Установа адукацыі
«БЕЛАРУСКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ТЭХНАЛАГІЧНЫ УНІВЕРСІТЭТ»

Г.М. ХВЯСЬКО

ТЭАРЭТЫЧНАЯ МЕХАНІКА

Практыкум

У 2-х частках

Частка 1

Дапушчана Міністэрствам адукацыі Рэспублікі Беларусь у якасці вучэбнага дапаможніка для студэнтаў тэхнічных спецыяльнасцей устаноў, якія забяспечваюць атрыманне вышэйшай адукацыі

Мінск 2004

УДК 531
ББК 22.21
Х 30

Р э ц э н з е н т ы :
кафедра тэарэтычнай механікі Беларускага нацыянальнага тэхнічнага універсітэта (загадчык кафедры доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар А.У. Чыгарэў);
прафесар кафедры інжынернай графікі Беларускага дзяржаўнага універсітэта інфарматыкі і радыёэлектронікі, доктар тэхнічных навук В.М. Сурын

Хвясько Г.М.
Х 30 Тэарэтычная механіка. Практыкум: У 2 ч. Ч. 1: Вучэбны дапаможнік для студэнтаў тэхнічных спецыяльнасцей / Г.М. Хвясько.— Мн.: БДТУ, 2004.— 187 с.: іл.

ISBN 985-434-273-5

Практыкум змяшчае трынаццаць заданняў па статыцы і дванаццаць па кінематыцы.

Па кожнаму заданню прыведзены прыклады рашэнняў, дадзены неабходныя парады па прымяненню тэорыі ў канкрэтных задачах. Прыведзеная колькасць варыянтаў заданняў дазваляе фарміраваць разліковыя работы па статыцы і кінематыцы для студэнтаў вочнай і завочнай форм навучання вышэйшых тэхнічных навучальных устаноў.

УДК 531
ББК 22.21

ISBN 985-434-273-5 (ч. 1)
ISBN 985-434-272-7

ПРАДМОВА

Нельга пераацаніць уклад тэарэтычнай механікі ў падрыхтоўку інжынераў самых розных спецыяльнасцей. Яе законы і вывады шырока выкарыстоўваюцца ў такіх дысцыплінах, як супраціўленне матэрыялаў, тэорыя механізмаў і машын, дэталі машын, і многіх спецыяльных дысцыплінах.

Якаснае засваенне курса тэарэтычнай механікі прадугледжвае, акрамя добрых ведаў тэарэтычнага матэрыялу, валоданне цвёрдымі навыкамі рашэння задач. Ніякая дадатковая колькасць задач, рэшаных самастойна студэнтам па ўсіх раздзелах курса, не будзе лішняю.

Змешчаныя заданні дазваляюць фарміраваць разліковыя работы па статыцы і кінематыцы для студэнтаў розных спецыяльнасцей вочнай і завочнай форм навучання.

Практыкум змяшчае трынаццаць заданняў па статыцы і дванаццаць — па кінематыцы, кожнае заданне мае трыццаць варыянтаў. У складанні задач задання С-2 прыняў удзел дацэнт Э.Г. Гецэвіч.

Прыклады выканання заданняў або неабходныя парады па рашэнню задач даюць студэнтам магчымасць працаваць над выкананнем заданняў самастойна. Наборы варыянтаў заданняў для разліковых работ прыведзены адпаведна шыфрам студэнтаў у табліцы, размешчанай у канцы дапаможніка.

Ва ўсіх заданнях статыкі, акрамя тых, дзе іншае абумоўлена ў тэксце, цела лічыцца аднародным пры вызначэнні месцазнаходжання яго цэнтра цяжару. У тэксце і на рысунках абазначэнні вектарных велічынь ад скалярных адрозніваюцца больш тоўстым шрыфтам.

Аўтар выказвае шчырую падзяку рэктару БДТУ прафесару І.М. Жарскаму за дзейсную падтрымку выдання дапаможніка, а таксама загадчыку кафедры тэарэтычнай механікі БДТУ прафесару В.С. Віхрэнку і загадчыку кафедры паліграфіі БДТУ прафесару М.І. Кулаку за вялікую дапамогу ў падрыхтоўцы рукапісу дапаможніка да выдання.

СТАТЫКА

1. Плоская сістэма сіл

Сыходная сістэма сіл

З а д а н н е С - 1

Вызначэнне рэакцый апор і нагрузак у стрыжнях плоскай фермы

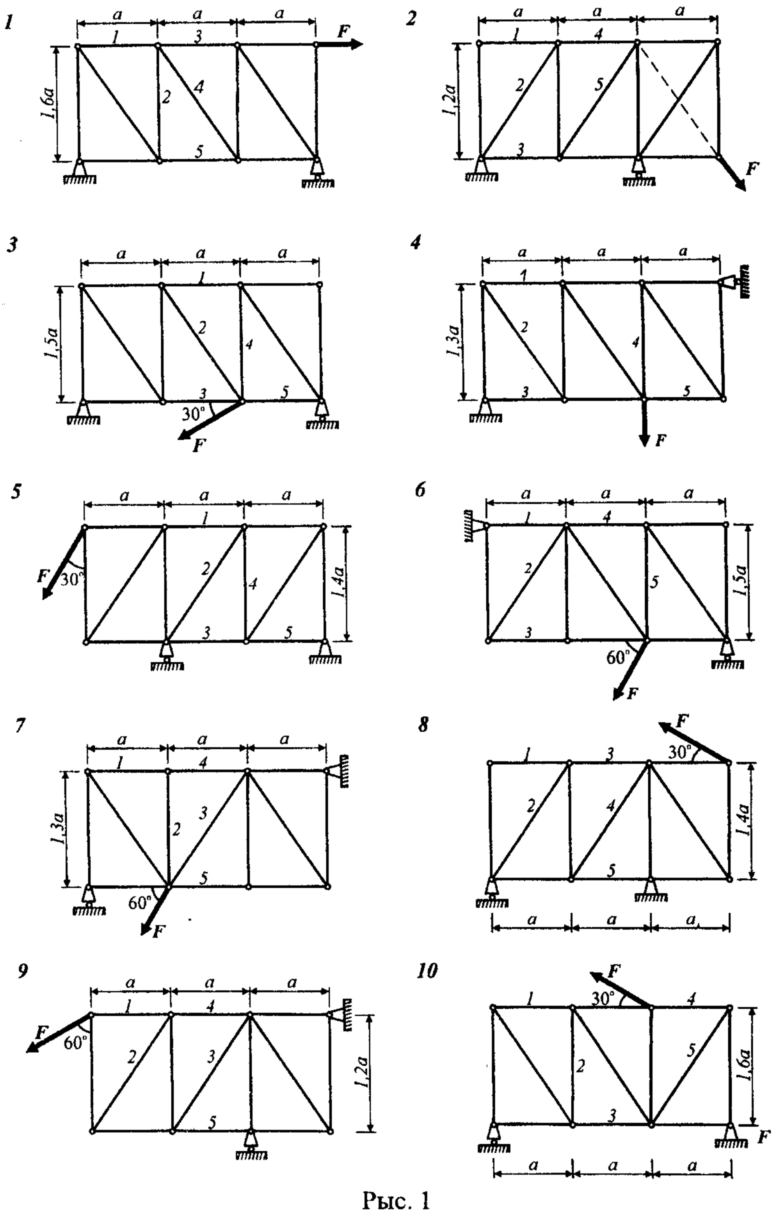
Несвабодная плоская ферма знаходзіцца ў стане раўнавагі пад уздзеяннем сілы F=5 кН, якая прыкладзена ў вузле фермы. Вызначыць рэакцыі апор фермы і нагрузкі ва ўсіх стрыжнях.

Схемы фермаў і неабходныя даныя прыведзены на рыс. 1 – 3.

Прыклад рашэння задання С-1

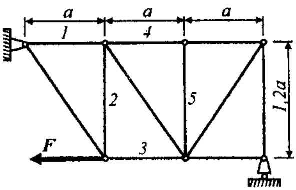
Дадзена: схема фермы (рыс. 4),F=2 кН, α=30°. Вызначыць рэакцыі апор і нагрузкі ў стрыжнях.

Р а ш э н н е . Разглядаем раўнавагу фермы ABC. На яе накладзены дзве сувязі: нерухомы цыліндрычны шарнір у пункце А і бязважкі стрыжань OB у пункце B. Адкінем умоўна сувязі і заменім іх рэакцыямі сувязей. Рэакцыя $\mathbf{R}_B$ бязважкага стрыжня накіравана ўздоўж яго. На ферму як на адно цвёрдае цела дзейнічаюць тры непаралельныя сілы ($\mathbf{F}$, $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{R}_B$), лініі дзеяння якіх згодна з тэарэмаю аб трох сілах перасякаюцца ў адным пункце. Дакладна ведаем накірункі сілы $\mathbf{F}$ і рэакцыі $\mathbf{R}_B$ бязважкага стрыжня OB. Знаходзім пункт M перасячэння ліній дзеяння дзвюх названых сіл. Праз пункт M і пункт A пройдзе лінія дзеяння рэакцыі $\mathbf{R}_A$ нерухомага цыліндрычнага шарніра. Паказваем рэакцыю $\mathbf{R}_A$. Бачым, што ферма ABC знаходзіцца ў раўнавазе пад уздзеяннем плоскай сыходнай сістэмы сіл. Паказваем восі каардынат Bxy і запісваем ураўненні раўнавагі згодна з ўмовамі раўнавагі атрыманай сістэмы сіл.

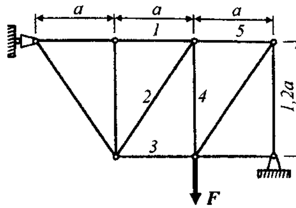

1
a
1,6a
F
2
a
1,2a
F
3
a
1,5a
30°
F
4
a
1,3a
F
5
a
1,4a
F
30°
6
a
1,5a
60°
F
7
a
1,3a
60°
F
8
a
1,4a
F
30°
9
a
1,2a
F
60°
10
a
1,6a
F
30°

Рыс. 1

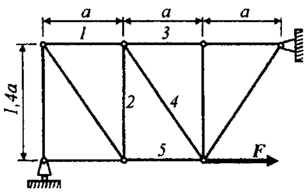
11



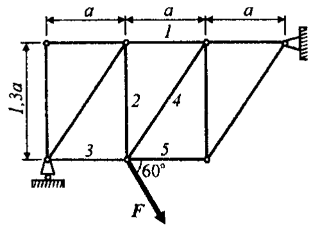
12



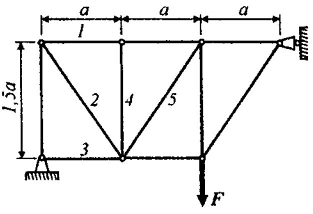
13



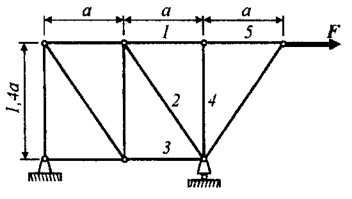
14



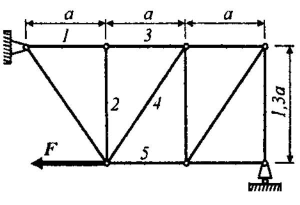
15



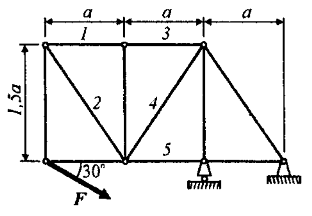
16



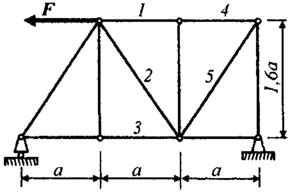
17



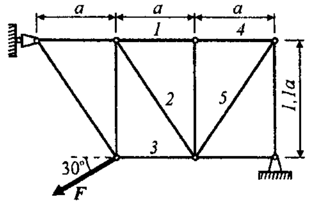
18



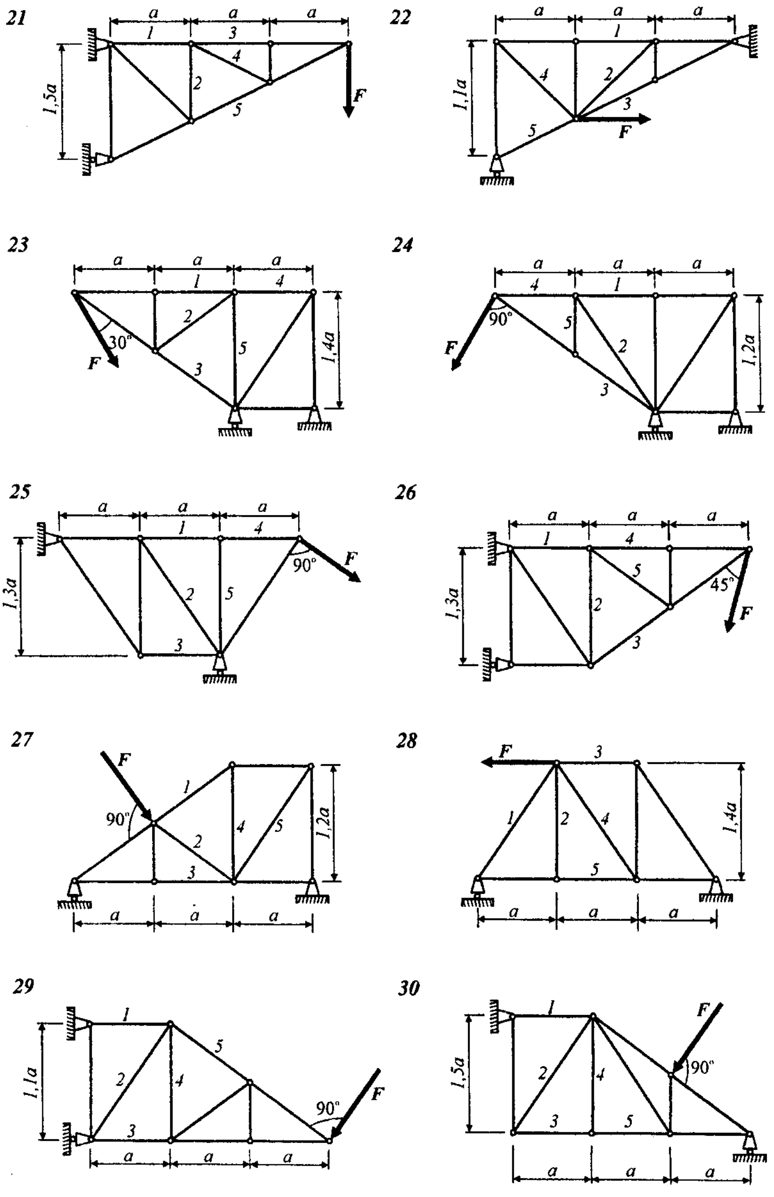
19



20



Рыс. 2



Рыс. 3

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad R_A \sin\varphi - R_B \cos\alpha - F\cos(\alpha+\beta) = 0\,;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad R_A \cos\varphi + R_B \sin\alpha - F\sin(\alpha+\beta) = 0\,.$$

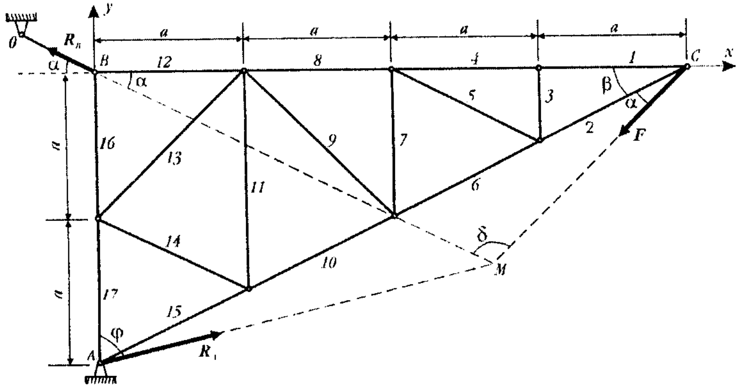
Падлічым спачатку вуглы β і φ.

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{2a}{4a} = 0{,}5, \quad \beta = 26{,}57°\,.$$

Па тэарэме сінусаў у трохвугольніку BCM знойдзем старану BM.

$$\frac{BC}{BM} = \frac{\sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad \delta = 180° - \alpha - (\alpha+\beta) = 93{,}43\,;$$

$$BM = BC\frac{\sin 56{,}57°}{\sin 93{,}43°} = 4a\frac{0{,}835}{0{,}998} = 3{,}347a.$$



Рыс. 4

З трохвугольніка ABM па тэарэме косінусаў знаходзім старану AM.

$$AM = \sqrt{(AB)^2 + (BM)^2 - 2AB\cdot BM\cdot\cos(90° - \alpha)}\,,$$

$$AM = \sqrt{4a^2 + 11{,}2a^2 - 6{,}69a^2} = 2{,}917a.$$

Па тэарэме сінусаў у трохвугольніку ABM знойдзем вугал φ.

$$\frac{AM}{BM}=\frac{\sin 60°}{\sin\varphi}, \quad \sin\varphi=\frac{BM}{AM}\sin 60°=\frac{3{,}347a}{2{,}917a}\cdot 0{,}866=0{,}994;$$

$$\varphi=83{,}54°.$$

Цяпер маем магчымасць падставіць значэнні трыганаметрычных функцый ва ўраўненні раўнавагі і вызначыць рэакцыі R_A і R_B.

$$\begin{cases} R_A\cdot 0{,}994-R_B\cdot 0{,}866-2\cdot 0{,}551=0, \\ R_A\cdot 0{,}112+R_B\cdot 0{,}5-2\cdot 0{,}834=0. \end{cases}$$

Памножым другое ўраўненне на 1,732 з мэтаю выраўняць каэфіцыенты пры R_B і складзём пачленна першае і другое ўраўненні.

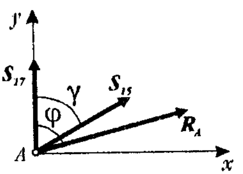
$$\begin{cases} R_A\cdot 0{,}994-R_B\cdot 0{,}866-1{,}102=0, \\ R_A\cdot 0{,}194+R_B\cdot 0{,}866-2{,}889=0. \end{cases}$$

$$R_A\cdot 1{,}188-3{,}991=0, \;\; R_A=3{,}36\,\text{кН};$$

$$3{,}36\cdot 0{,}994-\mathrm{R_B}\cdot 0{,}866-1{,}102=0;$$

$$0{,}866R_B=2{,}238, \;\; R_B=2{,}58\,\text{кН}.$$

Для вызначэння нагрузак у стрыжнях фермы будзем па чарзе разглядаць раўнавагу вузлоў фермы. Пры гэтым парадак разгляду вузла будзе дыктавацца патрабаваннем наяўнасці ўздзеяння на вузел не больш за дзве невядомыя сілы (маем магчымасць для плоскай сыходнай сістэмы сіл скласці толькі два незалежныя ўраўненні раўнавагі).



Разгледзім раўнавагу вузла А. На яго накладзены тры сувязі: нерухомы цыліндрычны шарнір, бязважкія стрыжні 15 і 17. Рэакцыя шарніра R_A падлічана. Рэакцыі стрыжняў накіроўваем уздоўж іх, мяркуючы пры гэтым, што яны расцягнутыя. У стане раўнавагі знаходзіцца плоская сыходная сістэма сіл.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad R_A \sin\varphi + S_{15} \sin\gamma = 0;$$

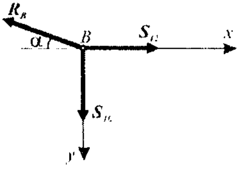
$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad R_A \cos\varphi + S_{15} \cos\gamma + S_{17} = 0;$$

$$\gamma = 90° - \beta = 63{,}43°.$$

$$\begin{cases} 3{,}36 \cdot 0{,}994 + S_{15} \cdot 0{,}894 = 0, \\ 3{,}36 \cdot 0{,}112 + S_{15} \cdot 0{,}447 + S_{17} = 0. \end{cases}$$

$$S_{15} = -3{,}73 \text{ кН}, \quad S_{17} = 1{,}29 \text{ кН}.$$

Атрыманы адмоўны адказ сведчыць аб тым, што на самай справе стрыжань 15 сціснуты.



Разгледзім раўнавагу вузла B. На яго накладзены тры сувязі: бязважкія стрыжні 12, 16 і OB.

Рэакцыя R_B стрыжня OB падлічана. Паказваем рэакцыі ўсіх стрыжняў і атрымліваем плоскую сыходную сістэму сіл, якая ўраўнаважана.

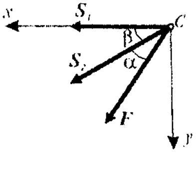
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad S_{12} - R_B \cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad S_{16} - R_B \sin\alpha = 0.$$

Падставім вядомыя значэнні і знойдзем S_{12} і S_{16}.

$$S_{12} = R_B \cos\alpha = 2{,}58 \cdot 0{,}866 = 2{,}23 \text{ кН}.$$

$$S_{16} = R_B \sin\alpha = 2{,}58 \cdot 0{,}5 = 1{,}29 \text{ кН}.$$



Разгледзім раўнавагу вузла C. На яго накладзены дзве сувязі: бязважкія стрыжні 1 і 2. Паказваем рэакцыі $\mathbf{S}_1$ і $\mathbf{S}_2$ стрыжняў. Разам з вядомаю сілаю **F** яны ўтварылі плоскую сыходную сістэму сіл, якая знаходзіцца ў стане раўнавагі.

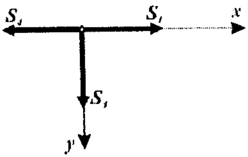
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad S_1 + S_2 \cos\beta + F\cos(\alpha + \beta) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad S_2 \sin\beta + F\sin(\alpha+\beta) = 0.$$

Падставім вядомыя значэнні і падлічым S_1 і S_2.

$$S_2 = -\frac{F\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = -\frac{2\cdot 0{,}834}{0{,}447} = -3{,}73 \text{ кН};$$

$$S_1 = -S_2\cos\beta - F\cos(\alpha+\beta) = 3{,}73\cdot 0{,}894 - 2\cdot 0{,}551 = 2{,}23 \text{ кН}.$$

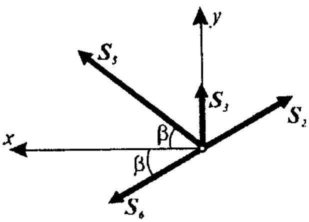


З адказаў відаць, што стрыжань 1 расцягнуты, а стрыжань 2 – сціснуты. Разгледзім раўнавагу вузла, на які накладзены 3 сувязі: бязважкія стрыжні 1, 3, 4. Пакажам рэакцыі сувязей. У стане раўнавагі знаходзіцца плоская сыходная сістэма сіл.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad S_1 - S_4 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad S_3 = 0.$$

$$S_4 = S_1 = 2{,}23 \text{ кН}, \quad S_3 = 0.$$



Стрыжань 3 не нагружаны.

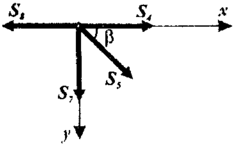
Разгледзім раўнавагу вузла, на які накладзены 4 сувязі: бязважкія стрыжні 2, 3, 5, 6. Пакажам рэакцыі сувязей. У раўнавазе знаходзіцца плоская сыходная сістэма сіл.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad S_5\cos\beta + S_6\cos\beta - S_2\cos\beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad S_5\sin\beta - S_6\sin\beta + S_3 + S_2\sin\beta = 0.$$

$$\begin{cases} S_5 + S_6 = -3{,}73, \\ S_5 - S_6 = 3{,}73. \end{cases}$$

$$2S_5 = 0, \; S_5 = 0, \quad S_6 = -3{,}73 \text{ кН}.$$

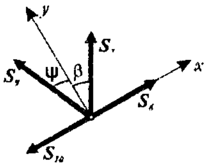


Разгледзім раўнавагу вузла, на які накладзены 4 сувязі: бязважкія стрыжні 4, 5, 7, 8. Пакажам рэакцыі сувязей. Атрымалі плоскую сыходную сістэму сіл, якая знаходзіцца ў стане раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad S_4 + S_5 \cos\beta - S_8 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad S_7 + S_5 \sin\beta = 0.$$

$$\begin{cases} S_4 - S_8 = 0, \\ S_7 = 0; \end{cases} \qquad \begin{aligned} S_8 = S_4 &= 2{,}23 \text{ кН}. \\ S_7 &= 0. \end{aligned}$$



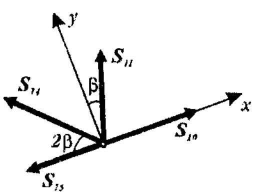
Разгледзім раўнавагу вузла, на які накладзены 4 сувязі: бязважкія стрыжні 6, 7, 9, 10. Пакажам рэакцыі сувязей. У раўнавазе знаходзіцца плоская сыходная сістэма сіл.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad S_6 + S_7 \sin\beta - S_9 \sin\psi - S_{10} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad S_7 \cos\beta + S_9 \cos\psi = 0.$$

$$\begin{cases} S_6 - S_9 \sin\psi - S_{10} = 0, \\ S_9 \cos\psi = 0. \end{cases}$$

$$S_9 = 0. \quad S_{10} = S_6 = -3{,}73 \text{ кН}.$$



Разгледзім раўнавагу вузла, на які накладзены 4 сувязі: бязважкія стрыжні 10, 11, 14, 15. Пакажам рэакцыі сувязей. У стане раўнавагі знаходзіцца плоская сыходная сістэма сіл.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad S_{10} - S_{15} + S_{11} \sin\beta - S_{14} \cos 2\beta = 0;$$

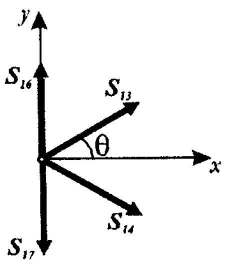
$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad S_{11}\cos\beta + S_{14}\sin 2\beta = 0.$$

Падставім лікавыя значэнні вядомых велічынь і знойдзем S_{11} і S_{14}.

$$\begin{cases} -3{,}73 + 3{,}73 + S_{11}\cdot 0{,}447 - S_{14}\cdot 0{,}6 = 0, \\ S_{11}\cdot 0{,}894 + S_{14}\cdot 0{,}8 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}447 S_{11} - 0{,}6 S_{14} = 0, \\ 0.894 S_{11} + 0{,}8 S_{14} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0{,}745 S_{11} - S_{14} = 0, \\ 1{,}117 S_{11} + S_{14} = 0. \end{cases}$$

$$1{,}862 S_{11} = 0, \quad S_{11} = 0, \quad S_{14} = 0.$$



Разгледзім раўнавагу вузла, на які накладзены 4 сувязі: бязважкія стрыжні 16,13,14,17. Пакажам рэакцыі сувязей. У стане раўнавагі знаходзіцца плоская сыходная сістэма сіл. З чатырох сіл ведаем тры: S_{16}, S_{17}, S_{14}, прычым S_{14}=0. Тады S_{13} знаходзім з аднаго ўраўнення.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad S_{13}\cos\theta = 0, \quad S_{13} = 0.$$

Заданне С-2

Вызначэнне рэакцый сувязей цела

1. Бязважкія стрыжні *AB* і *AC* злучаны шарнірна са сцяною і паміж сабою (рыс. 5). У вузле *A* прымацаваны трос, які перакінуты праз блок *D* і ўтрымлівае груз вагою 100 Н. Вызначыць нагрузкі ў стрыжнях і рэакцыю восі блока, калі $\alpha = 60°$, $\beta = 80°$, $\gamma = 100°$.

2. Бязважкія стрыжні *AB* і *AC* злучаны шарнірна са сцяною і паміж сабою (рыс. 5). На восі шарніра *A* размешчаны блок, памеры якога можна не ўлічваць. Праз блок перакінуты трос, адзін канец якога прымацаваны да сцяны, а другі ўтрымлівае груз

вагою $G = 200$ Н. Вызначыць нагрузкі ў стрыжнях, калі $\alpha = 45°, \beta = 110°, \gamma = 60°$.

3. Каток, вага якога 800 Н і радыус 30 см, знаходзіцца ў спакоі на гарызантальнай плоскасці (рыс. 5). Вызначыць найменшую сілу Q, накіраваную пад вуглом α=15°, якая забяспечыць перакочванне катка праз перашкоду вышынёю h=10 см, і рэакцыю выступу B. Апісаць залежнасць сілы Q ад вышыні перашкоды h пры фіксаваным вугле α і залежнасць Q ад вугла α пры фіксаваным значэнні h.

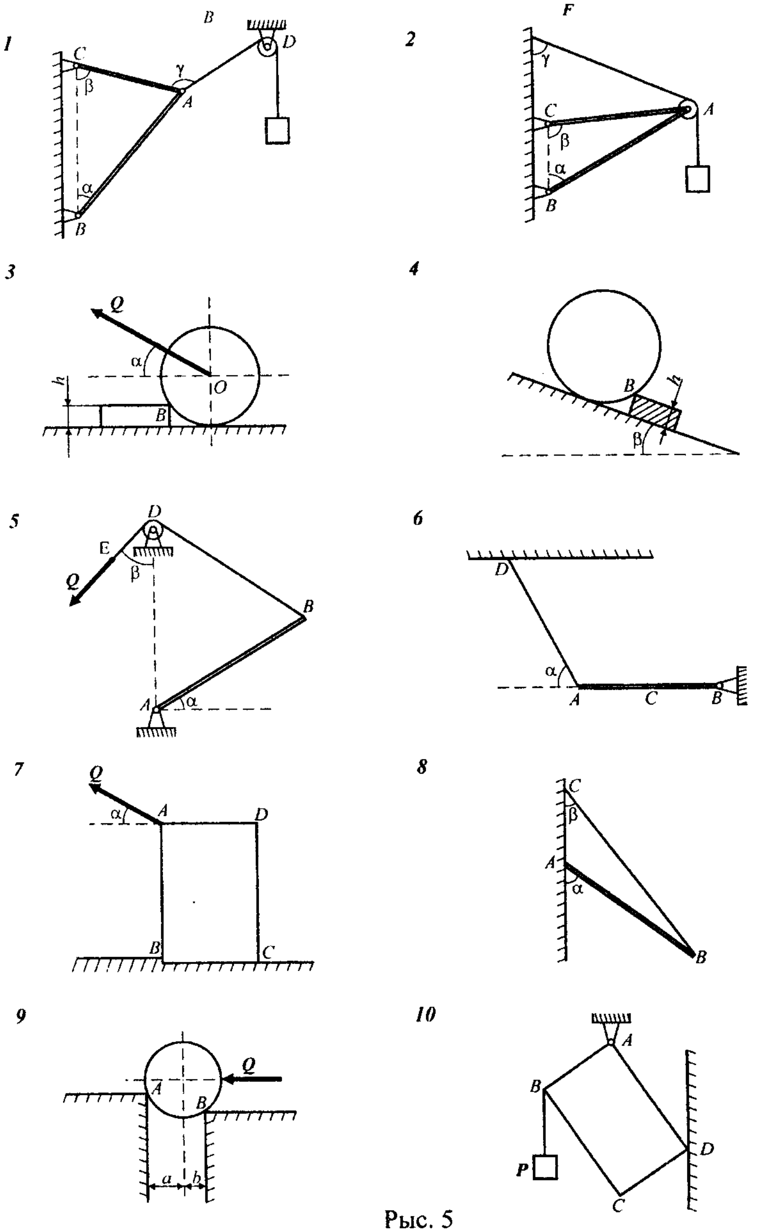
4. Цяжкі цыліндр, радыус якога 0,5 м і вага 600 Н, знаходзіцца ў спакоі на нахіленай пад вуглом β паверхні (рыс. 5). Ад качэння ўніз цыліндр утрымліваецца выступам, вышыня якога h=20 см. Вызначыць найменшы вугал β, пры якім цыліндр скоціцца ўніз, і рэакцыю выступу пры гэтым. Устанавіць сувязь паміж вуглом β і радыусам цыліндра r пры яго перакочванні праз выступ.

5. Аднародны брусок AB, вага якога 180 Н і даўжыня 1 м, прымацаваны да апоры A, а ў пункце B да яго прывязаны трос, перакінуты праз блок D (рыс. 5). Якую сілу Q належыць прыкласці ў пункце E троса, каб утрымаць брусок у раўнавазе? Вызначыць пры гэтым рэакцыі шарніра A і восі блока D, калі AB=AD, α=20°, β=40°.

6. Неаднародная бэлька AB, вага якой 800 Н, замацавана шарнірна ў пункце B. Бэльку ўтрымлівае ў гарызантальным становішчы трос AD, прымацаваны ў пункце А (рыс. 5). Знайсці нацяг троса і рэакцыю шарніра B, калі AB=150 см, α=60°, адлегласць ад пункта B да цэнтра цяжару бэлькі CB=50 см.

7. Аднародны прамавугольны брусок $ADCB$, вага якога 120 Н, знаходзіцца ў спакоі на гарызантальнай пляцоўцы, на якой у пункце В ёсць невялікі выступ (рыс. 5). Знайсці найменшую сілу Q, якую неабходна прыкласці да бруска ў пункце А, каб перакуліць яго паваротам вакол выступу В, і рэакцыю выступу пры гэтым, калі AB=100 см, BC=50 см, α=10°.

8. Адзін канец аднароднага бруска вагою 100 Н апіраецца на гладкую вертыкальную сцяну, а другі – падтрымліваецца тросам, прымацаваным да сцяны ў пункце C (рыс. 5). Вызначыць рэакцыі сувязей, накладзеных на брусок пры α=60°. Знайсці залежнасць рэакцыі сцяны ад вугла α.


1
B
C
D
β
γ
A
α
B
2
F
γ
C
A
β
α
B
3
Q
α
h
O
B
4
B
h
β
5
D
E
Q
β
B
A
α
6
D
α
A
C
B
7
Q
α
A
D
B
C
8
C
β
A
α
B
9
Q
A
B
a
b
10
A
B
P
D
C

Рыс. 5

9. Рэзервуар цыліндрычнай формы, вага якога 1500 Н і радыус 80 см, апіраецца на нерухомыя выступы A і B. Рэзервуар знаходзіцца пад уздзеяннем ветравога ціску, раўнадзейная якога **Q** накіравана ўздоўж гарызантальнага дыяметра цыліндра (рыс. 5). Разглядаючы раўнавагу папярочнага сячэння рэзервуара як цвёрдага цела, знайсці рэакцыі выступаў A і B пры Q=200 Н, а таксама найменшае значэнне сілы Q, пры якой рэзервуар павернецца вакол выступу А і закоціцца на гарызантальную пляцоўку. a=60 см, b=35 см.

