УДК 517.948

С.В. Пономарева, доц., канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск);
О.Н. Пыжкова, доц., канд. физ.-мат.наук (БГТУ, г. Минск)

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ГО РОДА

Будем рассматривать уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_{c,r}(x)} c(\mathbf{x}-\mathbf{t})(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-\mathbf{1}}\,\mathbf{ln}^{\beta}\frac{\gamma}{\mathbf{x}-\mathbf{t}}\phi(\mathbf{t})\,d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}),\left(\mathbf{x}\in \mathbf{A_{c,r}}(\mathbf{b}),\ \mathbf{0}<\alpha<\mathbf{1}\right).$$

в пространстве $I_{A_{c,r}}(L_1)$ абсолютно непрерывных на пирамидальной области $\mathbf{A_{c,r}}(\mathbf{b})=\{\mathbf{t}\in \mathbf{R^n} : \mathbf{A}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq 0,\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r\geq 0\}$ в $\mathbf{R^n}$ с вершиной в точке $\mathbf{b}$ функций с нецелыми степенями логарифма в предположении абсолютной непрерывности функции $c(x)$ и $0<\alpha<1,\ \beta>-1$.

Решение многомерного уравнения с целыми степенями логарифма по пирамидальной области в пространствах непрерывных и интегрируемых функций см. в [2], одномерного уравнения с нецелыми степенями логарифмов и условия его разрешимости в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций - в [3]. Формула обращения уравнений с нецелыми степенями логарифма не может быть скопирована с целого случая из-за особенностей метода решения и приходится использовать специальную функцию $\mu_{\alpha,\beta}(\mathbf{x})$ вместо $\nu_h(\mathbf{x})$. Определения и свойства этих специальных функций см. в [4].

В монографии [1] приводится формула обращения одномерного интегрального оператора типа свертки

$$\left(I_{a+}^{\alpha,\beta}\varphi\right)(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}\phi(t)\,dt = f(x),\quad (a<x<b<\infty)$$

и условия разрешимости уравнения на отрезке. Сформулируем многомерный аналог этого утверждения для модельной пирамиды $\mathbf{E_1}(\mathbf{b})=\{\mathbf{t}\in \mathbf{R^n} : \mathbf{b}\geq\mathbf{t},\ \mathbf{t}\cdot\mathbf{1}\geq 0\}$ (для общего случая можно использовать линейные формулы перехода и результаты будут аналогичными).

Теорема 1. Для разрешимости уравнения

$$\left(\mathrm{I}_{\mathrm{E_1(x)}}^{\alpha,\beta}\varphi\right)(\mathrm{x})\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\mathrm{E_1(x)}} \mathrm{c}(\mathbf{x}-\mathbf{t})(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1}\,\mathbf{ln}^{\beta}\frac{\gamma}{\mathbf{x}-\mathbf{t}}\varphi(\mathbf{t})\mathrm{d}\mathbf{t} = \mathrm{f}(\mathbf{x}),$$

в пространстве $\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L_1})$ необходимо и достаточно, чтобы свободный член f был представим в виде

$$\mathrm{f}(\mathbf{x}) = \int\limits_{E_1(x)} \mu_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{t})\chi(\mathbf{t})\mathrm{d}\mathbf{t},\ \chi(\mathbf{t}) \in \mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L_1})$$

При выполнении этого условия решение φ единственно и выражается формулой

$$\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{E} + \mathbf{T}_\psi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{\gamma} \int\limits_{E_1(x)} \mu_{1-\alpha,-\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{t}) \mathrm{f}(\mathbf{t}) \mathrm{d}\mathbf{t} \right)$$

где оператор $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n} \right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Пономарева, С.В. Решение интегральных уравнений первого рода в некоторых пространствах / Физико-математические науки: тезисы 79-й науч.-техн. конференции, Минск, 2-6 февраля 2016 г. / УО БГТУ. – Минск: БГТУ, 2016. – 44 с. стр 37.

3. Пономарева, С.В. Достаточные условия разрешимости уравнений со степенно-логарифмическими ядрами с действительной степенью логарифма / С.В. Пономарева, О.Н.Пыжкова // Труды БГТУ. – 2017. – № 2 (194): Физ.-мат. науки и информатика. – С.11 – 14.

4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – М.: Наука, 1965-1967. – Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. – 1967. – 299 с.

УДК 519.626.2

И.Ф. Соловьева (БГТУ, г. Минск)

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Рассмотрим двухточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида:

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x),\ 0 < x < 1, \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad b(x) > 0, \quad \varepsilon > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр при старшей производной. Задача вида (1) имеет два пограничных слоя.