результатами измерений кинетики адсорбционно-резистивного отклика пленок CuPc-PS на диоксид азота, которая подчиняется уравнению Рогинского–Зельдовича–Еловича, являющегося следствием равномерного распределения участков поверхности по энергии активации адсорбции. Обнаружена корреляция между адсорбционными свойствами пленок PbPc и CuPc-PS и их электронной проводимостью на постоянном токе, что указывает взаимосвязь между электронными и адсорбционными свойствами этих материалов.

УДК 676.22.017

А. Е. Почтенный, доц., канд. физ.-мат. наук; А. Н. Лаппо, ассист.  
(БГТУ, г. Минск);

И. П. Ильюшонок, доц., канд. физ.-мат. наук (БГАТУ, г. Минск)

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛЕНОК ДИМЕТИЛДИИМИДА ПЕРИЛЕНТЕТРАКАРБОНОВОЙ КИСЛОТЫ МЕТОДАМИ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ТЕРМОДЕСОРБЦИИ И СКАНИРУЮЩЕЙ ЗОНДОВОЙ МИКРОСКОПИИ**

Приведены результаты исследования электропроводности на постоянном токе пленок диметилдиимида перилентетракарбонической кислоты методом циклической термодесорбции кислорода. Определены микроскопические параметры прыжкового электропереноса по примесным и собственным локализованным состояниям. Методами сканирующей зондовой микроскопии (методом атомно-силовой микроскопии, сканирующей зондовой спектроскопии, фотоассистированной электросиловой микроскопии Кельвина) определены ширина запрещенной зоны и знак основных носителей тока. Обсуждается возможность применения фотоассистированной сканирующей туннельной микроскопии для наномасштабного фазового анализа фотопроводящих пленок.

Методом циклической термодесорбции в сочетании с теоретической моделью примесной прыжковой проводимости идентифицирован прыжковый механизм проводимости в пленках РТСДИ, установлен механизм влияния адсорбированного кислорода на проводимость этих пленок и определены микроскопические параметры электропереноса – концентрация центров локализации и радиусы локализации электронов в примесных и собственных состояниях.

Методами сканирующей зондовой спектроскопии и фотоассистированной электросиловой микроскопии Кельвина показано, что основными носителями заряда в пленках РТСДИ являются электроны.

Обнаружено селективное влияние освещения на СТМ-изображения поверхности пленки РТСДИ. Это влияние проявляется в виде увеличения вертикальной координаты точек на участках изображения, полученных при освещении пленок светом с длиной волны, поглощаемой материалом пленки. Наличие указанной селективности создает принципиальную возможность применения фото-СТМ для наномасштабного фазового анализа фотопроводящих пленок и композитов на их основе.

УДК 539.214.2

А. Е. Почтенный, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);  
В. К. Долгий, доц., канд. физ.-мат. наук (БГАТУ, г. Минск)

### КОМПЕНСАЦИОННЫЙ ЭФФЕКТ В ПЛЕНКАХ БЕЗМЕТАЛЬНОГО ФТАЛОЦИАНИНА

Компенсационный эффект заключается в том, что в ряде материалов либо классов материалов большим значениям энергии активации проводимости  $E_a$  соответствует большее значение предэкспоненциального (туннельного) множителя  $G_0$ . При этом нередко наблюдается линейная связь между указанными величинами, которую обычно называют правилом Мейера-Нелдела.

В качестве исследуемого материала был выбран безметалльный фталоцианин ( $H_2Pc$ ), в пленках которого концентрация адсорбированного кислорода будет минимальной. Полученный набор данных для десяти образцов с использованием метода циклической термодесорбции, представленный в виде связи между  $G_0$  и  $E_a$ , не только свидетельствует о наличии компенсационного эффекта, но и согласуется с правилом Мейера-Нелдела с учетом погрешностей измерения.

Упорядочение данных не по образцам, а по температуре, показало, что линейные зависимости, связывающие между собой  $G_0$  и  $E_a$ , имеют разный наклон, монотонно уменьшающийся с ростом температуры. Для объяснения обнаруженного факта проведено теоретическое моделирование с использованием двухуровневой модели прыжковой проводимости при малых концентрациях кислорода.

Результаты расчетов для малых концентраций примеси показали, что  $G_0$  на много порядков величины больше, чем величина проводимости. В этом случае тангенс угла наклона линии связи между  $G_0$  и  $E_a$  должен быть равен  $1/kT$ . Иначе говоря, графиком зависимости экспериментального значения указанного выше тангенса от  $1/kT$ , должна быть прямая линия, имеющая свой тангенс угла наклона, равный единице, что и было получено с учетом погрешности измерений.

Проведенное экспериментальное исследование и теоретическое моделирование прыжковой проводимости при малых концентрациях адсорбированного кислорода позволило установить механизм компенсационного эффекта в пленках  $H_2Pc$ , содержащих адсорбированный кислород.

УДК 539.213.2

А. Е. Почтенный, доц., канд. физ-мат. наук;  
В. Г. Лугин, канд. хим. наук;  
В. С. Волобуев, ст. преп., канд. физ-мат. наук;  
С. С. Шиканов, студ.  
(БГТУ, г. Минск)

## **МЕХАНИЗМ АДСОРБЦИОННО-РЕЗИСТИВНОГО ОТКЛИКА НА КИСЛОРОД В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ ОКСИДА ИНДИЯ**

Тонкие пленки оксида индия были получены с помощью термического окисления тонких пленок индия, осажденных на подложки из слюды (мусковит) методом магнетронного распыления на постоянном токе в атмосфере аргона. В качестве катода использовался металлический индий с чистотой ЧДА. После осаждения пленки индия окисляли в электрической муфельной печи в неизотермическом режиме, нагревая до температуры 500–600°C в течение 40–60 минут и отжигали в изотермическом режиме при температуре 500°C и 600°C в течение 60 минут.

Электронная дифракция и растровая электронная микроскопия позволили установить, что в результате образуются наноструктурированные поликристаллические пленки оксида индия состава  $\text{In}_2\text{O}_3$  со средним размером зерна 25–30 нм. Рентгеновская фотоэлектронная спектроскопия показала, что пленки содержат как решеточный, так и адсорбированный кислород.

Методом циклической термодесорбции экспериментально установлено, что проводимость наноструктурированных пленок оксида индия  $\text{In}_2\text{O}_3$  увеличивается при десорбции кислорода, и показано, что это увеличение проводимости обусловлено как уменьшением концентрации центров рассеяния, которыми являются адсорбированные молекулы кислорода, в результате чего увеличивается подвижность носителей заряда, так и смещением уровня Ферми, в результате чего уменьшается энергия активации проводимости. Получены экспериментальные зависимости подвижности носителей заряда, проводимости и её энергии активации от температуры. На основе сопоставления теоретического моделирования с экспериментальными данными получены зависимости концентрации адсорбированного кислорода от температуры и положение уровней адсорбированного кислорода в запрещенной зоне. Полученные результаты могут использоваться для прогнозирования и оптимизации характеристик адсорбционно-резистивных газовых сенсоров, в частности, сенсоров кислорода, на основе тонких пленок оксида индия.

УДК 674.055:621.934(043.3)

В. В. Чаевский, канд. физ.-мат. наук, доц.;  
 В. В. Жилинский, канд. хим. наук, доц. (БГТУ, г. Минск);  
 А. К. Кулешов, канд. физ.-мат. наук, зав. лаб.;  
 Д. П. Русальский, канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр.  
 (БГУ, г. Минск)

## **ИССЛЕДОВАНИЕ АДГЕЗИИ Cr-УДА/Mo-N-ПОКРЫТИЯ К ТВЕРДОСПЛАВНОЙ ОСНОВЕ**

Электрохимические хромовые покрытия широко используются для увеличения износостойкости деталей узлов трения и защиты их от коррозии. В рамках этого направления интенсивно развиваются технологии получения композиционных хромовых покрытий, модифицированных ультрадисперсными алмазами (УДА), синтезируемыми методом детонационного синтеза [1]. Композиционные электрохимические покрытия (КЭП), содержащие соосажденные УДА, характеризуются повышенными значениями износостойкости, твердости, коррозионной стойкости, существенной адгезией, значительному снижению коэффициента трения по сравнению с традиционными КЭП [2].

Поэтому целью данной работы было исследование поверхностных свойств (адгезии, износостойкости) Cr-УДА/Mo-N-покрытий, сформированных на поверхности лезвий твердосплавных (из карбида вольфрама WC – 2 вес.% Co) ножей фрезерного инструмента комбинированным методом гальванической обработки и конденсацией вещества из плазменной фазы в вакууме с ионной бомбардировкой (КИБ), позволяющей существенно улучшить эксплуатационные свойства изделий, применяемых в различных отраслях промышленности, в т. ч. в станкостроении и деревообработке [3].

На подготовленную поверхность лезвий ножей фрез методом КИБ осаждались Mo-N-покрытия по стандартной методике [3]. Температура при осаждении соответствовала 400–450 °С. Толщина полученных покрытий не превышала 1,5 мкм. Затем на подготовленную поверхность Mo-N-покрытия осаждались Cr-УДА-КЭП. Cr-УДА-КЭП были получены из базового электролита хромирования, имеющего состав: CrO<sub>3</sub> – 250 г/л; H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> – 2,5 г/л, с добавлением УДА – 5 г/л и осаждением подслоя электрохимического никеля из соляно-кислого электролита: NiCl<sub>2</sub> – 400 г/л; H<sub>3</sub>BO<sub>3</sub> – 30 г/л. Используемые наноалмазы соответствовали ТУ РБ 28619110.001195 марки "УДА-ВК" [4].

Измерение адгезионной прочности образцов с покрытиями проводилось на установке «скретч-тестер», принцип работы которой основан на методе склерометрии – царапании поверхности покрытия алмазным индентором (радиус закругления 0,5 мм) при пропорцио-

нально возрастающей нагрузке и определении критической нагрузки, при которой происходит разрушение покрытия. Поверхность покрытия в канале трека индентора исследовалась по всей длине трека с помощью оптического микроскопа Microvert (холдинг «Планар», РБ). Скорость движения индентора была 20 мм/мин, максимальная нагрузка на индентор в конце трека достигала 150 Н. Адгезионная прочность оценивалась по величине критической нагрузки.

Согласно полученным экспериментальным данным трибологических испытаний Cr-УДА/Mo-N-покрытий на скретч-тестере критическая нагрузка полученных покрытий превысила 45 Н. Сравнение полученного значения критической нагрузки с литературными данными [5] показывает, что прочность сцепления покрытия с твердосплавной основой высокая.

Высокая адгезия Cr-УДА/Mo-N-покрытия к твердосплавным (WC – 2 вес.% Co) ножам фрезерного инструмента способствовала увеличению периода стойкости модифицированных фрез при резании ламинированных древесно-стружечных плит на предприятии «Мебельная фабрика «Пинскдрев-Адриана» в 1,7–1,8 раза по сравнению с инструментом без покрытий.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Долматов, В. Ю. Ультрадисперсные алмазы детонационного синтеза. Получение, свойства, применение. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. – 344 с.
- 2 Исследование структуры и свойств электрохимических хромалмазных покрытий / П. А. Витязь [и др.] // Материалы. Технологии. Инструменты, 2010. – Т. 15, № 2. – С. 25 – 32.
- 3 Влияние ZrN, Mo-N покрытий, сульфацианирования на износ ножей дереворежущего инструмента / А. К. Кулешов [и др.] // Трение и износ, 2014. – Т. 35, № 3. – С. 276–286.
- 4 Кононов, А. Г. Термическая стабильность хромовых покрытий, модифицированных наноразмерными углеродсодержащими добавками / А. Г. Кононов, Я. С. Сачивко, А. П. Корженевский, Р. Г. Штемплук // Актуальные вопросы машиноведения, 2015. – Вып. 4. – С. 353–357.
- 5 The effects of the H/E ratio of various Cr-N interlayers on the adhesion strength of CrZrN coatings on tungsten carbide substrates / Hye-Kun Kim [et al.] // Surface & Coatings Technology, 2015. – no. 284. – pp. 230–234.

УДК 621.793:539.234:539.534.9

В. В. Поплавский, доц., канд. физ.-мат. наук;  
О. Г. Бобрович, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);  
Ф. Ф. Комаров, проф., д-р физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск)

## **ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТАВА КАТАЛИТИЧЕСКИХ СЛОЕВ, ФОРМИРУЕМЫХ ИОННО-АССИСТИРУЕМЫМ ОСАЖДЕНИЕМ МЕТАЛЛОВ НА УГЛЕРОДНЫЕ НОСИТЕЛИ, С ПРИМЕНЕНИЕМ СПЕКТРОМЕТРИИ РЕЗЕРФОРДОВСКОГО РАССЕЯНИЯ**

Формирование каталитических слоев с целью получения электрокатализаторов для топливных элементов с полимерным мембранным электролитом проведено поочередным ионно-ассистируемым осаждением платины и одного из редкоземельных металлов (Ce, Gd, Dy, Yb, Ho) в качестве активирующей добавки на углеродные носители Toray Carbon Fiber Paper TGP-H-060 T и AVCarb<sup>®</sup> Carbon Fiber Paper P50. Осаждали металлы из плазмы вакуумного дугового разряда в режиме, при котором в качестве ассистирующих процессу осаждения используются ускоренные ( $U = 5$  кВ) ионы осаждаемого металла.