10. Бязважкая прамавугольная пласціна замацавана шарнірна ў пункце A, а ў пункце D апіраецца на вертыкальную гладкую сцяну (рыс. 5). У пункце B да пласціны падвешаны груз, вага якога 70 Н. Вызначыць рэакцыі сувязей, накладзеных на пласціну, калі CD=40 см, AD=80 см.

11. Цыліндр, вага якога 100 Н і радыус 25 см, апіраецца на вертыкальную сцяну і на брусок AB (рыс. 6). Брусок AB прымацаваны ў пункце A шарнірна да сцяны, а другім канцом свабодна апіраецца на вертыкальную сцяну. Не ўлічваючы вагу бруска і трэнне на апорных паверхнях, вызначыць рэакцыі сувязей бруска, калі AB=100 см, α=30°.

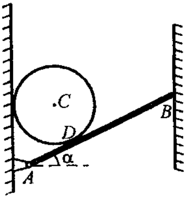
12. Па гладкім стрыжні AB можа рухацца кольца D, да якога прымацаваны два тросы аднолькавай даўжыні: AOD=DO_1B=AB= =60 см (рыс. 6). Па тросах могуць перамяшчацца бязважкія блокі, якія нясуць грузы вагой P=20 Н і Q. Вызначыць пры раўнавазе сістэмы ціск кольца на стрыжань і вагу груза Q, калі DB=20 см.

13. Бязважкая бэлька AB замацавана шарнірна ў пункце B і праз рухомы шарнір апіраецца на гладкую гарызантальную паверхню (рыс. 6). У пункце C бэлькі на яе дзейнічае сіла F=160 Н пад вуглом α=40°. Вызначыць рэакцыі апор бэлькі, калі AC=0,4 м, CB=0,6 м.

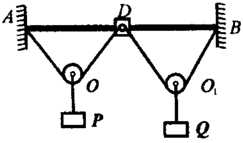
14. Брусок AB шарнірна замацаваны ў пункце B, а другім канцом апіраецца на гладкую крывалінейную паверхню (рыс. 6). Датычная да паверхні ў пункце A складае вугал β=30° з бруском. На брусок у пункце C дзейнічае пад вуглом α=80° сіла F=240 Н. Вызначыць рэакцыі апор, калі AC=0,5 м, CB=0,6 м.

15. Аднародная пласціна ў выглядзе прамавугольнага трохвугольніка ABC прымацавана да сцяны шарнірам C і апіраецца на гладкую нахіленую паверхню ў пункце A, пры гэтым катэт BC гарызантальны (рыс. 6). Вага пласціны 180 Н, AB=0,5 м, BC=0,9 м. Вызначыць рэакцыі сувязей у пунктах A і C, калі α=55°.

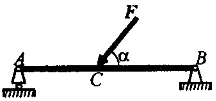
11



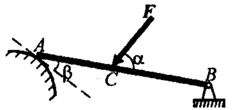
12



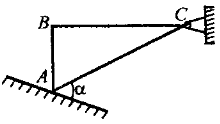
13



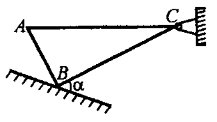
14



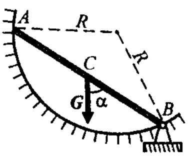
15



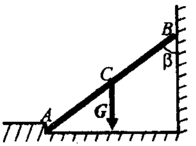
16



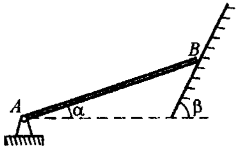
17



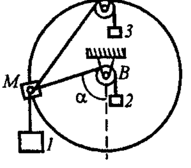
18



19



20



Рыс. 6

16. Аднародны прамавугольны трохвугольнік *ABC* знаходзіцца ў раўнавазе і апіраецца прамым вуглом B на нахіленую гладкую паверхню, якая складае вугал α=70° з катэтам *BC* (рыс. 6). У пункце *C* трохвугольнік прымацаваны шарнірна да сцяны так, што гіпатэнуза *AC* гарызантальная. Вызначыць рэакцыі сувязей, калі вага трохвугольніка 150 Н, *AB*=0,5 м, *BC*=0,8 м.

17. Бэлька *AB*, вага якой 250 Н, а даўжыня *AB*=2*AC*=100 см, замацавана шарнірна ў пункце *B* (рыс. 6). Нерухомая акружнасць, радыус якой *R*=70 см, праходзіць праз канцы бэлькі, утвараючы для яе апорную гладкую крывалінейную паверхню ў пункце *A*. Вызначыць рэакцыі апор бэлькі, калі α=50°.

18. Бэлька *AB*, вага якой 200 Н, апіраецца канцом *B* на гладкую вертыкальную сцяну. Ад праслізгвання па гарызантальнай паверхні яе ўтрымлівае ў пункце *A* выступ (рыс. 6). Вызначыць рэакцыі сувязей, калі *AC*=0,6 м, *CB*=0,7 м, β=70°.

19. Аднародны брусок *AB*, вага якога 180 Н і даўжыня 120 см, адным канцом прымацаваны шарнірам да апоры *A*, а другім — апіраецца на гладкую нахіленую паверхню (рыс. 6). Вызначыць рэакцыі сувязей, калі α=25°, β=65°.

20. На гладкую драцяную акружнасць, якая знаходзіцца ў вертыкальнай плоскасці, надзета бязважкае кольца *M*, да якога на тросе прымацаваны груз 1 (рыс. 6). Два другія тросы з грузамі 2 і 3 таксама прымацаваны да кольца і перакінуты праз блокі *A* і *B*, якія знаходзяцца ў цэнтры акружнасці і ў найвышэйшым яе пункце. Вызначыць вугал α і рэакцыю акружнасці пры раўнавазе кольца, калі сілы цяжару грузаў G_1=30 Н, G_2=10 Н, G_3=20 Н. Знайсці таксама рэакцыі восей блокаў *A* і *B*.

21. Стрыжань *AB*, вагу якога не ўлічваем, прымацаваны шарнірамі: у пункце *A* – да нерухомай паверхні, у пункце *B* – да паўзуна, які надзеты на гладкі гарызантальны нерухомы стрыжань (рыс. 7). У пункце *C* да стрыжня прымацаваны трос, перакінуты праз блок *D*, на канцы якога вісіць груз вагою 280 Н. Вызначыць рэакцыі шарніраў *A* і *B* і рэакцыю восі блока *D*, калі *BC*=55 см, *CA*=50 см, α=45°, β=50°.

22. Груз *M*, вага якога 30 Н, знаходзіцца ў раўнавазе на гладкай цыліндрычнай паверхні (рыс. 7). Ніткі, прывязаныя да груза і перакінутыя праз блокі *A* і *B*, утрымліваюць на канцах грузы M_1 і M_2. Не ўлічваючы памеры груза *M* і блокаў, вызначыць вагу груза M_2 і

рэакцыю цыліндрычнай паверхні, калі α=60°, вага груза M_1 роўная 20 Н, *AB* – гарызантальны дыяметр цыліндра. Знайсці таксама значэнне сілы цяжару груза *M*, пры якой ён адрываецца ад апорнай паверхні.

23. Бязважкія стрыжні 1, 2 і 3, злучаныя шарнірна паміж сабою і з нерухомымі апорамі ў пунктах *D* і *C*, знаходзяцца ў раўнавазе пад уздзеяннем сіл *P* і *Q* (рыс. 7). Знайсці значэнне сілы *Q* і нагрузкі ў стрыжнях, калі *P*=40 Н, α=90°, β=120°, φ=60°, γ=45°. Вызначыць таксама найменшае значэнне вугла γ, пры якім канструкцыя губляе раўнавагу незалежна ад велічыні сілы *Q*.

24. Аднародны брусок *AB*, вага якога 120 Н, прымацаваны шарнірам да вертыкальнай сцяны (рыс. 7). У зададзеным становішчы ён утрымліваецца тросам *BD*. Вызначыць нацяг троса і рэакцыю шарніра, калі α=70°, β=50°. Знайсці таксама залежнасць нацягу троса ад вугла β пры яго змяненні.

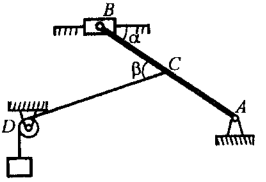
25. Аднародны брусок *AB*, вага якога 120 Н, шарнірна прымацаваны да сцяны ў пункце *A* і складае з вертыкаллю вугал α=40° (рыс. 7). У пункце *D* брус апіраецца на гладкі край слупа. Вызначыць рэакцыі накладзеных на брус сувязей, калі *BD*=0,25 *AB*. У якім месцы брус павінен апірацца на выступ, каб рэакцыя шарніра A была накіравана ўздоўж *AB*?

26. Аднародны брусок *AB*, вага якога 200 Н, утрымліваецца ў стане раўнавагі тросамі *AO* і *BO*, якія прывязаны да нерухомай апоры *O* (рыс. 7). Вызначыць нацяг тросаў і іх выніковае ўздзеянне на апору *O*, калі α=20°, β=30°. Як будзе змяняцца нацяг тросаў пры павелічэнні вуглоў α і β ?

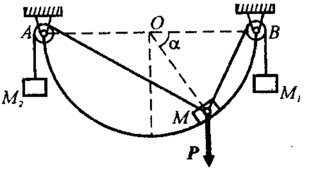
27. Бязважкі стрыжань *AB* канцом *A* ўпіраецца ў гладкую вертыкальную сцяну і ў пункце *C* апіраецца на гладкі выступ другой сцяны (рыс. 7). Да канца *B* стрыжня прымацаваны шнур з грузам, вага якога 25 Н. Пад якім вуглом α да сцяны стрыжань будзе знаходзіцца ў стане раўнавагі, калі *a*=0,5 м, *AB*=3 м. Знайсці рэакцыі сувязей у пунктах *A* і *C* геаметрычным і аналітычным спосабамі.

28. На вертыкальны гладкі стрыжань *AB* надзета муфта *M*, вага якой 4 Н. Да муфты прымацаваны трос, перакінуты праз блок *D*, які мае нг канцы груз вагою 6 Н. Знайсці вугал α, рэакцыю стрыжня і рэакцыю восі блока пры раўнавазе муфты. Вызначыць залежнасць вугла α ад велічыні груза.

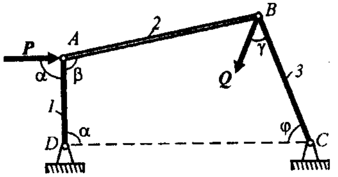
21



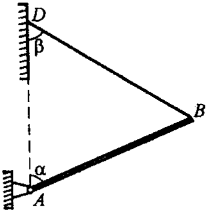
22



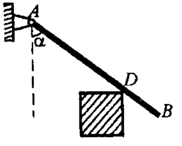
23



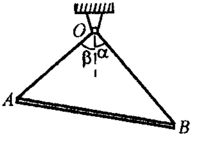
24



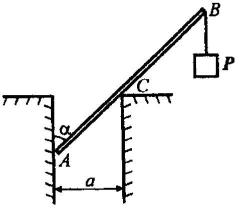
25



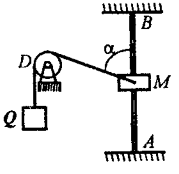
26



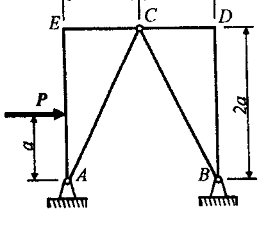
27



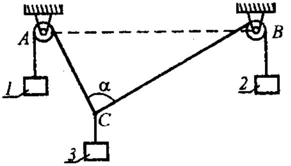
28



29



30



Рыс. 7

29. Бязважкая шарнірная арка, у склад якой уваходзяць часткі *AEC* і *CDB*, звязаныя паміж сабою шарнірам *C*, утрымліваецца нерухомымі шарнірнымі апорамі *A* і *B* (рыс. 7). Вызначыць рэакцыі апор і ўзаемны ціск частак аркі ў шарніры *C*, калі на арку перпендыкулярна да стараны *AE* дзейнічае раўнадзейная ветравой нагрузкі P=200 Н.

30. Праз блокі *A* і *B*, восі якіх знаходзяцца на гарызантальнай лініі, перакінута нітка, да канцоў якой прывязаны грузы 1 і 2, а ў прамежкавым пункце *C* падвешаны груз 3 (рыс. 7). Не ўлічваючы трэнне і памеры блокаў, вызначыць пры раўнавазе сістэмы вагу груза 3, а таксама рэакцыі восей блокаў, калі P_1=8 Н, P_2=6 Н, α=120°.

Прыклад рашэння задання С-2

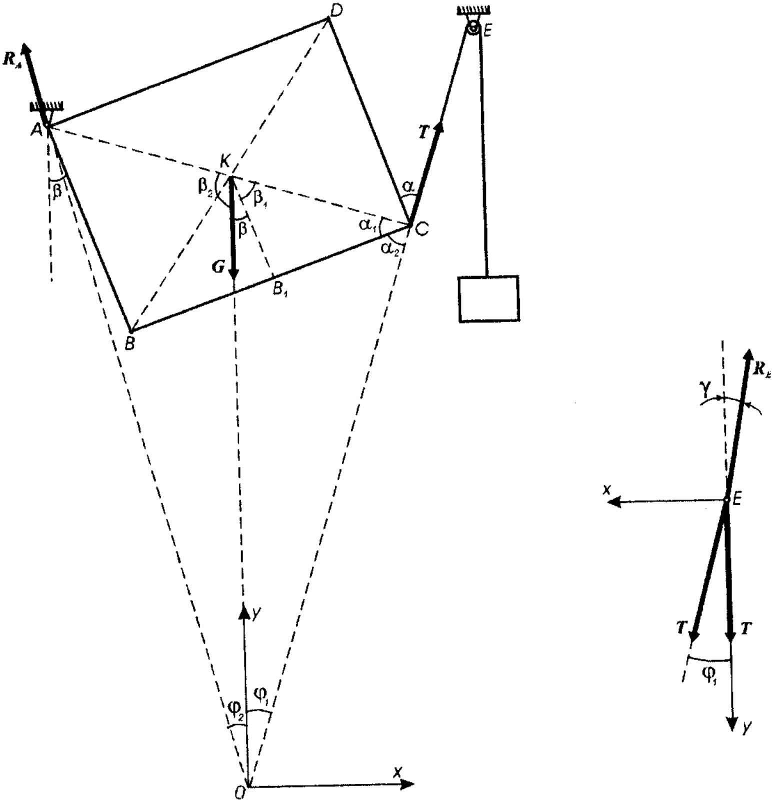
Прамавугольная аднародная пліта *ABCD*, вага якой 150 Н, прымацавана да нерухомай паверхні шарнірам *A*, вакол восі якога можа паварочвацца ў вертыкальнай плоскасці (рыс. 8). У пункце *C* да пліты прымацаваны трос, перакінуты праз блок *E*. На канцы троса вісіць груз. У стане раўнавагі старана *AB* пліты адхілена ад вертыкалі на вугал β=25°. Вызначыць рэакцыю шарніра А, вагу груза і рэакцыю восі блока *E*, калі *AB*=0,4 м, *BC*=0,6 м, α=40°.

Р а ш э н н е. Разглядаем раўнавагу пліты *ABCD*. На яе накладзены дзве сувязі: нерухомы цыліндрычны шарнір у пункце *A* і трос у пункце *C*. Рэакцыю троса, прыкладзеную да пліты (сіла **T**), паказваем уздоўж яго.

Сіла цяжару пліты (сіла **G**) прыкладзена ў цэнтры цяжару, на перасячэнні дыяганалей прамавугольніка (пункт *K*). Дакладны накірунак рэакцыі шарніра (сіла $\mathbf{R}_A$) невядомы, але яго можна вызначыць на падставе тэарэмы аб трох сілах. У разглядаемым выпадку лініі дзеяння трох непаралельных сіл, што прыкладзены да пліты ў стане яе раўнавагі, павінны перасякацца ў адным пункце (пункт *O*). Па лініях дзеяння сіл **G** і **T** знаходзім пункт *O*, а потым праз яго і пункт *A* праводзім лінію дзеяння рэакцыі шарніра $\mathbf{R}_A$ і паказваем дакладны накірунак рэакцыі $\mathbf{R}_A$. Вызначаем вуглы, неабходныя для далейшага рашэння задачы.

$$\alpha_2 = 180° - 90° - \alpha = 50°;$$

$$tg\alpha_1 = \frac{AB}{BC} = \frac{0,4}{0,6} = 0,667, \qquad \alpha_1 = 33,69°.$$



Рыс. 8

У прамавугольным трохвугольніку KB_1C вугал β_1=90°–α_1=56,31°.

Тады ў трохвугольніку OKC

$$KC = 0,5AC = 0,5\sqrt{AB^2 + BC^2} = 0,5\sqrt{0,4^2 + 0,6^2} = 0,36 \text{ м}.$$

$$\angle OKC = \beta + \beta_1 = 81{,}31°; \quad \angle KCO = \alpha_1 + \alpha_2 = 83{,}69°.$$

$$\angle \varphi_1 = 180° - 81{,}31° - 83{,}69° = 15°.$$

Па тэарэме сінусаў

$$\frac{KC}{KO} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad KO = \frac{KC \cdot \sin 83{,}69°}{\sin 15°} = \frac{0{,}36 \cdot 0{,}994}{0{,}259} = 1{,}38 \text{ м}.$$

У трохвугольніку AOK

$$\angle \beta_2 = 180° - \beta - \beta_1 = 180° - 25° - 56{,}31° = 98{,}69°.$$

Па тэарэме косінусаў

$$AO = \sqrt{AK^2 + KO^2 - 2 \cdot AK \cdot KO \cdot \cos\beta_2} =$$

$$= \sqrt{0{,}36^2 + 1{,}38^2 + 2 \cdot 0{,}36 \cdot 1{,}38 \cdot 0{,}151} =$$

$$= \sqrt{0{,}1296 + 1{,}9 + 0{,}15} = \sqrt{2{,}1796} = 1{,}48 \text{ м}.$$

Па тэарэме сінусаў

$$\frac{AK}{AO} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \beta_2}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{AK \cdot \sin \beta_2}{AO} = \frac{0{,}36 \cdot 0{,}989}{1{,}48} = 0{,}24;$$

$$\varphi_2 = 13{,}9°.$$

Выбіраем восі каардынат з пачаткам у пункце O.
Запісваем ураўненні раўнавагі плоскай сыходнай сістэмы сіл.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad T \sin \varphi_1 - R_A \sin \varphi_2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad T \cos \varphi_1 + R_A \cos \varphi_2 - G = 0.$$

Рашаем атрыманую сістэму ўраўненняў.

$$\begin{cases} T \cdot 0{,}259 - R_A \cdot 0{,}24 = 0, \\ T \cdot 0{,}966 + R_A \cdot 0{,}971 - 150 = 0. \end{cases}$$

З першага ўраўнення атрымаем выраз для T:

$$T = R_A \cdot \frac{0{,}24}{0{,}259} = 0{,}927 \cdot R_A.$$

Падставім у другое ўраўненне і знойдзем R_A.

$$0{,}927 R_A \cdot 0{,}966 + R_A \cdot 0{,}971 - 150 = 0;$$

$$1{,}866 R_A = 150, \quad R_A = 80{,}4 \text{ Н};$$

$$T = 0{,}927 \cdot 80{,}4 = 74{,}5 \text{ Н}.$$

Вага груза роўная нацягу троса.

$$P = T = 74{,}5 \text{ Н}.$$

Для вызначэння рэакцыі восі блока E разглядаем раўнавагу блока. У сувязі з тым, што памеры блока не ўлічваем, паказваем усе сілы прыкладзенымі ў адным пункце E. Нацяг троса злева і справа ад блока аднолькавы і роўны T (рыс. 8). Рэакцыя восі $\mathbf{R}_E$ накіравана ўверх пад невядомым вуглом γ да вертыкалі. Атрымалі плоскую сыходную сістэму ўраўнаважаных сіл. Выбіраем восі каардынат Exy. Запісваем ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad T \sin\varphi_1 - R_E \sin\gamma = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad T \cos\varphi_1 + T - R_E \cos\gamma = 0.$$

Рашаем атрыманую сістэму ўраўненняў.

$$\begin{cases} 74{,}5 \cdot 0{,}259 - R_E \sin\gamma = 0, \\ 74{,}5 \cdot 0{,}966 + 74{,}5 - R_E \cos\gamma = 0. \end{cases}$$

$$R_E \sin\gamma = 19{,}3, \quad R_E \cos\gamma = 146{,}5.$$

Узвядзём роўнасці ў квадрат і складзём.

$$R_E^2 = 372{,}5 + 21462{,}3 = 21834{,}8;$$

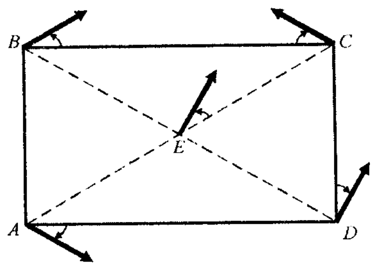
$$R_E = 147{,}8 \text{ Н}.$$

Плоская адвольная сістэма сіл

Заданне С-3
Прывядзенне плоскай адвольнай сістэмы сіл да прасцейшага віду

Прывесці плоскую адвольную сістэму сіл $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, …, $\mathbf{F}_5$, прыкладзеную да прамавугольнай пласціны *ABCD*, да прасцейшага віду. Задачу неабходна рашыць, выкарыстоўваючы рыс. 9 і даныя адпаведнага варыянта ў табл. 1 (вуглы α дадзены ў градусах, памеры пласціны – у метрах). Значэнні сіл для ўсіх варыянтаў аднолькавыя:

F_1=100 Н, F_2=200 Н, F_3=300 Н, F_4=400 Н, F_5=500 Н.



Рыс. 9

Табліца 1

Варыянт	Сілы, прыкладзеныя ў пунктах пад вуглом										AB	BC	Цэнтр прывядзення
	F_1	α_1	F_2	α_2	F_3	α_3	F_4	α_4	F_5	α_5			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	A	30	B	45	C	60	D	90	E	120	0,5	0,8	E
2	B	45	C	60	D	90	E	150	A	135	0,6	0,9	A
3	C	60	D	90	E	120	A	0	B	150	0,7	1,0	B
4	D	120	E	210	A	135	B	30	C	180	0,8	1,2	C
5	E	135	A	120	B	150	C	45	D	210	0,9	1,3	D
6	A	150	B	135	C	180	D	60	E	225	1,0	1,4	E
7	B	180	C	150	D	210	E	90	A	240	0,5	0,7	A
8	C	210	D	180	E	225	A	120	B	270	0,6	0,8	B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
9	D	240	E	210	A	240	B	135	C	300	0,7	0,9	C
10	E	270	A	225	B	270	C	150	D	0	0,8	1,0	D
11	A	300	B	240	C	300	D	180	E	30	0,9	1,1	E
12	B	30	C	270	D	0	E	210	A	45	1,0	1,2	C
13	C	45	D	300	E	30	A	225	B	60	1,1	1,3	A
14	D	60	E	30	A	45	B	240	C	90	1,2	1,4	B
15	E	90	A	45	B	60	C	270	D	120	1,3	1,5	C
16	A	120	B	60	C	90	D	300	E	135	1,6	1,8	D
17	B	135	C	90	D	120	E	30	A	150	1,4	1,6	A
18	C	150	D	120	E	135	A	0	B	180	1,5	1,7	B
19	D	180	E	135	A	150	B	45	C	210	1,7	1,9	C
20	E	210	A	150	B	180	C	60	D	240	0,5	0,9	D
21	A	225	B	180	C	210	D	90	E	270	0,6	1,0	E
22	B	240	C	210	D	225	E	120	A	300	0,7	1,1	B
23	C	270	D	225	E	240	A	135	B	0	0,8	1,2	C
24	D	300	E	240	A	270	B	150	C	30	0,9	1,3	D
25	E	30	A	270	B	300	C	180	D	45	1,0	1,4	E
26	A	45	B	300	C	30	D	210	E	225	1,1	1,5	A
27	B	60	C	30	D	45	E	225	A	90	1,2	1,6	B
28	C	90	D	45	E	60	A	240	B	120	1,3	1,7	C
29	D	120	E	60	A	90	B	270	C	150	1,4	1,8	D
30	E	135	A	90	B	120	C	300	D	180	1,5	1,9	E

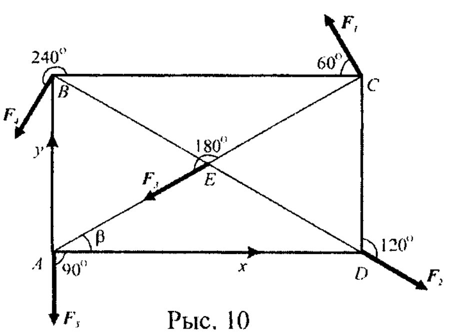
Прыклад рашэння задання С-3

Дадзена:

$F_1 = 100$ Н $(C, \alpha_1 = 60°)$, $F_2 = 200$ Н $(D, \alpha_2 = 120°)$,

$F_3 = 300$ Н $(E, \alpha_3 = 180°)$, $F_4 = 400$ Н $(B, \alpha_4 = 240°)$,

$F_5 = 500$ Н $(A, \alpha = 90°)$, $AB = 1$ м, $BC = 2$ м.



Рыс. 10

Цэнтр прывядзення — A.

Рашэнне. З улікам рыс. 9 і таго, што дадзена, паказваем дакладны накірунак усіх сіл, прыкладзеных да пласціны (рыс. 10).

Выбіраем сістэму восей каардынат Axy.

Прыводзім сістэму сіл да цэнтра A. Спачатку вызначым галоўны вектар $\mathbf{R}'$ плоскай адвольнай сістэмы сіл па яго праекцыях на восі каардынат.

$$R'_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -F_1\cos 60° + F_2\cos 30° - F_3\cos\beta - F_4\cos 60°;$$

$$R'_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_1\sin 60° - F_2\sin 30° - F_3\sin\beta - F_4\cos 30° - F_5.$$

Знаходзім па вядомых старанах пласціны значэнні $\sin\beta$ і $\cos\beta$.

$$\sin\beta = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}447; \quad \cos\beta = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}894.$$

$$R'_{x=} = -100\cdot 0{,}5 + 200\cdot 0{,}866 - 300\cdot 0{,}894 - 400\cdot 0{,}5 = -345;$$

$$R'_y = 100\cdot 0{,}866 - 200\cdot 0{,}5 - 300\cdot 0{,}447 - 400\cdot 0{,}866 - 500 = -993{,}9;$$

$$R' = \sqrt{\left(R'_x\right)^2 + \left(R'_y\right)^2} = \sqrt{119025 + 987837} = 1052 \text{ Н}.$$

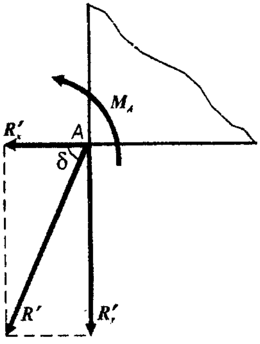
Вызначым галоўны момант плоскай адвольнай сістэмы сіл адносна пункта A.

$$M_A = \sum_{k=1}^{n} m_A(\mathbf{F}_k) = F_1\cos 60°\cdot 1 + F_1\cdot\sin 60°\cdot 2 - F_2\sin 30°\cdot 2 +$$
$$+ F_4\sin 30°\cdot 1,$$

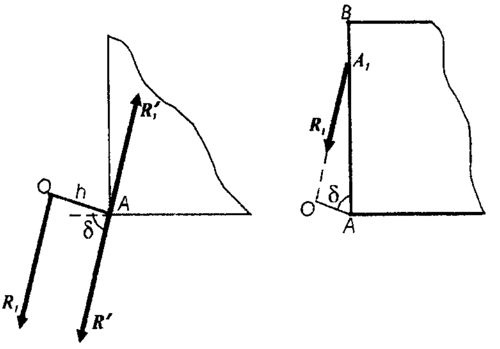
$$M_A = 100\cdot 0{,}5 + 100\cdot 0{,}866\cdot 2 - 200\cdot 0{,}5\cdot 2 + 400\cdot 0{,}5 = 223{,}2 \text{ Нм}.$$

$$\cos\delta = \frac{R'_x}{R'} = \frac{345}{1052} = 0{,}328, \quad \delta = 70{,}85°.$$

Атрымалі замест плоскай адвольнай сістэмы сіл галоўны вектар $\mathbf{R}'$ і галоўны момант M_A (рыс. 11). У гэтым выпадку сістэму можна прывесці яшчэ да больш простага віду.



Рыс. 11



Рыс. 12

Прадставім галоўны момант у выглядзе пары сіл, момант якой роўны M_A, а сілы, што ўтвараюць пару, роўныя па модулю галоўнаму вектару R'. Плячо такой пары роўнае

$$h = \frac{M_A}{R'} = \frac{223{,}2}{1052} = 0{,}212 \text{ м}.$$

Пакажам (рыс. 12) пару сіл $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}'_1)$ такім чынам, каб яна дзейнічала, як і галоўны момант M_A (супраць гадзіннікавай стрэлкі), і адна сіла $\mathbf{R}'_1$ пары сіл была накіравана ў адваротны бок галоўнаму вектару $\mathbf{R}'$.

У пункце A цяпер прыкладзены дзве роўныя і накіраваныя ў процілеглыя бакі сілы. Яны эквівалентныя нулю, і іх можна адкінуць ад пласціны. Замест раней дадзенай плоскай адвольнай сістэмы сіл атрымалі эквівалентную замену ў выглядзе адной сілы $\mathbf{R}_1$, якая прыкладзена ў пункце O, роўная па модулю і накіравана так, як і галоўны вектар $\mathbf{R}'$. Сіла $\mathbf{R}_1$ з'яўляецца раўнадзейнай дадзенай плоскай адвольнай сістэмы сіл. Сілу $\boldsymbol{R}_1$ перанясём уздоўж яе лініі дзеяння ў пункт A_1 пласціны. Адлегласць

$$AA_1 = \frac{OA}{\cos\delta} = \frac{0{,}212}{0{,}328} = 0{,}646 \text{ м}.$$

Заданне С-4

Вызначэнне рэакцый апор цвёрдага цела пры ўздзеянні плоскай адвольнай сістэмы сіл

Рама, паказаная на рыс. 14–16, знаходзіцца ў раўнавазе пад уздзеяннем прыкладзеных да яе сіл. Вызначыць рэакцыі апор рамы. Ва ўсіх варыянтах значэнні нагрузак аднолькавыя:

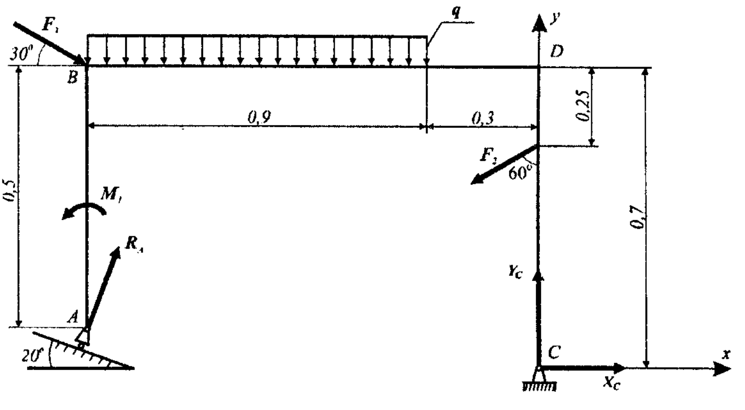
$$F_1 = 100\ \text{Н},\ F_2 = 200\ \text{Н},\ q = 50\ \text{Н/м},\ M_1 = 40\ \text{Нм},\ M_2 = 80\ \text{Нм}.$$

Памеры рамы дадзены ў метрах.

Прыклад рашэння задання С-4

Рама (рыс. 13) знаходзіцца ў раўнавазе пад уздзеяннем сіл F_1=100 Н, F_2=200 Н, размеркаванай нагрузкі інтэнсіўнасцю q=50 Н/м і моманту M_1=40 Нм. Вызначыць рэакцыі апор рамы.

Рашэнне. Разглядаем раўнавагу рамы *ABDC*. На яе накладзены дзве сувязі: у пункце *A* — рухомы цыліндрычны шарнір, у пункце *C* — нерухомы цыліндрычны шарнір. Адкідваем умоўна сувязі і замест іх паказваем рэакцыі сувязей: $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{Y}_C$, $\mathbf{X}_C$. У стане раўнавагі знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл.



