Представим дифференциальное уравнения (1) в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = y_2, 0 \le x \le 1, \\ y_2' = -\frac{f}{\varepsilon} + \frac{b}{\varepsilon} y_1, \varepsilon > 0 \end{cases} \qquad (2)$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_2(a) = \gamma_1, \quad \alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 = 1, \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_2(b) = \gamma_2, \quad \alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 = 1, \end{cases} \qquad (3)$$

где $f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, α_i, β_i, γ_i – заданные постоянные. Предположим, что существует единственное искомое решение задачи (2), (3). Обозначим это решение через $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

В виде системы уравнений (2) можно представить любое линейное о. д. у. Граничные условия вида (3) представлены в общем виде, что позволяет рассматривать более широкий класс задач.

В зонах пограничных слоев вводим регулирующие множители $m_1(x,\varepsilon) > 0$ и $m_2(x,\varepsilon) > 0$. Их следует выбирать таким образом, чтобы произведения $m_1(x,\varepsilon)y_1(x)$ и $m_2(x,\varepsilon)y_2(x)$ были в необходимой мере стабилизированы.

Предлагаемая методика была подтверждена численным решением нескольких конкретных граничных задач с малым параметром при старшей производной с одним и двумя пограничными слоями. Она дает возможность решать граничные задачи с пограничными слоями с достаточно хорошей точностью.

УДК 517.977

А. А. Якименко, канд. физ.-мат. наук, доц.
(БГТУ, г. Минск)

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим линейную систему нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t), \ t > 0, \qquad (1)$$

где $A_i, i = 0,1,2$ - постоянные (2×2)-матрицы, b- ненулевой 2-вектор, $h > 0$- постоянное запаздывание. Не ограничивая общности, считаем $b' = [0,\, 1]$.

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00}x(t) + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{M} q'_{ij}x^{(i)}(t - jh) + \int_{-h}^{0} g'(s)x(t+s)\,ds, \qquad (2)$$

где q_{00}, q_{ij} $(i = 0,\ldots,L, j = 0,\ldots,M)$ - 2-векторы; $g(s)$, $s \in [-h,\ 0]$ – непрерывная 2-вектор-функция, $x^{(i)}(t) \overset{def}{=} \dfrac{d^i}{dt^i}x(t)$, $x^{(0)}(t) \equiv x(t)$.

Характеристическое уравнение системы (1) имеет следующий вид:

$$\det\left[A_0 + A_1e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2\right] \equiv \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \tilde{\alpha}_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \qquad (3)$$

где числа $\tilde{\alpha}_{ij}$ вычисляются как функции матриц A_i, $i = 0, 1, 2$, в частности $\tilde{\alpha}_{00} = \det A_0$, $\tilde{\alpha}_{20} = 1$, $\tilde{\alpha}_{22} = \det A_2$.

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперёд заданных чисел α_{ij}, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, 2$, $\alpha_{20} = 1$, найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет вид (ср. с (3)):

$$\det\left[A_0 + A_1e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2 + bU(\lambda)\right] \equiv \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \alpha_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h} = 0,$$

где $U(\lambda)$ – регулятор (2) в частотной области.

Введем (2×2)-матрицы:

$$\mathsf{A}(\lambda) = A_0 + A_1e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h},$$

$$W(\lambda) = \left[\mathsf{A}(\lambda)b,\quad b\right],\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим обще циклический случай:

$$\det W(\lambda) = c\left(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}\right), (c \neq 0).$$

Матрица $\mathsf{A}(\lambda)$ в этом случае имеет следующий вид:

$$\mathsf{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \beta_2\lambda e^{-\lambda h} & c\left(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}\right) \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где β_i, $i = 0, 1, 2$, $\gamma_0 -$ некоторые действительные числа; $a_j(\lambda)$, $j = 1, 2$ – квазиполиномы:

$$a_i(\lambda) = a_{i0} + a_{i1}e^{-\lambda h} + a_{i2}\lambda e^{-\lambda h},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$; $i = 1, 2, j = 0, 1, 2$.

Рассмотрим уравнение

$$\lambda^2 + (\gamma_1 - \beta_0)\lambda + \beta_1\gamma_0 - \beta_0\gamma_1 \equiv (\lambda - \xi_1)(\lambda - \xi_2) = 0, \quad \lambda, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}. \qquad (4)$$

Пусть выполнено условие:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi \in \mathbb{R}. \qquad (5)$$

Рассмотрим величину

$$\delta(\xi) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\xi h} - \xi.$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема. Для того, чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (2) в случае (5), необходимо и достаточно выполнения условия $\delta(\xi) \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае// Труды БГТУ. 2017. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 25–27.

УДК 517.444

Л. Д. Яроцкая, канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ СВЕРТОК ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПО ИНДЕКСУ

В монографии [1] разработан метод построения сверток для преобразований по индексу, композиционно связанных с преобразованием Конторовича – Лебедева в силу универсальной структуры их ядер. В частности, дано понятие обобщенной свертки $(f * g)$ двух функций f и g как операции умножения в некоторой алгебре, когда с помощью действия соответствующего интегрального оператора K на свертку получают обычное умножение образов, определенное равенством вида:

$$[K(f * g)](x) = [K_1 f](x)[K_2 g](x),$$

где K_1, K_2 – некоторые интегральные операторы. Если при определенных условиях имеет смысл обратный оператор от произведения функций, то в некотором пространстве функций свертка определяется равенством Парсеваля:

$$(f * g)(x) = K^{-1}([K_1 f][K_2 g])(x).$$