Полученные каталитические слои исследованы методом спектрометрии резерфордовского обратного рассеяния с применением ускорительного комплекса AN-2500 (High Voltage Engineering Europe). Измерены спектры рассеяния ионов  ${}^4\text{He}$  при их начальной энергии  $E_0 = 1,5$  МэВ. Установлено, что в состав слоев входят атомы осаждаемых металлов, материала носителей, а также технологической примеси кислорода. При ионно-ассистируемом осаждении металлов имеет место ионное перемешивание атомов всех компонентов формируемого слоя, а также частичное распыление предварительно сформированного слоя. Содержание осажденных металлов в слоях составляет примерно  $(1-2) \cdot 10^{16}$  ат./см<sup>2</sup>. Распределение атомов осаждаемых металлов по толщине сформированных слоев характеризуется максимумом концентрации в несколько атомных процентов, расположенным вблизи поверхности или на небольшой глубине.

Формирование активной поверхности электрокатализаторов осуществляется в вакуумных условиях в один – два приема, что выгодно отличается от традиционных многостадийных методов приготовления нанесенных катализаторов, основанных на пропитке носителя раствором соединений каждого из металлов, их восстановлении до металлического состояния, многократной отмывке от примесей, сушке и т. д.

УДК 621.793:539.234:539.534.9

В. В. Поплавский, доц., канд. физ.-мат. наук  
(БГТУ, г. Минск)

## **СОСТАВ СЛОЕВ, ФОРМИРУЕМЫХ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛИМЕРНОГО МЕМБРАННОГО ЭЛЕКТРОЛИТА NAFION ИОННО-АССИСТИРУЕМЫМ ОСАЖДЕНИЕМ ПЛАТИНЫ И РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫХ МЕТАЛЛОВ**

Ионообменная мембрана Nafion<sup>®</sup> N 115 используется нами в качестве полимерного мембранного электролита при формировании мембранно-электродных блоков топливных элементов на основе углеродных диффузионных слоев и разработанных наноразмерных электрокатализаторов. Для обеспечения хорошего омического контакта электролита и диффузионных слоев с нанесенными каталитическими слоями, а также активности формируемого мембранно-электродного блока требуется подготовка электролита. Процесс подготовки состоит из двух основных этапов: предварительной очистки поверхности мембраны и формирования на поверхностях каталитически активных слоев. Процедура очистки мембран включает стадии кипячения в растворе перекиси водорода – для удаления с поверхности органических загрязнений, и в растворе серной кислоты – для удаления металлсодержащих примесей. Вторая стадия подготовки поверхности мембранного электролита представляет собой ионно-ассистируемое осаждение платины, а также платины и одного из активирующих редкоземельных металлов из плазмы вакуумного дугового разряда в режиме, при котором в качестве ассистирующих процессу осаждения используются ускоренные ( $U = 5$  кВ) ионы осаждаемого металла.

Морфология поверхности электролита и элементный состав получаемых слоев исследованы методами сканирующей электронной микроскопии, рентгеновского электронно-зондового микроанализа, рентгеновского флуоресцентного анализа и спектрометрии резерфордского рассеяния. Установлено, что в состав формируемых слоев входят атомы осаждаемых металлов, компонентов материала самой мембраны, а также технологической примеси кислорода. Содержание каждого из осажденных металлов в слоях составляет  $\sim(4,5-5,0) \cdot 10^{15}$  ат./см<sup>2</sup>. На поверхности имеются включения металлов размером порядка нескольких микрометров, которые обусловлены осаждением капель металла из дугового разряда ионного источника. При ионно-ассистируемом осаждении металлов имеет место ионное перемешивание всех компонентов формируемого слоя. Распределение атомов осаждаемых металлов по толщине сформированных слоев характеризуется максимумом концентрации, расположенным вблизи поверхности или на небольшой глубине.

УДК 539.1.06:539.23.234

В.В. Тульев, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

## **ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ СТРУКТУР МЕТАЛ/ТИТАН, ПОЛУЧЕННЫХ ИОННО-АССИСТИРУЕМЫМ НАНЕСЕНИЕМ МЕТАЛЛСОДЕРЖАЩИХ ПОКРЫТИЙ**

Для получения приповерхностных структур Me/Ti использовался метод ионно-ассистируемого осаждения металлсодержащих покрытий. Суть этого метода состоит в том, что поверхность образца, на которое осаждается покрытие, облучается ускоренными ионами материала покрытия. В данной работе на подложки из титана наносились тонкие пленки на основе металлов (хром, медь, молибден и вольфрам). Ионно-ассистируемое осаждение осуществлялось при ускоряющем напряжении 20 кВ. Плотность ионного тока составляла  $\sim 6\text{--}20$  мкА/см<sup>2</sup>, а интегральный поток облучающих ионов  $(0,4\text{--}1,2)\cdot 10^{17}$  ион/см<sup>2</sup>. В рабочей камере в процессе осаждения покрытий поддерживался вакуум при давлении  $\sim 10^{-2}$  Па.

Элементный состав поверхности сформированных структур, распределение элементов по глубине изучены с применением метода резерфордовского обратного рассеяния (РОР) ионов гелия с  $E_0 = 2,0$  МэВ при углах рассеяния, влета и вылета  $165^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ , соответственно. Относительная погрешность при определении слоевого содержания элементов составляла  $\sim 5\%$ . На основе данных РОР были построены концентрационные профили распределения элементов по глубине.

Для анализа результатов было рассчитано среднее зарядовое число в ионном пучке. По среднему зарядовому числу определялась энергия ассистирующих ионов, величина которой была использована в программе TRIM для расчета среднего проективного пробега и страгглинга пробега  $\text{Cr}^+$ ,  $\text{Cu}^+$ ,  $\text{Mo}^+$ ,  $\text{W}^+$  ионов в титане и коэффициентов распыления.

Исследования показали, что на поверхности титана при данных условиях формируется покрытие толщиной  $\sim 15\text{--}20$  нм. В состав покрытия входят атомы осажденного металла (3-8 ат.%), атомы технологической примеси кислорода (25-30 ат.%) и атомы титана из подложки. При формировании покрытия наблюдается проникновение атомов осаждаемых металлов и кислорода в подложку вследствие атомного перемешивания в каскадах атомных столкновений и радиационно-стимулированной диффузии, проникновение атомов титана в покрытие вследствие встречной диффузии, а также распыление формирующегося покрытия ассистирующими ионами.

УДК 535.37+541.65+543.4

Д. В. Кленицкий, доц., канд. физ.-мат. наук;  
Н. Н. Крук, зав. кафедрой физики, д-р физ.-мат. наук  
(БГТУ, г. Минск)

## **ВРЕМЕННОЙ ПРОФИЛЬ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ КРАСИТЕЛЯ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ ФОТОВОЗБУЖДЕНИИ**

В настоящее время разработка новых доступных методов определения фотофизических характеристик сложных органических молекул и методов их диагностики остается весьма актуальной научной и технической задачей. В работе исследовано влияние фотофизических параметров молекул на характеристики временного профиля флуоресценции. Методами математического моделирования изучена временная зависимость интенсивности флуоресценции красителя при возбуждении прямоугольными световыми импульсами, длительность которых превышает время жизни триплетного состояния. Показано, что интенсивность флуоресценции вначале резко возрастает, а затем относительно быстро падает к стационарному значению, которое зависит от констант скоростей процессов, вовлеченных в дезактивацию возбужденного состояния. Зависимость интенсивности флуоресценции от времени является биэкспоненциальной. Первое из слагаемых обеспечивает рост интенсивности до максимального значения и проявляет себя при малых временах, а падение интенсивности флуоресценции к стационарному значению определяется вторым экспоненциальным слагаемым. При увеличении константы скорости интеркомбинационной конверсии время нарастания интенсивности флуоресценции, ее максимальное значение и время релаксации уменьшаются. Рост константы скорости фотовозбуждения приводит к уменьшению времен нарастания и релаксации, а максимальное значение интенсивности при этом возрастает. Установлена зависимость времени релаксации флуоресценции к стационарному значению от квантового выхода интеркомбинационной конверсии в триплетное состояние и времени жизни триплетного состояния. Полученные соотношения для времени нарастания, максимального значения интенсивности флуоресценции и времени релаксации могут быть использованы для нахождения фотофизических параметров сложных органических соединений.

УДК 535.37+541.65+543.4

Т.Б. Карлович, ст. преп., канд. физ.-мат. наук;  
Ю.Х. Аджиб, асп. (АУЛ, г. Бейрут, Ливан);  
Н.Н. Крук, зав. каф. физики, д-р физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

## **ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ NH-ТАУТОМЕРИЗАЦИИ СВОБОДНЫХ ОСНОВАНИЙ КОРРОЛОВ**

Методами флуоресцентной спектроскопии и математического моделирования изучена NH-таутомеризация свободных оснований корролов. Задача рассмотрена с использованием квантово-механической модели, включающей в себя переходы между возбужденными состояниями двух таутомеров. Экспериментально показано, что существует потенциальный барьер с некоторой энергией активации, разделяющий длинноволновой T1 и коротковолновой T2 таутомеры. При низких температурах концентрация таутомеров T2 в растворе превышает концентрацию T1 таутомеров благодаря малой скорости перехода между двумя таутомерами. Однако с увеличением температуры скорость таутомеризации будет возрастать и достигнет значения, необходимого для преодоления потенциального барьера. В этом случае концентрация таутомера T1 в возбужденном состоянии будет увеличиваться. При этом обратный процесс таутомеризации с превращением таутомера T1 в таутомер T2 отсутствует, что показано экспериментально.

Определена величина энергии активации для таутомеризации в нижнем возбужденном синглетном состоянии, определена константа скорости таутомеризации как функция температуры. Получены выражения описывающие динамику населенностей энергетических состояний обоих таутомеров как функцию времени после фотовозбуждения. Выполнен совместный анализ теоретических и экспериментальных результатов и показано, что температурная зависимость спектров флуоресценции, обусловленная протеканием процессов NH-таутомеризации, может быть адекватно описана с помощью полученных выражений для населенностей нижних возбужденных синглетных состояний таутомеров.

УДК 535.37+541.65+543.4

Н. Н. Крук, зав. кафедрой физики, д-р физ.-мат. наук;  
 Д. В. Кленицкий, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);  
 В. Маес, проф. (Университет Хассельта, г. Дипенбек, Бельгия)

### **КВАНТОВО-ХИМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕПЛОСКОСТНЫХ ИСКАЖЕНИЙ МАКРОЦИКЛА АЛКИЛИРОВАННЫХ КОРРОЛОВ**

Квантово-химическими методами рассчитана молекулярная конформация тетрапиррольного макроцикла для семейства алкилированных производных свободного основания коррола. Количество присоединенных алкильных заместителей и их расположение на периферии макроцикла определяют характер и степень неплоскостных искажений макроцикла.

Степень неплоскостных искажений макроцикла охарактеризована с использованием параметра  $\Delta_{23}$ , который представляет собой среднеквадратичное отклонение одного атома от средней плоскости макроцикла 7С. Обнаружено, что по величине параметра  $\Delta_{23}$  все исследованные соединения могут быть разделены на четыре группы:

а)  $\Delta_{23} = 0,267\text{--}0,294 \text{ \AA}$ , у которых стерические взаимодействия локализованы на отдельных пиррольных кольцах;

б)  $\Delta_{23} = 0,304\text{--}0,326 \text{ \AA}$ , у которых формируются стерически напряженные домены из пары пиррольных колец;

в)  $\Delta_{23} = 0,377\text{--}0,380 \text{ \AA}$ , у которых стерически напряженный домен включает все три *мезо*-положения макроцикла;

г)  $\Delta_{23} = 0,413 \text{ \AA}$  – ундеказамещенный коррол, у которого 11 алкильных групп формируют один стерически напряженный кольцевой домен. Анализ величин отдельных структурных элементов, характеризующих молекулярную конформацию макроцикла, показал, что ряд из них изменяется параллельно изменениям параметра  $\Delta_{23}$ .

Вместе с тем обнаружено, что амплитуда других структурных возмущений не зависит от общей степени неплоскостного искажения макроцикла, а определяется локальным взаимодействием нескольких соседних заместителей. К таковым относятся величины двух из четырех двугранных углов между плоскостями пиррольных колец и длина  $C_a\text{--}C_a$  связи в дипиррольном фрагменте.