Рыс. 13

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad X_C - F_2 \sin 60° + F_1 \cos 30° + R_A \sin 20° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad Y_C - F_2 \cos 60° - q \cdot 0{,}9 - F_1 \sin 30° + R_A \cos 20° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_C(\mathbf{F}_k) = 0.$$

$$F_2 \sin 60° \cdot 0{,}45 + q \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}75 + F_1 \sin 30° \cdot 1{,}2 -$$

$$- F_1 \cos 30° \cdot 0{,}7 + M_1 - R_A \cos 20° \cdot 1{,}2 - R_A \sin 30° \cdot 0{,}2 = 0.$$

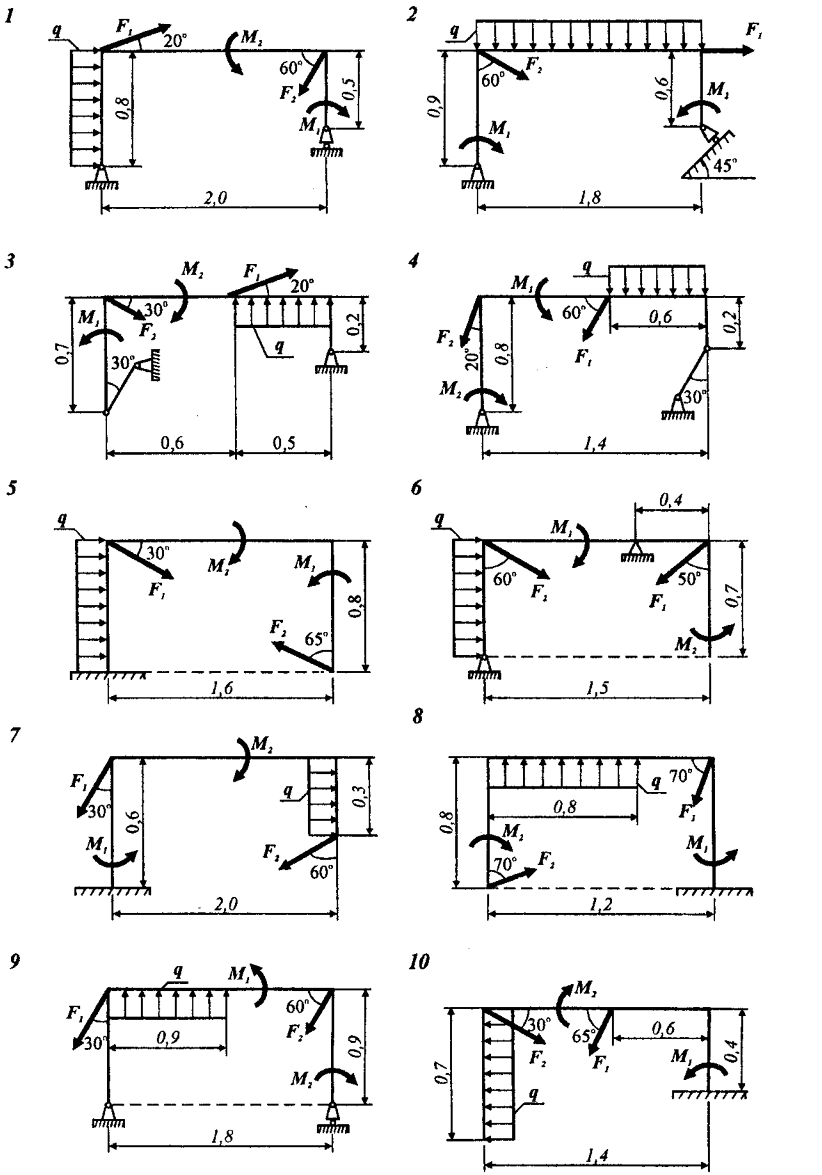
Падстаўляем лікавыя значэнні вядомых велічынь і з ураўненняў раўнавагі знаходзім рэакцыі сувязей R_A, X_C, Y_C.

$$\begin{cases} X_C - 200 \cdot 0{,}866 + 100 \cdot 0{,}866 + R_A \cdot 0{,}342 = 0 \\ Y_C - 200 \cdot 0{,}5 - 50 \cdot 0{,}9 - 100 \cdot 0{,}5 + R_A \cdot 0{,}94 = 0 \\ 200 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}45 + 50 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}75 + 100 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}2 - \\ -100 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}7 + 40 - R_A \cdot 0{,}94 \cdot 1{,}2 - R_A \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0; \end{cases}$$

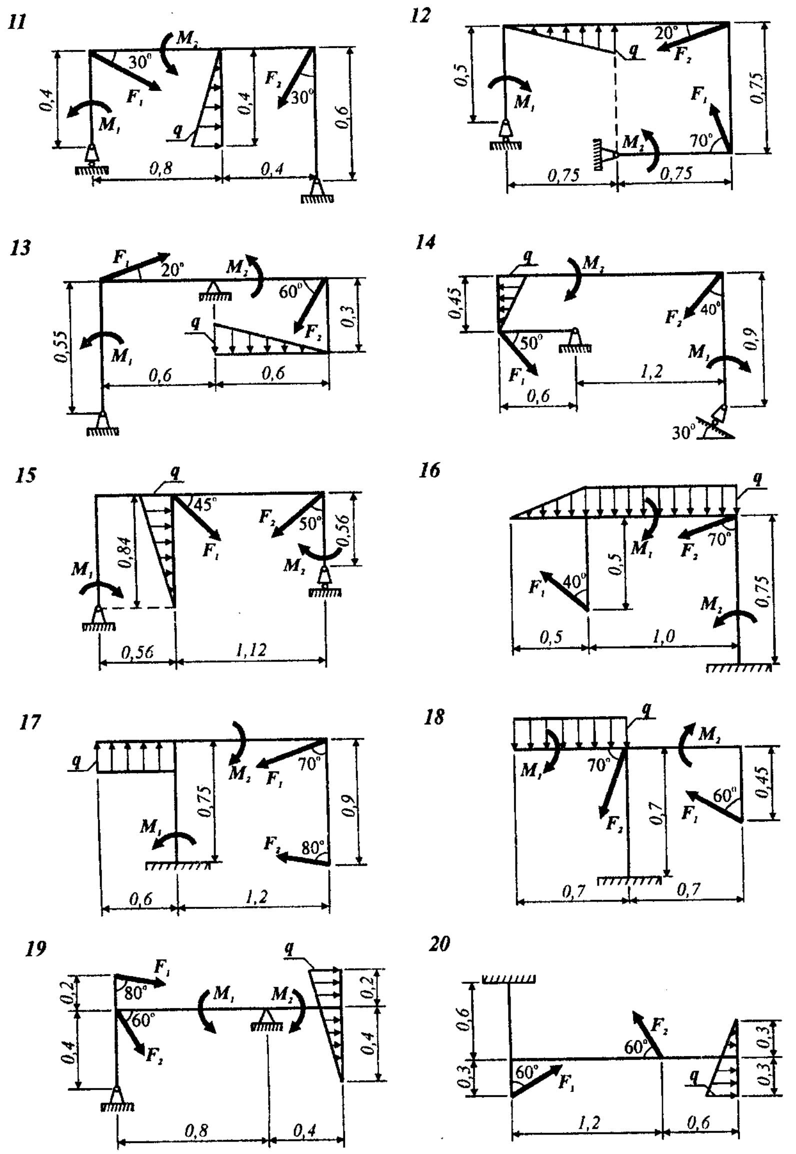
$$\begin{cases} X_C - 173{,}2 + 86{,}6 + 0{,}342 R_A = 0 \\ Y_C - 100 - 45 - 50 + 0{,}94 R_A = 0 \\ 77{,}94 + 33{,}75 + 60 - 60{,}62 + 40 - 1{,}128 R_A - 0{,}1 R_A = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_C - 86{,}6 + 0{,}342 R_A = 0 \\ Y_C - 195 + 0{,}94 R_A = 0 \\ 151{,}07 - 1{,}228 R_A = 0. \end{cases}$$

$$R_A = 123 \text{ Н}, X_C = 44{,}5 \text{ Н}, Y_C = 79{,}4 \text{ Н}.$$


1
q
F1
20°
M2
60°
F2
M1
0,8
0,5
2,0
2
q
F1
F2
60°
0,9
0,6
M1
M1
45°
1,8
3
M2
F1
20°
30°
M1
F2
0,7
30°
q
0,2
0,6
0,5
4
q
M1
60°
0,6
0,2
F2
F1
20°
0,8
M2
30°
1,4
5
q
30°
M2
M1
F1
F2
65°
0,8
1,6
6
0,4
q
M1
60°
50°
F2
F1
0,7
M2
1,5
7
M2
F1
30°
q
0,3
0,6
M1
F2
60°
2,0
8
70°
q
0,8
F1
0,8
M2
M1
70°
F2
1,2
9
q
M1
F1
60°
F2
30°
0,9
0,9
M2
1,8
10
M2
30°
65°
0,6
F2
F1
M1
0,4
0,7
q
1,4

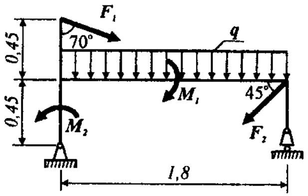
Рыс. 14



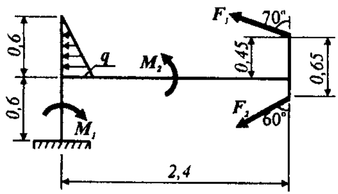
11
M2
30°
F1
F2
30°
0,4
0,4
0,6
M1
q
0,8
0,4
12
20°
q
F2
0,5
M1
0,75
F1
M2
70°
0,75
0,75
13
F1
20°
M2
60°
0,3
q
F2
0,55
M1
0,6
0,6
14
q
M2
0,45
F2
40°
50°
0,9
M1
F1
1,2
0,6
30°
15
q
45°
F2
50°
0,56
0,84
F1
M2
M1
0,56
1,12
16
q
M1
F2
70°
0,5
0,75
F1
40°
M2
0,5
1,0
17
q
M2
F1
70°
0,75
0,9
M1
F2
80°
0,6
1,2
18
q
M2
M1
70°
0,45
60°
F2
0,7
F1
0,7
0,7
19
q
F1
0,2
0,2
80°
M1
M2
60°
0,4
0,4
F2
0,8
0,4
20
F2
0,6
60°
0,3
0,3
60°
F1
q
0,3
1,2
0,6

Рыс. 15

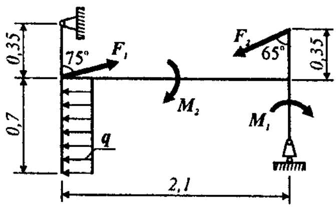
21



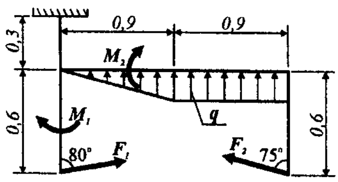
22



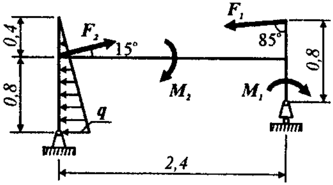
23



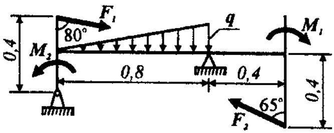
24



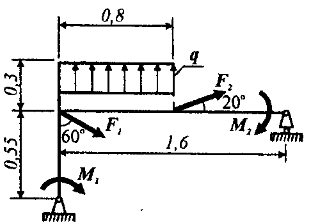
25



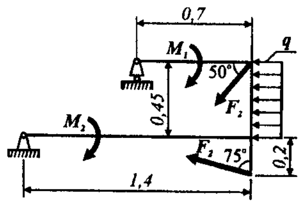
26



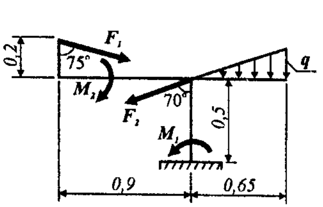
27



28



29



30

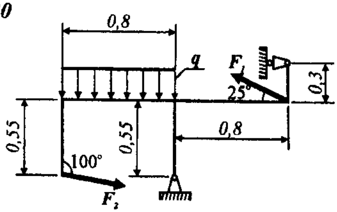


Рис. 16

З а д а н н е С - 5

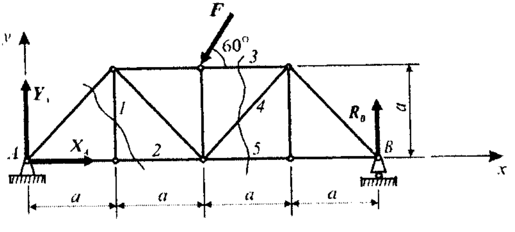
Вызначэнне нагрузак у стрыжнях плоскай фермы способам Рытэра

Вылічыць способам Рытэра нагрузкі ў пранумараваных стрыжнях фермы (рыс. 1–3). На ўсіх рысунках F=2000 Н.

Прыклад рашэння задання С-5

У дадзенай ферме (рыс. 17) вылічыць способам Рытэра нагрузкі ў стрыжнях 1, 2, 3, 4, 5. F=2 кН.

Р а ш э н н е. Разглядаем спачатку раўнавагу фермы як аднаго цвёрдага цела і вызначаем рэакцыі апор A і B. У нерухомым цыліндрычным шарніры А невядомую рэакцыю паказваем у выглядзе дзвюх складовых $\mathbf{X}_A$ і $\mathbf{Y}_A$, а ў рухомым цыліндрычным шарніры B – перпендыкулярна да апорнай пляцоўкі.



Рыс. 17

У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Восі каардынат выбіраем з пачаткам у пункце A. Запісваем ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad X_A - F\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad Y_A - F\sin 60^\circ + R_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\mathbf{F}_k) = 0 \quad R_B \cdot 4a + F\cos 60^\circ \cdot a - F\sin 60^\circ \cdot 2a = 0;$$

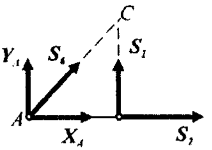
$$R_B = \frac{1}{4}\left(F\sin 60^\circ \cdot 2 - F\cos 60^\circ\right) = \frac{1}{4}\left(2 \cdot 0{,}866 \cdot 2 - 2 \cdot 0{,}5\right) = 0{,}616 \text{ кН};$$

$$X_A = F\cos 60^\circ = 2 \cdot 0{,}5 = 1 \text{ кН};$$

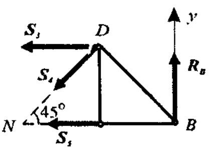
$$Y_A = F\sin 60^\circ - R_B = 2 \cdot 0{,}866 - 0{,}616 = 1{,}116 \text{ кН}.$$

Нагрузкі ў стрыжнях 1, 2, 3, 4, 5 падлічым спосабам Рытэра. Для гэтага зробім сячэнне фермы праз стрыжні 1 і 2 і разгледзім раўнавагу левай часткі фермы (рыс. 18).

Стрыжні лічым расцягнутымі, таму нагрузку ў перарэзаных стрыжнях паказваем уздоўж іх ад вузлоў, у якіх гэтыя стрыжні замацаваны. У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Запісваем такія ўраўненні раўнавагі, з якіх адразу можна вылічыць патрэбную невядомую сілу.



Рыс. 18



Рыс. 19

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\mathbf{F}_k) = 0 \quad S_1 \cdot a = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_C(\mathbf{F}_k) = 0 \quad S_2 \cdot a + X_A \cdot a - Y_A \cdot a = 0.$$

Тады $S_1 = 0$, $S_2 = Y_A - X_A = 1{,}116 - 1 = 0{,}116$ кН.

Для вызначэння S_3, S_4, S_5 зробім сячэнне фермы па адпаведных стрыжнях. Разгледзім раўнавагу правай часткі фермы (рыс. 19). Зноў лічым стрыжні расцягнутымі. У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Запісваем зручныя для падліку невядомых сіл ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^{n} m_N(\mathbf{F}_k) = 0 \quad S_3 \cdot a + R_B \cdot 2a = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad R_B - S_4 \sin 45° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_D(\mathbf{F}_k) = 0 \quad R_B \cdot a - S_5 \cdot a = 0.$$

Тады

$$S_3 = -2R_B = -2 \cdot 0{,}616 = -1{,}232 \text{ кН};$$

$$S_4 = \frac{R_B}{\sin 45°} = \frac{0{,}616}{0{,}707} = 0{,}871 \text{ кН};$$

$$S_5 = R_B = 0{,}616 \text{ кН}.$$

З адказаў відаць, што стрыжань 1 не нагружаны, стрыжні 2, 4, 5 — расцягнутыя (адказы са знакам "плюс", што пацвярджае меркаванне аб іх расцяжэнні), стрыжань 3 — сціснуты (адказ з "мінусам").

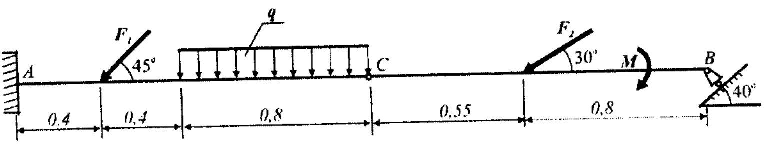
Заданне С-6

Вызначэнне рэакцый апор састаўной бэлькі

Знайсці рэакцыі апор і ўзаемны ціск у прамежным шарніры састаўной бэлькі, якая знаходзіцца ў раўнавазе. Схемы бэлек паказаны на рыс. 22–24 (памеры ў м), значэнні нагрузкі прыведзены ў табл. 2.

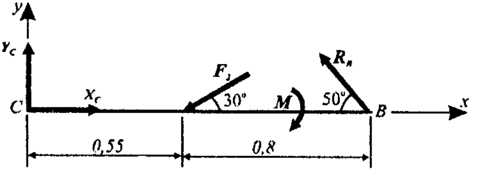
Прыклад рашэння задання С-6

Састаўная бэлька AB (рыс. 20) знаходзіцца ў раўнавазе пад уздзеяннем дадзеных нагрузак. Вызначыць рэакцыі апор і ўзаемны ціск у прамежным шарніры C. Памеры паказаны ў метрах, F_1=100 Н, F_2=200 Н, M=50 Нм, q=40 Н/м.



Рыс. 20

Рашэнне. Разглядаем раўнавагу бэлькі CB. На яе накладзены дзве сувязі: у пункце B — рухомы цыліндрычны шарнір, у пункце C — нерухомы цыліндрычны шарнір. Замест сувязей паказваем рэакцыі сувязей і атрымліваем разліковую схему бэлькі CB (рыс. 21).



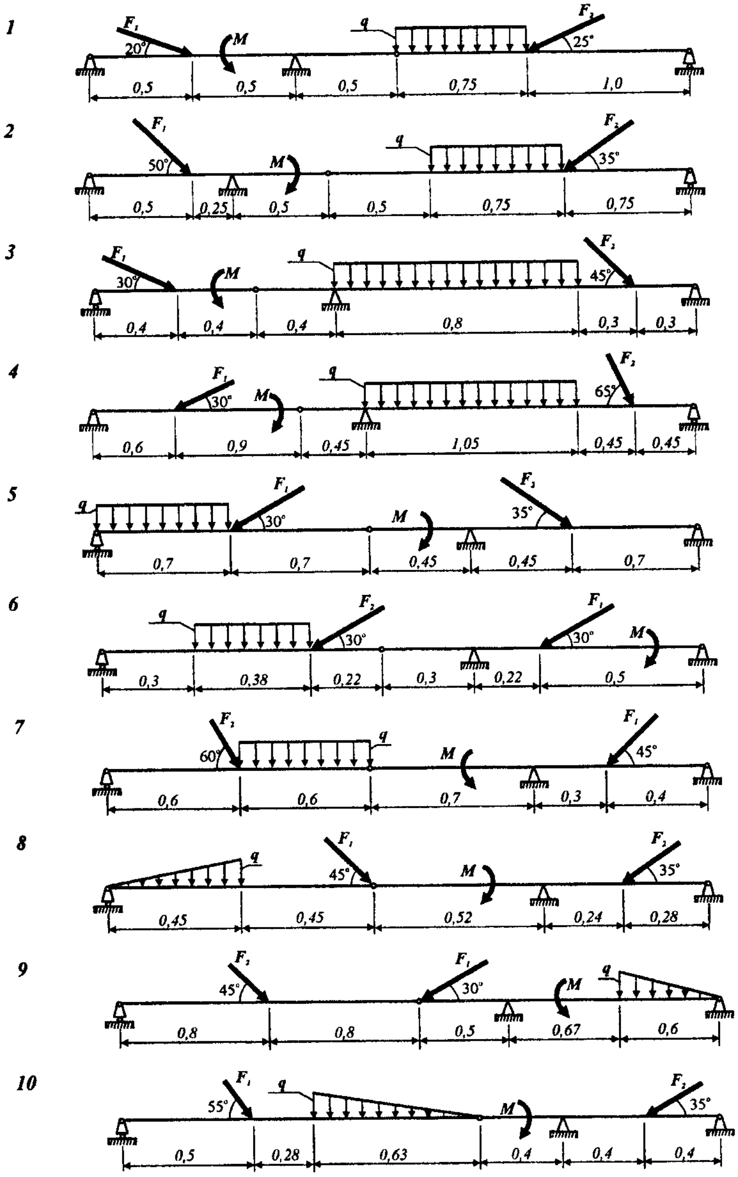
Рыс. 21

Табліца 2

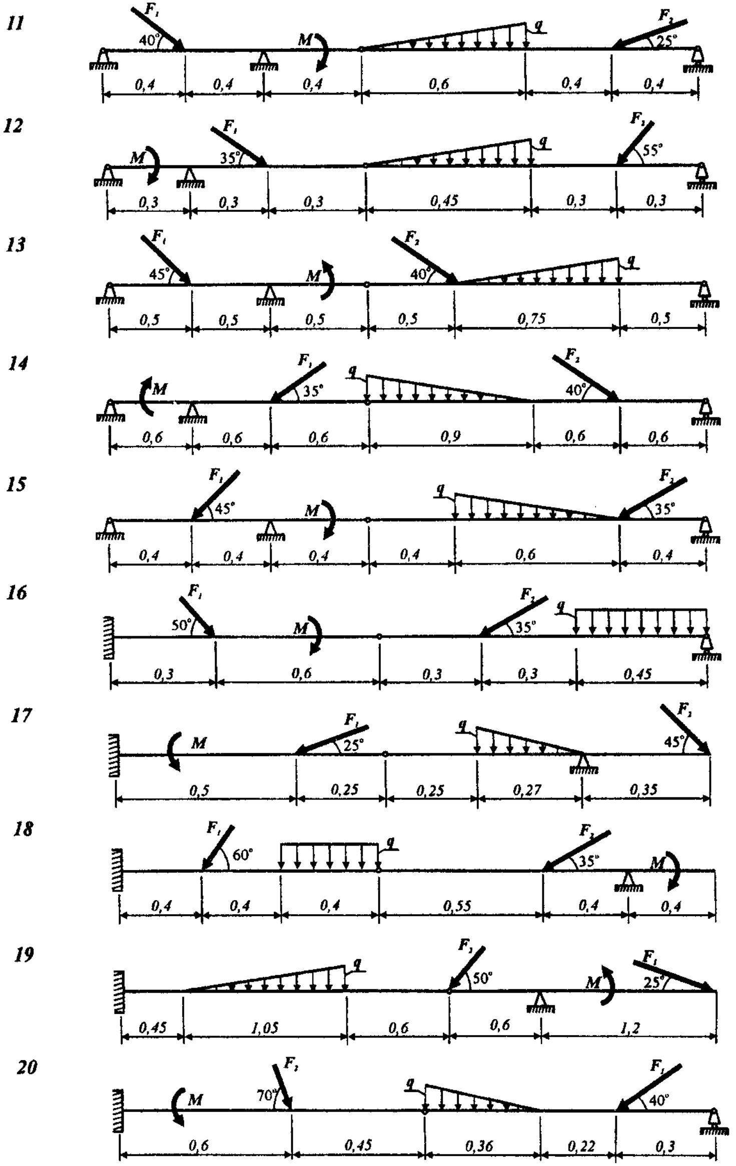
Варыянт	F_1, Н	F_2, Н	M, Нм	q,Н/м	Варыянт	F_1,Н	F_2, Н	M, Нм	q,Н/м
1	100	190	30	15	16	140	170	80	60
2	120	200	35	20	17	130	140	85	55
3	130	220	40	25	18	120	130	90	50
4	140	230	45	30	19	110	120	95	45
5	150	240	50	35	20	100	110	75	40
6	160	250	55	40	21	200	100	70	35
7	170	240	60	45	22	190	110	65	30
8	180	230	65	50	23	180	120	60	25
9	190	220	70	55	24	170	130	55	20
10	200	150	75	60	25	160	140	50	15
11	190	160	80	65	26	150	200	45	10
12	180	210	85	70	27	140	190	40	65
13	170	200	90	75	28	130	180	35	70
14	160	190	95	80	29	120	170	30	75
15	150	180	100	85	30	110	160	25	80

У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Выбіраем восі каардынат з пачаткам у пункце С. Запісваем ураўненні раўнавагі.

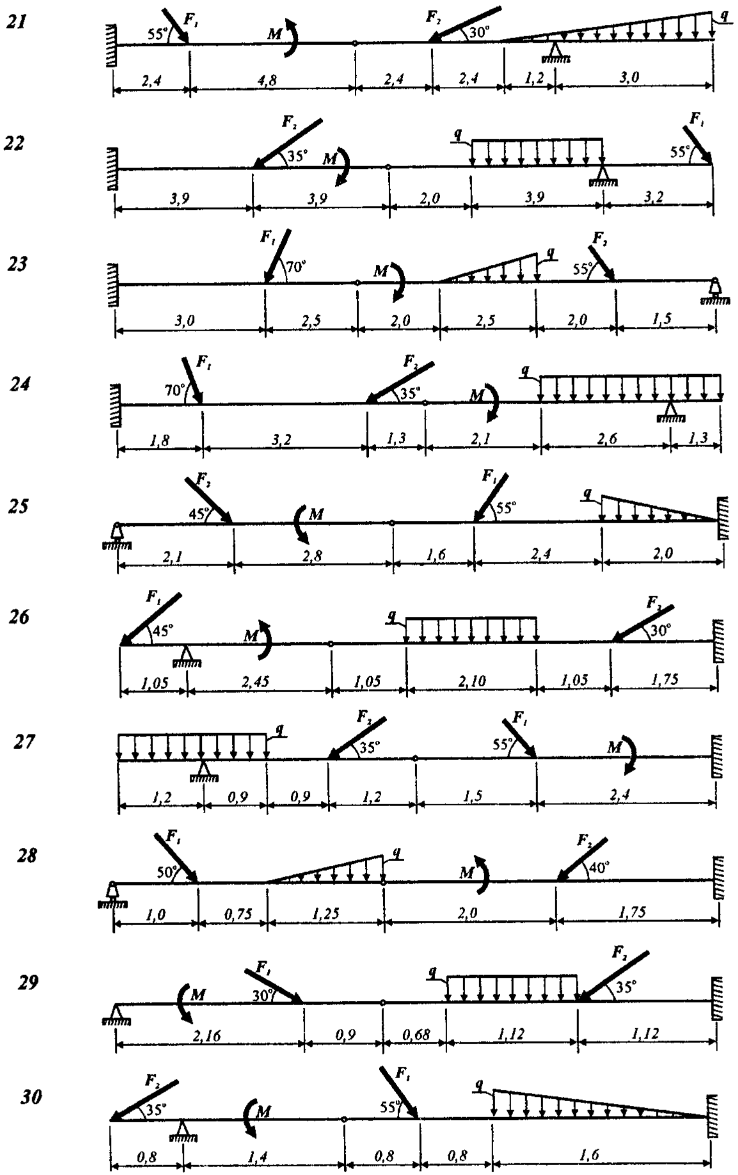
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad X_C - F_2 \cos 30° - R_B \cos 50° = 0;$$


1
F1 20° M q F2 25°
0,5 0,5 0,5 0,75 1,0
2
F1 50° M q F2 35°
0,5 0,25 0,5 0,5 0,75 0,75
3
F1 30° M q F2 45°
0,4 0,4 0,4 0,8 0,3 0,3
4
F1 30° M q F2 65°
0,6 0,9 0,45 1,05 0,45 0,45
5
q F1 30° M F2 35°
0,7 0,7 0,45 0,45 0,7
6
q F2 30° F1 30° M
0,3 0,38 0,22 0,3 0,22 0,5
7
F2 60° q M F1 45°
0,6 0,6 0,7 0,3 0,4
8
q F1 45° M F2 35°
0,45 0,45 0,52 0,24 0,28
9
F2 45° F1 30° M q
0,8 0,8 0,5 0,67 0,6
10
F1 55° q M F2 35°
0,5 0,28 0,63 0,4 0,4 0,4

Рыс. 22


11
F1 40° M q F2 25°
0,4 0,4 0,4 0,6 0,4 0,4
12
M F1 35° q F2 55°
0,3 0,3 0,3 0,45 0,3 0,3
13
F1 45° M F2 40° q
0,5 0,5 0,5 0,5 0,75 0,5
14
M F1 35° q F2 40°
0,6 0,6 0,6 0,9 0,6 0,6
15
F1 45° M q F2 35°
0,4 0,4 0,4 0,4 0,6 0,4
16
F1 50° M F2 35° q
0,3 0,6 0,3 0,3 0,45
17
M F1 25° q F2 45°
0,5 0,25 0,25 0,27 0,35
18
F1 60° q F2 35° M
0,4 0,4 0,4 0,55 0,4 0,4
19
q F2 50° M F1 25°
0,45 1,05 0,6 0,6 1,2
20
M F2 70° q F1 40°
0,6 0,45 0,36 0,22 0,3

Рыс. 23


21
F_1 55° M F_2 30° q
2,4 4,8 2,4 2,4 1,2 3,0
22
F_2 35° M q F_1 55°
3,9 3,9 2,0 3,9 3,2
23
F_1 70° M q F_2 55°
3,0 2,5 2,0 2,5 2,0 1,5
24
F_1 70° F_2 35° M q
1,8 3,2 1,3 2,1 2,6 1,3
25
F_2 45° M F_1 55° q
2,1 2,8 1,6 2,4 2,0
26
F_1 45° M q F_2 30°
1,05 2,45 1,05 2,10 1,05 1,75
27
q F_2 35° F_1 55° M
1,2 0,9 0,9 1,2 1,5 2,4
28
F_1 50° q M F_2 40°
1,0 0,75 1,25 2,0 1,75
29
M F_1 30° q F_2 35°
2,16 0,9 0,68 1,12 1,12
30
F_2 35° M F_1 55° q
0,8 1,4 0,8 0,8 1,6

Рыс. 24

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad Y_C - F_2 \sin 30° + R_B \sin 50° = 0;$$

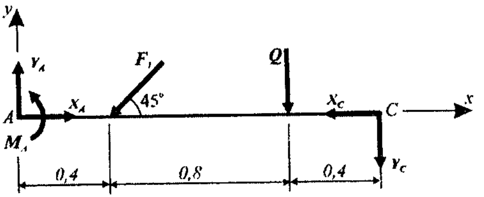
$$\sum_{k=1}^{n} m_C(\mathbf{F}_k) = 0 \quad -F_2 \sin 30° \cdot 0{,}55 - M + R_B \sin 50° \cdot 1{,}35 = 0.$$

З ураўненняў раўнавагі знаходзім невядомыя рэакцыі сувязей: R_B, X_C, Y_C.

$$R_B = \frac{F_2 \sin 30° \cdot 0{,}55 + M}{\sin 50° \cdot 1{,}35} = \frac{200 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}55 + 50}{0{,}766 \cdot 1{,}35} = 101{,}54\,\text{Н};$$

$$X_C = F_2 \cos 30° + R_B \cos 50° = 200 \cdot 0{,}866 + 101{,}54 \cdot 0{,}643 = 238{,}49\,\text{Н};$$

$$Y_C = F_2 \sin 30° - R_B \sin 50° = 200 \cdot 0{,}5 - 101{,}54 \cdot 0{,}766 = 22{,}22\,\text{Н}.$$



Рыс. 25

Разглядаем раўнавагу бэлькі AC. На яе накладзены дзве сувязі: у пункце A — нерухомая замацоўка, у пункце C — нерухомы цыліндрычны шарнір. Замест сувязей паказваем іх рэакцыі і атрымліваем разліковую схему бэлькі AC (рыс. 25). Пры гэтым улічваем, што вектарная сума ўнутраных сіл бэлькі AB у шарніры C роўная нулю. Таму рэакцыі ў шарніры C, прыкладзеныя да розных бэлек, павінны быць накіраваны ў процілеглыя бакі. Размеркаваную нагрузку замяняем раўнадзейнаю сілаю $\mathbf{Q}$.

У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Выбіраем восі каардынат з пачаткам у пункце А. Запісваем ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad X_A - F_1 \cos 45° - X_C = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad Y_A - F_1 \sin 45° - Q - Y_C = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\mathbf{F}_k) = 0 \quad M_A - F_1 \sin 45° \cdot 0{,}4 - Q \cdot 1{,}2 - Y_C \cdot 1{,}6 = 0 .$$

З ураўненняў раўнавагі знаходзім невядомыя рэакцыі сувязей: X_A, Y_A, M_A.

$$M_A = F_1 \sin 45° \cdot 0{,}4 + Q \cdot 1{,}2 + Y_C \cdot 1{,}6 = 100 \cdot 0{,}707 \cdot 0{,}4 + 40 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2 +$$

$$+ 22{,}22 \cdot 1{,}6 = 28{,}28 + 38{,}4 + 35{,}55 = 102{,}23 \text{ Нм}.$$

$$X_A = F_1 \cos 45° + X_C = 100 \cdot 0{,}707 + 238{,}49 = 309{,}19 \text{ Н};$$

$$Y_A = F_1 \sin 45° + Q + Y_C = 100 \cdot 0{,}707 + 40 \cdot 0{,}8 + 22{,}22 = 124{,}92 \text{ Н}.$$

Праверка. Запішам адно ўраўненне раўнавагі для састаўной бэлькі AB.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad X_A - F_1 \cos 45° - F_2 \cos 30° - R_B \cos 50° = 0;$$

$$309{,}19 - 100 \cdot 0{,}707 - 200 \cdot 0{,}866 - 101{,}54 \cdot 0{,}643 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Роўнасць пацвердзілася. Значыць, рэакцыі сувязей падлічаны правільна.

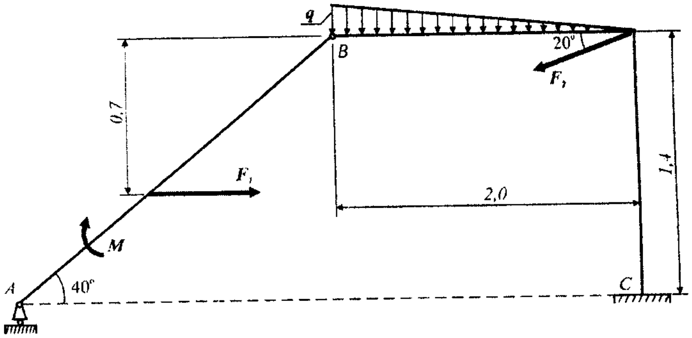
Заданне С-7

Вызначэнне рэакцый апор у сістэме двух цел

Канструкцыя, якая ўяўляе сабою сістэму двух цел, знаходзіцца ў раўнавазе пад уздзеяннем сіл (рыс. 27, 28, 29). Значэнні нагрузак прыведзены ў табл. 3, памеры на схемах дадзены ў метрах. Вызначыць рэакцыі сувязей.

Прыклад рашэння задання С-7

Састаўная рама ABC (рыс. 26) складзена з дзвюх частак, аб'яднаных паміж сабою нерухомым шарнірам B. Рама знаходзіцца ў раўнавазе пад уздзеяннем: сіл F_1=300 Н, F_2=450 Н, моманту пары сіл M=120 Нм, размеркаванай нагрузкі інтэнсіўнасці q = 80 Н/м. Вызначыць рэакцыі сувязей, накладзеных на раму.

