УДК 517.982.45

Т. Г. Шагова, ассист., магистр физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ МНЕМОФУНКЦИЯМИ

Рациональные мнемофункции, т. е. классы эквивалентных гладких дробно-рациональных функций, зависящих от малого параметра, наиболее естественно возникают в ряде конкретных задач квантовой механики и квантовой теории поля. Такие мнемофункции представляют собой особый класс новых обобщенных функций, так как они образуют подалгебру в алгебре обобщенных функций, и коэффициентами их асимптотических разложений в пространстве обобщенных функций могут быть только δ-функция, ее производные и степенные обобщенные функции. Следовательно, рациональные мнемофункции могут быть ассоциированы только с δ-функцией, ее производными и степенными обобщенными функциями. Поэтому появилась необходимость выделения классов рациональных функций, таких что порожденные ими мнемофункции ассоциированы этими обобщенными функциями.

Рассматривается мнемофункция вида $f_\varepsilon(x) = f(x/\varepsilon)$, в которой $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробно-рациональная функция, $Q(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Задача состоит в определении свойств рациональной функции f, от которых зависит, с какой обобщенной функцией ассоциирована мнемофункция f_ε. Отметим, что при $x \to \infty$ $f(x)$ обладает асимптотическим разложением $f(x) \sim \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n x^{-n}, m \geq 1,$ и $M_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$ - моменты функции f.

С δ-функцией ассоциирована мнемофункция $\dfrac{1}{M_0\varepsilon} f\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, где f – интегрируемая рациональная функция, такая что $M_0 \neq 0$.

Если $m = 1$, то в общем случае мнемофункция вида $\dfrac{1}{\varepsilon} f\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ будет ассоциирована с семейством обобщенных функций $c_1 P(1/x) + c_2\delta$, где c_1, c_2 есть константы, а

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right\rangle = \text{v.p.}\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

С обобщенной функцией $P(1/x)$ ассоциированы нечетные мнемофункции вида $\frac{1}{\varepsilon a_1} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, где a_1 - отношение старших коэффициентов полиномов $P(x)$ и $Q(x)$.

Если функция f убывает при $x \to \infty$ как $\frac{1}{x^{n+2}}$, то асимптотическое разложение мнемофункции $f_\varepsilon(x)$ будет иметь вид:

$$f_\varepsilon(x) \sim M_0\delta\varepsilon - M_1\delta'\varepsilon^2 + \ldots + \frac{(-1)^n M_n \delta^{(n)}}{n!}\varepsilon^{n+1} +$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{\tilde{M}_{n+1}\delta^{(n+1)}}{(n+1)!}\varepsilon^{n+2} + a_{n+2}P\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right)\varepsilon^{n+2} + \ldots,$$

где $\tilde{M}_{n+1}$ – регуляризованный момент.

Тогда если M_n – первый отличный от нуля момент функции f, то мнемофункция вида $\frac{(-1)^n}{M_n\varepsilon^{n+1}} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ будет ассоциирована с $\delta^{(n)}$. В случае когда все моменты функции f до $n+1$ порядка включительно равны нулю, то мнемофункция $\frac{1}{a_{n+2}\varepsilon^{n+2}} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ будет ассоциирована с обобщенной функцией $P(1/x^{n+2}) + c\delta^{(n+1)}$, где c есть некоторая константа.

Таким образом получаем, что множество рациональных функций разбивается на классы эквивалентности в зависимости от того, с какими обобщенными функциями порожденные ими мнемофункции ассоциированы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. Т. 1. 470 с.
2. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1974. Т. 1. 392 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Асимптотическое разложение интегралов с медленно убывающим ядром // Доклады Академии наук СССР. 1959. Т. 126, № 1. С. 26–29.