УДК 537.633.2

Мадыаров В.Р., доц., канд. физ.-мат. наук  
(БГТУ, г. Минск)**ДИАГНОСТИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ С ПОМОЩЬЮ  
МАГНИТООПТИЧЕСКИХ И МАГНИТОПЛАЗМЕННЫХ  
ЭФФЕКТОВ**

Применение магнитооптических эффектов в СВЧ-диапазоне позволяет получить информацию о таких параметрах электронного переноса в полупроводниковых материалах и многослойных наноструктурах как подвижность, эффективная масса и время релаксации. Постановка измерений с продольной и поперечной ориентацией магнитного поля относительно волнового вектора падающей волны (в геометрии Фарадея и Фойгта) является более результативной в сочетании с зондированием образца на прохождение и отражение. Минимальный коэффициент пропускания достигается при определенных соотношениях между частотой зондирующей волны, циклотронной и магнитоплазменной частотами, которые зависят от эффективной массы и концентрации носителей.

В данной работе показано, что в образце *n*-Si при продольной ориентации магнитного поля постоянная вращения  $\theta$  монотонно возрастает с частотой в диапазоне 30-80 ГГц и примерно на порядок превышает значение, полученное для поперечного магнитного поля. Экспериментальные данные сопоставлены с результатами оценок на основе однодолинной модели переноса заряда в переменном поле. В исследуемом диапазоне частот величина  $\theta$  изменяется в пределах 0,02–0,06 град/мТл·мм для *n*-Si и 0,02–0,2 град/мТл·мм для *n*-Ge. Полученное значение эффективной массы для *n*-Si в направлении оси [100] хорошо согласуется с расчетным, полученным на основе известных данных.

Показано, что в продольной геометрии, при слабом магнитном поле параметры полупроводника (эффективную массу и концентрацию) можно определить по величине частотного сдвига магнитоплазменного отражения в дальней ИК области. В субмиллиметровой и миллиметровой областях при такой геометрии от этих параметров зависит минимум пропускания на данной частоте, который достигается в сильных полях. Расчеты показывают, что полному отражению соответствуют два значения магнитной индукции, которые находятся в диапазоне  $\sim 10$ -500 Тл. В конфигурации с поперечным полем эти значения оказываются значительно ниже. Полученные данные позволяют выбрать наиболее эффективную и технически простую схему измерений при контроле полупроводниковых слоев.

УДК 531.5

В.И. Егочина<sup>\*</sup>, С.Г. Копосов, А.В. Тягунин  
 (Северный (Арктический) федеральный университет  
 имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск, Россия)

\*E-mail: egochina.vi@mail.ru

## **ВЛИЯНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ НА ВЛАГОПЕРЕХОД С ПОВЕРХНОСТИ ЛЬДА В ПОРОШОК МОДЕЛИ МАРСИАНСКОГО ГРУНТА ПРИ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ**

Одна из обсуждаемых проблем, связанных с Марсом: существует ли вода на Марсе и в каком виде. Существует несколько моделей существования влаги: в виде льда и в виде высоко концентрированного солевого раствора. Однако, за миллионы лет, в довольно разреженной атмосфере, лед должен был сублимировать и маловероятно, что лед в достаточно большом количестве, как подтверждают наблюдения, мог существовать.

Нами ранее было обнаружено, что переход влаги в крупнозернистый материал (песок, силикагель) происходит неодинаково и зависит от направления гравитационного поля по отношению к направлению влагоперехода [2]. В связи с этим можно ожидать, что покрытие льда на Марсе слоем порошкового грунта значительно уменьшает потери влаги. Нами было решено проверить эту гипотезу. Для этого в лабораторию физики дисперсных систем в компании Orbitec Nasa был приобретен материал, являющийся спектральным аналогом марсианского грунта JSC-Mars-1A с размером частиц < 1мм. [1]

В эксперименте использовалась весовая методика. В качестве измерительной ячейки использовалась чашка Петри диаметром 9,6 см. Подготовленный образец засыпался в ячейку, охлаждался и после этого на него или под него был помещен ледяной цилиндр. Измерения проводились в морозильной камере при температуре -10°C.

На рисунке 1 представлена временная динамика увлажнения порошка при двух взаимных расположениях льда и образца. На рисунке можно выделить две фазы протекания процесса: резкого возрастания влаги и медленного изменения влаги в образце. Для процесса резкого возрастания была представлена математическая модель:  $\Delta m = \Delta m_{np} (1 - e^{-\lambda \tau})$  [3]. В этой фазе главными процессами являются концентрационная диффузия и смачивание гранул водой. Во второй фазе – концентрационная диффузия и гравитационное стекание. Но

как показывает эксперимент гравитационное стекание имеет место и в первой фазе.

Основываясь на независимости процессов капиллярного смачивания и концентрационной диффузии с одной стороны и гравитационного стекания с другой получаем формулу [2]:  
 $\Delta m_g = \Delta M / 2 = (\Delta m_{\uparrow\uparrow} - \Delta m_{\uparrow\downarrow}) / 2$  (рисунок 2).

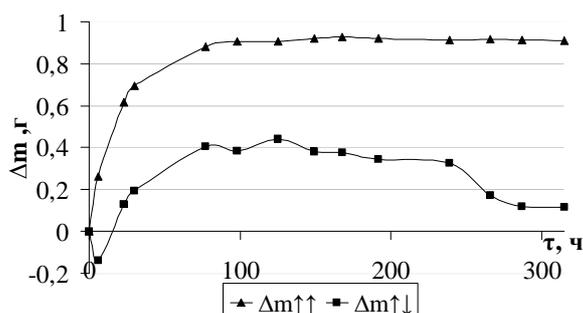


Рисунок 1 – Временная динамика перехода влаги в образец

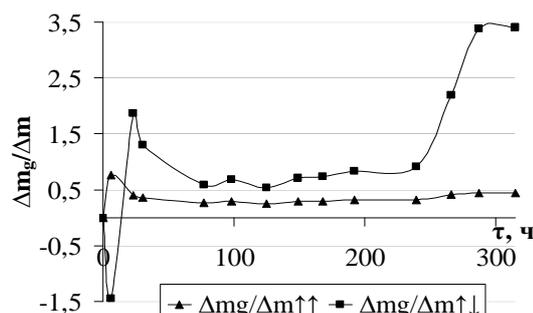


Рисунок 2 – Относительный вклад зависимости  $\Delta m_g$  от времени

В работе [2] была предложена теоретическая модель для обусловленного гравитацией стекания квазижидкого слоя:

$$\Delta m_g = n_0 V_0 e^{\frac{\sigma \pi d^2}{kT}} \cdot \frac{m^2 g \lambda}{3kT} \cdot t.$$

Наши эксперименты проведены на Земле, но результат может быть адаптирован и к Марсу с учетом того, что ускорение свободного падения на Марсе в 3 раза меньше.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Allen C. C. Martian regolith simulant JSC Mars-1 // Lunar and Planetary Science XXIX
2. Егочина В.И. Влияние гравитации на влагопереход воды с поверхности льда в порошковую среду / В.И. Егочина, Г.Д. Копосов, А.В. Тягуниин // Физический вестник института естественных наук и технологий САФУ. Сб. научн. тр. Вып. 14. - Архангельск: Кира, 2015. - С. 74-80
3. Копосов Г.Д. Изучение влияния температуры и гравитации на динамику перехода воды с поверхности льда в песок / Г.Д. Копосов, А.В. Буслаева, А.В. Тягуниин // Физический вестник института естественных наук и биомедицины САФУ. Сб. научн. тр. Вып. 12. - Архангельск: Кира, 2013. - С. 46-52

УДК 537

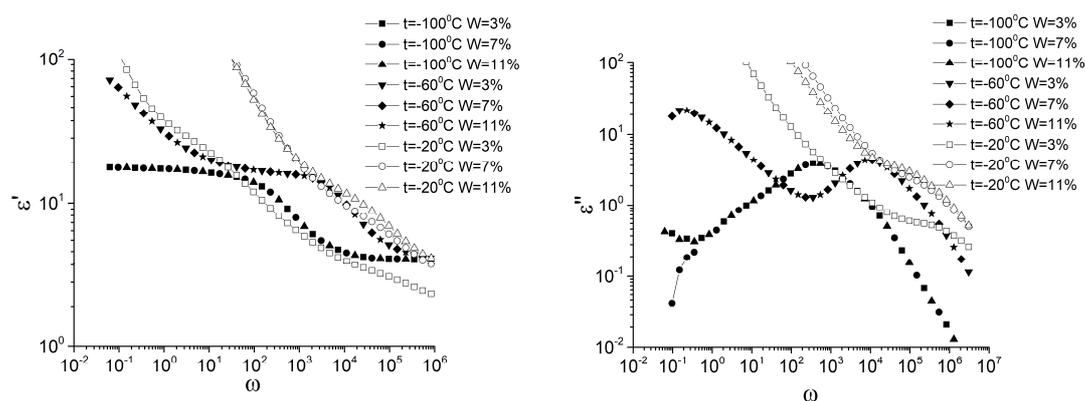
Р.О. Перфильев, Г.Д. Копосов, А.С. Волков \*  
 (Северный Арктический Федеральный университет  
 им. М.В. Ломоносова, Россия, Архангельск)  
 e-mail: a.s.volkov@narfu.ru

## ЗАВИСИМОСТЬ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МЁРЗОЙ ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ НА ОСНОВЕ КВАРЦА ОТ ВЛАЖНОСТИ

*Введение.* Господствующая парадигма об электрических свойствах мёрзлых дисперсных структурах состоит в том, что эти электрические свойства определяются льдом. Но исследования, особенно при низких температурах, давали результаты, далёкие от свойств льда. С целью сканирования изменения диэлектрической проницаемости по мере заполнения льдом порового пространства в порошковых средах было предпринято исследование влажностных зависимостей действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости.

*Методика исследования.* Получение данных исследования базировалось на использовании диэлькометра Novocontrol Concept 80. В заранее высушенный образец добавлялась дистиллированная вода до необходимой влажности. Исследования проводились в диапазоне влажностей от 1 до 17% с шагом 2%. Диапазон частот составлял  $10^{-2}$  –  $10^6$  Гц. Температуры изменялись в диапазоне от  $-140$  до  $10^{\circ}\text{C}$

*Результаты эксперимента.* Рисунок 1 иллюстрирует частотную зависимость действительной  $\epsilon'$  и мнимой  $\epsilon''$  частей диэлектрической проницаемости от частоты при разных температурах.



**Рисунок 1 - Частотная зависимость действительной  $\epsilon'$  и мнимой  $\epsilon''$  частей диэлектрической проницаемости при разных влажностях температурах**

Из рисунка 1 видно, что действительная и мнимая часть диэлектрической проницаемости при температурах  $-100$  и  $-60^{\circ}\text{C}$  не зависит

от влажности. Подобное наблюдается в диапазоне температур  $-100 - 40^{\circ}\text{C}$  и влажностей 3–13%.

*Обсуждение результатов.* Согласно интегральному методу расчёта диэлектрической проницаемости смесей, прирост влажности должен вызывать увеличение диэлектрической проницаемости. Можно предположить, что добавляемые порции воды (льда) практически не участвуют в поляризации образца.

Ранее в [1] были получены результаты по высокой проводимости плёнок воды, прилегающих к гранулам глины. Подобное же отмечалось и в работе [2]. Наблюдаемый нами факт свидетельствует о том, что добавление содержания льда выше 3% не меняет значений  $\epsilon'$  и  $\epsilon''$ . Это означает, что добавленный лёд не поляризуется. Высокая проводимость двойного электрического слоя шунтирует основную массу льда, создавая её малую поляризацию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Квливидзе В. И., Краснушкин А. В., Злочевская Р. И. Свойства поверхностных плёнок и слоёв воды // Поверхностные плёнки в дисперсных структурах / Под ред. Е.Д.Ивукина. – М: Изд-во МГУ, 1988. – с 48-67
2. Фридрихзберг Д. А., Герасимова Н.Г., Громова Л.П. Исследование поверхностной проводимости в области изоэлектрического состояния // Коллоидный журнал, 1960, т. 22, №4. – с 489-496.

УДК 531/532

Н.И. Штефан, канд. техн. наук, доц.  
(НТУУ "КПИ имени Игоря Сикорского",  
г.Киев, Украина, e-mail nishtefan@gmail.com)

### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ С ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТЬЮ**

Данная работа посвящена исследованию динамики гидроупругих систем с учетом различных модельных представлений о поведении жидкости.

Математическая постановка задачи заключается в использовании уравнений:

- 1) движения конструкции;
- 2) движения жидкости;

3) контактного взаимодействия конструкции с жидкостью (граничные условия).

Для описания движения рассматриваемых в работе конструкций в виде цилиндрического бака с упругим днищем (круглой пластины) использовались линейные уравнения моментной теории оболочек, записанные в перемещениях. Контактные условия на поверхности «жидкость - конструкция» соответствуют условиям непротекания и равенства давления идеальной жидкости нагрузке, направленной по нормали к конструкции.

Поведение жидкой среды в работе рассмотрено в рамках двух моделей: идеально упругой и пузырьковой [1]. Показано, что использованные модели жидкости не являются независимыми, а при некоторых условиях даже переходят одна в другую.