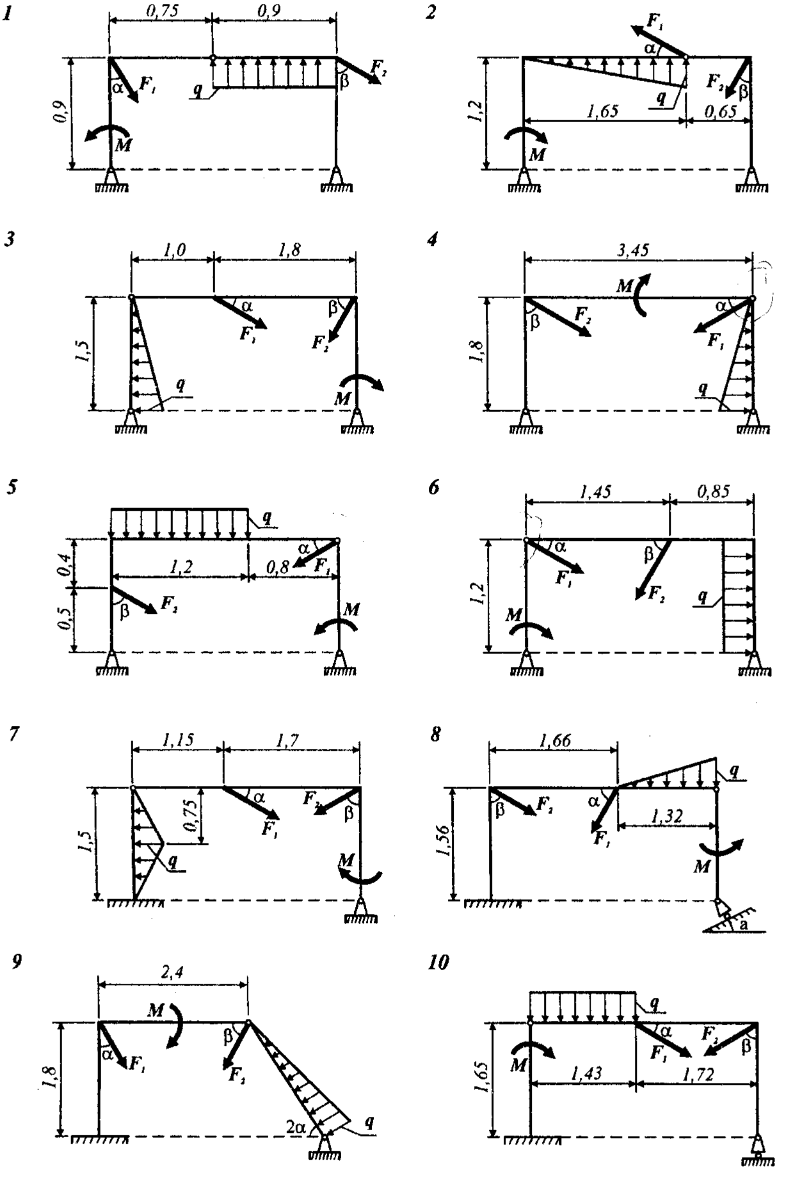


Рыс. 26

Р а ш э н н е. Разглядаем раўнавагу бэлькі AB, часткі ўсёй канструкцыі ABC. На бэльку AB накладзены дзве сувязі: у пункце A – рухомы цыліндрычны шарнір, у пункце B — нерухомы цыліндрычны шарнір. На разліковый схеме бэлькі (рыс. 30) паказваем усе дадзеныя сілы і рэакцыі адкінутых сувязей, якія дзейнічаюць на бэльку.

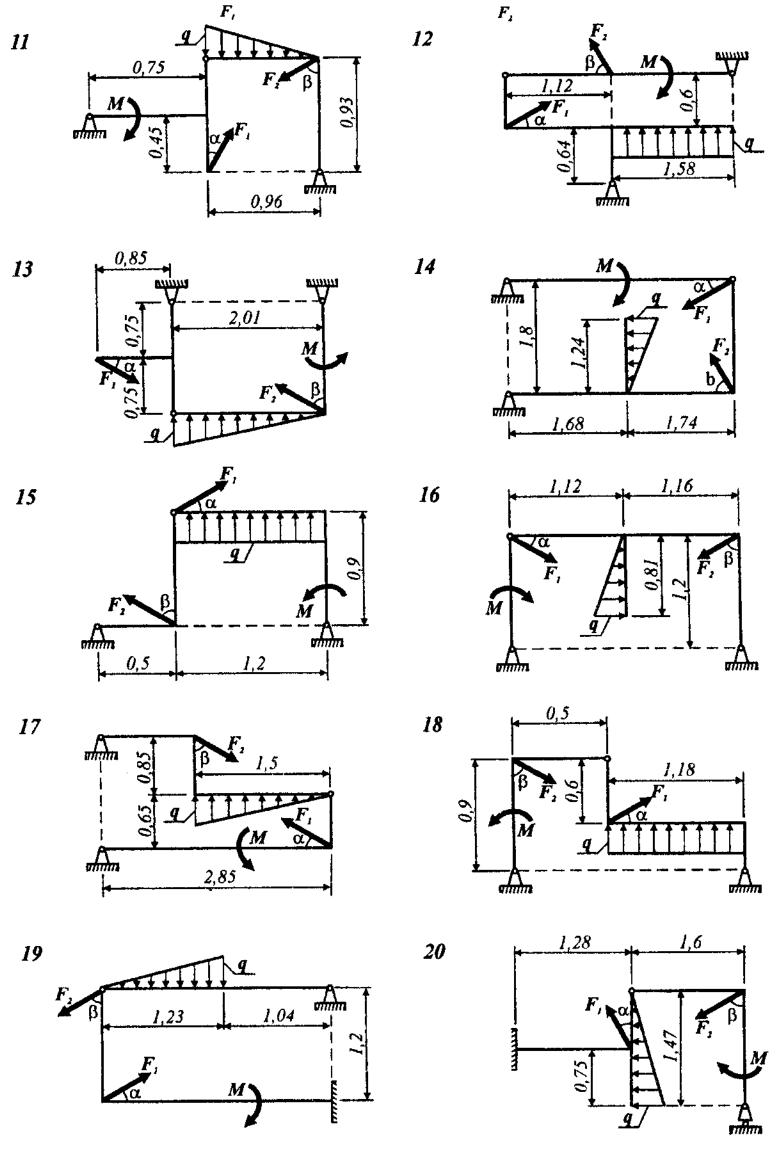
Табліца 3

Варыянт	F_1, Н	F_2, Н	М, Нм	q, Н/м	α, град	β, град
1	2	3	4	5	6	7
1	500	200	100	80	70	20
2	550	400	120	60	20	35
3	600	450	130	40	60	25
4	650	500	160	50	30	40
5	700	550	180	30	25	50
6	750	600	200	20	35	70
7	400	650	220	70	40	45
8	450	700	240	60	45	30
9	300	750	250	90	30	40
10	350	800	230	80	50	25
11	200	850	220	70	60	35
12	250	900	210	90	20	30
13	800	350	200	40	60	60



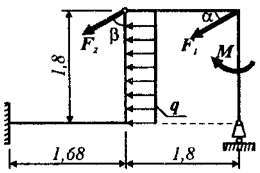
1
0,75
0,9
0,9
q
F1
F2
M
α
β
2
F1
F2
1,2
1,65
0,65
q
M
α
β
3
1,0
1,8
1,5
F1
F2
q
M
α
β
4
3,45
1,8
M
F1
F2
q
α
β
5
q
0,4
0,5
1,2
0,8
F1
F2
M
α
β
6
1,45
0,85
1,2
F1
F2
q
M
α
β
7
1,15
1,7
1,5
0,75
F1
F2
q
M
α
β
8
1,66
1,32
1,56
F1
F2
q
M
α
β
a
9
2,4
1,8
M
F1
F2
q
α
β
2α
10
q
1,65
1,43
1,72
F1
F2
M
α
β

Рыс. 27

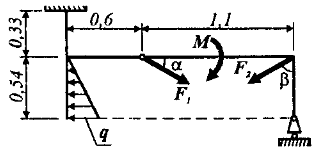

11
F1
q
0,75
F2
β
M
0,45
α
F1
0,93
0,96
12
F1
F2
β
M
1,12
F1
α
0,6
0,64
q
1,58
13
0,85
0,75
2,01
M
F1
α
0,75
F2
β
q
14
M
α
q
F1
1,8
1,24
F2
b
1,68
1,74
15
F1
α
q
0,9
F2
β
M
0,5
1,2
16
1,12
1,16
α
F1
0,81
1,2
F2
β
M
q
17
F2
β
0,85
1,5
0,65
q
F1
M
α
2,85
18
0,5
1,18
β
F2
0,6
F1
0,9
α
M
q
19
q
F2
β
1,23
1,04
1,2
F1
α
M
20
1,28
1,6
F1
α
1,47
F2
β
M
0,75
q

Рыс. 28

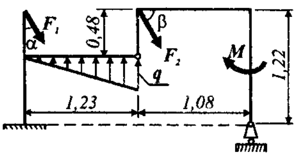
21



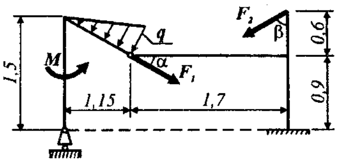
22



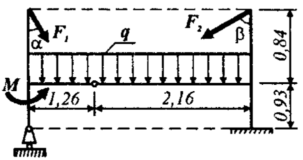
23



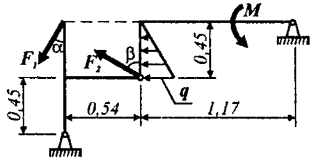
24



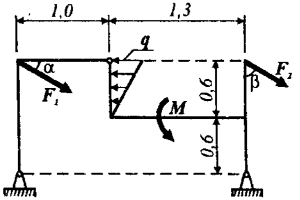
25



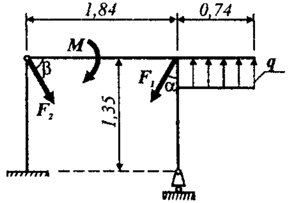
26



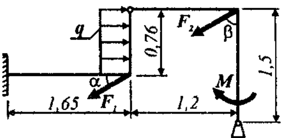
27



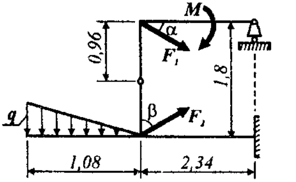
28



29



30



Рыс. 29

1	2	3	4	5	6	7
14	850	300	110	50	40	55
15	900	250	190	80	10	25
16	100	650	120	40	45	54
17	150	700	110	44	20	75
18	200	750	100	48	30	23
19	250	800	130	52	30	17
20	300	600	140	56	47	45
21	350	550	160	60	35	28
22	400	500	150	64	40	37
23	450	300	170	68	67	52
24	500	350	180	72	66	59
25	550	400	125	76	68	72
26	600	450	115	80	33	30
27	650	250	105	84	43	25
28	700	200	135	88	48	25
29	750	150	145	92	29	30
30	800	100	155	96	30	64

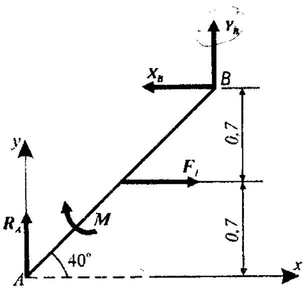
У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Запісваем ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad F_1 - X_B = 0;$$

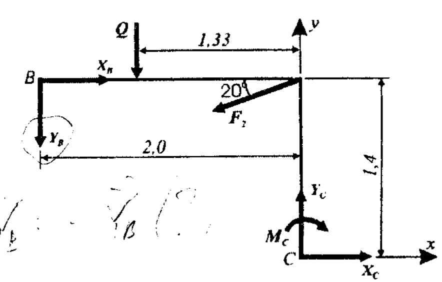
$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad R_A + Y_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_B(\mathbf{F}_k) = 0 \quad -R_A \cdot 1{,}4\mathrm{ctg}40° - M + F_1 \cdot 0{,}7 = 0.$$

Вызначаем невядомыя рэакцыі R_A, X_B, Y_B.



Рыс. 30



Рыс. 31

$$R_A = \frac{F_1 \cdot 0{,}7 - M}{1{,}4\mathrm{ctg}40^\circ} = \frac{300 \cdot 0{,}7 - 120}{1{,}4 \cdot 1{,}192} = 53{,}93\ \text{Н};$$

$$X_B = F_1 = 300\ \text{Н}, \quad Y_B = -R_A = -53{,}93\ \text{Н}.$$

Разгледзім раўнавагу правай часткі рамы. На яе накладзены дзве сувязі: нерухомы цыліндрычны шарнір у пункце B і нерухомая замацоўка — у пункце C. На разліковай схеме рамы BC (рыс. 31) паказваем дадзеныя сілы і рэакцыі адкінутых сувязей, якія дзейнічаюць на бэльку.

Пры гэтым складовыя рэакцыі шарніра B паказваем абавязкова процілегла тым накірункам, што былі выбраны для складовых рэакцыі ў гэтым шарніры для левай часткі канструкцыі (вектарная сума сіл узаемадзеяння двух цел паміж сабою павінна быць роўнай нулю). Размеркаваную нагрузку замяняем раўнадзейнаю сілаю $\mathbf{Q}$. У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Запісваем ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad X_C + X_B - F_2 \cos 20^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad Y_C - Y_B - Q - F_2 \sin 20^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_C(\mathbf{F}_k) = 0 \quad Y_B \cdot 2 - X_B \cdot 1{,}4 + Q \cdot 1{,}33 + F_2 \cos 20^\circ \cdot 1{,}4 - M_C = 0.$$

Вызначаем невядомыя рэакцыі X_C, Y_C, M_C.

$$X_C = F_2 \cos 20^\circ - X_B = 450 \cdot 0{,}94 - 300 = 123\ \text{Н};$$

$$Y_C = F_2 \sin 20^\circ + Q + Y_B = 450 \cdot 0{,}342 + \frac{80 \cdot 2}{2} - 53{,}93 = 179{,}97\ \text{Н};$$

$$M_C = Y_B \cdot 2 - X_B \cdot 1{,}4 + Q \cdot 1{,}33 + F_2 \cos 20^\circ \cdot 1{,}4 =$$

$$= 53{,}93 \cdot 2 - 300 \cdot 1{,}4 + \frac{80 \cdot 2}{2} \cdot 1{,}33 + 450 \cdot 0{,}94 \cdot 1{,}4 = 170{,}74\ \text{Нм}.$$

Праверка.

$$\sum_{k=1}^{n} m_B(\mathbf{F}_k) = 0 \quad -Q \cdot 0{,}67 - F_2 \sin 20^\circ \cdot 2 + Y_C \cdot 2 + X_C \cdot 1{,}4 - M_C = 0;$$

$$-\frac{80\cdot 2}{2}\cdot 0{,}67-450\cdot 0{,}342\cdot 2+179{,}97\cdot 2+123\cdot 1{,}4-170{,}74=0,$$

$$0=0.$$

Разлікі выкананы правільна.

Заданне С-8

Раўнавага цела з улікам трэння

1–20. Вызначыць межы змянення велічыні сілы **F**, якую неабходна прыкласці да цела для забеспячэння яго раўнавагі на нахіленай паверхні (рыс. 33,34). Даныя ў табл. 4, дзе G — вага цела, f — каэфіцыент трэння слізгання цела на нахіленай паверхні, δ — каэфіцыент трэння качэння кола па нахіленай паверхні.

Табліца 4

Варыянт	G, Н	R, м	r, м	a, м	b, м	δ, мм	f	α, град.	β, град.
1	500	0,25				0,4	0,20	10	15
2	450	0,30				0,3	0,15	15	25
3	400	0,35	0,25			0,2	0,25	20	45
4	350	0,32	0,20			0,4	0,18	20	15
5	300	0,28	0,15			0,8	0,22	10	10
6	480	0,40				0,5	0,24	15	20
7	370	0,38	0,25			0,7	0,30	20	25
8	420	0,30	0,20			0,6	0,16	22	40
9	330	0,36				0,9	0,17	25	28
10	500	0,34				0,2	0,28	23	62
11	490			0,36	0,46		0,25	28	35
12	480			0,32	0,44		0,22	26	28
13	470			0,30	0,42		0,24	24	16
14	460			0,28	0,40		0,20	25	20
15	450			0,26	0,38		0,18	26	18
16	440			0,24	0,36		0,19	30	16
17	430			0,22	0,34		0,16	24	20
18	420			0,20	0,32		0,15	35	18
19	410			0,28	0,42		0,17	28	30
20	400			0,30	0,46		0,21	25	20

21. Вызначыць:

а) максімальную адлегласць h, пры якой будзе адбывацца праслізгванне ўтулкі ўніз, l=0,1 м, каэфіцыент трэння слізгання ўтулкі на стойцы f=0,1;

б) максімальную даўжыню ўтулкі l, пры якой яна не будзе спаўзаць ўніз h=0,42 м, f=0,1 (рыс. 35).

22. Вызначыць каэфіцыент трэння слізгання f паміж целамі 1 і 2, калі цела 1 знаходзіцца ў спакоі, а цела 2 рухаецца ўправа. G=120 Н, Q=1000 Н, α=27° (рыс. 35).

23. Кола, вага якога G=150 Н і радыус R=0,35 м, раўнамерна коціцца без праслізгвання пад уздзеяннем пары сіл з момантам M=180 Нм. З цэнтрам кола праз шарнір звязаны стрыжань AB=1 м з паўзуном, які рухаецца ўздоўж накіравальных. Вызначыць каэфіцыент трэння слізгання ў накіравальных, калі вядома, што каэфіцыент трэння качэння кола δ=0,1 мм. (рыс. 35).

24. Штанга AB вагою G=75 Н падымаецца раўнамерна ўверх пад уздзеяннем сілы P=180 Н. Вызначыць найбольшую велічыню вугла α паміж штангаю і накірункам сілы **P**, пры якім магчымы названы рух штангі. Каэфіцыент трэння паміж штангаю AB і накіравальнымі f = 0,12, a=0,4 м, b=0,6 м. (рыс. 35).

25. Прамалінейны рычаг 1 раўнамерна падымае штангу 2, вага якой G_2=150 Н. Каэфіцыент трэння слізгання паміж штангаю 2 і яе накіравальнымі f_2=0,18, паміж канцом штангі і рычагом – f_1=0,15, a=0,6 м, b=0,6 м. Вызначыць, пры якім вугле α рух штангі 2 будзе немагчымы (рыс. 35).

26. Крывашыпна-паўзунны механізм размешчаны ў вертыкальнай плоскасці. Улічваючы вагу G=100 Н толькі паўзуна, вызначыць значэнні моманту M, пры якіх магчымы пад'ём і апусканне паўзуна ў прыведзеным становішчы механізма. OA=0,2 м, AB=1 м, α=40°, каэфіцыент трэння слізгання паўзуна па накіравальных f = 0,17 (рыс. 35).

27. Да паўзуна 3 крывашыпна-паўзуннага механізма, вага якога G_3=600 Н, прыкладзена сіла P=12 кН. Каэфіцыент трэння слізгання паўзуна па накіравальных f=0,13. Вызначыць момант M, які неабходна прыкласці да крывашыпа 1, каб забяспечыць раўнамернае перамяшчэнне паўзуна 3. l_1=0,2 м, l_2=0,6 м, α=90° (рыс. 35).

28. У механізме (рыс. 35) клін 1 рухаецца па гарызанталі, а плунжэр 2 пры гэтым рухаецца па вертыкалі. Вага плунжэра G_2=60 Н, каэфіцыенты трэння слізгання: паміж клінам і гарызантальнаю плоскасцю — f_1= 0,1, паміж клінам і плунжэрам — f_2=0,12, паміж плунжэрам і яго накіравальнымі — f_3=0,15. Вугал α=15°.

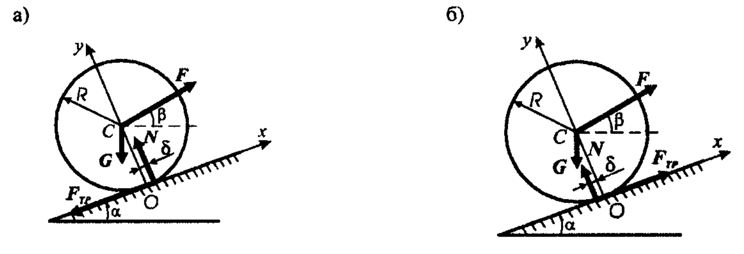
Вызначыць значэнні сілы P, якую неабходна прыкласці да кліна 1, каб забяспечыць раўнамерныя пад'ём і апусканне плунжэра.

29. Вызначыць сілу P, неабходную для пераадолення супраціўлення Q: а) з улікам сіл трэння; б) без уліку сіл трэння. Q=1200 Н, α_1=10°, α_2=15°, каэфіцыенты трэння слізгання: паміж клінам і нахіленаю паверхняю — f_{13}=0,1, паміж клінам і плунжэрам — f_{12}=0,12, паміж плунжэрам і яго накіравальнымі — f_{23}= 0,2 (рыс. 35).

30. Вызначыць сілу P, неабходную для пераадолення супраціўлення Q: а) з улікам сіл трэння; б) без уліку сіл трэння. Q=9 кН, α=20°, каэфіцыенты трэння слізгання: паміж клінам і вертыкальнаю плоскасцю – f_{13}=0,12, паміж клінам і плунжэрам — f_{12}=0,15, паміж плунжэрам і гарызантальнымі накіравальнымі — f_{23}=0,17 (рыс. 35).

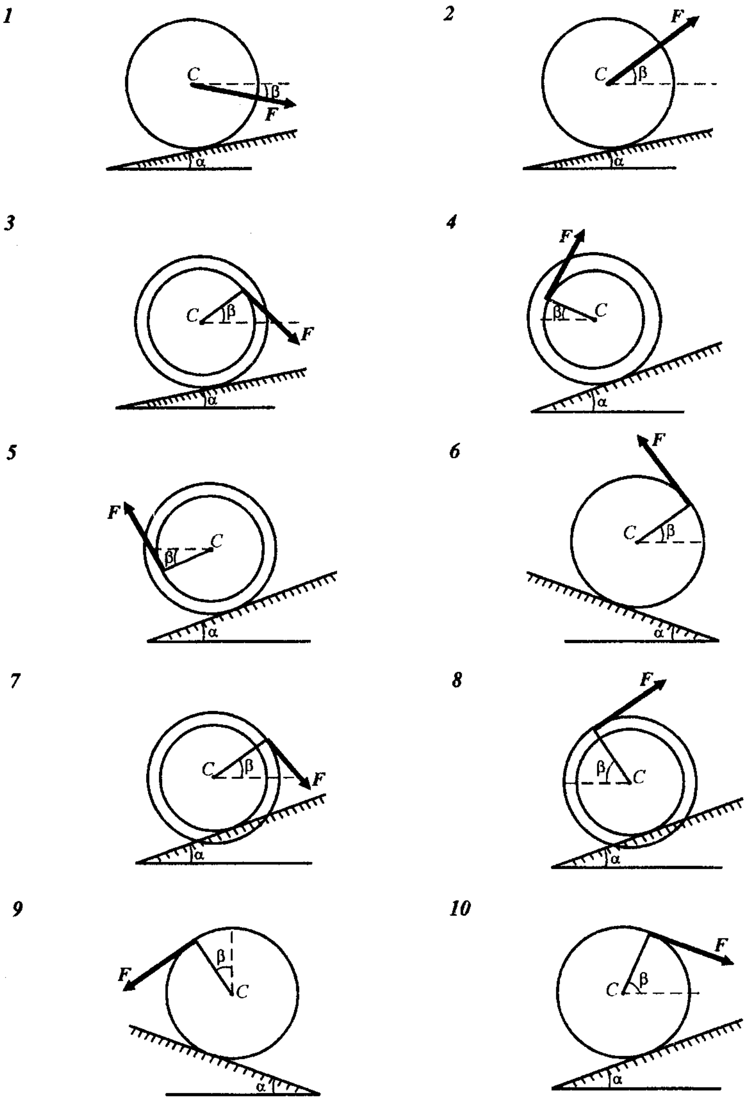
Прыклад рашэння задання С-8

Вызначыць межы змянення велічыні сілы **F** пры раўнавазе катка на нахіленай паверхні (рыс. 32). G=200 Н, f=0,2, δ=0,5 мм, R=0,3 м, α=20°, β=30°.

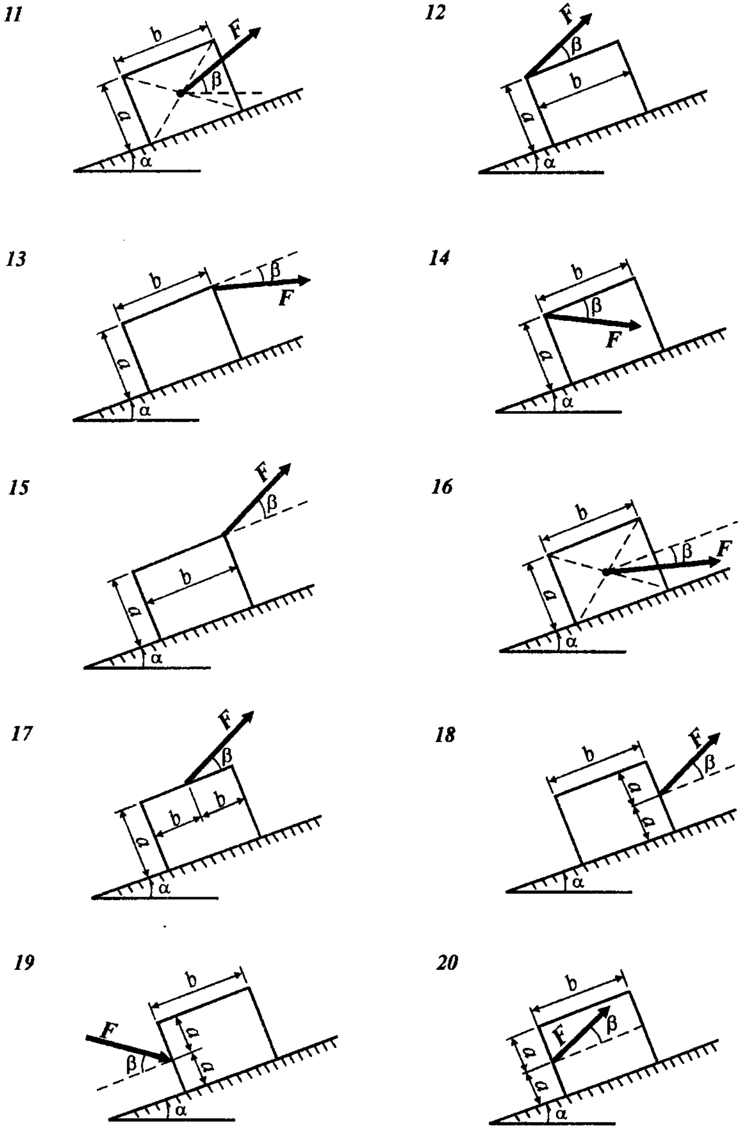


Рыс. 32

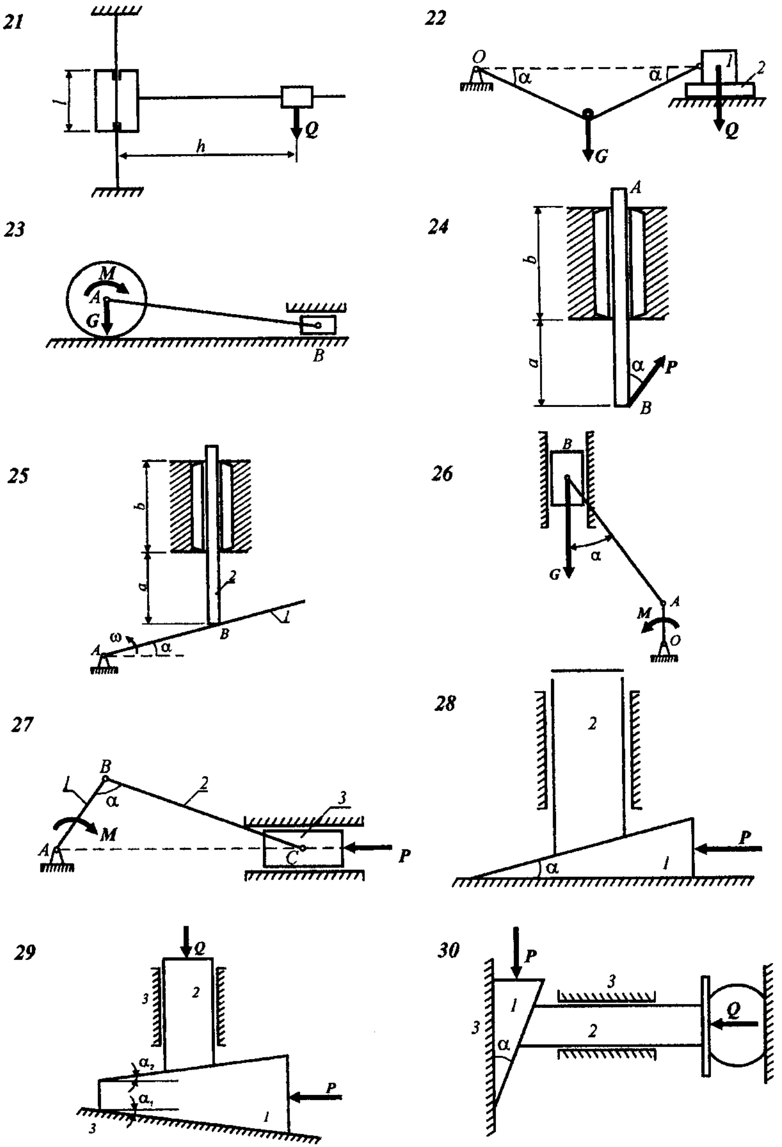
Р а ш э н н е. Разгледзім раўнавагу катка на нахіленай паверхні з улікам трэння качэння і слізгання ў выпадку, калі ён раўнамерна рухаецца ўправа без праслізгвання (рыс. 32а). Рэакцыю нягладкай апорнай паверхні паказваем у выглядзе дзвюх складовых: **N** і $\mathbf{F}_{тр}$. Сіла **N** паказана на адлегласці δ ад цэнтра катка з улікам руху ўправа. У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Запісваем ураўненні раўнавагі.


1
C
β
F
α
2
F
C
β
α
3
C
β
F
α
4
F
β
C
α
5
F
C
β
α
6
F
C
β
α
7
C
β
F
α
8
F
β
C
α
9
β
F
C
α
10
F
C
β
α

Рыс. 33


11
b
F
β
a
α
12
F
β
b
a
α
13
b
β
F
a
α
14
b
β
F
a
α
15
F
β
b
a
α
16
b
β
F
a
α
17
F
β
b
b
a
α
18
b
F
β
a
a
α
19
b
F
a
a
β
α
20
b
F
β
a
a
α

Рыс. 34



21
l
h
Q
22
O
α
α
1
2
G
Q
23
M
A
G
B
24
A
b
a
α
P
B
25
b
a
2
1
ω
A
α
B
26
B
G
α
M
A
O
27
B
1
α
2
3
M
A
C
P
28
2
P
α
1
29
Q
3
2
α_2
α_1
P
1
3
30
P
3
1
3
Q
2
α

Рыс. 35

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad F\cos 10° - G\sin 20° - F_{тр} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad F\sin 10° - G\cos 20° + N = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_0(\boldsymbol{F}_k) = 0 \quad N\cdot\delta - F\cos 10°\cdot R + G\sin 20°\cdot R = 0.$$

$$\begin{cases} F\cdot 0{,}985 - 68{,}4 - F_{тр} = 0 \\ F\cdot 0{,}174 - 187{,}9 + N = 0 \\ N\cdot 0{,}0005 - F\cdot 0{,}295 + 20{,}52 = 0. \end{cases}$$

$$N = 187{,}9 - 0{,}174\,F;$$

$$0{,}094 - 0{,}000087\,F - 0{,}295\,F + 20{,}52 = 0;$$

$$20{,}614 = 0{,}295087\,F;$$

$$F = 69{,}86\ \text{Н}, \quad \text{N} = 175{,}74\ \text{Н};$$

$$\text{F}_{тр} = 68{,}81 - 68{,}4 = 0{,}41\ \text{Н}.$$

$$F_{тр.max} = f\cdot N = 0{,}2\cdot 175{,}74 = 35{,}15\ \text{Н}.$$

Параўнанне $F_{тр}$ і $F_{тр.max}$ дае падставу для вываду, што, як і меркавалі, праслізгвання не назіраецца: $F_{тр} < F_{тр.max}$.

Цяпер разгледзім раўнавагу катка ў выпадку, калі ён раўнамерна рухаецца ўлева (рыс. 32б).

У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Запісваем ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad F\cos 10° + F_{тр} - G\sin 20° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad F\sin 10° - G\cos 20° + N = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_0(\boldsymbol{F}_k) = 0 \quad G\sin 20°\cdot R - F\cos 10°\cdot R - N\cdot\delta = 0.$$

$$\begin{cases} F\cdot 0{,}985 + F_{\text{тр}} - 68{,}4 = 0 \\ F\cdot 0{,}174 - 187{,}9 + N = 0 \\ 20{,}52 - F\cdot 0{,}295 - N\cdot 0{,}0005 = 0. \end{cases}$$

$$N = 187{,}9 - 0{,}174\,F;$$

$$20{,}52 - 0{,}295\,F - 0{,}094 + 0{,}000087\,F = 0;$$

$$20{,}43 = 0{,}294913\,F, \quad F = 69{,}27\ \text{Н},$$

$$\text{N} = 175{,}85\ \text{Н};$$

$$F_{\text{тр}} = 0{,}17\ \text{Н}.$$

$$F_{\text{тр.max}} = f\cdot N = 0{,}2\cdot 175{,}85 = 35{,}17\ \text{Н}.$$

$F_{\text{тр}} < F_{\text{тр.max}}$, праслізгвання няма.

Такім чынам, раўнавага катка на нахіленай нягладкай паверхні ў разгледжаным прыкладзе будзе назірацца пры выбраных значэннях сілы **F** у межах ад 69,27 Н да 69,86 Н.

