УДК 517.984

О. А. Архипенко, ассист., магистр физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

СПЕКТР КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе для разностного уравнения

$$a(k)u(k+1)-\lambda u(k)=f(k) \tag{1}$$

изучается корректность краевой задачи, заданной условием $u\in L_\eta$, $\eta=(\ldots,\eta_{-1},\eta_0,\eta_1,\ldots)\in l_2(\mathbb{Z})$, где

$$L_\eta=\{u\in l_2(\mathbb{Z}){:}\ \textstyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\eta_k u(k)=0\}. \tag{2}$$

Нахождение решения этой задачи эквивалентно построению правосторонней резольвенты для оператора взвешенного сдвига B, состоящей из операторов, образы которых совпадают с подпространством L_η.

По подпространству L_η и оператору B построим ряд Лорана по степеням λ

$$Q_\eta(\lambda)=Q_\eta^+(\lambda)+Q_\eta^-(\lambda)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\eta_k\lambda^k}{\prod_{j=0}^{k-1}a(j)}+\sum_{k=-\infty}^{-1}\eta_k\frac{\prod_{j=k}^{-1}a(j)}{\lambda^{-k}}.$$

Теорема 1. Если выполняется $r(a)\le|\lambda|\le R(a)$, то условие

$$Q_\eta(\lambda)\ne 0$$

является необходимым для того, чтобы существовал правый обратный оператор к $B-\lambda I$, образ которого принадлежит подпространству L_η.

Теорема 2. Правый обратный оператор к $B-\lambda I$, образ которого принадлежит подпространству L_η, существует в тех точках λ, где $Q_\eta(\lambda)\ne 0$ и выполняется $r(a)\le|\lambda|\le R(a)$. Семейство таких правых обратных $R_\eta(B;\lambda)$ аналитически зависит от λ, то есть является правосторонней резольвентой, определенной для указанных λ. Эта правосторонняя резольвента имеет вид

$$R_\eta(B;\lambda)f=\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P_0)f-\sum_{k=-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}P_0 f\right]+\frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)}\omega_\lambda,$$

где P_0 – проектор, $\Phi_\lambda(f)$ есть функционал из $l_2(\mathbb{Z})$, заданные формулами

$$P_0=\begin{cases}u(k), & k\ge 0,\\ 0, & k<0.\end{cases}$$

$$\Phi_\lambda(f)=-\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{i}\frac{\lambda^{i-j}\eta_{i+1}}{\prod_{k=j}^{i}a(k)}-\sum_{i=-\infty}^{-1}\sum_{j=i}^{-1}\lambda^{i-j-1}\eta_i\prod_{k=i}^{j-1}a(k)f(j).$$

Если ряд Лорана для функции $Q_\eta(\lambda)$ сходится в более широком кольце, чем кольцо $r(a) \le |\lambda| \le R(a)$, то в последнем может лежать лишь конечное число нулей. Но если аналитическая функция $Q_\eta(\lambda)$ имеет особенности на границе кольца $|\lambda| = |a(+\infty)|$, $|\lambda| = |a(-\infty)|$, то в $r(a) \le |\lambda| \le R(a)$ может лежать счетное количество нулей.

Получим условие для сходимости ряда Лорана $Q_\eta(\lambda)$. Для этого определим величины

$$q^+ = \lim_{k\to+\infty} |\eta_k|^{\frac{1}{k}}, \qquad q^- = \lim_{k\to+\infty} |\eta_{-k}|^{\frac{1}{k}}$$

Теорема 3. Если $q^+ < 1$ и $q^- < 1$, тогда функция $Q_\eta(\lambda)$ может принимать нулевое значение только в конечном числе точек из кольца $r(a) \le |\lambda| \le R(a)$.

Пример 1. Если у последовательности η_k только конечное число ненулевых элементов, то функция $Q_\eta(\lambda)$ является рациональной и имеет конечное число корней. Этот случай был рассмотрен ранее и опубликован в [1].

Пример 2. Пусть $\eta_k = \frac{1}{|k|+1}$, тогда

$$\lim_{k\to+\infty} |\eta_k|^{\frac{1}{k}} = 1.$$

Поэтому мы не можем утверждать, что функция $Q_\eta(\lambda)$ имеет только конечное число корней.

Пример 3. Пусть $\eta_k = \frac{1}{2^{|k|}}$, тогда

$$\lim_{k\to+\infty} |\eta_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2}.$$

В этом примере функция $Q_\eta(\lambda)$ аналитическая в кольце $\frac{1}{2}|a(-\infty)| \le |\lambda| \le 2|a(+\infty)|$, тогда применима единственности и краевая задача имеет только конечное множество спектральных значений, лежащих в кольце $r(a) \le |\lambda| \le R(a)$.

Таким образом, вид спектра краевой задачи зависит от скорости убывания последовательности η_k на бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шукур Али А., Архипенко О. А. Резольвента краевой задачи для разностного уравнения / Али А. Шукур, О. А. Архипенко // ПФМТ. – 2016. – №3(28). – С. 70–75.