Также при математическом описании модели идеально упругой жидкости приняты допущения о неразрушаемости жидкой среды и отсутствия в ней повреждений в виде пузырьков газа. При этом уравнение движения в форме Лэмба-Громеки и уравнение неразрывности жидкости имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_*}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (V_*^2) + \text{rot} V_* \times V_* &= -\frac{1}{\rho_*} \nabla P_* , \\ \text{div} V_* &= -\frac{1}{\rho_*} \left( \frac{\partial \rho_*}{\partial t} + V_* \nabla \rho_* \right) , \end{aligned} \quad (1)$$

тут  $\nabla$  - оператор Гамильтона,  $V_*$ ,  $P_*$ ,  $\rho_*$  - вектор скорости жидкости, давление и плотность, соответственно.

Математическая модель пузырьковой жидкости существенно отличается от идеальной тем, что она дополнительно содержит уравнение колебаний пузырька газа в виде уравнения Рэлея-Ламба [2]

$$\begin{aligned} R\ddot{R} + \frac{2}{3} \dot{R}^2 &= \frac{1}{\rho_p} (P_2 - P(t)), \\ P_2 &= p_0 (R_0/R)^{3\gamma} , \end{aligned} \quad (2)$$

а в уравнении движения жидкой среды присутствуют дополнительные члены, учитывающие наличие пузырьков газа радиуса  $R$  и концентрации (количество в  $1 \text{ см}^3$ )  $n$ .

Так как рассматриваемое движение жидкости считаем безвихревым, то введем потенциал скорости  $\psi_*$ , а именно:

$$V_* = \nabla \psi_* .$$

Учитывая сказанное выше, описываем движение пузырьковой жидкости системой дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi = \lambda \rho_0 \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \psi)^2 \right] + n \frac{\partial V}{\partial t} + \\ + \nabla \psi \cdot \nabla \left\{ \lambda \rho_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\nabla \psi)^2 / 2 + nV \right) \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

$$aV^{-1/3} \ddot{V} - aV^{-4/3} \dot{V}^{2/3} = P_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^\gamma + \rho_0 \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 \right] ,$$

где  $V$  - объем пузырька газа.

Система (3) соответствует наиболее общему случаю движения пузырьковой жидкости. На основе принятых модельных представлений о поведении гидроупругих систем общая постановка задачи гидроупругости относительно расчета нестационарного взаимодействия цилиндрического бака с пузырьковой жидкостью заключается в решении следующих взаимосвязанных уравнений:

1) уравнений движения пластины, которая является днищем бака [3]:

$$D \left( \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) W = -\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - P_* , \quad (4)$$

где  $W$  – прогиб пластины в направлении оси,  $P_*$  -гидродинамическое давление,  $\rho$  и  $h$  - плотность материала и толщина пластины.

2) уравнения движения пузырьковой жидкости :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + n \frac{4}{3} \pi \frac{\partial (R^3)}{\partial t} \quad (5)$$

(уравнение (5) записано в цилиндрической системе координат  $x, r, \varphi$ );

3) уравнения колебаний пузырька газа:

$$R\ddot{R} + \frac{2}{3} \dot{R}^2 = \frac{(P_2 - p(t))}{\rho_p}, \quad P_2 = P_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma}, \quad P_2 - \text{давление газа в пузырьке};$$

4) граничные условия:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{для бака}),$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{для оболочки}).$$

Таким образом, рассмотрена математическая постановка инженерной задачи гидроупругости относительно исследования нестационарного поведения гидромеханических систем при воздействии импульсной нагрузки  $P_0 = Ae^{\alpha_0 t}$  на свободную поверхность жидкости.

Общая расчетная методика исследования гидроупругих процессов в данной работе заключается в решении задачи гидроупругости для указанных выше конструкций в двух вариантах, соответствующих принятым моделям жидкости. При этом уравнения движения конструкции и граничные условия остаются неизменными.

Дальнейшее исследование динамики нестационарного взаимодействия элементов конструкции с идеальной и пузырьковой жидкостью заключается в программной алгоритмической реализации подсчетов с привлечением метода конечных разностей с помощью математической среды программирования MATLAB и в анализе полученных численных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галиев Ш.У. Динамика гидроупругопластических систем / Галиев Ш.У. – Киев: Наукова думка, 1981. – 275 с.
2. Руденко О.В. Теоретические основы нелинейной акустики / Руденко О.В., Солуян С.И. – М.: Наука, 1995. – 287 с.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / Вольмир А.С. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
4. Авдеев К.А. Численное моделирование воздействия ударной волны на пузырьковую среду / К.А. Авдеев, В.С. Аксенов, А.А. Борисов, Р.Р. Тухватуллина, С.М. Фролов, Ф.С. Фролов // Горение и взрыв.– 2015, т. 8, №2. – с. 45-56.
5. Нигматулин Р.И. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны / Р.И. Нигматулин, В.Ш. Шагалов, И.К. Гимайдинов // Доклады РАН. – 2014, т. 378, №6 – с. 763-767

УДК 538.911

И. И. Наркевич, проф., д-р физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

**СТАТИСТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ УНАРНЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АТОМОВ ИЛИ МОЛЕКУЛ В КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ НАНОЧАСТИЦЕ С ЗАДАНЫМ РАДИАЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ СРЕДНЕЙ ПЛОТНОСТИ**

В рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода [1], в котором одновременно используется метод ББГКИ, метод условных распределений Л.А. Ротта [2] и метод термодинамических функционалов плотности [3], проведены расчеты микроструктуры сферических кристаллических наночастиц, имеющих 6 координационных сфер, которым принадлежат 84 узла ГЦК решетки, так что при числе заполнения  $n = 1$ , наночастицы могут иметь 85 молекул, одна из которых находится в центральной ячейке, т. е. в центре наночастицы.

В результате решения ранее полученной системы интегральных уравнений [4] рассчитано поле радиального смещения узлов, вызванное деформацией исходной ГЦК решетки в сферической наночастице с заданным радиальным профилем чисел заполнения микроячеек этой решетки. Одновременно рассчитаны среднеквадратичные отклонения атомов или молекул простых веществ от новых (смещенных) узлов решетки. Получен соответствующий радиальный профиль среднеквадратичных отклонений, характеризующий форму унарных функций распределения всех частиц в окрестности смещенных узлов, которые указывают на пространственную релаксацию решетки в малых системах (наночастицах), имеющих общую границу с окружающей средой.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Наркевич, И. И. Молекулярно-статистическая теория неоднородных конденсированных сред: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.14. СПб., 1993. 242 л.
2. Ротт, Л. А. Статистическая теория молекулярных систем. М.: Наука, 1979. 280 с.
3. Evans R. The nature of the liquid-vapour interface and other topics in the statistical mechanics of nonuniform, classical fluids // *Advances in Physics*. 1979. Vol. 28, no. 2. P. 143–200.
4. Наркевич И. И., Квасов Н. Т., Козич Е. Ю. Двухуровневое молекулярно-статистическое изучение структуры и термодинамических характеристик однородных макроскопических систем и сферических наночастиц // *Труды БГТУ: №6 (188)*. 2016. С. 61–65.

УДК 531/532

Н.И. Штефан, канд. техн. наук, доц.  
 (НТУУ "КПИ имени Игоря Сикорского", г. Киев, Украина)  
 e-mail: [nishtefan@gmail.com](mailto:nishtefan@gmail.com)

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПУЗЫРЬКОВ ГАЗА, НАХОДЯЩИХСЯ В ЖИДКОСТИ

Работа содержит описание разработанных методик и алгоритмов численного расчета колебаний пузырька газа, помещенного в жидкость. Дана оценка межцентровому расстоянию между двумя пузырьками, при котором их взаимовлияние отсутствует. Обоснована целесообразность использования модели одиночного пузырька.

Как показали численные эксперименты по моделированию пузырьковой жидкости, основное время расчёта требует решение уравнения Рэлея вида

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_{жс}}(p_c - p(t)), p_c = p_o \left(\frac{R_o}{R}\right)^{3\gamma}. \quad (1)$$

В работе рассматриваются следующие методики и алгоритмы решения уравнения Рэлея.

1. Аналитико-численная методика, основанная на дискретизации процесса нагружения пузырька по параметру нагружения  $p$ . Предполагается, что давление  $p$ , оставаясь постоянным в пределах шага, скачкообразно меняется при переходе от шага к шагу. Это позволяет использовать аналитическое решение уравнения (1), полученное для  $p = const$ :

$$\dot{R} = \pm \sqrt{R^{-3} \left[ \frac{2}{\rho} \left( p_o R_o^{3\gamma} \frac{R^{3(1-\gamma)}}{3(1-\gamma)} - \frac{pR^3}{3} + C \right) \right]} \quad (2)$$

В качестве начальных условий каждый раз при интегрировании использовались известные параметры по предыдущему шагу.

2. Численное интегрирование уравнения (2) с использованием математической среды программирования MATLAB.

3. Численная процедура расчета, основанная на использовании линеаризованного уравнения Рэлея, соответствующего случаю малых колебаний пузырька объема  $V$ :

$$\ddot{V} + \omega_o^2 V = \varepsilon \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (3)$$

Отметим что для интегрирования (3) применяли конечно-разностное представление производных по времени. Программная алгоритмическая реализация подсчетов метода конечных разностей была проделана с помощью математической среды программирования MATLAB. В результате проведенной серии численных экспериментов

получена исчерпывающая информация о работоспособности и функциональных возможностях предложенных методик.

Следует отметить, что модель пузырьковой жидкости, которая используется в исследованиях автора, основана на предположении об отсутствии взаимодействия газовых пузырьков, находящихся в жидкости. Было также оценено минимальное расстояние между центрами пузырьков, при котором данное предположение справедливо.

Динамические уравнения движения двух таких пузырьков радиусов  $R_1$  и  $R_2$ , находящихся на расстоянии  $l$ :

$$\begin{aligned} R_1 \ddot{R}_1 + \frac{3\dot{R}_1^2}{2} + \frac{R_2(R_2 \ddot{R}_2 + 2\dot{R}_2^2)}{l} &= \frac{(p_1(R_1) - p_o)}{\rho}, \\ R_2 \ddot{R}_2 + \frac{3\dot{R}_2^2}{2} + \frac{R_1(R_1 \ddot{R}_1 + 2\dot{R}_1^2)}{l} &= \frac{(p_2(R_2) - p_o)}{\rho}. \end{aligned} \quad (4)$$

Интегрирование (4) проводилось с использованием специального программного обеспечения MQLabs.

Особый интерес представляет картина их взаимодействия при варьировании не только величинами  $R_1, R_2, \dot{R}_1, \dot{R}_2$ , но и межцентрового расстояния  $l$ .

Из анализа результатов численных экспериментов следует, что при межцентровом расстоянии, меньшем (4...5)  $R$  (тут  $R$  - радиус большего пузырька), пузырьки газа начинают влиять друг на друга. С уменьшением расстояния указанное влияние усиливается, наблюдаются снижение частот и возрастание амплитуды деформирования стенок каждого пузырька. При  $l$ , большем (4...5)  $R$ , пузырьки начинают вести себя как одиночные.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галиев Ш.У. Динамика гидроупругопластических систем / Галиев Ш.У. – Киев: Наукова думка, 1981. – 275 с.
2. Руденко О.В. Теоретические основы нелинейной акустики / Руденко О.В., Солуян С.И. – М.: Наука, 1995. – 287 с.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / Вольмир А.С. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
4. К.А. Авдеев. Численное моделирование воздействия ударной волны на пузырьковую среду / К.А. Авдеев, В.С. Аксенов, А.А. Борисов, Р.Р. Тухватуллина, С.М. Фролов, Ф.С. Фролов // Горение и взрыв. – 2015, т. 8, №2. – с. 45-56.
5. Р.И. Нигматулин. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны / Р.И. Нигматулин, В.Ш. Шагалов, И.К. Гимайдинов // Доклады РАН. – 2014, т. 378, №6 – с. 763-767

## МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ LABVIEW ПАРАМЕТРОВ ПОЛЯРИМЕТРИЧЕСКИХ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

В среде графического программирования LabVIEW разработаны одно- и двухпроходные модели поляриметрических волоконно-оптических датчиков (ВОД) электрического тока. В качестве чувствительных элементов ВОД рассматривались световоды типа *twist* и *spin*.

Моделирование параметров ВОД проводилось на основе анализа состояния поляризации (СП) света вдоль чувствительного контура и обработки по определенным алгоритмам измерительных сигналов после анализатора – поляризационного делителя излучения с выхода контура. Для получения информации о преобразовании СП света вдоль контура использовался формализм сферы Пуанкаре с представлением световода в виде последовательности предельно тонких фазовых пластин с линейными и циркулярными двулучепреломлениями.