2. Прасторавая сістэма сіл

Сыходная сістэма сіл

З а д а н н е С - 9

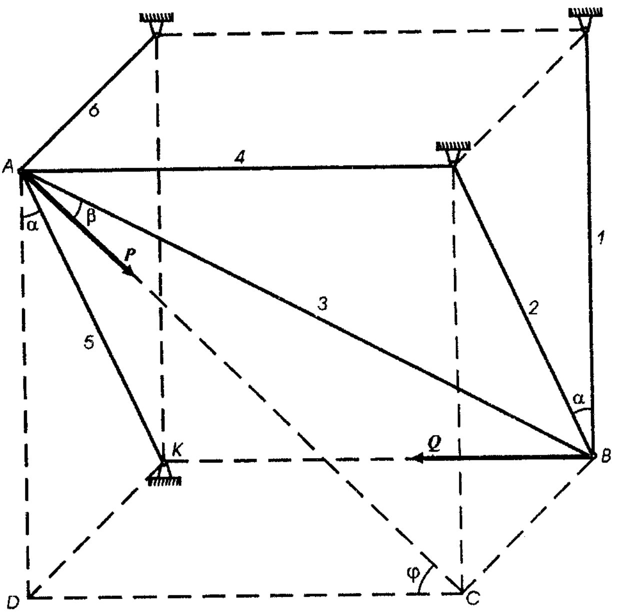
Вызначэнне нагрузак у стрыжнях прасторавай канструкцыі

На вузлы A і B прасторавай канструкцыі дзейнічаюць сілы **P** і **Q**. Вызначыць нагрузкі ў шасці бязважкіх стрыжнях, з якіх з дапамогаю шарніраў утворана дадзеная канструкцыя (рыс. 37–39, табл. 5).

Прыклад рашэння задання С-9

Дадзена: P=100 Н, Q=200 Н, α=60°, β=30°.

Вызначыць нагрузкі ў шасці бязважкіх стрыжнях прасторавай канструкцыі (рыс. 36).



Рыс. 36

Табліца 5

Вары-янт	P, Н	Q, Н	α, град	β, град	Вары-янт	P, Н	Q, Н	α, град	β, град
1	100	180	25	40	16	250	330	60	30
2	110	190	70	35	17	240	190	55	25
3	120	200	40	60	18	230	180	45	70
4	130	210	30	25	19	220	170	65	45
5	140	220	35	30	20	210	160	50	35
6	150	230	60	50	21	200	150	40	50
7	160	240	65	35	22	190	140	55	60
8	170	250	45	30	23	180	130	50	65
9	180	260	70	60	24	170	120	45	35
10	190	270	40	50	25	160	110	35	55
11	200	280	50	45	26	150	100	60	30
12	210	290	35	55	27	140	200	65	40
13	220	300	30	40	28	130	210	45	35
14	230	310	65	30	29	120	220	50	45
15	240	320	55	35	30	110	230	55	60

Рашэнне. Разглядаем спачатку раўнавагу вузла B (у ім змацавана меншая чым у вузле A колькасць стрыжняў). На вузел B накладзены тры сувязі — бязважкія стрыжні 1, 2, 3. Пазбаўляемся ўмоўна ад сувязей, а замест іх пакажам рэакцыі сувязей. Пры гэтым лічым, што ўсе стрыжні расцягнутыя. Таму рэакцыі стрыжняў, прыкладзеныя да вузла B, паказваем ад вузла ўздоўж стрыжняў (рыс. 40а)

У раўнавазе знаходзіцца прасторавая сыходная сістэма сіл. Запісваем ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad S_2 \sin\alpha + S_3 \sin\beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad S_3 \cos\beta \cdot \cos\varphi + Q = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \quad S_1 + S_2 \cos\alpha + S_3 \cos\beta \cdot \sin\varphi = 0.$$

Каб рашыць атрыманую сістэму ўраўненняў, неабходна, акрамя дадзеных вуглоў α і β, вызначыць вугал φ. Карыстаемся рыс. 36. З прамавугольнага трохвугольніка ABC маем: $CB=AC\cdot\mathrm{tg}\beta$. $DK=CB$. У прамавугольным трохвугольніку ADK катэт $AD=DK\cdot\mathrm{ctg}\alpha$. Тады $AD=AC\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{ctg}\alpha$.

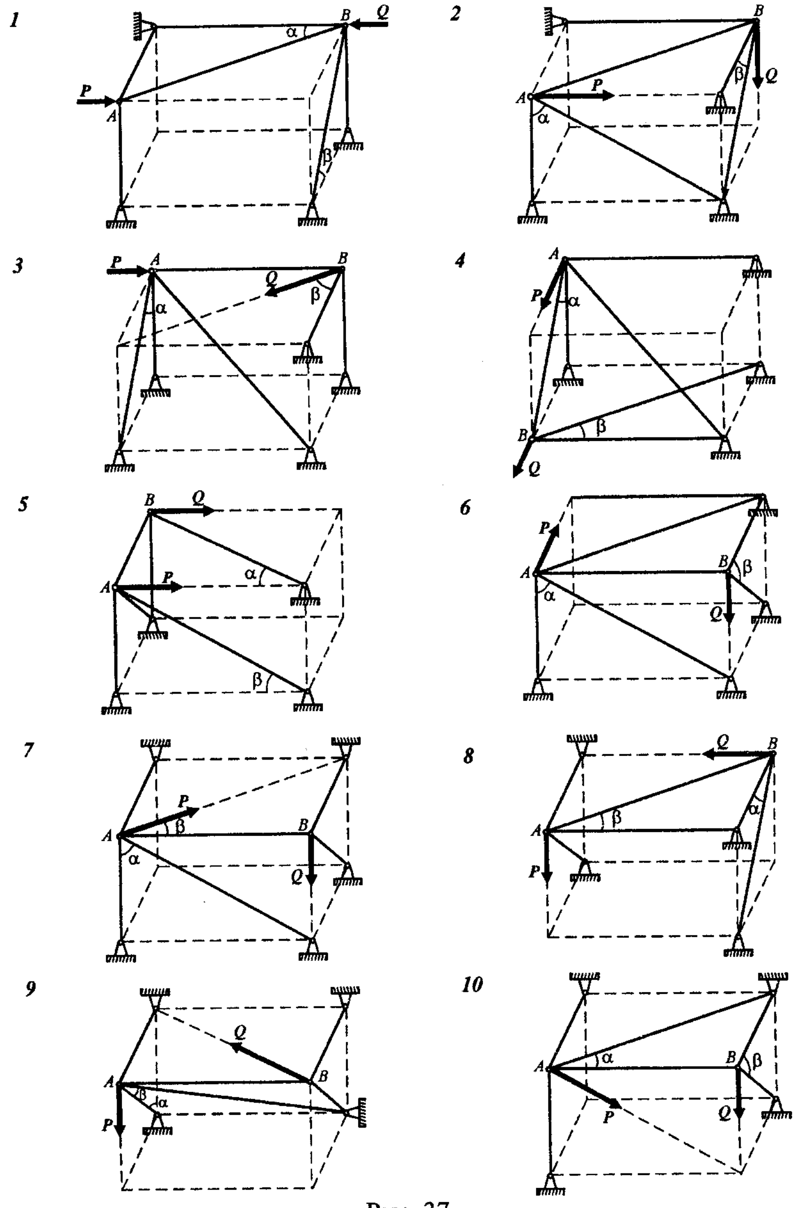
Цяпер маем магчымасць вызначыць вугал φ у прамавугольным трохвугольніку ADC.

$$\sin\varphi = \frac{AD}{AC} = \frac{AC \cdot \mathrm{tg}\,\beta \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha}{AC} = 0{,}577 \cdot 0{,}577 = 0{,}333,$$

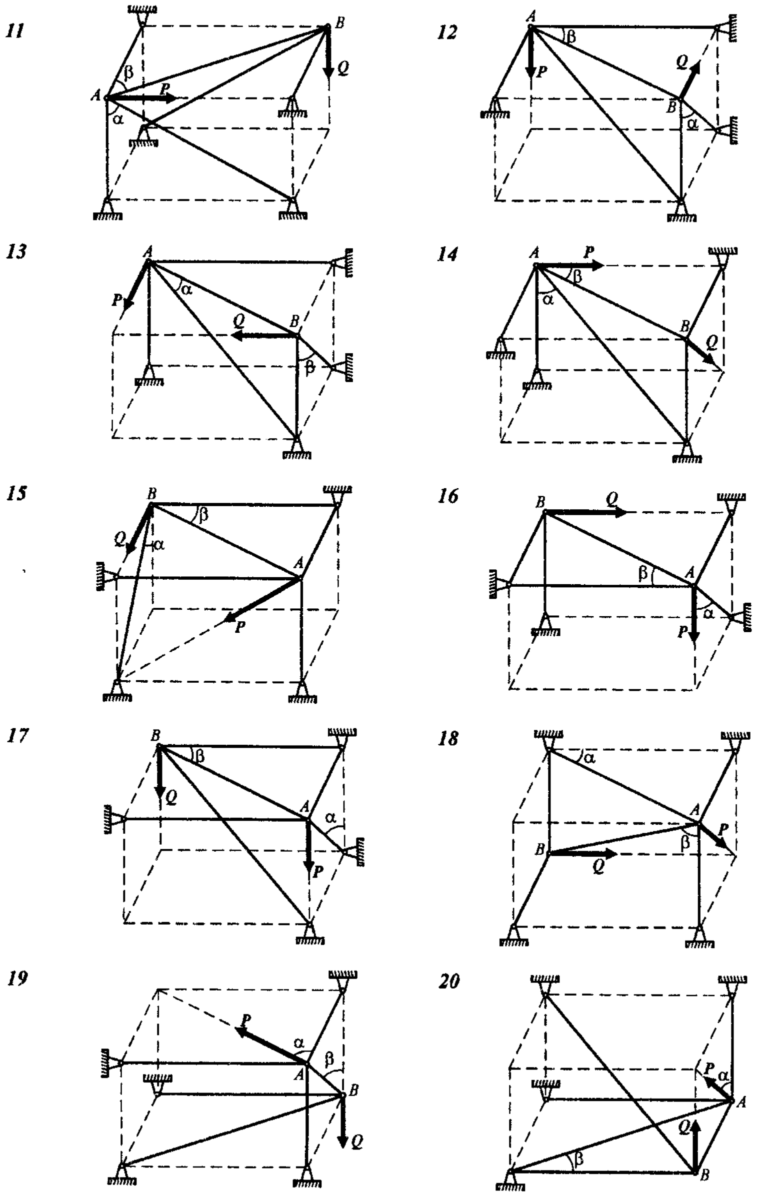
$$\varphi = 19{,}45°.$$

Падставім усе вядомыя велічыні ў сістэму ўраўненняў і атрымаем значэнні S_1, S_2, S_3.

$$\begin{cases} S_2 \cdot 0{,}866 + S_3 \cdot 0{,}5 = 0, \\ S_3 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}943 + 200 = 0, \\ S_1 + S_2 \cdot 0{,}5 + S_3 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}333 = 0. \end{cases}$$

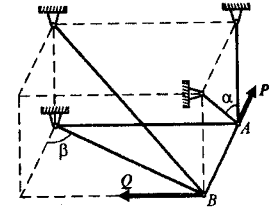

1 P A B Q α β
2 A B P Q α β
3 P A B Q α β
4 A P α B Q β
5 B Q A P α β
6 P A B α β Q
7 A P β B α Q
8 Q B A β α P
9 Q A B β α P
10 A α B β P Q

Рыс. 37

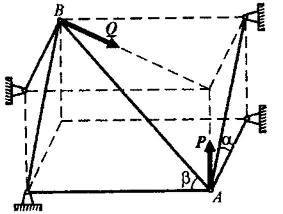


Рыс. 38

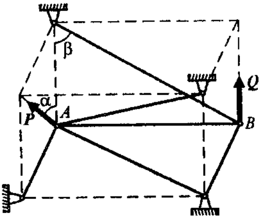
21



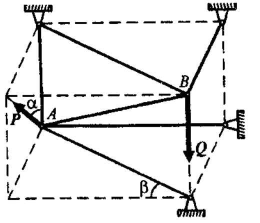
22



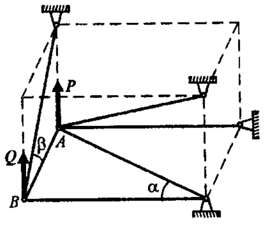
23



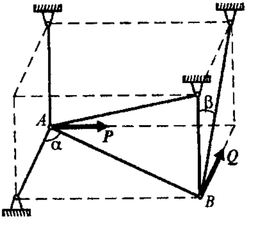
24



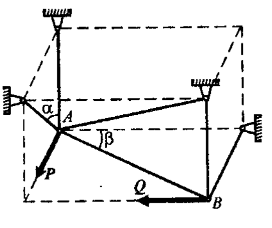
25



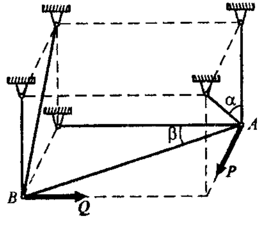
26



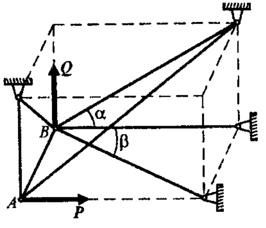
27



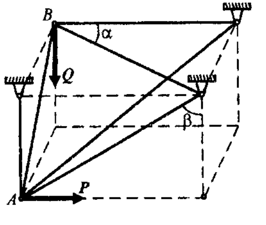
28



29



30

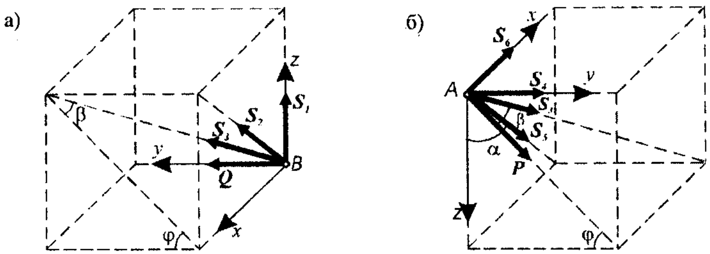


Рыс. 39

$$S_3 = -\frac{200}{0{,}817} = -244{,}8 \text{ Н};$$

$$S_2 = -S_3\frac{0{,}5}{0{,}866} = 244{,}8 \cdot 0{,}577 = 141{,}2 \text{ Н};$$

$$S_1 = -S_2 \cdot 0{,}5 - S_3 \cdot 0{,}288 = -141{,}2 \cdot 0{,}5 + 244{,}8 \cdot 0{,}288 = 0.$$



Рыс. 40

Разглядаем раўнавагу вузла A. На яго накладзены 4 сувязі – бязважкія стрыжні 3, 4, 5, 6. Паказваем рэакцыі стрыжняў ад вузла A па стрыжнях (рыс. 40б). У раўнавазе знаходзіцца прасторавая сыходная сістэма сіл. Запісваем ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad S_3 \sin\beta + S_5 \sin\alpha + S_6 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad S_3 \cos\beta \cdot \cos\varphi + S_4 + P\cos\varphi = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \quad S_3 \cos\beta \sin\varphi + S_5 \cos\alpha + P\sin\varphi = 0.$$

Падставім усе вядомыя велічыні ў сістэму ўраўненняў і атрымаем значэнні S_4, S_5, S_6.

$$\begin{cases} -244{,}8 \cdot 0{,}5 + S_5 \cdot 0{,}866 + S_6 = 0 \\ -244{,}8 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}943 + S_4 + 100 \cdot 0{,}943 = 0 \\ -244{,}8 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}333 + S_5 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}333 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -122{,}4 + S_5 \cdot 0{,}866 + S_6 = 0 \\ -199{,}9 + S_4 + 94{,}3 = 0 \\ -70{,}6 + S_5 \cdot 0{,}5 + 33{,}3 = 0. \end{cases}$$

$$S_4 = 105{,}6 \text{ Н}, \quad S_5 = 74{,}6 \text{ Н}, \quad S_6 = 57{,}8 \text{ Н}.$$

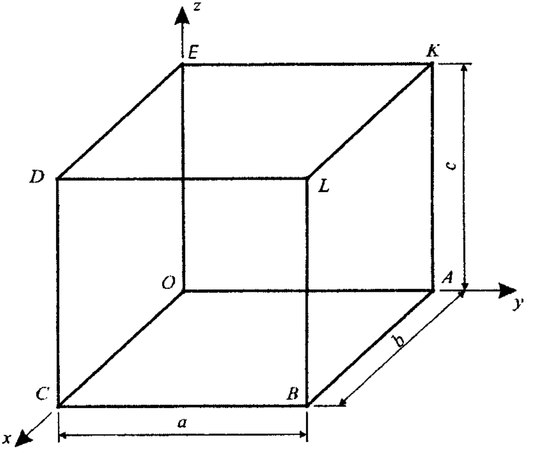
Нагрузкі стрыжняў 2, 4, 5, 6 атрыманы са знакам “плюс”. Гэта азначае, што пералічаныя стрыжні расцягнутыя. Нагрузка стрыжня 3 атрымана са знакам “мінус”. Гэта азначае, што стрыжань 3 сціснуты. Стрыжань 1 не нагружаны ўвогуле, ён – “нулявы” стрыжань. Яго роля – забяспечваць нязменнасць формы канструкцыі.

Прасторавая адвольная сістэма сіл

Заданне С-10

Прывядзенне прасторавай адвольнай сістэмы сіл да прасцейшага віду

Вызначыць галоўны вектар і галоўны момант дадзенай сістэмы сіл адносна цэнтра O. Высветліць, да якога прасцейшага віду прыводзіцца гэтая сістэма. Памеры паралелепіпеда (рыс. 41), пункты, у якіх прыкладзены сілы, іх модулі і накірункі дадзены ў табл. 6.



Рыс. 41

Табліца 6

Ва-ры-янт	Памеры парале-лепіпеда, см			F_1=10 Н		F_2=20 Н		F_3=30 Н		F_4=40 Н	
	a	*b*	*c*	пункт, у якім прыкл.	накі-рунак	пункт, у якім прыкл.	накі-рунак	пункт, у якім прыкл.	накі-рунак	пункт, у якім прыкл.	накі-рунак
1	40	60	30	*E*	*EK*	*K*	*KA*	*A*	*AD*	*B*	*BD*
2	45	55	35	*K*	*KL*	*L*	*LB*	*B*	*BE*	*C*	*CE*
3	50	50	40	*L*	*LD*	*D*	*DC*	*C*	*CO*	*B*	*BE*
4	55	45	45	*D*	*DA*	*E*	*EO*	*O*	*OA*	*B*	*BK*
5	40	40	50	*E*	*EK*	*K*	*KB*	*B*	*BE*	*C*	*CD*
6	45	60	55	*K*	*KL*	*L*	*LC*	*C*	*CD*	*D*	*DA*
7	50	55	60	*L*	*LD*	*D*	*DO*	*B*	*BE*	*A*	*AK*
8	55	50	30	*D*	*DE*	*E*	*EA*	*A*	*AD*	*B*	*BL*
9	60	45	35	*E*	*EO*	*B*	*BE*	*A*	*AC*	*C*	*CD*
10	50	40	40	*K*	*KA*	*A*	*AC*	*C*	*CO*	*O*	*OL*
11	55	60	45	*L*	*LB*	*B*	*BE*	*O*	*OA*	*A*	*AL*
12	60	55	50	*D*	*DC*	*C*	*CA*	*A*	*AB*	*B*	*BE*
13	40	50	55	*E*	*EA*	*O*	*OB*	*B*	*BC*	*C*	*CD*
14	45	45	60	*K*	*KA*	*A*	*AB*	*B*	*BO*	*O*	*OD*
15	60	40	30	*L*	*LB*	*B*	*BC*	*C*	*CA*	*A*	*AD*
16	40	60	35	*D*	*DC*	*C*	*CO*	*O*	*OB*	*B*	*BE*
17	45	55	40	*O*	*OL*	*E*	*EK*	*K*	*KL*	*L*	*LC*
18	50	50	45	*A*	*AD*	*K*	*KL*	*L*	*LD*	*D*	*DO*
19	55	45	50	*B*	*BE*	*L*	*LD*	*D*	*DE*	*E*	*EA*
20	60	40	55	*C*	*CD*	*D*	*DE*	*B*	*BE*	*K*	*KB*
21	55	45	60	*O*	*OL*	*A*	*AK*	*K*	*KD*	*L*	*LC*
22	50	60	55	*A*	*AB*	*B*	*BL*	*L*	*LD*	*D*	*DA*
23	45	40	50	*B*	*BC*	*C*	*CD*	*D*	*DA*	*E*	*EA*
24	40	50	45	*C*	*CO*	*O*	*OL*	*E*	*EK*	*K*	*KB*
25	45	55	40	*O*	*OD*	*D*	*DL*	*L*	*LB*	*B*	*BE*
26	50	45	35	*A*	*AE*	*E*	*ED*	*D*	*DC*	*B*	*BE*
27	55	50	30	*B*	*BK*	*K*	*KE*	*E*	*EO*	*D*	*DA*
28	60	40	35	*C*	*CL*	*L*	*LK*	*K*	*KA*	*A*	*AD*
29	55	45	40	*O*	*OB*	*B*	*BA*	*A*	*AK*	*K*	*KC*
30	50	60	45	*A*	*AC*	*C*	*CK*	*B*	*BL*	*L*	*LD*

Прыклад рашэння задання С-10

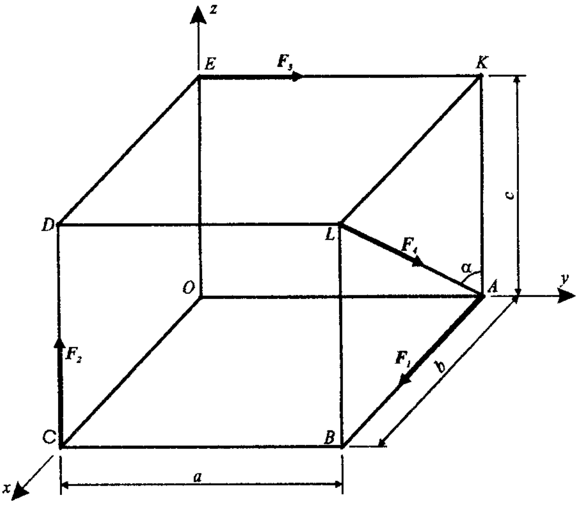
Дадзена: паралелепіпед (рыс. 41) з памерамі: a=0,6 м, b=0,5 м, c=0,4 м; сілы: F_1=10 Н, F_2=6 Н, F_3=8 Н, F_4=15 Н; пункты, у якіх прыкладзены сілы, адпаведна A, C, E, L; накірункі сіл: AB, CD, EK, LA.

Вызначыць галоўны вектар і галоўны момант сістэмы сіл адносна цэнтра O. Да якога прасцейшага віду прыводзіцца гэтая сістэма?

Р а ш э н н е. Будуем у маштабе па дадзеных памерах паралелепіпед. Паказваем сістэму сіл (рыс. 42).

Знойдзем велічыню вугла α.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c} = 1{,}25, \quad \alpha = 51{,}35°.$$



Рыс. 42

Прасторавая адвольная сістэма сіл спрошчваецца з дапамогаю методыкі прывядзення сістэмы сіл да адзінага цэнтра.

Галоўны вектар $\mathbf{R}'$ прасторавай адвольнай сістэмы сіл вызначаем па яго праекцыях на восі каардынат.

$$R'_x = \sum_{k=1}^{4} F_{kx} = F_1 - F_4 \sin\alpha = 10 - 15 \cdot 0{,}781 = -1{,}7 \text{ Н};$$

$$R'_y = \sum_{k=1}^{4} F_{ky} = F_3 = 8 \text{ Н};$$

$$R'_z = \sum_{k=1}^{4} F_{kz} = F_2 - F_4 \cos\alpha = 6 - 15 \cdot 0{,}625 = -3{,}4 \text{ Н}.$$

Модуль галоўнага вектара роўны

$$R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2 + (R'_z)^2} = \sqrt{2{,}89 + 64 + 11{,}56} = 8{,}9 \text{ Н}.$$

Падлічым накіравальныя косінусы галоўнага вектара (косінусы вуглоў паміж галоўным вектарам і дадатнымі накірункамі восей каардынат), а па іх значэннях атрымаем адпаведныя вуглы.

$$\cos(\mathbf{R}', \boldsymbol{i}) = \frac{R'_x}{R'} = -\frac{1{,}7}{8{,}9} = -0{,}191, \quad \alpha_1 = 101°;$$

$$\cos(\mathbf{R}', \boldsymbol{j}) = \frac{R'_y}{R'} = \frac{8}{8{,}9} = 0{,}899, \quad \beta_1 = 26°;$$

$$\cos(\mathbf{R}', \boldsymbol{k}) = \frac{R'_z}{R'} = -\frac{3{,}4}{8{,}9} = -0{,}382, \quad \gamma_1 = 112{,}5°.$$

Модуль і накірунак галоўнага моманту прасторавай адвольнай сістэмы сіл адносна пачатку каардынат (цэнтра O) падлічым па яго праекцыях на восі каардынат (галоўных момантах сістэмы сіл адносна восей каардынат).

$$M_{ox} = M_x = \sum_{k=1}^{4} m_x(\mathbf{F}_k) = -F_3 \cdot c - F_4 \cdot \cos\alpha \cdot a =$$

$$= -8 \cdot 0{,}4 - 15 \cdot 0{,}625 \cdot 0{,}6 = -8{,}8 \text{ Нм};$$

$$M_{oy} = M_y = \sum_{k=1}^{4} m_y(\mathbf{F}_k) = -F_2 \cdot b = -6 \cdot 0{,}5 = -3 \text{ Нм}.$$

$$M_{oz} = M_z = \sum_{k=1}^{4} m_z(\mathbf{F}_k) = -F_1 \cdot a + F_4 \sin\alpha \cdot a =$$

$$= -10 \cdot 0{,}6 + 15 \cdot 0{,}781 \cdot 0{,}6 = 1 \text{ Нм}.$$

Модуль галоўнага моманту дадзенай сістэмы сіл адносна цэнтра O роўны

$$M_o = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} = \sqrt{77{,}44 + 9 + 1} = 9{,}35 \text{ Нм}.$$

Падлічым накіравальныя косінусы вектара $\mathbf{M}_O$, а па іх значэннях атрымаем вуглы, якія ўтварае вектар $\mathbf{M}_O$ з дадатнымі накірункамі восей каардынат.

$$\cos(\mathbf{M}_o, \boldsymbol{i}) = \frac{M_{ox}}{M_o} = -\frac{8{,}8}{9{,}35} = -0{,}941, \quad \alpha_2 = 160{,}3°;$$

$$\cos(\mathbf{M}_o, \boldsymbol{j}) = \frac{M_{oy}}{M_o} = -\frac{3}{9{,}35} = -0{,}321, \quad \beta_2 = 108{,}7°;$$

$$\cos(\mathbf{M}_o, \boldsymbol{k}) = \frac{M_{oz}}{M_o} = \frac{1}{9{,}35} = 0{,}107, \quad \gamma_2 = 83{,}9°.$$

Такім чынам, дадзеную прастораваю адвольную сістэму сіл можна замяніць эквівалентнаю сістэмаю ў выглядзе галоўнага вектара $\mathbf{R}'$ і галоўнага моманту $\mathbf{M}_O$, прыкладзеных у цэнтры прывядзення O і накіраваных згодна вызначаным вуглам.

Для канчатковага магчымага спрошчвання атрыманай сістэмы неабходна вызначыць вугал паміж вектарамі $\mathbf{R}'$ і $\mathbf{M}_O$.

$$\cos\varphi = \cos(\mathbf{R}', \mathbf{M}_o) = \frac{R'_x \cdot M_x + R'_y \cdot M_y + R'_z \cdot M_z}{R' : M_o} =$$

$$= \frac{1{,}7 \cdot 8{,}8 - 8 \cdot 3 - 3{,}4 \cdot 1}{8{,}9 \cdot 9{,}35} = -0{,}149.$$

Тады $\varphi = 98{,}6°$.

У гэтым выпадку ($\varphi \neq 90°$) сістэма сіл прыводзіцца да дынамічнай (сілавой) шрубы ў выглядзе галоўнага вектара $\mathbf{R}'$ і накіраванага ўздоўж яго найменшага з магчымых для розных цэнтраў прывядзення галоўнага моманту $\mathbf{M}'_o$. У дадзеным прыкладзе вектар $\mathbf{M}'_o$ будзе накіраваны ў адваротны бок вектару $\mathbf{R}'(\varphi > 90°)$.

Велічыня вектара $\mathbf{M}'_O$ вызначаецца як праекцыя $\mathbf{M}_O$ на лінію дзеяння вектара $\mathbf{R}'$.

$$M'_o = M_o \cdot \cos(180° - \varphi) = 9{,}35 \cdot 0{,}149 = 1{,}4 \text{ Нм}.$$

Вось, уздоўж якой накіраваны вектары, што ўтвараюць дынамічную шрубу, знаходзіцца ад цэнтра O на адлегласці

$$h = \frac{M_o \sin\varphi}{R'} = \frac{9{,}35 \cdot 0{,}989}{8{,}9} = 1{,}04 \text{ м}.$$

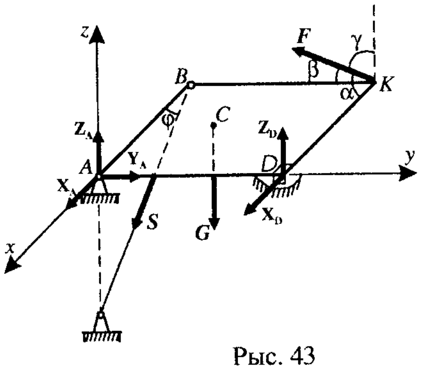
Заданне С-11

Вызначэнне рэакцый сувязей, накладзеных на цвёрдае цела

Механічныя сістэмы, паказаныя на рыс. 44–46, знаходзяцца ў раўнавазе пад уздзеяннем прыкладзеных да іх сіл. Выбраць аб'ект раўнавагі (цвёрдае цела) і вызначыць рэакцыі накладзеных на яго сувязей. Неабходныя даныя па кожнаму рысунку прыведзены ў табл. 7.

Прыклад рашэння задання С-11

Вызначыць рэакцыі сувязей, накладзеных на аднародную гарызантальную прамавугольную пласціну (рыс. 43). AB=0,4 м, AD=0,6 м, G=50 Н, F=100 Н, α=60°, β=70°, φ=50°.



Рыс. 43

Р а ш э н н е. Разглядаем раўнавагу пласціны *ABKD*. На яе накладзены тры сувязі: у пункце А – нерухомы сферычны шарнір, у пункце *D* – пятля (нерухомы цыліндрычны шарнір), у пункце *B* – бязважкі стрыжань.