Для ВОД со световодом типа *twist* рассмотрена однопроходная схема с анализом СП на выходе контура с помощью двух поляризационных делителей, взаимно ориентированных под углом  $\pi/4$  друг к другу. Проведено сравнение расчетных параметров ВОД с экспериментальными данными макетного образца датчика [1], подтвердившее адекватность расчетной модели.

Для ВОД со световодом типа *spin* установлены принципиальные ограничения использования однопроходной схемы, обусловленные крайней нестабильностью СП на выходе контура при переходах между продольными модами лазерного диода, используемого в качестве источника зондирующего излучения. Предложена двухпроходная схема с зеркальным отражением и промежуточным ортогональным преобразованием СП. Установлены закономерности изменения СП вдоль световодного контура. Выведена формульная зависимость чувствительности датчика от внутренних и внешних параметров *spin* световода. Проведено сравнение расчетных характеристик ВОД с результатами измерения параметров макетного образца датчика [2], полностью подтвердившее соответствие расчетной и экспериментальной моделей.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ловчий И.Л. Моделирование параметров поляриметрического магнитооптического датчика переменного тока с чувствительным контуром из световода типа *twist* // Оптический журнал. 2010. Т.77, № 6, С.33-45.

2. Ловчий И.Л. Численное моделирование и исследование поляриметрического датчика тока со световодом типа *spin* // Оптический журнал. 2010. Т. 77, № 12, С. 25-33.

УДК 004.415.28

С.С. Момбекова, Г.С. Шаймерденова, А.С. Кыдырбекова  
(Южно-Казахстанский Государственный Университет им. М.О.Ауезова)

## **ОБУЧЕНИЕ ШКОЛЬНИКОВ ЛОГИЧЕСКИМ ПРИЕМАМ МЫШЛЕНИЯ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ**

Что такое логические приемы мышления? Умение логически мыслить включает в себя ряд компонентов: умение ориентироваться на существенные признаки объектов и явлений реального мира, умение подчиняться законам логики, строить свои действия в соответствии с ними, умение производить логические операции, осознанию их аргументируя, умение строить гипотезы и выводить следствия из данных посылок и т. д.

Логические операции, лежащие в основе логических приемов мышления, отличаются между собой по сложности, логической структуре, содержанию. Часть их принадлежит к логике классов и их отношений: логическое сложение, вычитание классов, их пересечение и включение. Другие направлены на установление тождества и различия (например, операция определения), поиск симметричных отношений (« $A = B$ », « $A$  является сестрой  $B$ ») и асимметричных отношений (« $A$  больше  $B$ », « $A$  находится ближе  $B$ » и др.). Многие логические операции проводятся в рамках логики предложений. Так, с помощью логических связок «если..., то...», «... или...», «...и...», «ни..., ни...», «...тогда и только тогда, когда...», «если бы..., либо...», «неверно, что...» строятся предложения, обозначающие соответственно импликацию, дизъюнкцию, конъюнкцию, одновременное отрицание, эквивалентность, исключаящую альтернативу, отрицание. Эти предложения подчиняются законом пропозициональной логики, и с их помощью порождаются сложные истинные высказывания.

Степень сложности логического приема определяется его объективным содержанием: конкретным составом действий, входящих в прием, их количеством и последовательностью, а также характером специфического содержания (в котором признаки могут быть даны в явной или неявной форме).

Различия в объективном содержании могут обнаружиться внутри одного вида приемов. Например, среди приемов на установление

симметричных и асимметричных отношений можно выделить две группы: для одной достаточно выявить один параметр для сравнения и провести сопоставление, используя определенную меру; для другой - помимо этого необходимо ввести дополнительную независимую характеристику - направление, задаваемое точкой (системой отсчета). Ко второй группе относятся приемы, в которых определяется позиция «слева от...», «выше от...» и т. д., где нужно указать, по отношению к какому объекту (субъекту) проводится оценка положения.

Иногда использование одного и того же приема требует применения разных логических структур. Например, прием определения понятий может строиться на конъюнктивной, дизъюнктивной и конъюнктивно-дизъюнктивной структурах признаков. В зависимости от того, какая структура признаков используется, определяются правила выполнения данного приема.

Выбор той или иной последовательности действий показывает, является ли данный прием рациональным. Рациональное выполнение приема возможно лишь при владении всеми компонентами этого приема.

Показателями сформированности логического приема служит те же характеристики, что и любого другого человеческого действия в соответствии с теорией поэтапного формирования умственных действий: форма, мера обобщения, степень развернутости, освоенности и др. (Гальперин, 1965), эти приемы особое значение приобретают в учебной и научной работе (А. Я. Хинчин).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Беседы с учителем. Методика обучения: Первый класс четырёхлетней начальной школы / Под ред. Л.Е.Журовой.- 2-е изд., перераб и доп.- М.: Вентана-Графф, 2002. – 384 с.: ил.
2. Давыдов В.В. Проблема развивающего обучения. – М.: Педагогика, 1986.- 120 с.

УДК 531.19+541.64

Г. С. Бокун, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);

Д. ди Каприо, научн. сотр., д-р философии

(Высшая национальная школа химии Парижа, Франция);

М. Ф. Головкин, гл. научн. сотр., чл.-корр. НАНУ, д-р физ.-мат. наук

(ИФКС НАНУ, г. Львов, Украина);

В. С. Вихренко, проф., д-р физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

## **ЕМКОСТЬ ПРИЭЛЕКТРОДНОЙ ОБЛАСТИ ТВЕРДОГО ЭЛЕКТРОЛИТА**

Предложена модель решетного флюида для системы с далекодействующими кулоновскими и короткодействующими взаимодействиями. Система подвижных ионов одного знака движется на нейтрализующем фоне неподвижных противоположно заряженных ионов и в поле кристаллического потенциала, создаваемого базовой подсистемой. Исследовано влияние изменения кристаллического поля вблизи границы системы на структуру и характеристики электрического двойного слоя. Показано, что вследствие ограничений на числа заполнения узлов решетки (0 или 1) распределение частиц в приэлектродной области напоминает распределение Ферми-Дирака, содержащее величины, учитывающие межчастичные корреляции.

По сравнению с системой с равными кристаллическими потенциалами в узлах решетки по всей системе, выраженное отличие для электрической емкости появляется при низких абсолютных значениях поверхностного потенциала и более отчетливо проявляется для отрицательных электрических потенциалов. При расчетах в приближении молекулярного поля емкость расходится при значениях электрических потенциалов, при которых электрическое поле стремится к нулю, и достигает отрицательных значений в некоторых интервалах значений поверхностных потенциалов в зависимости от их полярности и значений поверхностного кристаллического потенциала.

Отрицательные значения емкости могут указывать на термодинамическую неустойчивость системы, хотя более последовательный учет вклада взаимодействий на малых расстояниях может значительно изменить поведение системы при низких абсолютных значениях поверхностного потенциала.

УДК 531.19+541.64

Г. С. Бокун, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)  
Д. ди Каприо, научн. сотр., д-р философии;  
(Высшая национальная школа химии Парижа, Франция)

## **СТРУКТУРИЗАЦИЯ ПРИЭЛЕКТРОДНОЙ ОБЛАСТИ В ТВЕРДОЭЛЕКТРОЛИТНОЙ СИСТЕМЕ С ПОДВИЖНОСТЬЮ ЗАРЯДОВ ОДНОГО ЗНАКА**

Предложенные ранее подходы к учету как короткодействующих, так и дальнедействующих взаимодействий в конденсированных средах использованы для описания кристаллических ионных систем и токопроводящих керамик, основные особенности которых достаточно хорошо воспроизводятся решеточной теорией, к которой можно при соответствующих аппроксимациях свести двухуровневый молекулярно-статистический подход к описанию неоднородных систем. Статистически изучаются равновесные характеристики подсистемы подвижных зарядов одного сорта с учетом наличия подсистемы неподвижных зарядов противоположного знака, создающих компенсирующий электрический фон. Распределение этих зарядов под воздействием внешнего поля не изменяется.

Для представления свободной энергии подсистемы подвижных зарядов в виде функционала их плотности и вычисления ячеечных потенциалов средних сил метода условных распределений использовано кумулянтное разложение по перенормированным майеровским функциям. Для учета эффектов экранирования использованы результаты метода коллективных переменных. Получена система интегральных уравнений для потенциалов средних сил с учетом эффектов близко- и дальнедействия, с помощью которой проведены расчеты в решеточном приближении. В выражении для бинарной функции распределения выделена корреляционная составляющая, что позволило рассчитать коррелированную и некоррелированную части электрического потенциала, используя уравнение Пуассона. Рассматривается случай достаточно малых электрических полей, допускающий линейное разложение химического потенциала по отклонению концентрации зарядов от однородного распределения.

В окончательных расчетах корреляция между частицами учитывается в приближении первых соседей. В этом приближении распределение потенциала и концентрации заряда описывается линейным дифференциальным уравнением четвертого порядка. В работе выполнен анализ результатов его аналитического решения и последующих численных расчетов характеристик твердого электролита.

УДК 531.19+541.64

Г.С. Бокун, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);  
 М. Ф. Головки, гл. научн. сотр., чл.-корр. НАНУ, д-р физ.-мат. наук  
 (ИФКС НАНУ, г. Львов, Украина);  
 В. С. Вихренко, проф., д-р физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА В ПРОСТРАНСТВЕ МЕЖДУ ЭЛЕКТРОДНЫМИ ПЛАСТИНАМИ

Опираясь на определение средней энергии кулоновского взаимодействия частиц между собой, вводим определение электрического потенциала как соответствующую функциональную производную. Тогда потенциал, создаваемый носителями заряда одного знака (+) в пространстве ионного проводника определится выражением

$$\Psi^{++} = \beta e \Psi^{*++}(q_i^+) = \Psi_{nc}^{++}(q_i^+) + \Psi_c^{++}(q_i^+),$$

$$\Psi_{nc}^{++}(q_i^+) = \frac{r_B}{4\pi} \sum_{j \neq i} \int_{V_j} \frac{F_1(q_+^j)}{|q_+^i - q_+^j|} dq_+^j,$$

$$\Psi_c^{++}(q_i^+) = \frac{r_B}{4\pi} \sum_{j \neq i} \int_{V_j} \frac{h_2(q_+^i, q_+^j)}{|q_+^j - q_+^i|} F_1(q_+^j) dq_+^j.$$

Здесь  $r_B = e^2 \beta / \epsilon \epsilon_0$  – радиус Бьеррума,  $e$  – заряд частиц,  $\epsilon$  и  $\epsilon_0$  – диэлектрическая и электрическая постоянные, так что  $r_B$ ),  $F_1(q_+^j)$  и  $F_2(q_+^j/q_+^i)$  – унарная и бинарная, а  $h_2(q_+^i, q_+^j)$  – корреляционная функции,

$$h_2(q_+^i, q_+^j) = (F_2(q_+^j/q_+^i) - F_1(q_+^j)) / F_1(q_+^j).$$

Для установления распределения электрического потенциала  $\delta\Psi^{ext}(z)$ , индуцированного внешним воздействием, записанные уравнения замыкались условием постоянства электрохимического потенциала. При достаточно малых внешних полях для последнего использовалось линейное приближение

$$\beta\mu = \beta\mu_{ch} + \beta\gamma\delta\rho(z) + \delta\Psi_{\Sigma}(z) + \delta\Psi^{ext}(z),$$

где  $\beta\mu_{ch}$  – безразмерное значение химического потенциала, когда  $\delta\Psi^{ext}(z) = 0$  и среда однородна,  $\gamma$  – термодинамический фактор. Из условия постоянства химического потенциала в состоянии равновесия вытекает уравнение, определяющее искомое распределение потенциала.

УДК 531.19+541.64

В. С. Вихренко, проф., д-р физ.-мат. наук;  
 Д. В. Гапанюк, зам. декана ф-та ХТиГ, канд. физ.-мат. наук  
 (БГТУ, г. Минск);  
 М. Ф. Головки, гл. научн. сотр., чл.-корр. НАНУ, д-р физ.-мат. наук;  
 (ИФКС, г. Львов, Украина)

## ЭКРАНИРОВАНИЕ ЗАРЯДОВ В ТВЕРДЫХ ЭЛЕКТРОЛИТАХ

Предложена модель решеточного флюида для системы с дальнедействующими кулоновскими и короткодействующими взаимодействиями. Система подвижных ионов одного знака движется на нейтрализующем фоне неподвижных противоионов и в поле кристаллического потенциала, создаваемого базовой подсистемой. В рамках метода коллективных переменных [1] рассматривается экранирование кулоновских взаимодействий в объеме и на плоской границе, и показано, что дебаевская длина  $r_D$  включает дополнительную концентрационную зависимость, обратно пропорциональную квадратному корню из средней концентрации вакантных узлов:

$$r_D = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0 b^3}{\beta c(1-c)e^2}}, \quad \frac{N}{V} = \frac{Mc}{V} = \frac{c}{b^3},$$

где  $\epsilon$  и  $\epsilon_0$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды и электрическая постоянная, соответственно;  $b$  – параметр решетки (в случае простой кубической решетки);  $\beta=1/(k_B T)$  – обратная температура  $c$  и  $(1-c)$  – концентрация подвижных ионов и вакансий, соответственно;  $e$  – заряд подвижных ионов;  $M$ ,  $N$  и  $V$  – число частиц, узлов решетки и объем системы, соответственно.