Табліца 7

Варыянт	Даныя адпаведных варыянтаў
1	P=200 H, α=35°
2	Q=120 H, P=300 H, β=30°, AM=AB=0,5 м, BK=0,2 м, EM=KD=0,3 м, CM=0,2 м
3	F=40 H, α=130°, AD=0,7 м, DC=1,0 м, CB=0,8 м, KC=0,5 м
4	F_1=80 H, F_2=60 H, M=50 Hм, CB=0,6 м, AB=0,4 м,AO=0,5 м
5	P=20 H, α=40°, β=50°
6	M=80 Hм, α=50°, AC=0,4 м, CK=0,5 м, KB=0,6 м, EK=0,2 м
7	P=30 H, α=40°, β=45°
8	M=90 Hм, α=70°, AC=0,3 м, NK=0,2 м, CN=0,6 м, NB=0,3 м
9	P=50 H, α=20°, β=40°
10	F=30 H, α=40°, AN=0,3 м, ND=0,4 м, CD=0,2 м, DB=0,4 м
11	OA=0,4 м, AB=0,6 м, BC=0,8 м, M_1=50 Hм, M_2=30 Hм, α=60°
12	AN=0,5 м, NK=0,7 м, KB=0,6 м, DK=0,2 м, M=40 Hм, α=60°, β=70°
13	AC=0,4 м, CD=0,5 м, DB=0,3 м, NC=0,2 м, F=80 H, α=60°, β=40°
14	AD=0,8 м, ND=0,3 м, DB=0,1 м, BM=0,3 м, MK=0,5 м, F=70 H, α=60°
15	F_1=F_2=F_3=50 H, M_1=M_2=60 Hм, α=20°, β=40°, φ=30°, OA=0,8 м, AB=BD=0,5 м
16	AB=0,9 м, BD=0,4 м, P=80 H, α=70°, β=50°
17	OA=0,4 м, AB=0,6 м, AD=0,45, G=125 H, φ=25°
18	AK=0,3 м, AC=0,4 м, CB=0,5 м, R=0,2 м, α=60°, β=50°, φ=40°, P=80 H
19	OA=AD=1,2 м, AB=AC=0,3 м, F_1=F_3=50 H, M=40 Hм, α=25°, φ=40°, β=50°
20	OA=0,4 м, OB=0,6 м, F=200 H, M=80 Hм, β=35°, φ=30°,
21	AC=0,6 м, CD=0,5 м, DB=0,3 м, T_1=2t_1=50 H, T_2=2t_2, R=2r=0,2 м, α=50°
22	F=50 H, P=60 H, β=60° φ=70°, α=50°, δ=60°
23	AB=0,7 м, BD=0,4 м, P=60 H, F=45 H, α=60°, δ=50°, φ=30°
24	AB=0,8м, BK=0,3м, P=50 H, F=90 H, α=50°, β=60°, φ=55°
25	AB=0,6м, BC=0,4м, M_1=40 Hм, M_2=30 Hм, M_3=20 Hм, F=70 H α=25°
26	OA=0,7м, AB=0,3м, α=20°, β=60°, F=60 H, P=90 H, φ =35°
27	OA=0,8 м, OB=0,4 м, P=80 H, F=70 H α=20°, γ=35°
28	OA=0,7 м, AB=0,5 м, KD=0,2 м, P=60 H, F=40 H, α=30°, φ=20°
29	OA=0,6 м, OB=0,5 м, φ=45° G=120 H, M=40 Hм
30	OA=0,8 м, OB=0,4 м, G=100 H, α=30°, φ=70°

Вызваляем пласціну ад сувязей і замест іх паказваем рэакцыі сувязей: у пункце А — тры складовыя рэакцыі $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{Z}_A$, у пункце *D* — дзве складовыя рэакцыі $\mathbf{X}_D$, $\mathbf{Z}_D$, у пункце *B* — рэакцыю **S**. Атрымалі прасторавую адвольную сістэму сіл, якая знаходзіцца ў раўнавазе. Запісваем умовы і ўраўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad X_A + X_D + S\cos\varphi + F\cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad Y_A - F\cos\beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \quad Z_A + Z_D - S\sin\varphi - G + F\cos\gamma = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_x(\mathbf{F}_k) = 0 \quad Z_D \cdot AD - G \cdot 0{,}5AD + F\cos\gamma \cdot AD = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_y(\mathbf{F}_k) = 0 \quad F\cos\gamma \cdot DK - G \cdot 0{,}5 \cdot DK - S\sin\varphi \cdot DK = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\mathbf{F}_k) = 0 \quad -X_D \cdot AD + F\cos\beta \cdot AB - F\cos\alpha \cdot AD = 0.$$

Для вызначэння $\cos\gamma$ карыстаемся роўнасцю

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \text{ адкуль } \cos\gamma = 0{,}796.$$

Падлічым значэнні невядомых рэакцый сувязей.

$$X_D = F\cos\beta \cdot \frac{AB}{AD} - F\cos\alpha = 100\left(\cos 70^\circ \cdot \frac{0{,}4}{0{,}6} - \cos 60^\circ\right) =$$

$$= 100(0{,}342 \cdot 0{,}667 - 0{,}5) = -27{,}2 \text{ Н};$$

$$S = \frac{F\cos\gamma - 0{,}5G}{\sin\varphi} = \frac{100 \cdot 0{,}796 - 0{,}5 \cdot 50}{0{,}766} = 71{,}3 \text{ Н};$$

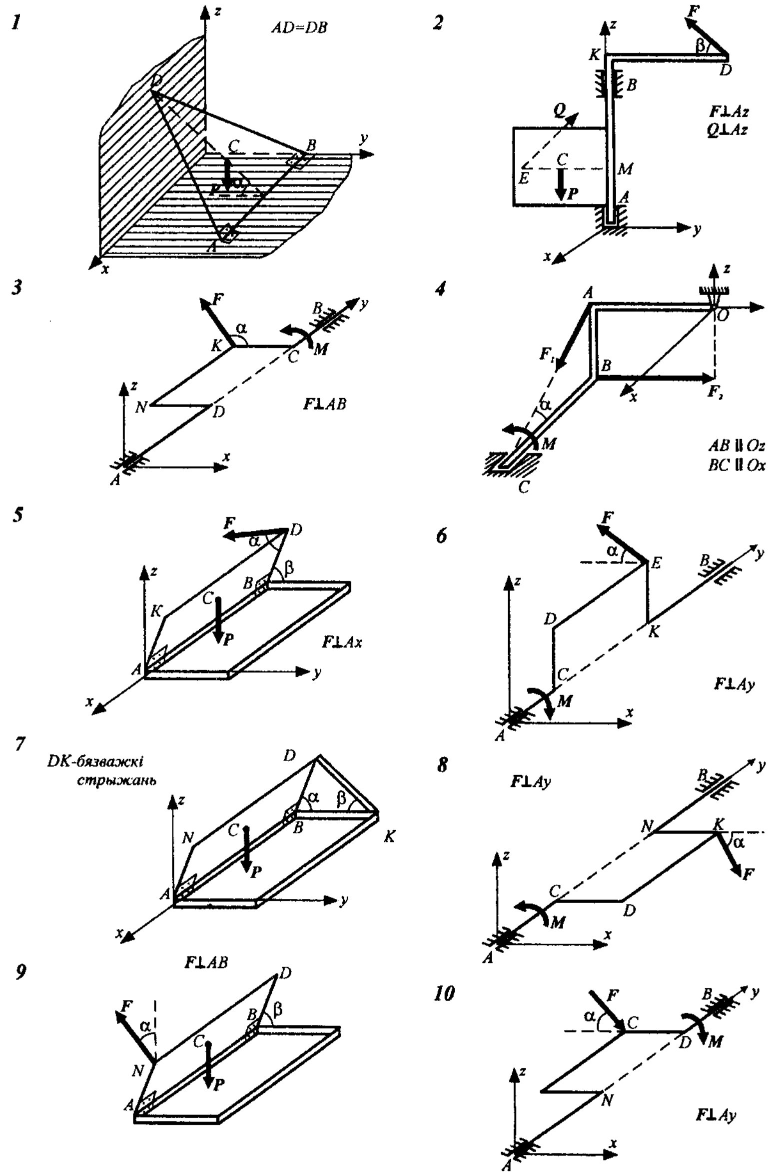
$$Z_D = 0{,}5G - F\cos\gamma = 0{,}5 \cdot 50 - 100 \cdot 0{,}796 = -54{,}6 \text{ Н}.$$

$$Z_A = -Z_D + S\sin\varphi + G - F\cos\gamma = 54{,}6 + 71{,}3 \cdot 0{,}766 +$$

$$+ 50 - 100 \cdot 0{,}796 = 79{,}6 \text{ Н};$$

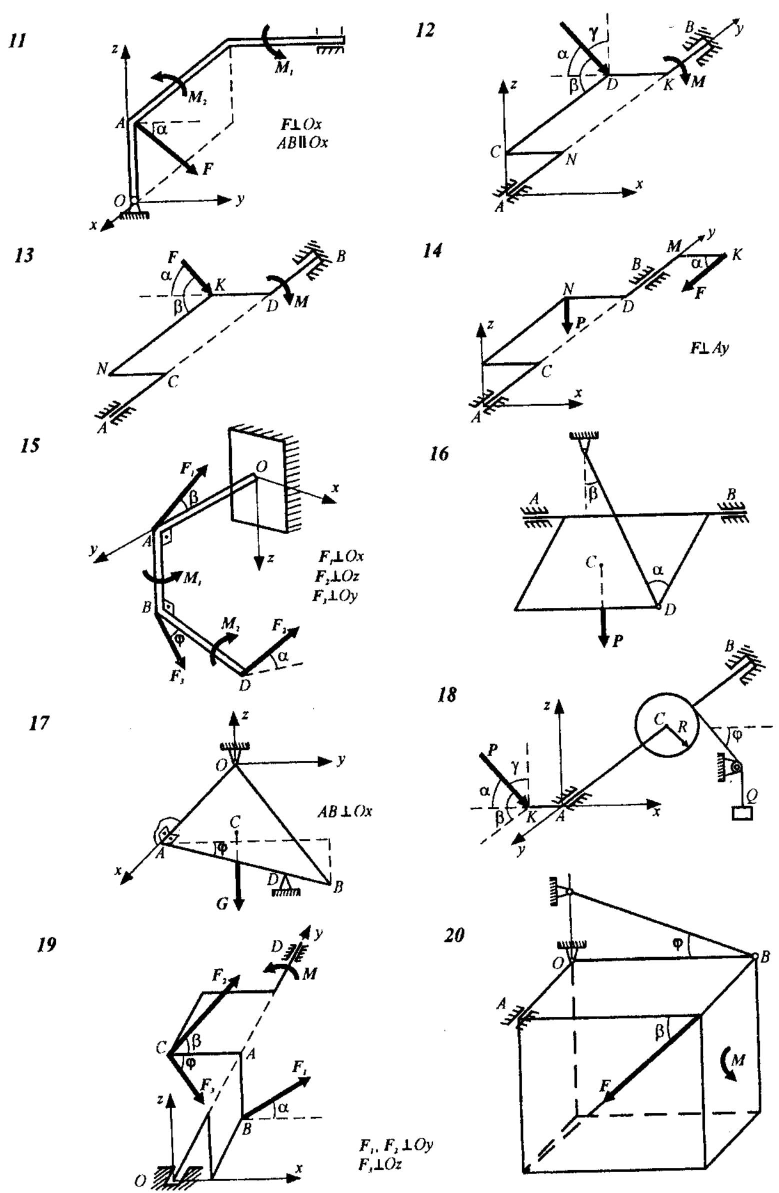
$$Y_A = F\cos\beta = 100 \cdot 0{,}342 = 34{,}2 \text{ Н};$$

$$X_A = -X_D - S\cos\varphi - F\cos\alpha = 27{,}2 - 71{,}3 \cdot 0{,}643 - 100 \cdot 0{,}5 = -68{,}6 \text{ Н}.$$

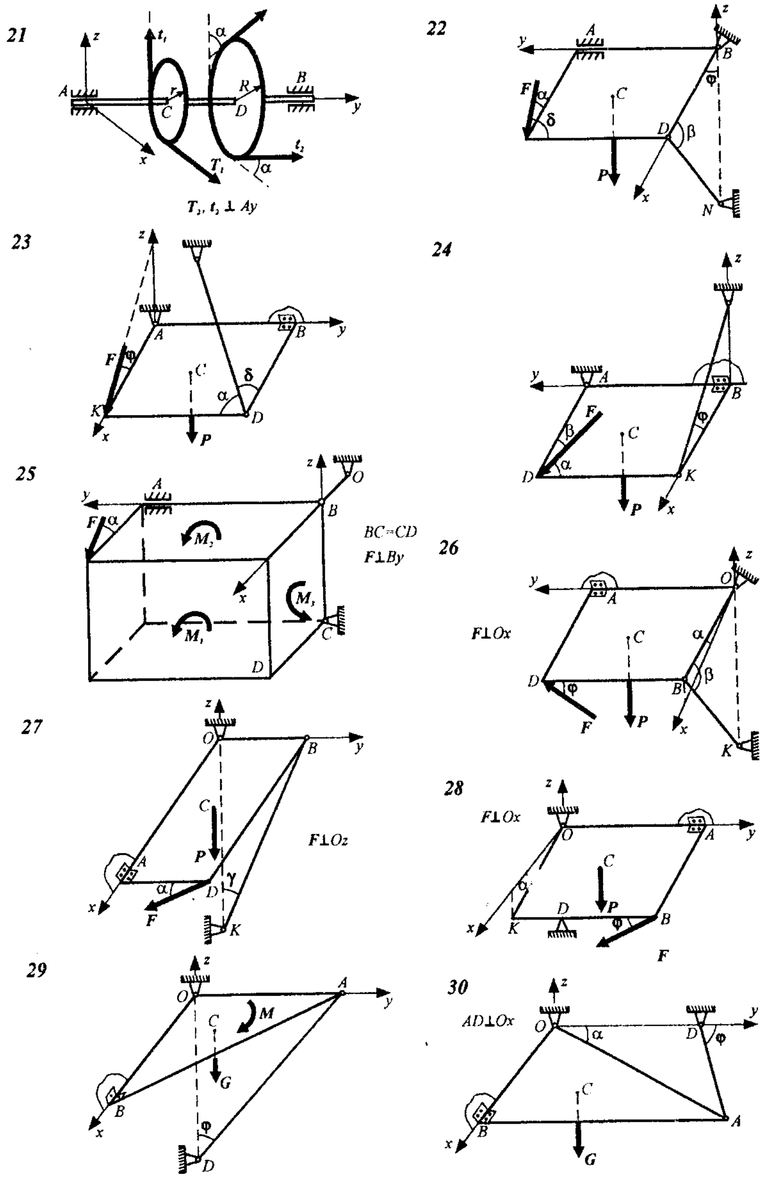


1
AD=DB
2
F⊥Az
Q⊥Az
3
F⊥AB
4
AB ∥ Oz
BC ∥ Ox
5
F⊥Ax
6
F⊥Ay
7
DK-бязважкі стрыжань
8
F⊥Ay
9
F⊥AB
10
F⊥Ay

Рыс. 44


11
F⊥Ox
AB∥Ox
12
13
14
F⊥Ay
15
F₁⊥Ox
F₂⊥Oz
F₃⊥Oy
16
17
AB⊥Ox
18
19
F₁, F₂⊥Oy
F₃⊥Oz
20

Рыс. 45



Рыс. 46

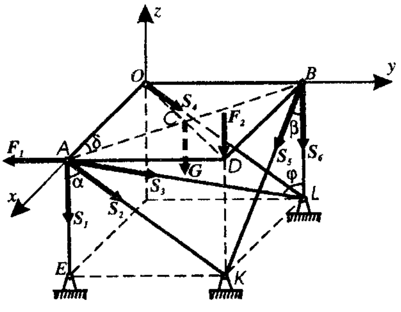
Заданне С-12

Вызначэнне рэакцый бязважкіх стрыжняў, якія падтрымліваюць прамавугольную пліту

Вызначыць рэакцыі бязважкіх стрыжняў, якія падтрымліваюць тонкую аднародную гарызантальную пліту, вага якой G, пры ўздзеянні на яе сіл $\mathbf{F}_1$ і $\mathbf{F}_2$ (рыс. 48–50). Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 8.

Прыклад рашэння задання С-12

Тонкая аднародная прамавугольная гарызантальная пліта, вага якой 200 Н, падтрымліваецца ў раўнавазе шасцю бязважкімі стрыжнямі (рыс. 47). На пліту дзейнічаюць сілы: F_1=100 Н, F_2=150 Н. Вызначыць рэакцыі стрыжняў, калі α=50°, β=40°.



Рыс. 47

Рашэнне. Разгледзім раўнавагу пліты $AOBD$. На яе накладзены шэсць сувязей у выглядзе бязважкіх стрыжняў.

Табліца 8

Варыянт	G, Н	F_1, Н	F_2, Н	α, град	β, град
1	2	3	4	5	6
1	150	100	120	30	65
2	160	110	140	32	63
3	170	120	160	35	60

1	2	3	4	5	6
4	180	130	150	37	58
5	190	140	130	40	55
6	200	150	170	42	53
7	210	160	180	45	50
8	220	170	190	48	47
9	150	180	110	50	45
10	160	190	120	52	43
11	170	100	130	55	40
12	180	110	140	58	37
13	190	120	150	60	35
14	200	130	160	62	33
15	210	140	170	65	30
16	220	150	180	30	50
17	150	160	110	32	47
18	160	170	120	35	45
19	170	180	130	37	52
20	180	190	140	40	55
21	190	100	150	43	58
22	200	110	160	45	60
23	210	120	170	50	62
24	220	130	180	53	65
25	150	140	110	55	42
26	160	150	120	57	40
27	170	160	140	60	38
28	180	170	130	63	35
29	190	180	150	65	30
30	200	190	160	67	33

Прымяняем прынцып вызвалення ад сувязей і паказваем прыкладзеныя ў пунктах пліты A, O і B рэакцыі сувязей — рэакцыі стрыжняў, накіраваныя ад пліты ўздоўж іх. Тым самым уяўляем, што ўсе стрыжні расцягнутыя. Акрамя невядомых рэакцый сувязей, на пліту дзейнічаюць тры вядомыя сілы: сіла цяжару $\mathbf{G}$, дадзеныя сілы $\mathbf{F}_1$ і $\mathbf{F}_2$. Бачым, што да пліты прыкладзена ўраўнаважаная прасторавая адвольная сістэма сіл. Запісваем згодна з умовамі раўнавагі для атрыманай сістэмы сіл шэсць ураўненняў раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad -S_3 \sin\varphi \cdot \cos\delta + S_5 \sin\beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad S_2 \sin\alpha + S_3 \sin\varphi \cdot \sin\delta + S_4 \sin\alpha - F_1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz}=0 \quad -S_1-S_2\cos\alpha-S_3\cos\varphi-S_4\cos\alpha-$$

$$-S_5\cos\beta-S_6-G-F_2=0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_x(\mathbf{F}_k)=0 \quad -S_5\cos\beta\cdot OB-S_6\cdot OB-F_2\cdot OB-G\cdot 0{,}5\cdot OB=0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_y(\mathbf{F}_k)=0 \quad S_1\cdot AO+S_2\cos\alpha\cdot AO+S_3\cos\varphi\cdot AO+$$

$$+F_2\cdot AO+G\cdot 0{,}5\cdot AO=0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\mathbf{F}_k)=0 \quad S_2\sin\alpha\cdot AO+S_3\sin\varphi\cdot\sin\delta\cdot AO-$$

$$-S_5\sin\beta\cdot OB-F_1\cdot AO=0.$$

Праз вядомыя вуглы α і β падлічым сінусы і косінусы вуглоў φ і δ, а таксама знойдзем суадносіны паміж AO і OB.

$AE=DK=BL$. $EK=AD=OB=AE\cdot\text{tg}\alpha$. $KL=BD=AO=BL\cdot\text{tg}\beta$.

Тады ў трохвугольніку AOB

$$\text{tg}\delta=\frac{OB}{AO}=\frac{AE\cdot\text{tg}\alpha}{BL\cdot\text{tg}\beta}=\frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta}=\frac{\text{tg}\,50°}{\text{tg}\,40°}=\frac{1{,}192}{0{,}839}=1{,}421.$$

$$\delta=54{,}86°,\ \sin\delta=0{,}818,\ \cos\delta=0{,}576.$$

$$AB=\frac{AO}{\cos\delta}=\frac{BL\cdot\text{tg}\,\beta}{\cos\delta}=BL\frac{0{,}839}{0{,}576}=1{,}457\cdot BL.$$

Цяпер з трохвугольніка ABL

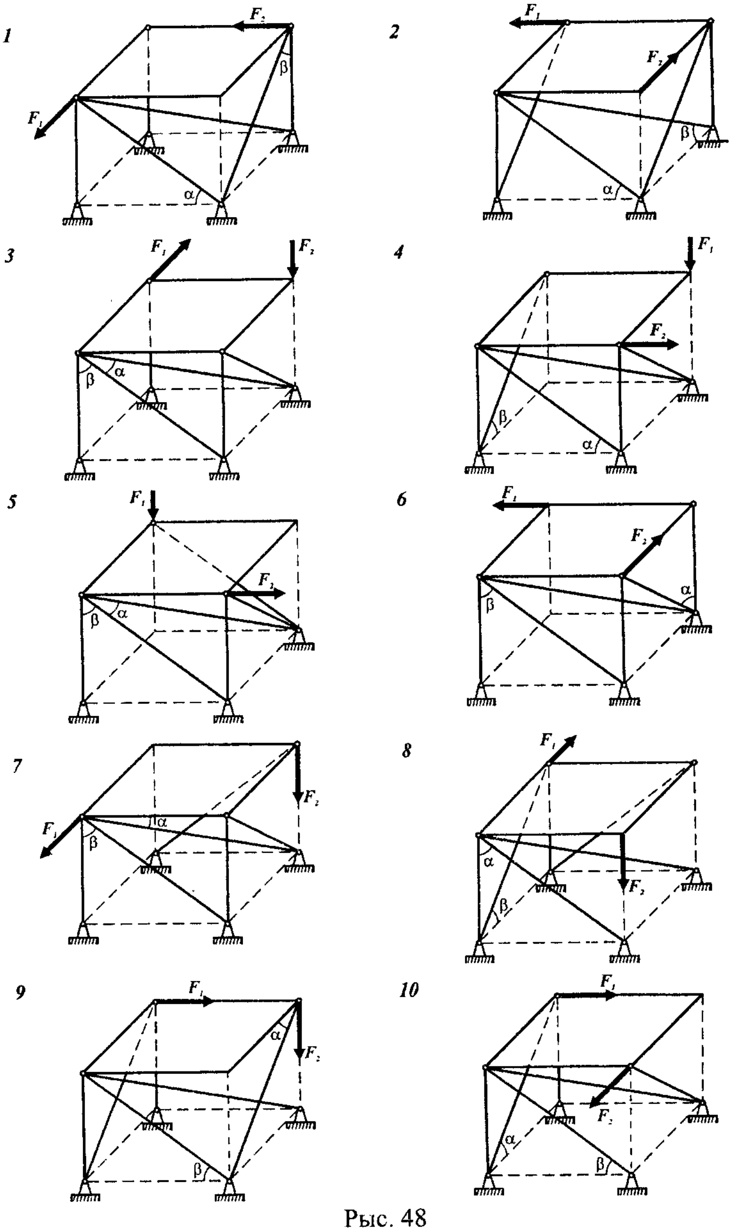
$$\text{tg}\varphi=\frac{AB}{BL}=\frac{1{,}457\cdot BL}{BL}=1{,}457.$$

$$\varphi=55{,}53°.\quad \sin\varphi=0{,}824,\quad \cos\varphi=0{,}566.$$

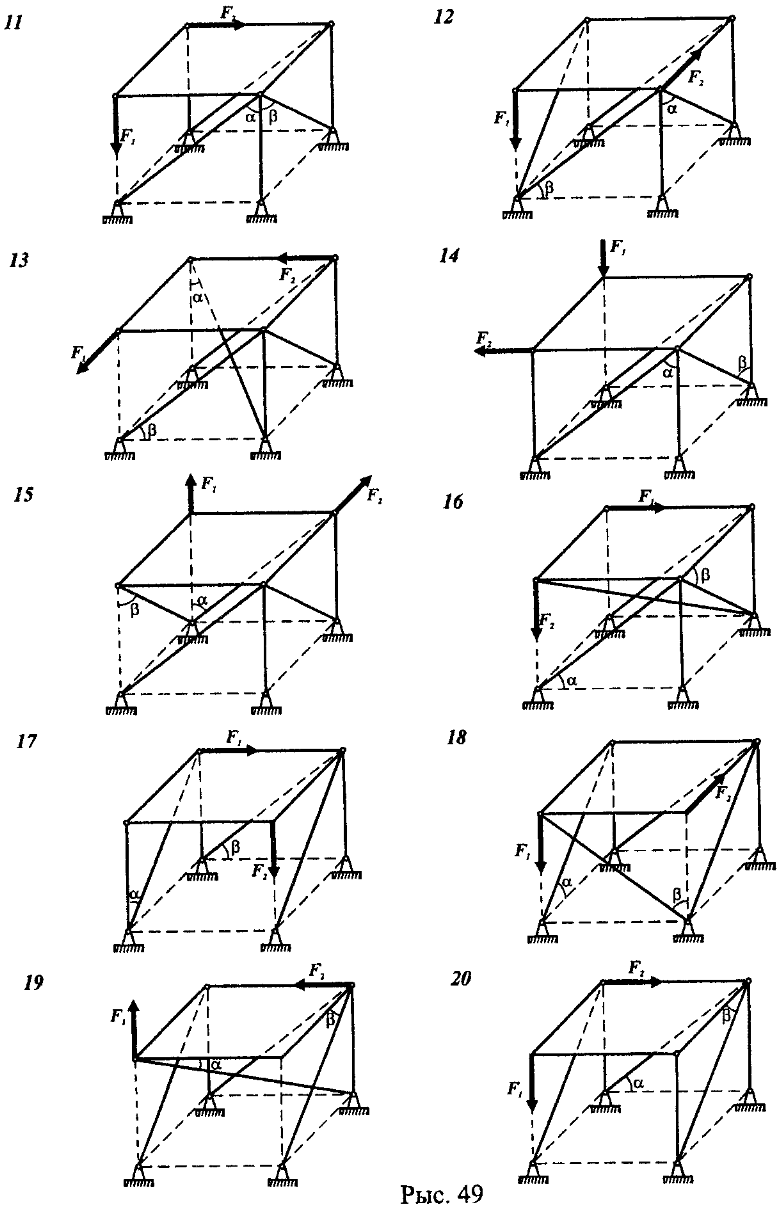
$$OB=AO\cdot\text{tg}\delta=AO\cdot 1{,}421.$$

Падстаўляем усе вядомыя і падлічаныя значэнні велічынь у шэсць ураўненняў раўнавагі.

$$-S_3\cdot 0{,}824\cdot 0{,}576+S_5\cdot 0{,}643=0; \qquad (1)$$

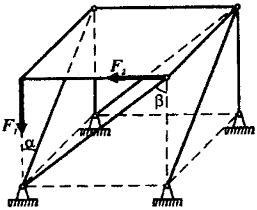

1
F_2
F_1
β
α
2
F_1
F_2
β
α
3
F_1
F_2
β
α
4
F_1
F_2
β
α
5
F_1
F_2
β
α
6
F_1
F_2
β
α
7
F_1
F_2
β
α
8
F_1
F_2
α
β
9
F_1
F_2
α
β
10
F_1
F_2
α
β

Рыс. 48

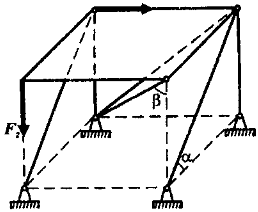


Рыс. 49

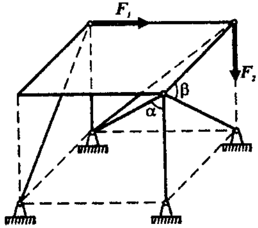
21



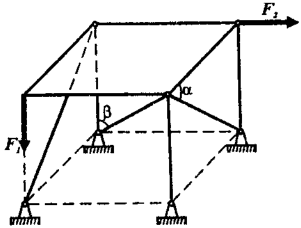
22



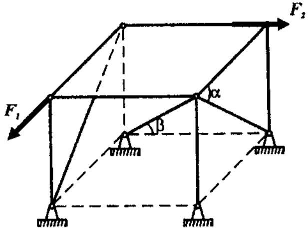
23



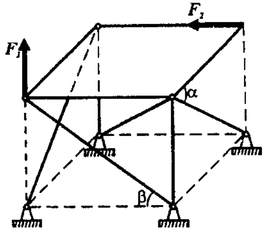
24



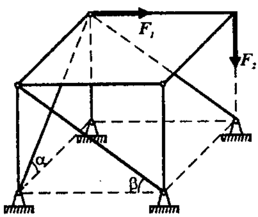
25



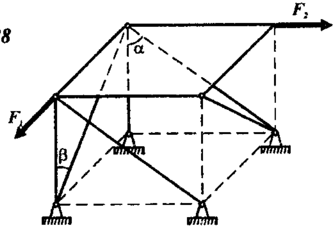
26



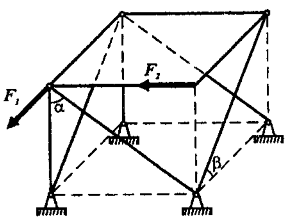
27



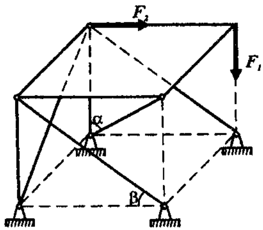
28



29



30



Рыс. 50

$$S_2 \cdot 0{,}766 + S_3 \cdot 0{,}824 \cdot 0{,}818 + S_4 \cdot 0{,}766 - 100 = 0\,; \qquad (2)$$

$$-S_1 - S_2 \cdot 0{,}643 - S_3 \cdot 0{,}566 - S_4 \cdot 0{,}643 - S_5 \cdot 0{,}766 - \\ - S_6 - 200 - 150 = 0; \qquad (3)$$

$$-S_5 \cdot 0{,}766 - S_6 - 150 - 200 \cdot 0{,}5 = 0\,; \qquad (4)$$

$$S_1 + S_2 \cdot 0{,}643 + S_3 \cdot 0{,}566 + 150 + 200 \cdot 0{,}5 = 0\,; \qquad (5)$$

$$S_2 \cdot 0{,}766 + S_3 \cdot 0{,}824 \cdot 0{,}818 - S_5 \cdot 0{,}643 \cdot 1{,}421 - 100 = 0\,. \qquad (6)$$

З ураўнення (1):

$$S_5 = 0{,}738 S_3\,.$$

З ураўнення (4):

$$S_6 = -0{,}565 S_3 - 250\,.$$

З ураўнення (6):

$$S_2 = \frac{1}{0{,}766}\left(100 + S_3 \cdot 0{,}674 - S_3 \cdot 0{,}674\right) = 130{,}5 \text{ Н}\,.$$

З ураўнення (2):

$$S_3 = \frac{1}{0{,}674}\left(-100 - S_4 \cdot 0{,}766 + 100\right) = -1{,}136 S_4\,.$$

З ураўнення (5):

$$S_1 = -0{,}643 S_2 + 0{,}643 S_4 - 250 = -333{,}9 + 0{,}643 S_4\,.$$

Тады

$$S_5 = -0{,}738 \cdot 1{,}136 S_4 = -0{,}838 S_4\,;$$

$$S_6 = 0{,}565 \cdot 1{,}136 S_4 - 250 = 0{,}642 S_4 - 250\,.$$

Знойдзеныя выразы для S_1, S_2, S_3, S_5, S_6 падставім ва ўраўненне (3) і знойдзем S_4.

$$333{,}9 - 0{,}643 S_4 - 83{,}9 + 0{,}643 \cdot S_4 - 0{,}643 \cdot S_4 + \\ + 0{,}642 \cdot S_4 - 0{,}642 \cdot S_4 + 250 - 350 = 0,$$

$$S_4 = 233{,}3 \text{ Н}.$$

Цяпер лёгка атрымаць астатнія значэнні рэакцый сувязей.

$S_3 = -265$ Н, $S_1 = -183{,}9$ Н, $S_5 = -195{,}5$ Н, $S_6 = -100{,}2$ Н.

А раней атрымалі $S_2 = 130{,}5$ Н.

З адказаў відаць, што з шасці стрыжняў у расцягнутым стане знаходзяцца толькі стрыжні 2 і 4.

3. Цэнтр цяжару

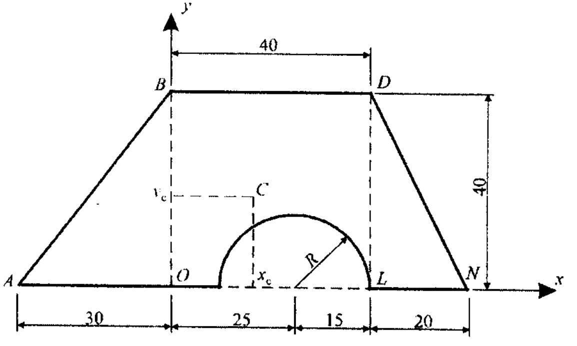
З а д а н н е С - 1 3

Вызначэнне месцазнаходжання цэнтра цяжару плоскага цела

Вызначыць каардынаты цэнтра цяжару тонкай аднароднай пласціны (рыс. 52—54). Неабходныя дадзеныя прыведзены ў табл. 9 (памеры ў см.).

Прыклад рашэння задання С-13

Вызначыць каардынаты цэнтра цяжару тонкай аднароднай пласціны, якая паказана на рыс. 51 (памеры ў см.).



Рыс. 51

Р а ш э н н е. Пласціну *ABDN* дзелім на часткі, для якіх вядомы месцазнаходжанні цэнтраў цяжару. У дадзеным выпадку гэта будуць трохвугольнікі *ABO* і *DLN*, прамавугольнік *OBDL* і палова круга. Карыстаемся метадам адмоўных плошчаў, таму плошчу паловы круга, які выразаны з прамавугольніка, лічым адмоўнаю.

Табліца 9

Варыянт	OA	AB	BB_1	BC	CD	R	OE	DN	CC_1
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	30	20	10	25	20	24		6	
2	30	40			15	10	45		
3	29	25			25	14	21	20	
4	29	30		25	9	14	25	29	20
5	28	30	15	20	14	10		28	
6	28	40	10	26	28	15	21		
7	30	26			10	13	66	27	20
8	13				17	17	65		30
9	7	65		27	32	23		42	
10	30	16	10		19	12	65	15	
11	16			50		14	48		
12	30	22		24		18	64		
13			8	47	8	20	45		
14		33	13		65	17		13	
15	18	21			11	18	47		
16		17			15	13		52	25
17	49	13			49	17	17		
18	30	38	14			16	65		
19		47		11		19	11		22
20			26	15	48	16	14		
21	30	40	19	17		12	53	18	30
22	29	42	11	18		17	65		20
23	30	50	15	18		20	64		25
24	65	22	6	29		16	30	49	15
25	64	22	10	25		17	13	47	13
26	30	18	35	16	14	15	50		15
27	30	21		24	19	13		21	
28	23	42		22	7	14		56	
29	22	25		18	22	11			
30	14	6		50	25	13	34	20	

Вага кожнай часткі аднароднай пласціны прапарцыянальна яе плошчы. Таму каардынаты цэнтра цяжару такой пласціны ў выбранай сістэме каардынат *Oxy* вызначаем па формулах, якія ўтрымліваюць не вагу частак пласціны і агульную вагу, а плошчы $A_к$ і агульную плошчу A.

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k x_k}{A}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k y_k}{A}.$$

Падлічым плошчу кожнай выбранай часткі пласціны.

Плошча трохвугольніка ABO

$$A_1 = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600\,\text{см}^2.$$

Плошча прамавугольніка $OBDL$

$$A_2 = 40 \cdot 40 = 1600\,\text{см}^2.$$

Плошча трохвугольніка DLN

$$A_3 = \frac{40 \cdot 20}{2} = 400\,\text{см}^2.$$

Плошча паловы круга радыуса R=15 см

$$A_4 = -\frac{\pi R^2}{2} = -\frac{3{,}14 \cdot 15^2}{2} = -353{,}25\,\text{см}^2.$$

Плошча пласціны

$$A = 600 + 1600 + 400 - 353{,}25 = 2246{,}75\,\text{см}^2.$$

Падлічым каардынаты цэнтраў цяжару кожнай часткі пласціны.

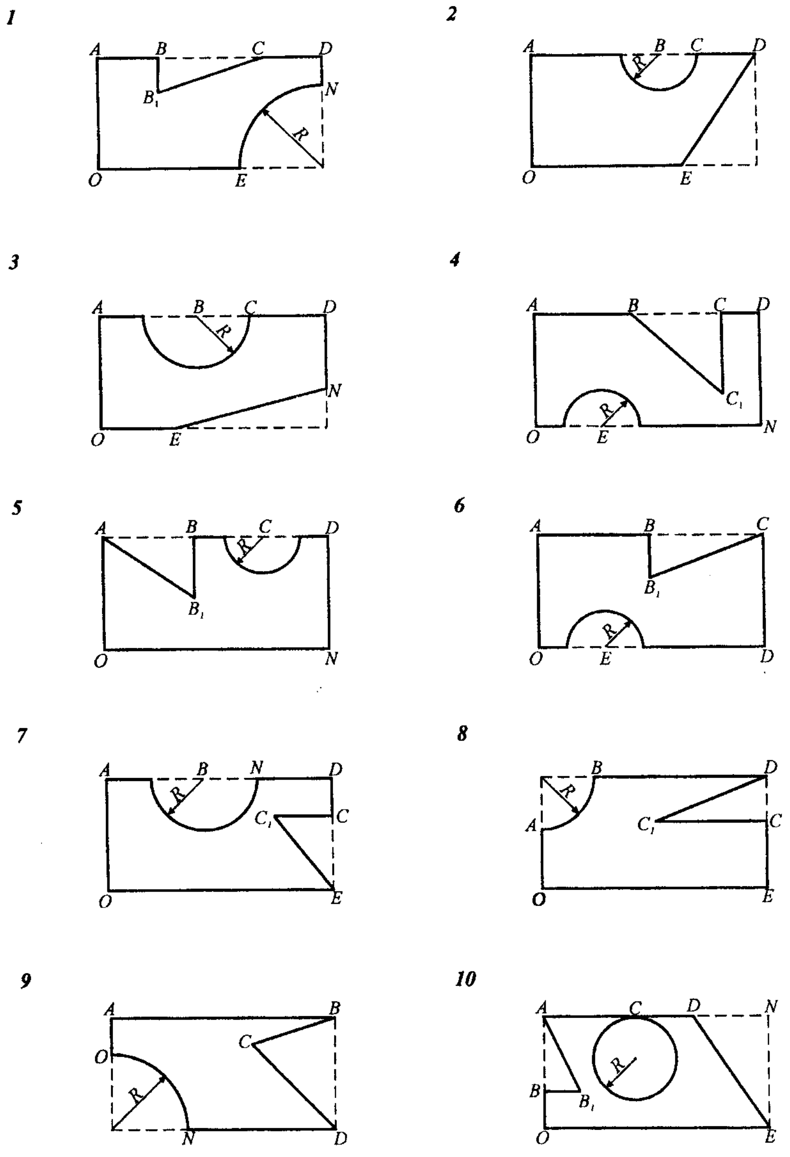
$$x_1 = -\frac{AO}{3} = -\frac{30}{3} = -10\,\text{см};\; y_1 = \frac{OB}{3} = \frac{40}{3} = 13{,}3\,\text{см}$$

$$x_2 = \frac{OL}{2} = \frac{40}{2} = 20\,\text{см},\; y_2 = \frac{OB}{2} = \frac{40}{2} = 20\,\text{см}.$$

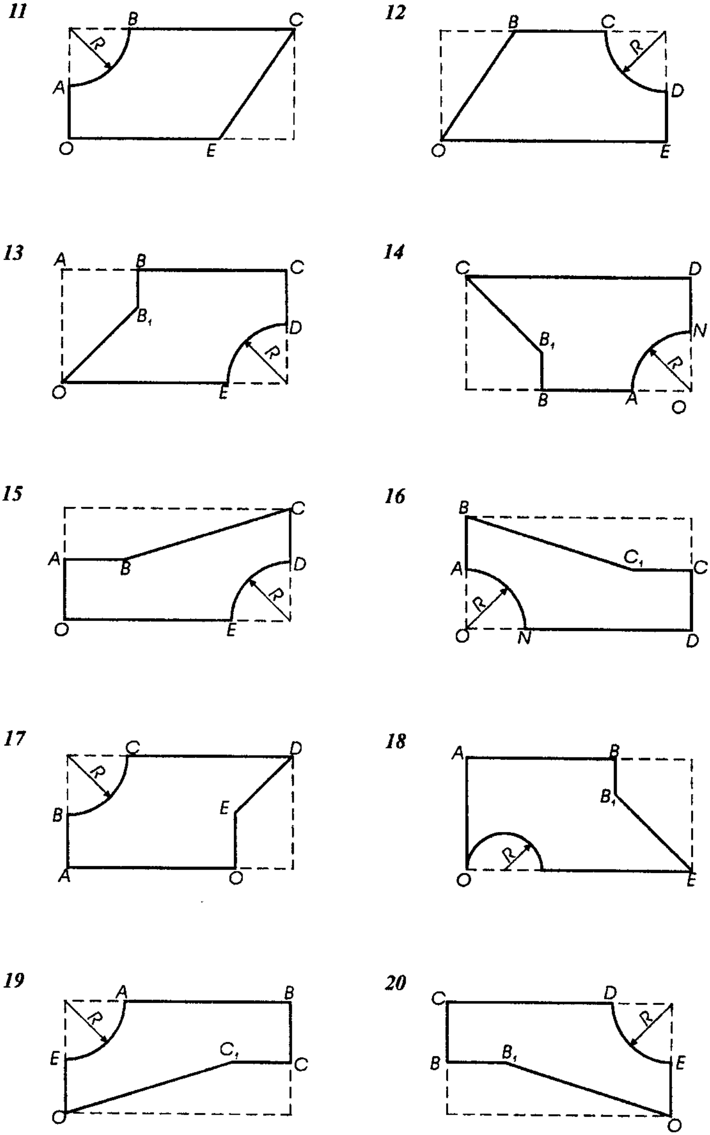
$$x_3 = OL + \frac{LN}{3} = 40 + \frac{20}{3} = 46{,}7\,\text{см},\; y_3 = \frac{LC}{3} = \frac{40}{3} = 13{,}3\,\text{см}.$$

$$x_4 = 25\,\text{см}, \quad y_4 = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi} = \frac{4 \cdot 15}{3 \cdot 3{,}14} = 6{,}4\,\text{см}.$$

Цяпер маем магчымасць вызначыць каардынаты цэнтра цяжару пласціны.

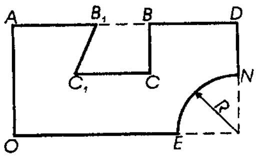

1
A B C D
B1 N
R
O E
2
A B C D
R
O E
3
A B C D
R
N
O E
4
A B C D
C1
R
O E N
5
A B C D
R
B1
O N
6
A B C
B1
R
O E D
7
A B N D
R
C1 C
O E
8
B D
R
A C1 C
O E
9
A B
O C
R
N D
10
A C D N
R
B B1
O E

Рыс. 52

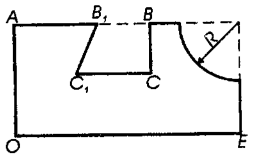

11
A B C O E R
12
B C D O E R
13
A B C B₁ D O E R
14
C D B₁ N B A O R
15
A B C D O E R
16
B A C₁ C O N D R
17
C D B E A O R
18
A B B₁ O E R
19
A B E C₁ C O R
20
C D B B₁ E O R

Рыс. 53

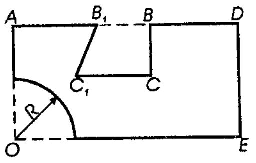
21



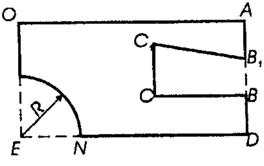
22



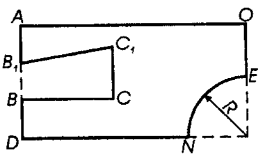
23



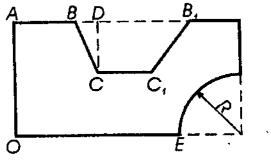
24



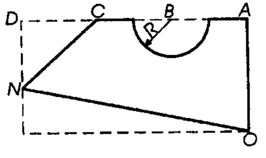
25



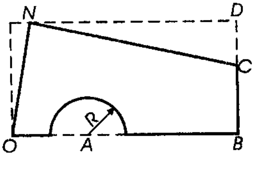
26



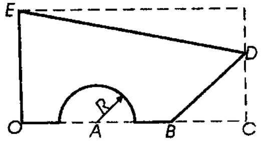
27



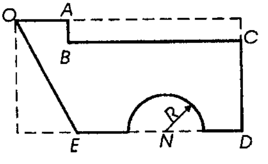
28



29



30



Рыс. 54

$$x_C = \frac{600 \cdot (-10) + 1600 \cdot 20 + 400 \cdot 46{,}7 - 353{,}25 \cdot 25}{2246{,}75} =$$

$$= \frac{-6000 + 32000 + 18680 - 8831{,}25}{2246{,}75} = 16 \text{ см}.$$

$$y_C = \frac{600 \cdot 13{,}3 + 1600 \cdot 20 + 400 \cdot 13{,}3 - 353{,}25 \cdot 6{,}4}{2246{,}75} =$$

$$= \frac{7980 + 32000 + 5320 - 2260{,}8}{2246{,}75} = 19 \text{ см}.$$

На рыс. 51 паказваем згодна атрыманых каардынат месцазнаходжанне цэнтра цяжару C.

1. Кінематыка пункта

Заданне К-1

Вызначэнне траекторыі, скорасці і паскарэння пункта па вядомых ураўненнях яго руху

Па ўраўненнях руху пункта $x = f_1(t), y = f_2(t)$ атрымаць ураўненне яго траекторыі; вызначыць скорасць, тангенцыяльнае і нармальнае паскарэнні пункта, радыус крывізны траекторыі ў момант часу τ. Паказаць на рысунку траекторыю пункта, вектары скорасці і паскарэнняў у момант τ. Вызначыць характар руху пункта па траекторыі. Неабходныя даныя змешчаны ў табл. 10 (каардынаты – у м, час – у с).

Прыклад рашэння задання К-1

Дадзена: $x = 2t^2 + 3t - \ln|t+1|$ (м);

$y = 4t - 3$ (м); $\tau = 5$ с.

Вызначыць: ураўненне траекторыі пункта; скорасць, паскарэнне, яго складовыя, радыус крывізны траекторыі ў момант τ; паказаць траекторыю пункта, скорасць і паскарэнне ў момант τ; вызначыць характар руху пункта па траекторыі.

Рашэнне. Ураўненне траекторыі пункта атрымаем, калі знойдзем залежнасць $x=f(y)$, выключаючы пры гэтым час t.

$$t = \frac{y+3}{4}; \quad x = \frac{(y+3)^2}{8} + \frac{3}{4}(y+3) - \ln\left|\frac{y+7}{4}\right|.$$

Атрыманая роўнасць з'яўляецца ўраўненнем траекторыі пункта. Скорасць пункта знойдзем па яе праекцыях на восі каардынат.

Варыянт	$x = f_1(t)$	$y = f_2(t)$	τ
1	**2**	**3**	**4**
1	$2t^2+t+3$	$4-3t$	2
2	$3\sin\frac{\pi}{3}t-4$	$2-3\cos\frac{\pi}{3}t$	3
3	$5\sin^2\frac{\pi}{4}t+2$	$5\cos^2\frac{\pi}{4}t-3$	5
4	$4t^2-t+\ln\lvert t+1\rvert$	$3-t$	1
5	$-3\cos\frac{\pi}{3}t+1$	$2-3\sin\frac{\pi}{3}t$	6
6	$3-2\sin^2\frac{\pi}{4}t$	$2\cos^2\frac{\pi}{4}t$	2
7	$3t^2+t-\ln\lvert t+2\rvert$	$t+2$	3
8	$\frac{2}{3}t^2+3t-2$	$2t^2+9t+3$	4
9	$1+t+t^2$	$5t-4$	1
10	$\frac{1}{3}\sin\pi t+2$	$\frac{1}{2}\cos\pi t-3$	6
11	$t^2+2\ln\lvert t+1\rvert$	$0{,}5t^2+\ln\lvert t+1\rvert$	2
12	$3t-4t^2+2$	$2t-3$	1
13	$0{,}2\sin 0{,}5\pi t$	$0{,}3\cos 0{,}5\pi t-2$	4
14	$\frac{1}{3}\sin^2\frac{\pi}{3}t-2$	$\frac{2}{5}\cos^2\frac{\pi}{3}t+1$	5
15	$0{,}6t+t^2-4$	$0{,}2t+3$	1
16	$\frac{2}{3}t^2-2t+3$	$2t^2-6t+1$	2
17	$4t-1$	$0{,}3\sin\pi t+2$	3
18	$0{,}5\sin\frac{2}{3}\pi t+1$	$\frac{2}{3}\cos^2\frac{2}{3}\pi t-2$	4

1	2	3	4
19	$0{,}4\sin\frac{\pi}{2}t-\frac{2}{3}$	$0{,}2\cos\frac{\pi}{2}t+3$	5
20	$\frac{1}{3}\cos^2 2\pi t-\frac{3}{4}$	$0{,}5\sin^2 2\pi t+1$	6
21	$-0{,}5t^2+2t-3$	$4t-2$	2
22	$2–3t–4t^2$	$0{,}8\ t^2+0{,}6\ t–3$	1
23	$t^2-\ln\lvert 4t+1\rvert$	$2t^2-2\ln\lvert 4t+1\rvert$	2
24	$0{,}2t^2+3t-\ln\lvert t+1\rvert$	$t–1$	3
25	$0{,}25\sin 0{,}5\pi t–2$	$0{,}4\cos^2 0{,}5\pi t–3$	4
26	$0{,}2\cos\frac{\pi}{3}t-0{,}5$	$0{,}3\sin^2\frac{\pi}{3}t+1$	5
27	$t–0{,}4t^2$	$0{,}5t^2–1{,}25t+1{,}5$	1
28	$0{,}3t^2-t+2\ln\lvert t+2\rvert$	$0{,}4t–0{,}5$	1
29	$0{,}5\sin\frac{2}{3}\pi t-0{,}4$	$0{,}2+0{,}3\cos\frac{2}{3}\pi t$	2
30	$2\sin^2 2\pi t–3$	$\cos^2 2\pi t–1$	3

$$\mathrm{v}_x=\dot{x}=4t+3-(t+1)^{-1};\ \mathrm{v}_y=\dot{y}=4.$$

У момант часу $\tau = 5$ с: $\mathrm{v}_x = 22{,}8$ м/с; $\mathrm{v}_y = 4$ м/с,

$$\mathrm{v}=\sqrt{\mathrm{v}_x^2+\mathrm{v}_y^2}=\sqrt{(22{,}8)^2+4^2}=23{,}1\ \text{м/с}.$$

Паскарэнне пункта знойдзем па яго праекцыях на восі каардынат.

$$a_x=\ddot{x}=\dot{\mathrm{v}}_x=4+(t+1)^{-2};\ a_y=\ddot{y}=\dot{\mathrm{v}}_y=0.$$

У момант часу $\tau = 5$ с: $a_x = 4{,}03$ м/с^2; $a_y = 0$,

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=4{,}03\ \text{м/с}^2.$$

Тангенцыяльнае паскарэнне пункта вызначым у момант $\tau = 5$ с па праекцыях скорасці і паскарэння пункта на восі каардынат.

$$a_\tau = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v} = \frac{22{,}8 \cdot 4{,}03}{23{,}1} = 4 \text{ м/с}^2.$$

Па паскарэнні пункта і яго тангенцыяльным паскарэнні знойдзем у момант $\tau = 5$с нармальнае паскарэнне.

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{4{,}03^2 - 4^2} = 0{,}49 \text{ м/с}^2.$$

Радыус крывізны траекторыі знойдзем у момант $\tau = 5$ с па формуле

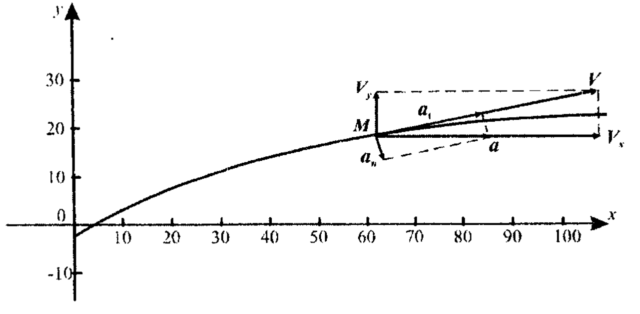
$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{23{,}1^2}{0{,}49} = 1089 \text{ м}.$$

Падлічым каардынаты пункта па ўраўненнях руху.

t	0	1	2	3	4	5	6
x	0	4,3	12,9	22,6	42,4	63,2	88
y	–3	1	5	9	13	17	21

Па атрыманых значэннях каардынат будуем траекторыю руху пункта у выбраных восях каардынат Oxy (рыс. 55).

У пункце M траекторыі, адпавядаючым моманту $\tau = 5$ с, паказваем вектар скорасці і паскарэння згодна з падлічанымі праекцыямі гэтых вектараў.



Рыс. 55

Характар руху пункта па траекторыі ацэньваем па тангенцыяльным паскарэнні. З разліку відаць, што v_x, a_x і v з'яўляюцца зменнымі велічынямі. Таму a_τ — зменная велічыня. Гэта азначае, што пункт рухаецца па траекторыі пераменна.

З улікам таго, што накірунак $\boldsymbol{a}_\tau$ супадае з накірункам v (рыс. 55), удакладняем, што рух пункта па траекторыі з'яўляецца пераменным паскораным.

Заданне К-2

Складанне ўраўненняў руху пункта і вызначэнне яго скорасці і паскарэння

Для дадзенага пункта M механізма (рыс. 57–59) скласці ўраўненні руху, паказаць частку траекторыі пункта і для моманту часу t_1 знайсці скорасць і паскарэнне пункта, тангенцыяльнае і нармальнае паскарэнні і радыус крывізны траекторыі. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 11.

Прыклад рашэння задання К-2

Скласці ўраўненні руху пункта M рухомага кола планетарнага механізма (рыс. 56), паказаць частку траекторыі пункта і для моманту t_1 знайсці скорасць, поўнае, тангенцыяльнае і нармальнае паскарэнні і радыус крывізны адпаведнага пункта траекторыі.

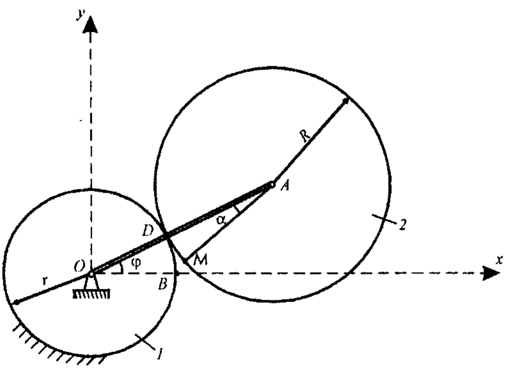
Дадзена: $r = 0{,}2$ м, $R = 0{,}3$ м, $\varphi = 2t$, $t_1 = 1$ с.

Табліца 11

Варыянт	φ, рад	OA, м	AB, м	CD, м	ON, м	CM, м	α, град	r_1, м	r_2, м	s, м	t_1, с
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	πt	0,3	0,7	0,8	0,8	0,5					0,4
2	$0{,}2\pi t$	0,2	0,6	0,7	0,3	0,4					1,5
3	$0{,}3\pi t$	0.3	0,8	0,4	0,5	0,7					1,0
4	$0{,}4\pi t$	0,2	0,6	0,8	0,4	0,3					1,2
5	$0{,}1\pi t$	0,4	0,9	0,6	0,5	0,8					2,0
6	$0{,}5\pi t$	0,3	0,7	1,3		0,6					0,8
7				0.8		0,5	40			$0{,}5\sin\pi t$	0,6
8				0,9		0,4	30			$0{,}6\cos\pi t$	0,3
9	$2t$							0,4	0,2		1,2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	$2{,}5t$							0,6	0,2		1,0
11	$1{,}5t$	0,5	1,4								1,6
12	$0{,}8t$	0,2				0,1					0,6
13	$0{,}6t$	0,3	1,2								0,9
14	$0{,}7t$	0,4				0,3					0,8
15	$0{,}2\pi t$	0,5	1,5								1,3
16	$0{,}3\pi t$	0,2	0,8								0,7
17						0,4				$2t^2$	1,0
18						0,3				$0{,}7t^3$	0,9
19						0,2				$3e^t$	0,6
20						0,5				$0{,}4t$	1,3
21			1,3							$0{,}2+t^2$	0,7
22			0,7							$0{,}8+e^t$	0,5
23			1,1				60			$0{,}9-0{,}2t$	1,0
24			0,9				25			$1{,}0+0{,}4t^2$	1,2
25			1,2				30			$1{,}2+0{,}5t$	1,4
26			0,8							$0{,}4t^2$	1,1
27			1,4				35			$0{,}1+0{,}3e^t$	0,6
28			0,7		0,4					$0{,}3\sin t$	1,0
29			1,0							$0{,}2\ln\lvert 4+t\rvert$	1,5
30			1,2		0,8					$0{,}5\sin 2t$	2,0

Р а ш э н н е . Выбіраем нерухомую сістэму адліку Oxy. Няхай пачатак восей каардынат будзе ў цэнтры O нерухомага кола. Вось Ox праводзім праз пункт B, з якім супадаў пункт M рухомага кола ў той час, калі вугал φ быў роўным нулю (пачатак руху). Пры качэнні кола 2 па паверхні кола 1 без праслізгвання дуга DB роўная дузе DM.



Рыс. 56

$$\cup DB = \cup DM,\ r\cdot\varphi = \alpha\cdot R;$$

$$\alpha = \frac{r}{R}\varphi = \frac{0{,}2}{0{,}3}2t \cong 1{,}33t\ .$$

Праз вядомыя радыусы і вуглы, якія мяняюцца з цягам часу, вызначым каардынаты пункта M кола 2 у выбраных восях каардынат.

$$x_M = OA\cos\varphi - MA\cos(\varphi+\alpha) = (r+R)\cos 2t - R\cos(2t+1{,}33t)\ ,$$

$$x_M = 0{,}5\cos 2t - 0{,}3\cos 3{,}33t\ ;$$

$$y_M = OA\sin\varphi - MA\sin(\varphi+\alpha) = (r+R)\sin 2t - R\sin(2t+1{,}33t)\ ,$$

$$y_M = 0{,}5\sin 2t - 0{,}3\sin 3{,}33t\ .$$

Атрыманыя выразы для x_M і y_M з'яўляюцца ўраўненнямі руху пункта M. Апісанне руху пункта M ажыццёўлена ў каардынатнай форме.

Па ўраўненнях руху $x_M = f(t)$; $y_M = f(t)$ знаходзім праекцыі скарасці і скарасць пункта M у момант t_1.

$$v_x = \dot{x}_M = -\sin 2t + \sin 3{,}33t\ ;$$

$$v_y = \dot{y}_M = \cos 2t - \cos 3{,}33t\ ;$$

У момант t_1=1 с:

$$v_x = -\sin 2 + \sin 3{,}33 = -0{,}909 - 0{,}187 = -1{,}1 \text{ м/с;}$$

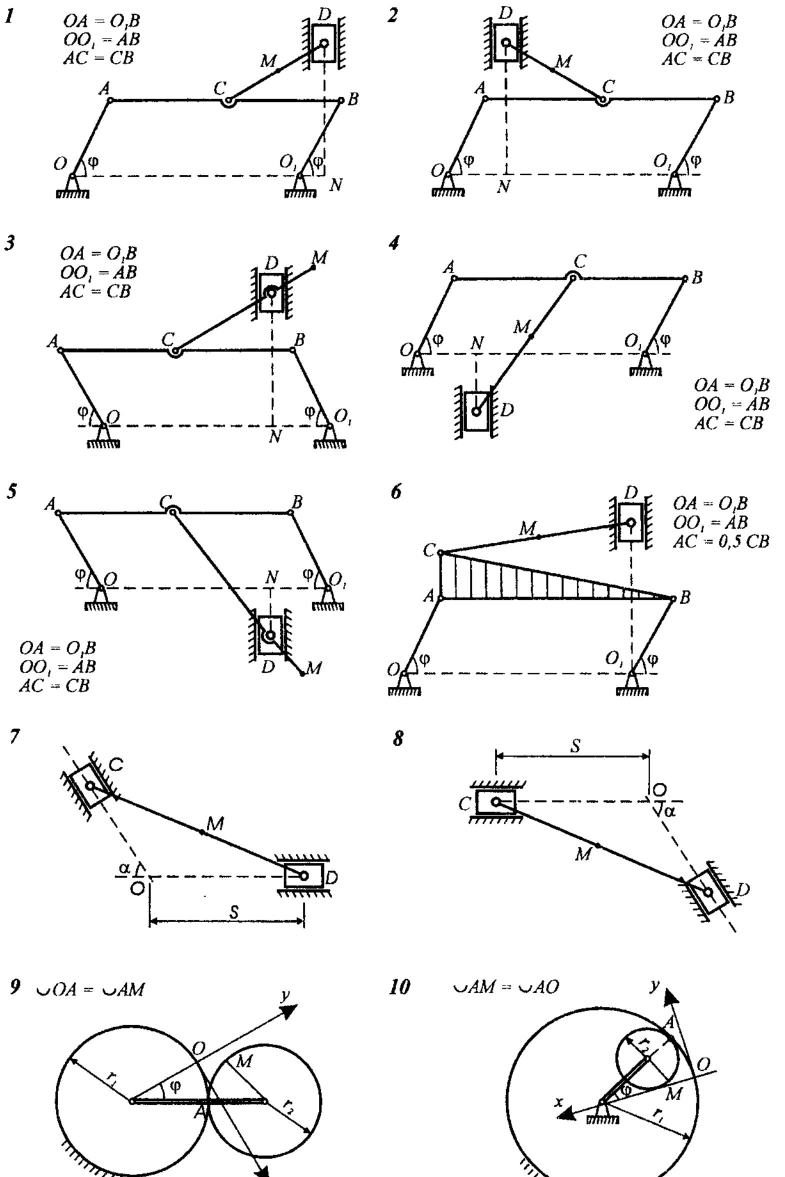
$$v_y = \cos 2 - \cos 3{,}33 = -0{,}416 + 0{,}982 = 0{,}57 \text{ м/с;}$$

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1{,}21 + 0{,}325} = 1{,}24 \text{ м/с.}$$

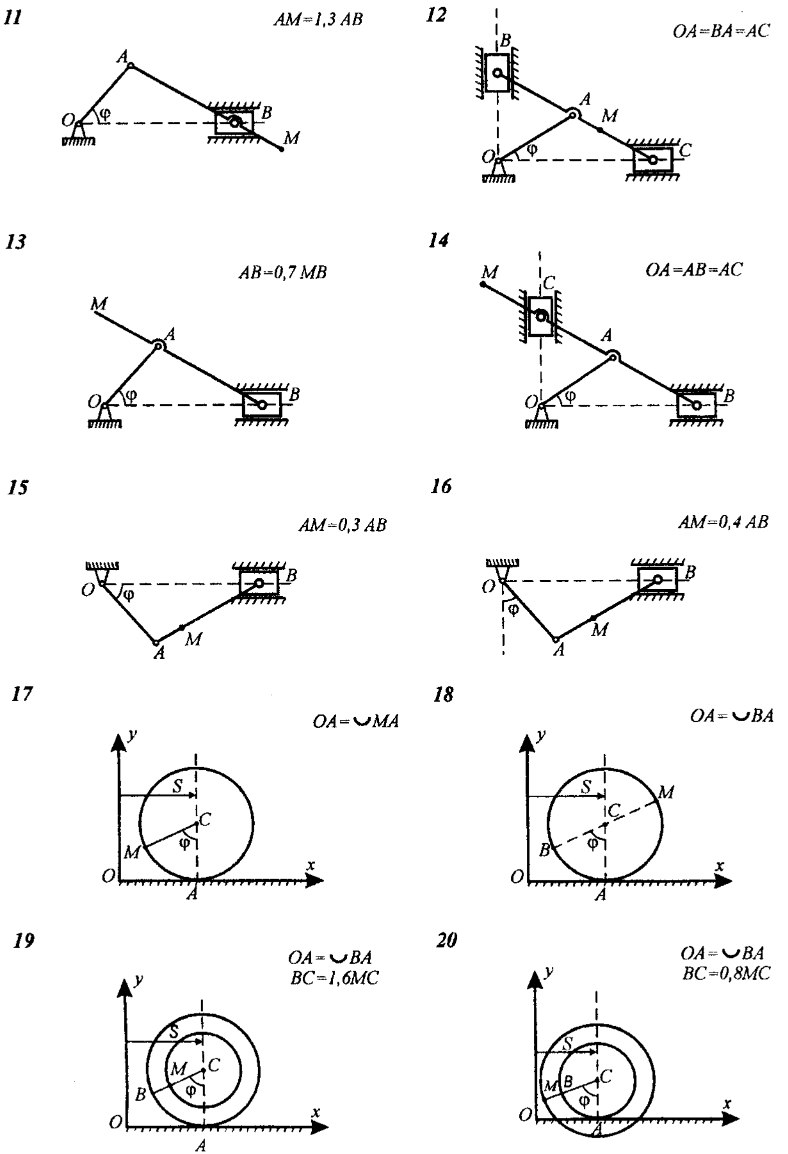
Паскарэнне пункта M падлічым па яго праекцыях на восі каардынат.

$$a_x = \dot{v}_x = -2\cos 2t + 3{,}33\cos 3{,}33t;$$

$$a_y = \dot{v}_y = -2\sin 2t + 3{,}33\sin 3{,}33t.$$


1
OA = O₁B
OO₁ = AB
AC = CB
2
OA = O₁B
OO₁ = AB
AC = CB
3
OA = O₁B
OO₁ = AB
AC = CB
4
OA = O₁B
OO₁ = AB
AC = CB
5
OA = O₁B
OO₁ = AB
AC = CB
6
OA = O₁B
OO₁ = AB
AC = 0,5 CB
7
8
9 ◡OA = ◡AM
10 ◡AM = ◡AO

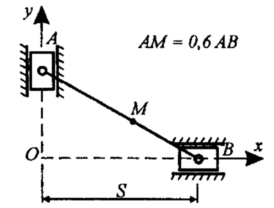
Рыс. 57



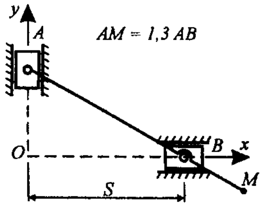
11
AM=1,3 AB
A
O
φ
B
M
12
OA=BA=AC
B
A
M
O
φ
C
13
AB=0,7 MB
M
A
O
φ
B
14
OA=AB=AC
M
C
A
O
φ
B
15
AM=0,3 AB
O
φ
B
A
M
16
AM=0,4 AB
O
φ
B
A
M
17
OA=◡MA
y
S
C
M
φ
O
x
A
18
OA=◡BA
y
S
M
C
B
φ
O
x
A
19
OA=◡BA
BC=1,6MC
y
S
M
C
B
φ
O
x
A
20
OA=◡BA
BC=0,8MC
y
S
M
B
C
φ
O
x
A

Рыс. 58

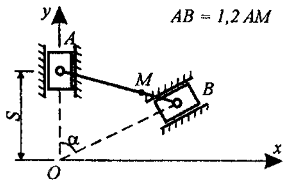
21



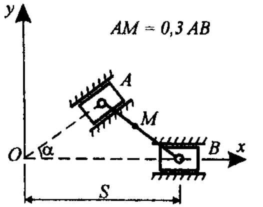
22



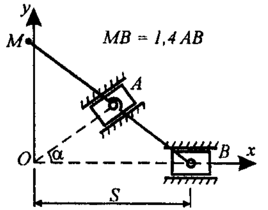
23



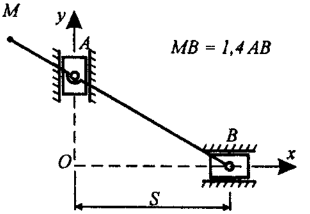
24



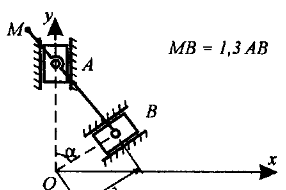
25



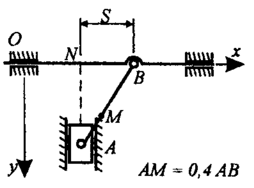
26



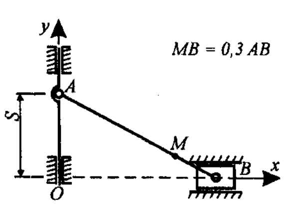
27



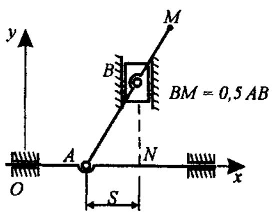
28



29



30



Рыс. 59

У момант $t_1 = 1$ с:

$$a_x = -2\cos 2 + 3{,}33\cos 3{,}33 = 0{,}832 - 3{,}27 = -2{,}44 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y = -2\sin 2 + 3{,}33\sin 3{,}33 = -1{,}818 - 0{,}624 = -2{,}44 \text{ м/с}^2;$$

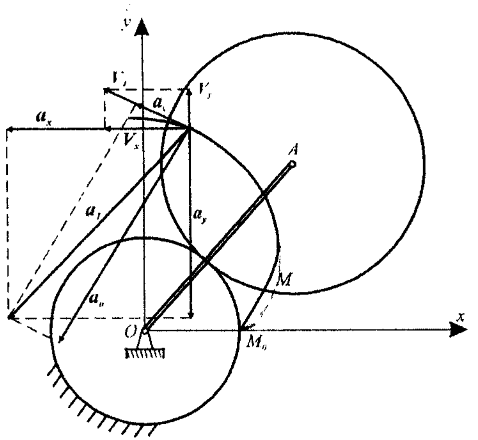
$$a_1 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{5{,}95 + 5{,}95} = 3{,}45 \text{ м/с}^2.$$

Па праекцыях скорасцей і паскарэнняў на восі каардынат вызначаем тангенцыяльнае паскарэнне пункта M у момант t_1.

$$a_\tau = \frac{\mathrm{v}_x \cdot a_x + \mathrm{v}_y \cdot a_y}{\mathrm{v}_1} = \frac{(-1{,}1)\cdot(-2{,}44) + 0{,}57\cdot(-2{,}44)}{1{,}24} = 1{,}04 \text{ м/с}^2.$$

Праз паскарэнне a_1 і a_τ знаходзім нармальнае паскарэнне пункта M у момант t_1.

$$a_n = \sqrt{a_1^2 - a_\tau^2} = \sqrt{11{,}9 - 1{,}08} = 3{,}29 \text{ м/с}^2.$$



= 0.087

Рыс. 60

Радыус крывізны траекторыі ў момант t_1 вызначаецца па формуле

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{a_n} = \frac{1{,}54}{3{,}29} = 0{,}47 \text{ м.}$$

Па ўраўненнях руху пункта M будуем частку траекторыі (рыс. 60) ад пачатку руху (M_0) з такім разлікам, каб на ёй паказаць месцазнаходжанне пункта M у момант t_1 (M_1). У пункце M_1 паказваем усе вектары, якія вызначаны ў заданні.

2. Прасцейшыя рухі цвёрдага цела

Заданне К-3

Вызначэнне скорасцей і паскарэнняў пунктаў цела пры паступальным і вярчальным рухах

Вызначыць у момант $\tau = 1$ с вуглавую скорасць і вуглавое паскарэнне шківаў механізма (рыс. 62–66), скорасць і паскарэнне пункта B, калі вядомы закон руху груза A. Неабходныя даныя (у м) прыведзены ў табл. 12.