Вклад кулоновского взаимодействия в свободную энергию системы вычисляется в приближении, близком к среднему сферическому, и дается в аналитической форме:

$$A_c = -\frac{2\pi c^2 r_B d^2}{\beta v} - \frac{8\pi c^2 r_B^2}{\kappa^4 v d^3} (2 - e^{-\kappa d} (1 + (1 + \kappa d)^2)), \quad v = b^3, \quad \kappa = 1/r_D,$$

где  $r_B = \beta e^2 / 4\pi\epsilon\epsilon_0$  – радиус Бьеррума,  $d$  – диаметр жесткой сердцевины иона.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Юхновский И.Р., Головки М.Ф. Статистическая теория классических равновесных систем. – Киев: Наукова думка, 1980. – 372 с.

УДК 531.19

Я. Г. Грода, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);  
 Д. ди Каприо, научн. сотр., д-р философии  
 (Высшая национальная школа химии Парижа, Франция);  
 Д. В. Гапанюк, зам. декана ф-та ХТиТ, канд. физ.-мат. наук  
 (БГТУ, г. Минск)

### **ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА РЕШЕТОЧНОГО ФЛЮИДА С SALR-ПОТЕНЦИАЛОМ НА КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ**

Исследована решеточная модель системы наночастиц либо макромолекул, части которой притягиваются на малых расстояниях и отталкиваются на больших (SALR – Short-range Attraction Long-range Repulsion). В качестве модели рассмотрен решеточный флюид с притяжением ближайших и отталкиванием третьих соседей на плоской квадратной решетке.

В докладе представлены результаты исследования методами компьютерного моделирования указанной модели.

Моделирование равновесных характеристик рассматриваемой системы по методу Монте-Карло было выполнено в рамках стандартного алгоритма Метрополиса. При моделировании использовалась решетка, содержащая  $2^{14}$  решеточных узлов в сочетании с периодически граничными условиями. Полная длина процедуры моделирования состояла из 70 000 шагов алгоритма Монте-Карло (МКШ). При этом первые 20 000 МКШ отводились на процесс эквипризации и не учитывались при дальнейшем усреднении.

Для описания обеих упорядоченных фаз может быть осуществлено разбиение исходной квадратной решетки на систему 8 идентичных подрешеток с постоянной  $2a\sqrt{2}$ , где  $a$  – решеточная постоянная исходной решетки. В случае полной упорядоченности системы при концентрации решеточного флюида с равной 0.5 четыре подрешетки оказываются полностью заполненными, а четыре – полностью вакантными. Это позволяет определить параметр порядка системы  $\delta_c$  как разность максимальной и минимальной концентраций на подрешетках.

С помощью введенного параметра порядка определен критический параметр системы и рассмотрена его зависимость от отношения интенсивностей взаимодействия первых и третьих соседей и размера моделируемой системы. Также сделана попытка построения фазовой диаграммы решеточного флюида с притяжением первых и отталкиванием третьих соседей на плоской квадратной решетке.

УДК 531.19

Р. Н. Ласовский, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);  
Т. Н. Пацаган, ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук  
(ИФКС НАНУ, г. Львов)

## **ДИФФУЗИЯ ЧАСТИЦ В ОДНОМЕРНЫХ КАНАЛАХ**

Последовательность расчета электро-транспортных характеристик керамических электролитов может состоять в рассмотрении распределения концентрации носителей заряда, электрического потенциала и других характеристик в континуальном представлении с последующим переходом к решеточному приближению для обеспечения возможности получать конкретные оценки интересующих величин.

Рассмотрение в полном объеме трехмерных систем наталкивается на дополнительные трудности, обусловленные необходимостью решения многомерных дифференциальных уравнений в частных производных. В связи с этим целесообразно выбрать простейшую геометрию системы, которая позволила бы в максимальной мере абстрагироваться от особенностей сложной геометрической формы системы и сосредоточиться на изучении собственно физических процессов. В связи с этим используется плоская граница системы, когда в направлениях, параллельных этой границе, характеристики системы сохраняются постоянными, и исследуется распределения в зависимости от расстояния до границы. Тогда систему можно рассматривать как квази-одномерную, и неоднородности вблизи границы распространяются во многих случаях на расстояния нанометровых масштабов.

Моделирование выявило, что самодиффузия частиц вдоль одномерных каналов малых диаметров, не позволяющих частицам опережать друг друга, носит аномальный (субдиффузионный) характер как без учета взаимодействия между частицами, так и при учете кулоновского взаимодействия между ними, в то время как диффузия центра масс, соответствующая макроскопической диффузии под действием градиента концентрации или электропроводности системы, имеет классический характер и средний квадрат смещения центра масс пропорционален времени. Показано, что в каналах малой длины субдиффузионный режим с течением времени переходит в диффузионный и установлена минимальная длина канала, при которой этот переход не происходит. Исследовано влияние кулоновского взаимодействия и глубин ям потенциального рельефа системы на диффузионные характеристики.

УДК 517.935.2+519.71

И. К. Асмыкович, доц., канд. физ.-мат. наук  
(БГТУ, г. Минск)

## ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ПОРЯДКЕ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ

При построении наблюдателей, особенно для линейных динамических систем с различными неопределенностями [1] важную роль имеют системы нулевой динамики, т.е. многообразие, задаваемое уравнением  $y(t) = Cx(t) = 0$ . Для одноходовых и одновыходных обыкновенных линейных систем это многообразие удается полностью описать [1], для многовыходных систем ситуация гораздо сложнее. Укажем некоторые результаты.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим стандартную линейную систему (1), которую будем полагать полностью управляемой и наблюдаемой

Под ее нулевой динамикой [1, 2] полагают движение, принадлежащее многообразию  $y(t) = Cx(t) = 0$ . При описании нулевой динамики выделяют три задачи [1], т.е. определения уравнений нулевой динамики, спектра и размерности. Для систем с одним входом и одним выходом, которые называют скалярными системами, получены ответы на все три вопроса.

Определение 1 [1]. Относительным порядком скалярной системы (1) называют натуральное число  $r$  для которого выполнены соотношения  $CB = 0, CAB = 0, \dots, CA^{r-2}B = 0, CA^{r-1}B \neq 0$

Для такой системы размерность нулевой динамики равна разности между размерностью системы и ее относительным порядком, характеристическим полиномом нулевой динамики является числитель переходной функции системы и спектром множество его корней. Задачу о нахождении уравнений нулевой динамики решают при помощи приведения системы к специальной форме [1,2].

Для многоходовых, многовыходных систем при равенстве числа входов числу выходов характеристический полином нулевой динамики совпадает с определителем матрицы Розенброка.

$$R(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

При этом понятие относительного порядка существенно усложняется [3]

Определение 2. Вектор  $r = (r_1, \dots, r_l)^T \in \mathbb{N}^l$  называется вектором относительного порядка (ОП) системы (1), если выполнены следующие условия:

$$1. C B = 0, C A B = 0, \dots, C A^{r-2} B = 0, C A^{r-1} B \neq 0,$$

2. Строки

$$C_i B = 0, C_i A B = 0, \dots, C_i A^{r_i-2} B = 0, C_i A^{r_i-1} B \neq 0, C_i A^{r_i-1} B, i = 1, 2, \dots, l$$

линейно независимы. Здесь  $C_i$  - строки матрицы  $C$ ,  $i = 1, \dots, l$ .

Оказывается условия 1 и 2 в определении 2 могут быть противоречивыми и тогда необходимы обобщения понятия относительного порядка.

Сложнее ситуация для дескрипторных систем [2]

$$S \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), y = C x$$

$$S x(0) = S x_0, \det S = 0,$$

Здесь также для скалярной системы все хорошо получается путем приведения регулярного пучка  $\lambda S - A$  к канонической форме Вейерштрасса и использования первой эквивалентной формой (EF1) [2].

Для многовходных и многовыходных квадратных систем требуется использовать обобщение относительного порядка и результаты по расщепимости дескрипторных систем. При этом противоречия в определении относительного порядка по Исидори [2] значительно усложняют изучение нулевой динамики, а соответственно и наблюдаемость дескрипторных систем при наличии возмущений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В. Методы робастного обращения динамических систем. М.: Физматлит, 2009.
2. Asmykovich Ivan K. On Finding Zero Dynamics for Descriptor Systems // 2016 13TH International scientific technical conference on actual problems of electronic instrument engineering (APEIE) – Proceedings APEIE – 2016 In 12 Vol. V. 1 Part 3 Novosibirsk 2016 3-6 октября 2016 г. P.116 – 119.
3. Краев А. В., Фомичев В. В., Роговский А. И. К обобщению относительного порядка // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1128-1132.

УДК 517.977

И.М. Борковская, доц., канд. физ.-мат. наук  
(БГТУ, г. Минск)

## К ВОПРОСУ УПРАВЛЯЕМОСТИ ГИБРИДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Математическая модель гибридной системы возникает каждый раз, когда необходимо исследовать взаимодействие среды, непрерывно изменяющейся в соответствии с некоторыми физическими законами, и управляющих элементов, срабатывающих в дискретные моменты времени. Исследование гибридных систем и решение различных задач управления для них позволит расширить область применения математической теории управления. Для гибридных систем могут быть сформулированы различные известные задачи оптимального управления, достижимости и верификации, исследования на устойчивость, задачи стабилизации, идентификации и другие. Важнейшими являются вопросы представления решений гибридных систем, относительной управляемости, модального управления и другие. Управляемость – одно из важнейших свойств системы управления, описывающее возможность перевести систему из одного состояния в другое.

В докладе рассмотрен ряд задач относительной управляемости и достижимости гибридных дискретно-непрерывных динамических систем вида

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh), t \in [kh, (k+1)h), \quad (1)$$

$$y(kh+h) = A_{21}x(kh) + A_{22}y(kh) + Bu(kh), \quad (2)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

где  $x(t) \in R^n$ ,  $y(kh) \in R^m$ ,  $u(kh) \in R^r$ ,  $h > 0$ , и  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B$  – постоянные матрицы соответствующих размеров с начальными условиями

$$x(0) = x(+0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (3)$$

При заданном моменте времени  $t_1 = qh, q \in N$ , для системы (1), (2) введены определения  $t_1$ -относительной управляемости,  $t_1$ -относительной управляемости по  $x$ ,  $t_1$ -относительной управляемости по  $y$ ,  $t_1$ -относительной достижимости,  $t_1$ -относительной достижимости по  $x$ ,  $t_1$ -относительной достижимости по  $y$ . Представлены параметрические критерии относительной  $t_1$ -управляемости и достижимости системы (1), (2).

УДК 621.383.29

С. С. Ветохин, доц., канд. физ-мат. наук (БГТУ, г. Минск)  
Е. В. Терешко, ассист. (БГТУ, г. Минск)

## **К ВОПРОСУ ОБ ОБНАРУЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ**

В настоящее время техническими нормативными правовыми актами в пищевых, фармацевтических и промышленных продуктах ограничивается содержание многих вредных и опасных веществ органической и неорганической природы. Среди них особое место занимают радиоактивные вещества, проблема обнаружения которых особенно обострилась в Беларуси после 1986 г.

Измерение потока событий, вызванных радиоактивным распадом нестабильных изотопов, в упрощенном виде сводится к измерению характеристик пуассоновского потока сигналов на выходе соответствующего детектора. Такой поток может быть описан законом Пуассона для числа зарегистрированных за некоторое время событий или экспоненциальным законом распределения интервалов между соседними событиями. Оба представления теоретически равнозначны, но существенно отличаются по практической реализации.

Если задача сводится лишь к обнаружению недопустимого уровня радиоактивности в образце без измерения ее действительного значения, то измерительную процедуру легко свести к известной в оптической локации проблеме обнаружения слабых световых сигналов с помощью счетчика отдельных фотонов. Поэтому, действуя по аналогии, можем ввести для нашего случая стандартные характеристики обнаружения: вероятность правильного обнаружения, вероятность пропуска сигнала и вероятность ложной тревоги. Последняя характеристика в радиолокации является базовой, то есть задаваемой *a priori* оператором (или нормативным документом). Обычно диапазон задаваемых значений находится внутри  $10^{-4}$ - $10^{-6}$ , однако в нашем случае это может дать слишком большие значения вероятности пропуска сигнала и привести к попаданию к потребителю некачественной продукции. При этом вероятность правильного обнаружения фактически будет определяться доверительным интервалом, чаще всего соответствующим двойному стандартному отклонению или 0,95.

В условиях сложности реализации для такой задачи мощных непараметрических, в том числе ранговых, тестов в реальном масштабе времени, очевидно, необходима разработка специализированных многовыборочных непараметрических тестов.

УДК 517.966

В.В. Игнатенко, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);

В.В. Крахотко, доц., канд. физ.-мат. наук;

Г.П. Размыслович, канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск)

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ

Рассмотрим линейную дескрипторную систему

$$A_0 \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), x(0) = x_0, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где  $x, x_0, b \in R^n$ ,  $A_0, A$  - постоянные матрицы соответствующих размеров,  $u(t)$  скалярное управление.

Будем считать, что система (1) является регулярной, т. е.  $\det(\lambda A_0 - A)$  не равен тождественно нулю. В силу этого, без ограничения общности, можно считать, что для матриц системы (1) выполняются условия  $A_0 A = A A_0, \ker A_0 \cap \ker A = \{0\}$ .

В качестве управления  $u(t)$  будем рассматривать выход

$$u(t) = c^T y(t) \quad (2)$$

линейной сингулярной системы

$$D_0 \dot{y}(t) = D y(t), y(t_0) = y_0 \quad (3)$$

(здесь:  $c, y, y_0 \in R^n, D, D_0 - n \times n$  - матрицы,  $\det D_0 = 0$ ), которую назовем сингулярным динамическим регулятором или просто динамическим регулятором [1]. При управлении, с помощью динамического регулятора, достаточно задать только начальное состояние регулятора, а не строить управление на всем интервале управления, как это делается в классическом случае.

**Определение.** Систему (1) назовем условно управляемой, динамическим регулятором (3), если существует момент времени  $t_1 < +\infty$ , такой, что для любых начального условия  $x_0(\cdot) \in \Omega$  и  $c \in R^n$ , найдется начальное состояние  $y_0$  регулятора (3), такие, что решение системы удовлетворяет условию  $x(t_1) = c$ .

Здесь  $\Omega$  множество допустимых начальных состояний системы (1),  $y_0 = D_0 D_0^d q$ , где  $q \in R^n$ ,  $D_0^d$  - обратная матрица Драйзина для матрицы  $D_0$  [2].

Доказывается, что для условной управляемости системы (1) динамическим регулятором (3), необходимо и достаточно, чтобы система (1) была условно управляемой [3], в смысле определения по Калману, а для динамического регулятора (3), выполнялись условия

$$\text{rank} \left[ c^T D_0^d D_0, c^T D_0^d K D_0, \dots, c^T D_0^d K^{n-1} D_0 \right] = n, \quad \text{где } K = D D_0^d.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатенко В.В. Управляемость динамических систем с помощью регулятора. / Игнатенко В.В. // Вестник БГУ. Сер.1 «2. 1976. С.56 – 58.
2. Campbell S.L. Applications of the Drazin inverse to Linear systems of Differential equations with Singular constant Coefficients. / Campbell S.L., Meyer C.D., Rose N.J. // SIAM J. Appl. Math., V.31. № 3. 1976. P. 411 – 425.
3. Игнатенко В.В., Крахотко В.В. Об управляемости специального класса дескрипторных систем. // Материалы Международной научно-технической конференции “Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов “. Минск, 6-8 июня 2006 года. - с.159-160.

УДК 517.9

М.Х. Мазель, канд. физ.-мат. наук;  
О.И. Пиндрик, канд. физ.-мат. наук  
(БГУ, г. Минск)

#### НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СПЕКТРА ОБОБЩЕННОГО ОПЕРАТОРА

Поскольку спектральная теория имеет важное значение в теории линейных ограниченных операторов, действующих в банаховых пространствах, при построении теории обобщенных операторов возникает вопрос о том, сохраняются ли основные результаты этой теории для обобщенных операторов.

Рассмотрим произвольный обобщенный оператор  $\tilde{A}$ , действующий в обобщенном нормированном пространстве (определение обобщенного оператора, множества обобщенных комплексных чисел и обобщенного нормированного пространства вводится в работе [5]). Для точной формулировки основных теорем спектральной теории

введем определение спектра и резольвентного множества обобщенного оператора.

Обобщенное комплексное число  $\lambda$  называют регулярной точкой обобщенного оператора  $\tilde{A}$ , если оператор  $\lambda I - \tilde{A}$  обратим в алгебре обобщенных операторов. Множество регулярных точек будем обозначать  $\rho(\tilde{A})$  и называть резольвентным множеством оператора  $\tilde{A}$ . Обобщенное число  $\lambda$ , не являющееся регулярным, будем называть спектральным значением обобщенного оператора  $\tilde{A}$ . Множество всех спектральных точек обобщенного оператора назовем его обобщенным спектром и будем обозначать  $\sigma(\tilde{A})$ .

Оказывается, для произвольного обобщенного оператора справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** Обобщенный спектр произвольного обобщенного оператора  $\tilde{A}$  является непустым подмножеством множества обобщенных комплексных чисел.

**Замечание.** В поле  $C$  обобщенный спектр обобщенного оператора может быть пустым множеством.

**Теорема 2.** Резольвентное множество обобщенного оператора  $\tilde{A}$  открыто.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневиц А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения - Минск: БГУ, 2003. - 430 с.
2. Антоневиц А.Б., Радыно Я.В. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций. - ДАН СССР. - 1991, т. 318, №2. - с. 267-270.
3. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. - М.: Наука, 1966. - 544 с.
4. Бурбаки Н. Спектральная теория.—М. Мир, 1972. - 184 с.
5. Гулецкая О.И., Радыно Я.В. К теории обобщенных функций от операторов. - Весці АН Беларусі. -1995, № 2.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. - М., ИЛ, 1962. — 896 с.
7. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Спектральная теория. - М., Мир, 1966. — 1064 с.

УДК 517.948

С.В. Пономарева, доц., канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск);  
 О.Н. Пыжкова, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

## ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ГО РОДА

Будем рассматривать уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{c,r}(x)} c(\mathbf{x}-\mathbf{t})(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{\mathbf{x}-\mathbf{t}} \phi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}), (\mathbf{x} \in A_{c,r}(\mathbf{b}), 0 < \alpha < 1).$$

в пространстве  $I_{A_{c,r}}(L_1)$  абсолютно непрерывных на пирамидальной области  $A_{c,r}(\mathbf{b}) = \{\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{A} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{t}) \geq 0, \mathbf{c} \cdot \mathbf{t} + r \geq 0\}$  в  $\mathbf{R}^n$  с вершиной в точке  $\mathbf{b}$  функций с нецелыми степенями логарифма в предположении абсолютной непрерывности функции  $c(x)$  и  $0 < \alpha < 1, \beta > -1$ .

Решение многомерного уравнения с целыми степенями логарифма по пирамидальной области в пространствах непрерывных и интегрируемых функций см. в [2], одномерного уравнения с нецелыми степенями логарифмов и условия его разрешимости в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций - в [3]. Формула обращения уравнений с нецелыми степенями логарифма не может быть скопирована с целого случая из-за особенностей метода решения и приходится использовать специальную функцию  $\mu_{\alpha,\beta}(\mathbf{x})$  вместо  $v_h(\mathbf{x})$ . Определения и свойства этих специальных функций см. в [4].

В монографии [1] приводится формула обращения одномерного интегрального оператора типа свертки

$$(I_{a+}^{\alpha,\beta} \phi)(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{x-t} \phi(t) dt = f(x), \quad (a < x < b < \infty)$$

и условия разрешимости уравнения на отрезке. Сформулируем многомерный аналог этого утверждения для модельной пирамиды  $E_1(\mathbf{b}) = \{\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{b} \geq \mathbf{t}, \mathbf{t} \cdot \mathbf{1} \geq 0\}$  (для общего случая можно использовать линейные формулы перехода и результаты будут аналогичными).

Теорема 1. Для разрешимости уравнения

$$(I_{E_1(x)}^{\alpha,\beta} \phi)(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{E_1(x)} c(\mathbf{x}-\mathbf{t})(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{\mathbf{x}-\mathbf{t}} \phi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}),$$

в пространстве  $I_{E_1}(\mathbf{L}_1)$  необходимо и достаточно, чтобы свободный член  $f$  был представим в виде

$$f(\mathbf{x}) = \int_{E_1(\mathbf{x})} \mu_{\alpha, \beta}(\mathbf{x} - \mathbf{t}) \chi(\mathbf{t}) dt, \chi(\mathbf{t}) \in \mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L}_1)$$

При выполнении этого условия решение  $\varphi$  единственно и выражается формулой

$$\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{E} + \mathbf{T}_\psi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{1}{\gamma_{E_1(\mathbf{x})}} \int \mu_{1-\alpha, -\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) dt \right)$$

где оператор  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Пономарева, С.В. Решение интегральных уравнений первого рода в некоторых пространствах / Физико-математические науки: тезисы 79-й науч.-техн. конференции, Минск, 2-6 февраля 2016 г. / УО БГТУ. – Минск: БГТУ, 2016. – 44 с. стр 37.

3. Пономарева, С.В. Достаточные условия разрешимости уравнений со степенно-логарифмическими ядрами с действительной степенью логарифма / С.В. Пономарева, О.Н.Пыжкова // Труды БГТУ. – 2017. – № 2 (194): Физ.-мат. науки и информатика. – С.11 – 14.

4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – М.: Наука, 1965-1967. – Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. – 1967. – 299 с.

УДК 519.626.2

И.Ф. Соловьева (БГТУ, г. Минск)

### ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Рассмотрим двухточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида:

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad b(x) > 0, \quad \varepsilon > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varepsilon > 0$  – малый параметр при старшей производной. Задача вида (1) имеет два пограничных слоя.

Представим дифференциальные уравнения (1) в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = y_2, 0 \leq x \leq 1, \\ y_2' = -\frac{f}{\varepsilon} + \frac{b}{\varepsilon}y_1, \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (2)$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_2(a) = \gamma_1, & \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_2(b) = \gamma_2, & \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \end{cases} \quad (3)$$

где  $f(x)$  – функция, непрерывная на отрезке  $[a, b]$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  – заданные постоянные. Предположим, что существует единственное искомого решение задачи (2), (3). Обозначим это решение через  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ .

В виде системы уравнений (2) можно представить любое линейное о. д. у. Граничные условия вида (3) представлены в общем виде, что позволяет рассматривать более широкий класс задач.

В зонах пограничных слоев вводим регулирующие множители  $m_1(x, \varepsilon) > 0$  и  $m_2(x, \varepsilon) > 0$ . Их следует выбирать таким образом, чтобы произведения  $m_1(x, \varepsilon)y_1(x)$  и  $m_2(x, \varepsilon)y_2(x)$  были в необходимой мере стабилизированы.

Предлагаемая методика была подтверждена численным решением нескольких конкретных граничных задач с малым параметром при старшей производной с одним и двумя пограничными слоями. Она дает возможность решать граничные задачи с пограничными слоями с достаточно хорошей точностью.

УДК 517.977

А. А. Якименко, канд. физ.-мат. наук, доц.  
(БГТУ, г. Минск)

### МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим линейную систему нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где  $A_i, i=0,1,2$  – постоянные  $(2 \times 2)$ -матрицы,  $b$  – ненулевой 2-вектор,  $h > 0$  – постоянное запаздывание. Не ограничивая общности, считаем  $b' = [0, 1]$ .

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00}x(t) + \sum_{i=0}^L \sum_{j=1}^M q'_{ij}x^{(i)}(t-jh) + \int_{-h}^0 g'(s)x(t+s)ds, \quad (2)$$

где  $q_{00}, q_{ij}$  ( $i=0, \dots, L, j=0, \dots, M$ ) – 2-векторы;  $g(s), s \in [-h, 0]$  – непрерывная 2-вектор-функция,  $x^{(i)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^i}{dt^i}x(t), x^{(0)}(t) \equiv x(t)$ .

Характеристическое уравнение системы (1) имеет следующий вид:

$$\det[A_0 + A_1e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2] \equiv \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \tilde{\alpha}_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \quad (3)$$

где числа  $\tilde{\alpha}_{ij}$  вычисляются как функции матриц  $A_i, i=0, 1, 2$ , в частности  $\tilde{\alpha}_{00} = \det A_0, \tilde{\alpha}_{20} = 1, \tilde{\alpha}_{22} = \det A_2$ .

**Определение.** Система (1) модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперёд заданных чисел  $\alpha_{ij}, i=0, 1, 2, j=0, 1, 2, \alpha_{20} = 1$ , найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет вид (ср. с (3)):

$$\det[A_0 + A_1e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2 + bU(\lambda)] \equiv \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \alpha_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0,$$

где  $U(\lambda)$  – регулятор (2) в частотной области.

Введем  $(2 \times 2)$ -матрицы:

$$A(\lambda) = A_0 + A_1e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h},$$

$$W(\lambda) = [A(\lambda)b, b], \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим обще циклический случай:

$$\det W(\lambda) = c(\gamma_0 + \gamma_1e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}), (c \neq 0).$$

Матрица  $A(\lambda)$  в этом случае имеет следующий вид:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1e^{-\lambda h} + \beta_2\lambda e^{-\lambda h} & c(\gamma_0 + \gamma_1e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}) \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где  $\beta_i, i=0, 1, 2, \gamma_0$  – некоторые действительные числа;  $a_j(\lambda), j=1, 2$  – квазиполиномы:

$$a_i(\lambda) = a_{i0} + a_{i1}e^{-\lambda h} + a_{i2}\lambda e^{-\lambda h},$$

где  $a_{ij} \in \mathbb{R}; i = 1, 2, j = 0, 1, 2$ .

Рассмотрим уравнение

$$\lambda^2 + (\gamma_1 - \beta_0)\lambda + \beta_1\gamma_0 - \beta_0\gamma_1 \equiv (\lambda - \xi_1)(\lambda - \xi_2) = 0, \quad \lambda, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Пусть выполнено условие:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Рассмотрим величину

$$\delta(\xi) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\xi h} - \xi.$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** Для того, чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (2) в случае (5), необходимо и достаточно выполнения условия  $\delta(\xi) \neq 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае// Труды БГТУ. 2017. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 25–27.

УДК 517.444

Л. Д. Яроцкая, канд. физ.-мат. наук  
(БГТУ, г. Минск)

## К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ СВЕРТОК ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПО ИНДЕКСУ

В монографии [1] разработан метод построения сверток для преобразований по индексу, композиционно связанных с преобразованием Конторовича – Лебедева в силу универсальной структуры их ядер. В частности, дано понятие обобщенной свертки  $(f * g)$  двух функций  $f$  и  $g$  как операции умножения в некоторой алгебре, когда с помощью действия соответствующего интегрального оператора  $K$  на свертку получают обычное умножение образов, определенное равенством вида:

$$[K(f * g)](x) = [K_1 f](x)[K_2 g](x),$$

где  $K_1, K_2$  – некоторые интегральные операторы. Если при определенных условиях имеет смысл обратный оператор от произведения функций, то в некотором пространстве функций свертка определяется равенством Парсеваля:

$$(f * g)(x) = K^{-1}([K_1 f][K_2 g])(x).$$

Отметим, что преобразование Конторовича – Лебедева, введенное в работе [2], определено разложением произвольной функции  $f(x)$  вида:

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2 x} \int_0^\infty \int_0^\infty K_{i\tau}(u) f(u) du K_{i\tau}(x) \tau \operatorname{sh}(\pi\tau) d\tau, \quad x > 0,$$

где  $K_{i\tau}(x)$  – функция Макдональда мнимого параметра, имеющая представление:

$$K_{i\tau}(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} u} \cos(\tau u) du.$$

В настоящей работе изучаются свойства свертки, определенной равенством:

$$K_{i\tau}[(f \hat{*} g)] = \hat{F}(\tau) K_{i\tau}[g],$$

где  $K_{i\tau}[f]$  и  $\hat{F}(\tau)$  – операторы вида:

$$K_{i\tau}[f] = \int_0^\infty K_{i\tau}(x) f(x) dx, \quad \hat{F}(\tau) = \int_0^\infty M_{i\tau}(u) f(u) du,$$

а специальная функция второго ядра определяется интегралом  $M_{i\tau}(u) = \int_0^\infty e^{-u \operatorname{ch} t} \sin(\tau t) dt$ .

Установлено, что для функций суммируемых с квадратом рассматриваемая свертка существует и принадлежит весовым пространствам функций  $L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$ , где  $\nu > 1$ . Отметим, что рассматриваемая свертка является ядром одного интегрального уравнения [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Yakubovich, S. B. Index transforms. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1996. – 252 p.
2. Лебедев Н. Н. Сингулярные интегральные уравнения, связанные с интегральными представлениями математической физики // Доклады АН СССР, Т. 65, № 1, 1949. – С. 621–624.
3. Яроцкая Л.Д. Об уравнении с двумя ядрами типа свертки Конторовича – Лебедева // Труды БГТУ. Физ. – мат. науки и информатика, №6, 2016. – С. 31–35.

УДК 517.982.45

Т. Г. Шагова, ассист., магистр физ.-мат. наук  
(БГТУ, г. Минск)

### ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ МНЕМОФУНКЦИЯМИ

Рациональные мнемифункции, т. е. классы эквивалентных гладких дробно-рациональных функций, зависящих от малого параметра, наиболее естественно возникают в ряде конкретных задач квантовой механики и квантовой теории поля. Такие мнемифункции представляют собой особый класс новых обобщенных функций, так как они образуют подалгебру в алгебре обобщенных функций, и коэффициентами их асимптотических разложений в пространстве обобщенных функций могут быть только  $\delta$ -функция, ее производные и степенные обобщенные функции. Следовательно, рациональные мнемифункции могут быть ассоциированы только с  $\delta$ -функцией, ее производными и степенными обобщенными функциями. Поэтому появилась необходимость выделения классов рациональных функций, таких что порожденные ими мнемифункции ассоциированы этими обобщенными функциями.

Рассматривается мнемифункция вида  $f_\varepsilon(x) = f(x/\varepsilon)$ , в которой

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  - правильная дробно-рациональная функция,  $Q(x) \neq 0$ ,

$\forall x \in \mathbf{R}$ . Задача состоит в определении свойств рациональной функции  $f$ , от которых зависит, с какой обобщенной функцией ассоциирована мнемифункция  $f_\varepsilon$ . Отметим, что при  $x \rightarrow \infty$   $f(x)$  обладает асимптотическим разложением  $f(x) \sim \sum_{n=m}^{\infty} a_n x^{-n}$ ,  $m \geq 1$ , и  $M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$  -

моменты функции  $f$ .

С  $\delta$ -функцией ассоциирована мнемифункция  $\frac{1}{M_0 \varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ , где  $f$  - интегрируемая рациональная функция, такая что  $M_0 \neq 0$ .

Если  $m=1$ , то в общем случае мнемифункция вида  $\frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  будет ассоциирована с семейством обобщенных функций  $c_1 P(1/x) + c_2 \delta$ , где  $c_1, c_2$  есть константы, а

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \Phi \right\rangle = \text{v.p.} \int_{\mathbf{R}} \frac{\Phi(x)}{x} dx.$$

С обобщенной функцией  $P(1/x)$  ассоциированы нечетные мнемофункции вида  $\frac{1}{\varepsilon a_1} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ , где  $a_1$  - отношение старших коэффициентов полиномов  $P(x)$  и  $Q(x)$ .

Если функция  $f$  убывает при  $x \rightarrow \infty$  как  $\frac{1}{x^{n+2}}$ , то асимптотическое разложение мнемофункции  $f_\varepsilon(x)$  будет иметь вид:

$$f_\varepsilon(x) \sim M_0 \delta \varepsilon - M_1 \delta' \varepsilon^2 + \dots + \frac{(-1)^n M_n \delta^{(n)}}{n!} \varepsilon^{n+1} + \\ + (-1)^{n+1} \frac{\tilde{M}_{n+1} \delta^{(n+1)}}{(n+1)!} \varepsilon^{n+2} + a_{n+2} P\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right) \varepsilon^{n+2} + \dots,$$

где  $\tilde{M}_{n+1}$  - регуляризованный момент.

Тогда если  $M_n$  - первый отличный от нуля момент функции  $f$ , то мнемофункция вида  $\frac{(-1)^n}{M_n \varepsilon^{n+1}} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  будет ассоциирована с  $\delta^{(n)}$ . В случае когда все моменты функции  $f$  до  $n+1$  порядка включительно равны нулю, то мнемофункция  $\frac{1}{a_{n+2} \varepsilon^{n+2}} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  будет ассоциирована с обобщенной функцией  $P(1/x^{n+2}) + c \delta^{(n+1)}$ , где  $c$  есть некоторая константа.

Таким образом получаем, что множество рациональных функций разбивается на классы эквивалентности в зависимости от того, с какими обобщенными функциями порожденные ими мнемофункции ассоциированы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. Т. 1. 470 с.
2. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1974. Т. 1. 392 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Асимптотическое разложение интегралов с медленно убывающим ядром // Доклады Академии наук СССР. 1959. Т. 126, № 1. С. 26–29.

УДК 517.984

О. А. Архипенко, ассист., магистр физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

### СПЕКТР КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе для разностного уравнения

$$a(k)u(k+1) - \lambda u(k) = f(k) \quad (1)$$

изучается корректность краевой задачи, заданной условием  $u \in L_\eta$ ,

$\eta = (\dots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \dots) \in l_2(\mathbb{Z})$ , где

$$L_\eta = \{u \in l_2(\mathbb{Z}) : \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_k u(k) = 0\}. \quad (2)$$

Нахождение решения этой задачи эквивалентно построению правосторонней резольвенты для оператора взвешенного сдвига  $B$ , состоящей из операторов, образы которых совпадают с подпространством  $L_\eta$ .

По подпространству  $L_\eta$  и оператору  $B$  построим ряд Лорана по степеням  $\lambda$

$$Q_\eta(\lambda) = Q_\eta^+(\lambda) + Q_\eta^-(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\eta_k \lambda^k}{\prod_{j=0}^{k-1} a(j)} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \eta_k \frac{\prod_{j=k}^{-1} a(j)}{\lambda^{-k}}.$$

**Теорема 1.** Если выполняется  $r(a) \leq |\lambda| \leq R(a)$ , то условие  $Q_\eta(\lambda) \neq 0$

является необходимым для того, чтобы существовал правый обратный оператор к  $B - \lambda I$ , образ которого принадлежит подпространству  $L_\eta$ .

**Теорема 2.** Правый обратный оператор к  $B - \lambda I$ , образ которого принадлежит подпространству  $L_\eta$ , существует в тех точках  $\lambda$ , где  $Q_\eta(\lambda) \neq 0$  и выполняется  $r(a) \leq |\lambda| \leq R(a)$ . Семейство таких правых обратных  $R_\eta(B; \lambda)$  аналитически зависит от  $\lambda$ , то есть является правосторонней резольвентой, определенной для указанных  $\lambda$ . Эта правосторонняя резольвента имеет вид

$$R_\eta(B; \lambda)f = \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P_0)f - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_0 f \right] + \frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)} \omega_\lambda,$$

где  $P_0$  – проектор,  $\Phi_\lambda(f)$  есть функционал из  $l_2(\mathbb{Z})$ , заданные формулами

$$P_0 = \begin{cases} u(k), & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$

$$\Phi_\lambda(f) = - \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^i \frac{\lambda^{i-j} \eta_{i+1}}{\prod_{k=j}^i a(k)} - \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=i}^{-1} \lambda^{i-j-1} \eta_i \prod_{k=i}^{j-1} a(k) f(j).$$

Если ряд Лорана для функции  $Q_\eta(\lambda)$  сходится в более широком кольце, чем кольцо  $r(a) \leq |\lambda| \leq R(a)$ , то в последнем может лежать лишь конечное число нулей. Но если аналитическая функция  $Q_\eta(\lambda)$  имеет особенности на границе кольца  $|\lambda| = |a(+\infty)|$ ,  $|\lambda| = |a(-\infty)|$ , то в  $r(a) \leq |\lambda| \leq R(a)$  может лежать счетное количество нулей.

Получим условие для сходимости ряда Лорана  $Q_\eta(\lambda)$ . Для этого определим величины

$$q^+ = \lim_{k \rightarrow +\infty} |\eta_k|^{\frac{1}{k}}, \quad q^- = \lim_{k \rightarrow +\infty} |\eta_{-k}|^{\frac{1}{k}}$$

**Теорема 3.** Если  $q^+ < 1$  и  $q^- < 1$ , тогда функция  $Q_\eta(\lambda)$  может принимать нулевое значение только в конечном числе точек из кольца  $r(a) \leq |\lambda| \leq R(a)$ .

**Пример 1.** Если у последовательности  $\eta_k$  только конечное число ненулевых элементов, то функция  $Q_\eta(\lambda)$  является рациональной и имеет конечное число корней. Этот случай был рассмотрен ранее и опубликован в [1].

**Пример 2.** Пусть  $\eta_k = \frac{1}{|k|+1}$ , тогда

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\eta_k|^{\frac{1}{k}} = 1.$$

Поэтому мы не можем утверждать, что функция  $Q_\eta(\lambda)$  имеет только конечное число корней.

**Пример 3.** Пусть  $\eta_k = \frac{1}{2^{|k|}}$ , тогда

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\eta_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2}.$$

В этом примере функция  $Q_\eta(\lambda)$  аналитическая в кольце  $\frac{1}{2}|a(-\infty)| \leq |\lambda| \leq 2|a(+\infty)|$ , тогда применима единственности и краевая задача имеет только конечное множество спектральных значений, лежащих в кольце  $r(a) \leq |\lambda| \leq R(a)$ .

Таким образом, вид спектра краевой задачи зависит от скорости убывания последовательности  $\eta_k$  на бесконечности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шукур Али А., Архипенко О. А. Резольвента краевой задачи для разностного уравнения / Али А. Шукур, О. А. Архипенко // ПФМТ. – 2016. – №3(28). – С. 70–75.