Прыклад рашэння задання К-3

Вызначыць у момант τ вуглавыя скорасці і вуглавыя паскарэнні шківаў механізма (рыс. 61), а таксама скорасць і паскарэнне пункта B, калі вядомы закон руху груза A.

$$z = t^2 - t \text{ (м)},\ r_1 = 0{,}1 \text{ м},\ R_1 = 0{,}2 \text{ м},\ r_2 = 0{,}15 \text{ м},$$

$$R_2 = 0{,}3 \text{ м},\ R_3 = 0{,}25 \text{ м},\ \tau = 1 \text{ с.}$$

Табліца 12

Варыянт	r_1	R_1	r_2	R_2	r_3	R_3	z
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,20	0,30	0,15	0,35	0,10		$4t\sin\pi t$
2	0,30	0,35	0,15	0,20		0,20	$t-\cos\pi t$
3		0,25	0,15	0,25	0,10	0,20	$4t^3+2t$

1	2	3	4	5	6	7	8
4		0,20	0,25	0,30	0,20	0,25	$3t\sin\pi t$
5		0,35	0,30	0,35	0,25	0,30	$t+\cos 2t$
6		0,28	0,16	0,24	0,20	0,22	$3t-t^{-2}$
7	0,14	0,26	0,18	0,24	0,16		$\pi\sin 2\pi t$
8	0,16	0,20	0,15	0,20		0,25	$3t^2\sin\pi t$
9	0,18	0,22	0,14	0,20	0,18		$3t+t^3$
10	0,18	0,20	0,22	0,26	0,22		$t^2\cos 2t$
11		0,26	0,20	0,24	0,15	0,25	$\cos 2t-t$
12		0,20	0,14	0,18	0,15	0,20	$t^2+\sin t$
13	0,15		0,18	0,24	0,16	0,24	$t+3\sin 2t$
14		0,20	0,24	0,26	0,18	0,24	t^3-t^2+4
15	0,15	0,25	0,18	0,24	0,18		$2t^2\sin t$
16	0,18	0,26	0,22	0,26		0,30	$\cos 3t^2$
17	0,14	0,16	0,15	0,25		0,26	$\cos 2t+t^2$
18	0,16	0,20	0,15	0,25		0,30	$t^2-\sin 2t$
19	0,18	0,24	0,24	0,26	0,13		$3t^3-2t$
20	0,20	0,22	0,16	0,26	0,18		$t^2\cos 3t$
21	0,22	0,26	0,15	0,25	0,13	0,26	t^3-t^2-4t
22	0,15	0,24	0,18	0,26	0,21	0,28	$2t^2+\cos 2t$
23	0,18	0,27	0,27	0,38	0,12	0,24	$\cos\pi t+4t$
24	0,14	0,26	0,21	0,26	0,14	0,23	$t^3\cos 2t$
25	0,10	0,20	0,14	0,22	0,15	0,25	$4\cos 2t^2$
26	0,16	0,26	0,10	0,18	0,12	0,20	$3\sin(2t+t^2)$
27		0,27	0,15	0,22	0,20	0,25	$3\cos(t-2t^2)$
28	0,14	0,26	0,18	0,24	0,12		$2t+\cos\pi t$
29		0,18	0,16	0,25	0,14	0,22	$\cos 2\pi t+t$
30		0,16	0,18	0,22	0,15	0,25	$t^2-2\sin\pi t$

Р а ш э н н е . Па вядомаму закону прамалінейнага пастyпальнага руху груза A знойдзем скорасць і паскарэнне груза:

$$v_A = \dot{z} = 2t - 1; \quad a_A = \ddot{z} = 2 \text{ м/с}^2.$$

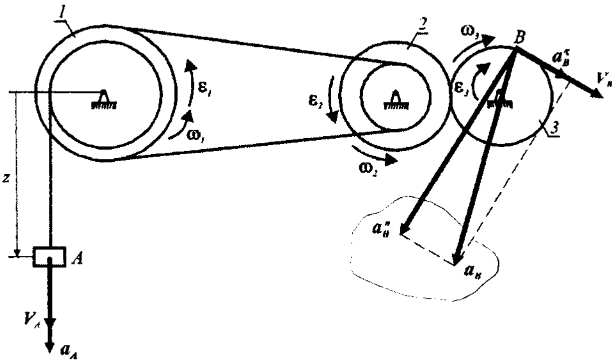
У момант $\tau = 1$ с $\quad v_A = 1$ м/с.

На рыс. 61 паказваем вектары $\mathbf{v}_A$ і $\boldsymbol{a}_A$.

З улікам накірункаў вектараў скорасці і паскарэння груза A паказваем накірункі вярчэння шківаў 1, 2, 3 з вуглавымі скарасцямі і вуглавымі паскарэннямі.

Вуглавыя скорасць і паскарэнне шківа 1:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{r_1} = \frac{1}{0{,}1} = 10 \text{ рад/с}; \quad \varepsilon_1 = \frac{a_A}{r_1} = \frac{2}{0{,}1} = 20 \text{ рад/с}^2.$$



Рыс. 61

У раменнай перадачы вуглавыя скорасць і паскарэнне шківа 2 вызначаем з улікам суадносін радыусаў шківаў 1 і 2.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{R_1};\quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\frac{r_2}{R_1};$$

$$\omega_2=\omega_1\frac{R_1}{r_2}=10\frac{0{,}2}{0{,}15}=13{,}3\ \text{рад/с};$$

$$\varepsilon_2=\varepsilon_1\frac{R_1}{r_2}=20\frac{0{,}2}{0{,}15}=26{,}6\ \text{рад/с}^2.$$

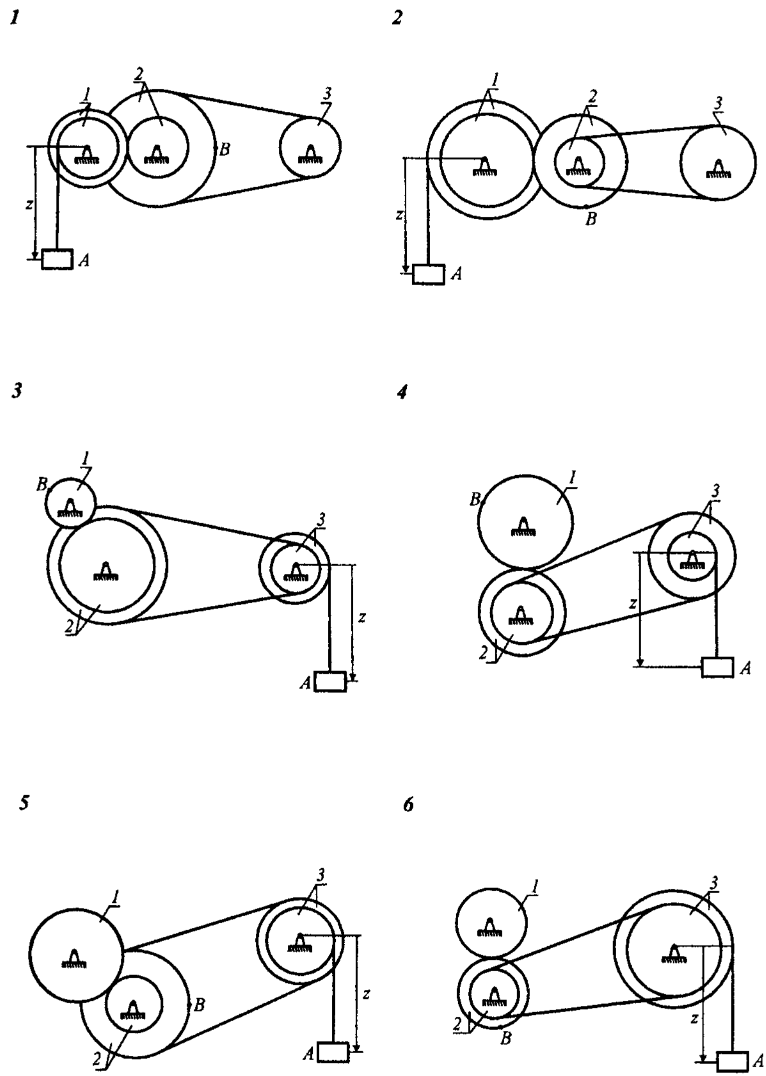
У фрыкцыйнай перадачы (колы 2 і 3) аналагічна знаходзім вуглавыя скорасць і паскарэнне шківа 3:

$$\frac{\omega_2}{\omega_3}=\frac{R_3}{R_2},\quad \omega_3=\omega_2\frac{R_2}{R_3}=13{,}3\frac{0{,}3}{0{,}25}=16\ \text{рад/с};$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}=\frac{R_3}{R_2},\quad \varepsilon_3=\varepsilon_2\frac{R_2}{R_3}=26{,}6\frac{0{,}3}{0{,}25}=31{,}9\ \text{рад/с}^2.$$

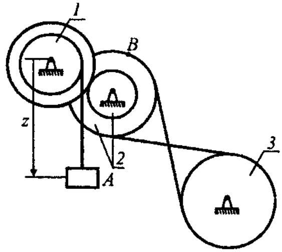
Скорасць і паскарэнне пункта *B* роўныя

$$v_B=\omega_3 R_3=16\cdot 0{,}25=4\ \text{м/с}.$$

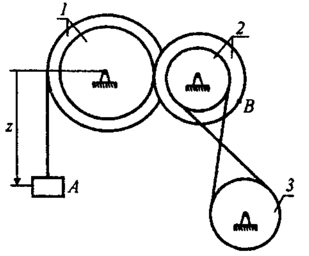


Рыс. 62

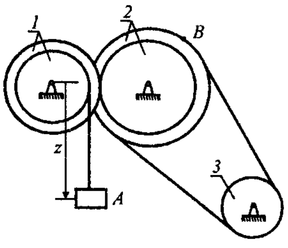
7



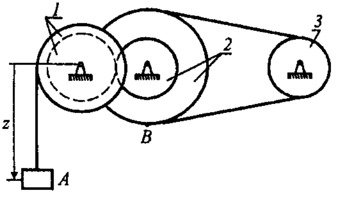
8



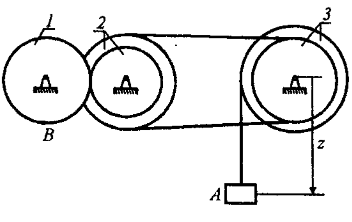
9



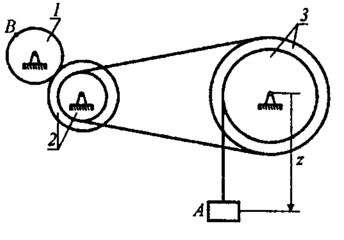
10



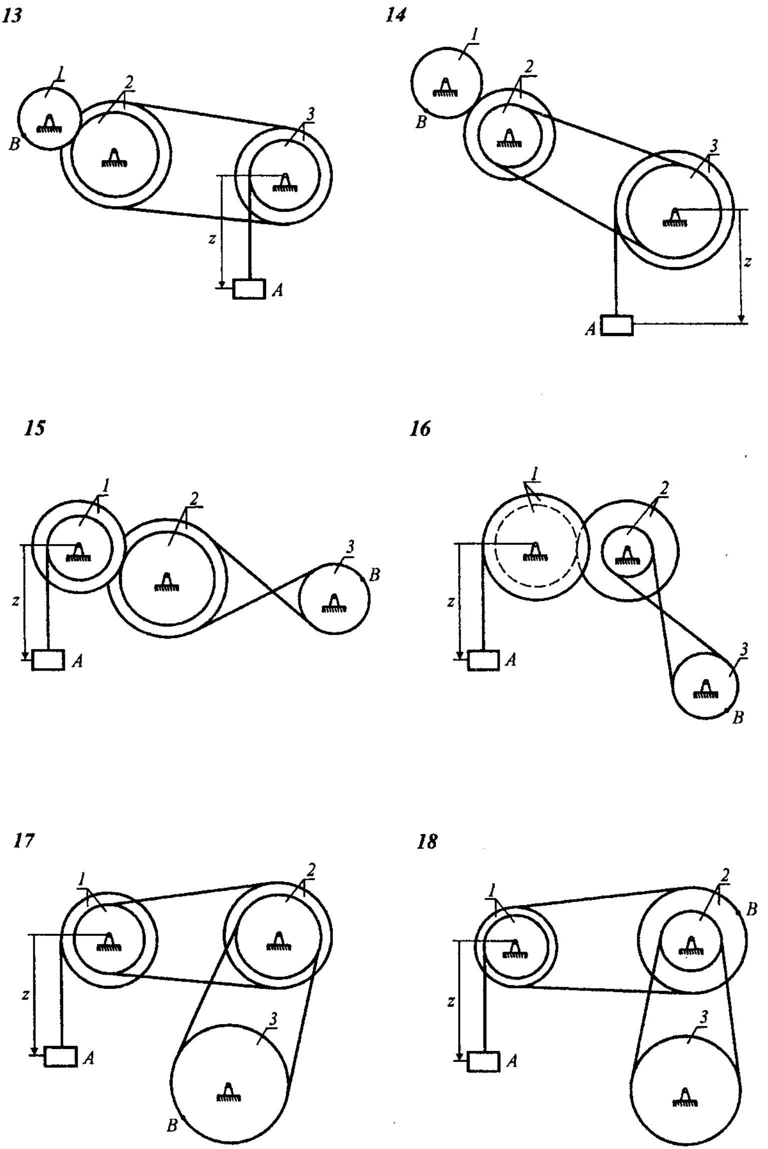
11



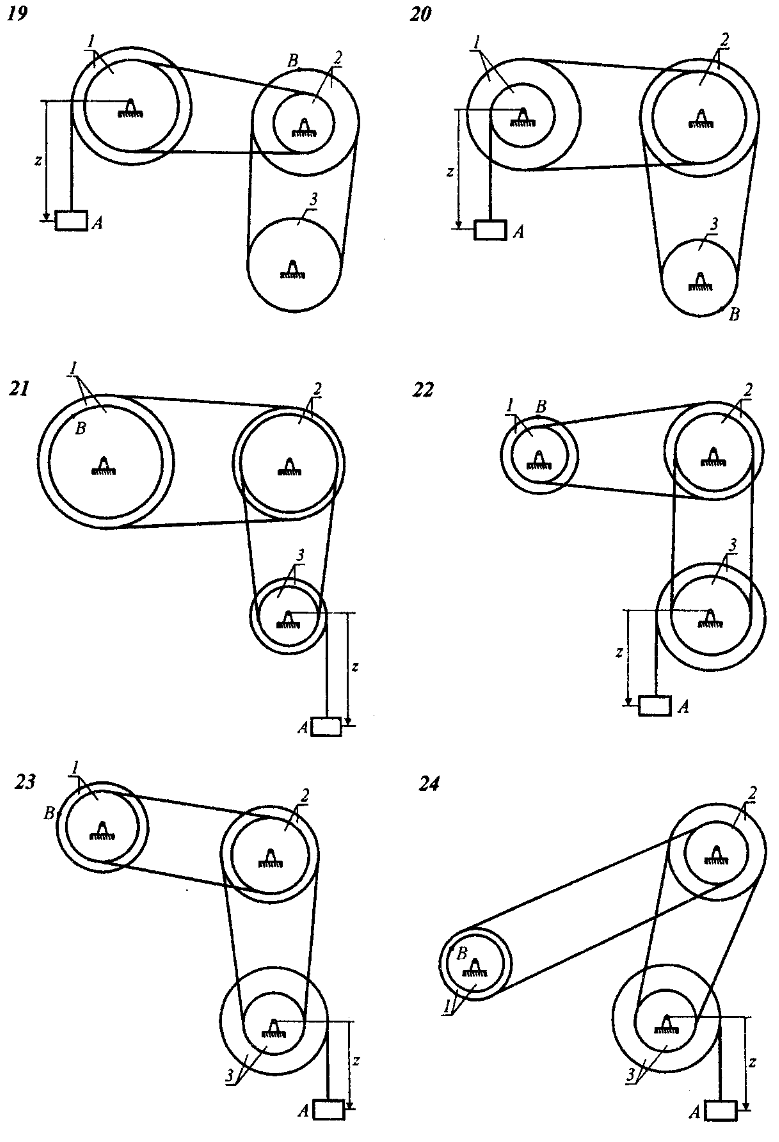
12



Рыс. 63

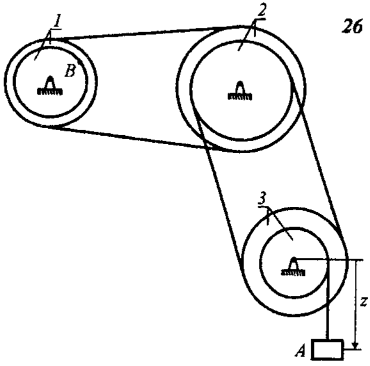


Рыс. 64

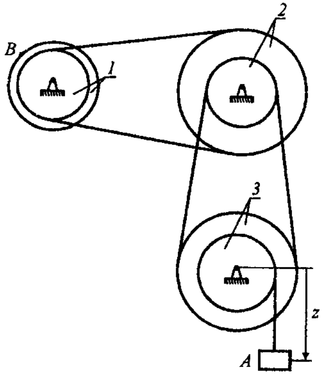


Рыс. 65

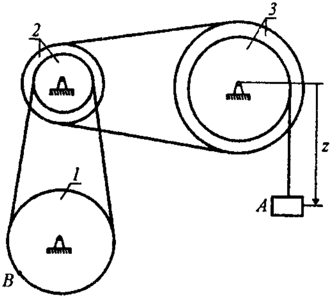
25



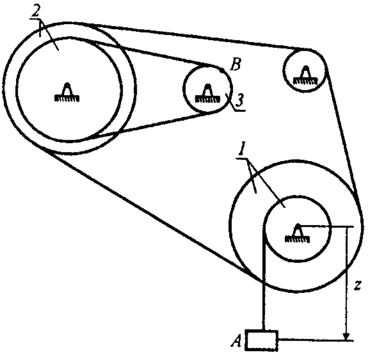
26



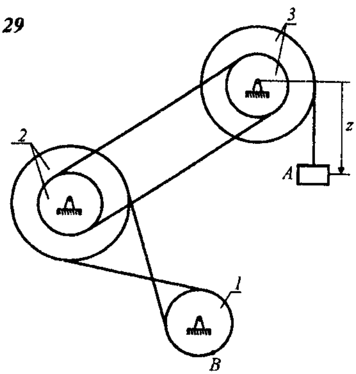
27



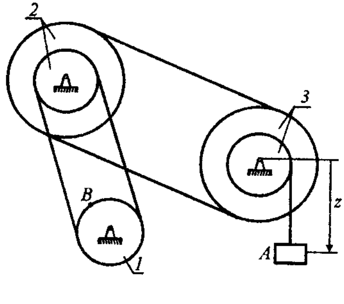
28



29



30



Рыс. 66

$$a_B = R_3\sqrt{\varepsilon_3^2 + \omega_3^4} = 0{,}25\sqrt{1017{,}6 + 65536} = 64{,}5 \text{ м/с}^2.$$

На рыс. 61 паказваем у пункце В скорасць і паскарэнні пункта.

3. Складаны рух пункта

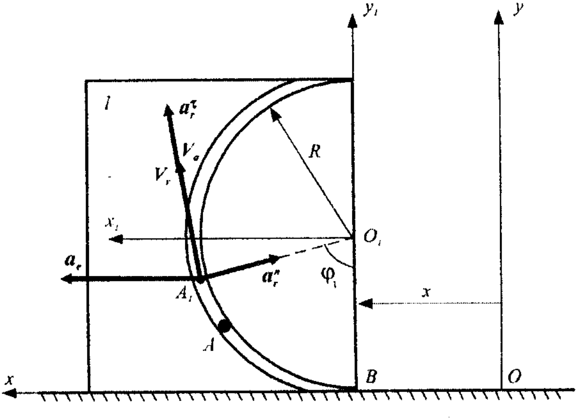
Заданне К-4

Вызначэнне скорасці і паскарэння пункта пры пераносным пастурапальным руху

Пункт A рухаецца адносна цела 1 (рыс. 68–72), якое, у сваю чаргу, рухаецца адносна нерухомых восей каардынат. Знайсці ў момант часу τ абсалютныя скорасць і паскарэнне пункта A. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 13.

Прыклад рашэння задання К-4

Пункт A (рыс. 67) рухаецца па каналу адносна цела 1 па закону $s = BA = t^2 - t$(м). Цела 1 рухаецца ўздоўж нерухомай паверхні па закону $x = 2\sin\pi t$(м). Вызначыць у момант $\tau = 1{,}5$ с абсалютныя скорасць і паскарэнне пункта A, калі $R = 0{,}5$ м.



Рыс. 67

Варыянт	$x = x(t)$, м	$s = BA = f(t)$, м	R, м	$\varphi = \varphi(t)$, рад	τ, с
1	$0,2t+0,03t^2$		0,3	$2\cos 2t$	1,0
2	$0,1\sin\pi t$		0,2	$0,3t+2t^2$	0,8
3	$0,3t^2+0,5t$		0,4	$0,2+\sin 0,5\pi t$	1,2
4	$0,3+0,1\sin 2t$	$0,6t^2-0,2t$			1,1
5	$2t+\sin 0,3\pi t$	$0,2t^2+0,4t-0,3$	0,8		1,3
6	$0,4t+0,2\cos 2t$	$0,3\cos 3t$	0,7		0,2
7	$0,1t^2+0,3t$	$0,4t^2-0,1t$	0,6		1,0
8	$0,2t\sin 0,5\pi t$	$0,3\ t^2+0,1t$	0,5		0,9
9	$0,4t^2-0,1t+0,2$	$0,2t+0,1\cos\pi t$			0,7
10	$0,2t^2e^t$	$0,3t^2+0,2t$			0,6
11	$0,4t+0,1\sin\pi t$	$0,2t^3+0,1t+0,3$			1,0
12	$0,5t+0,2\sin\pi t$	t^2-t	0,7		1,4
13	$t^2+0,5t$	$0,7\sin 0,4\pi t$	0,5		1,8
14	$0,8+2t-0,5t^2$		0,3	$0,6\cos 0,5\pi t$	1,2
15	$0,7+0,3\sin 0,3\pi t$	$0,25\cos\pi t$	0,2		0,8
16	$t+t^2-e^{-2t}$	$0,6-0,3\sin t$	0,4		0,7
17	$0,4t^2-0,2t$	$0,4\cos 0,3\pi t$	0,6		0,6
18	$1+0,6\cos 0,7t$	$0,1+0,2\sin 2t$	0,8		0,5
19	$t^3-0,5t^2+t$	$0,5\cos 0,6t^2$	0,9		0,9
20	$0,8\sin 3t^2+2t$		1,0	$0,8\sin 4t$	1,0
21	$t^2-\sin 0,6t$		0,5	$0,7\cos 0,4t$	1,1
22	$0,6t^2+t$	$0,8\sin 0,9t$	0,9		0,7
23	$2t+0,3\cos 4t$	$0,6t^2-0,3t$	0,4		1,3
24	$t^2+e^{0,2t}$	$t+\cos 0,5\pi t$	0,6		1,2
25	$0,6t^2-0,3t$	$1,2\sin 1,4t$	0,7		0,9
26	$0,7-0,2\sin t$	$1,4\cos 0,3t$	0,8		0,8
27	$t+e^{0,3t}$	$0,5+0,2\sin t$	0,3		0,7
28	t^3-t^2+t	$t^2-\sin 0,8t$	0,4		0,6
29	$t^2+0,1\sin 2t$	$t+0,3\cos 0,1t$	0,2		0,5
30	$2t-t^2+1$	$0,4+0,2\sin t$	0,5		1,4

Рашэнне. Выбіраем дзве сістэмы адліку: нерухомую і рухомую. Восі каардынат Oxy, размешчаныя на нерухомай апорнай пляцоўцы, з'яўляюцца нерухомаю сістэмаю адліку. Рухомую сістэму ўтворым шляхам размяшчэння восей $O_1x_1y_1$ на целе 1. У гэтым выпадку адносны рух пункта A – рух па акружнасці, радыус якой R. Пераносным рухам пункта A з'уляецца пастунальны прамалінейны рух цела 1 адносна нерухомых восей Oxy.

Адносны рух апісаны натуральным спосабам, закон руху $s = t^2 - t$.

Пераносны рух адбываецца па закону $x = 2\sin\pi t$.

Вызначым месцазнаходжанне пункта А на акружнасці ў момант τ.

$$s = t^2 - t. \;\; s_1 = \tau^2 - \tau = 2{,}25 - 1{,}5 = 0{,}75 \text{ м}.$$

Дузе даўжынёю s_1 адпавядае цэнтральны вугал

$$\varphi_1 = \frac{s_1}{R} = \frac{0{,}75}{0{,}5} = 1{,}5 \text{ рад}.$$

У градусах: $\varphi_1 = 86°$.

Абсалютная скорасць пункта A вызначаецца па тэарэме складання скорасцей у складаным руху пункта.

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r .$$

Пераносная скорасць

$$v_e = \dot{x} = 2\pi \cos \pi t .$$

У момант τ пераносная скорасць

$$v_e = 2\pi \cos 1{,}5\pi = 0.$$

Адносная скорасць

$$v_r = \dot{s} = 2t - 1 .$$

У момант τ адносная скорасць

$$v_r = 2 \cdot 1{,}5 - 1 = 2 \text{ м/с}.$$

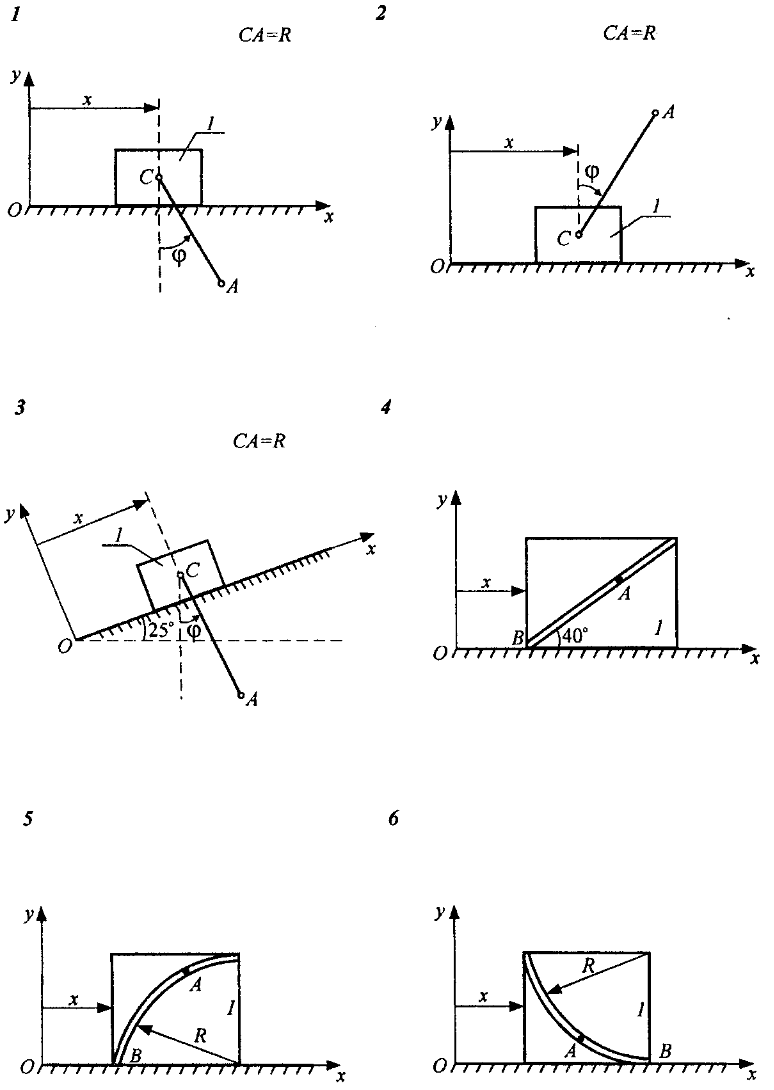
Паказваем у пункце A_1 на рыс. 67 вектар $\mathbf{v}_r$ па датычнай да траекторыі адноснага руху пункта A у бок узрастнання дугавой каардынаты s. У вызначаны момант часу $v_e = 0$, таму абсалютная скорасць роўная адноснай скорасці пункта.

$$v_a = v_r = 2 \text{ м/с}.$$

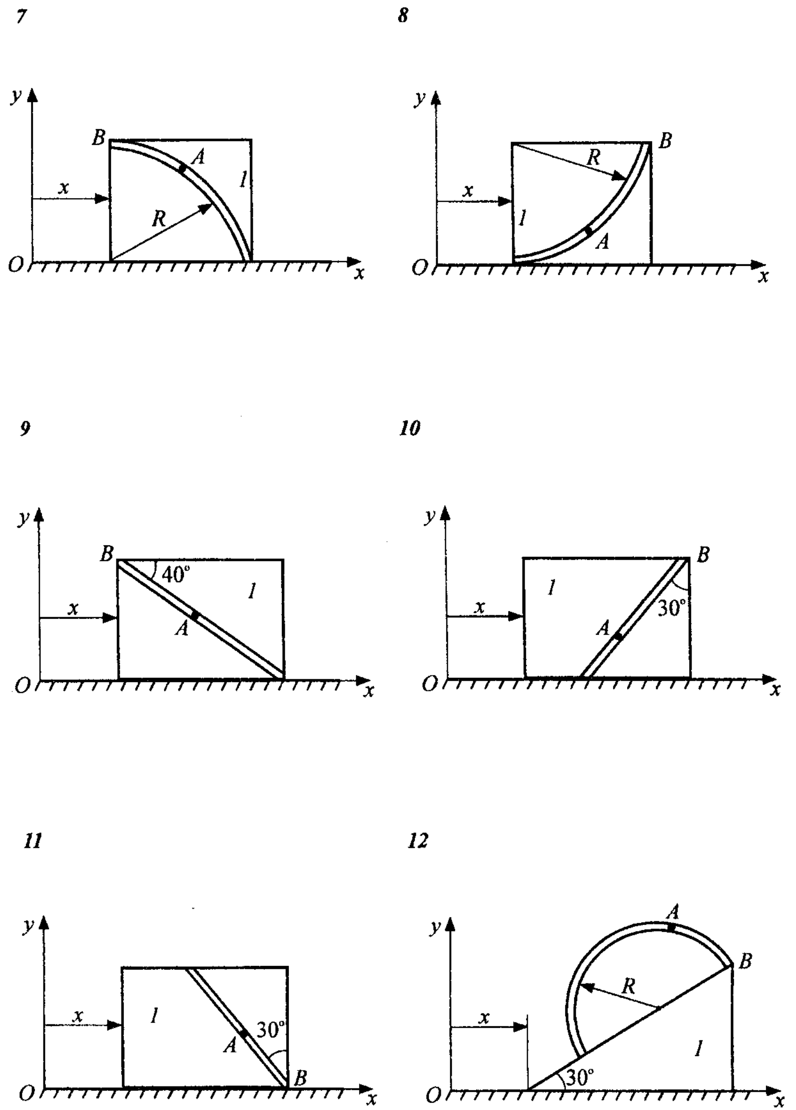
Вектар $\mathbf{v}_a$ супадае з вектарам $\mathbf{v}_r$.

Абсалютнае паскарэнне пункта A вызначаецца па тэарэме складання паскарэнняў для прыватнага выпадку, калі пераносны рух пастулальны.

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r .$$

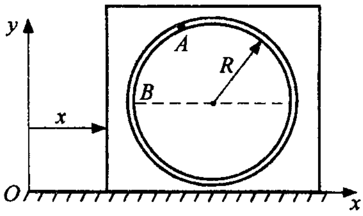

1
CA=R
y
x
1
C
O
x
φ
A
2
CA=R
y
A
x
φ
1
C
O
x
3
CA=R
y
x
1
C
x
O
25°
φ
A
4
y
x
A
B
40°
1
O
x
5
y
x
A
1
R
B
O
x
6
y
R
x
1
A
B
O
x

Рыс. 68

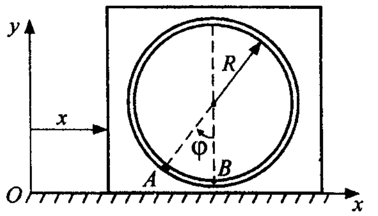


Рыс. 69

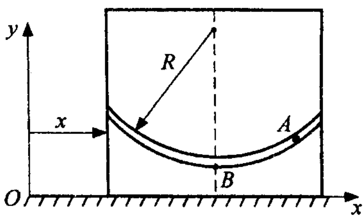
13



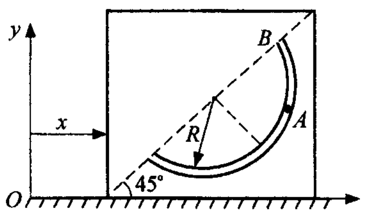
14



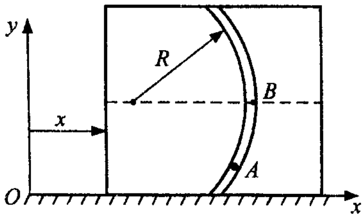
15



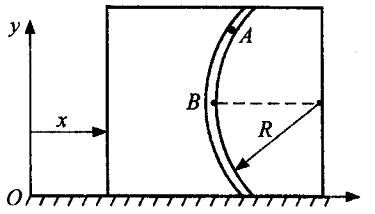
16



17

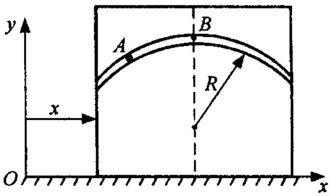


18

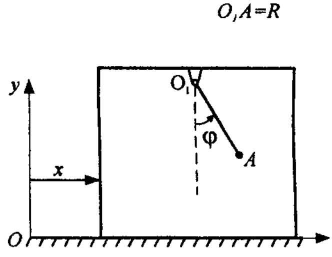


Рыс. 70

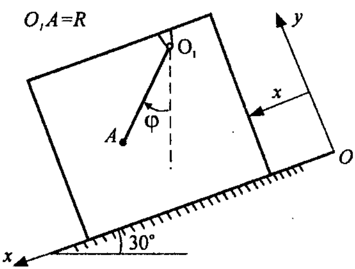
19



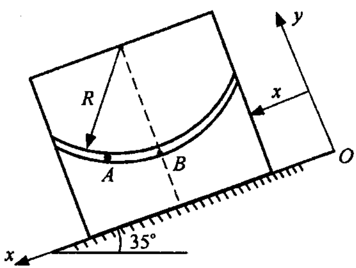
20



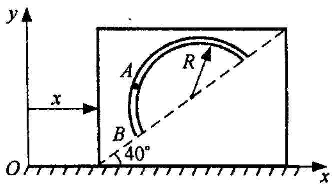
21



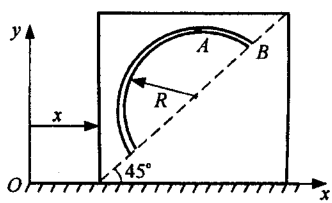
22



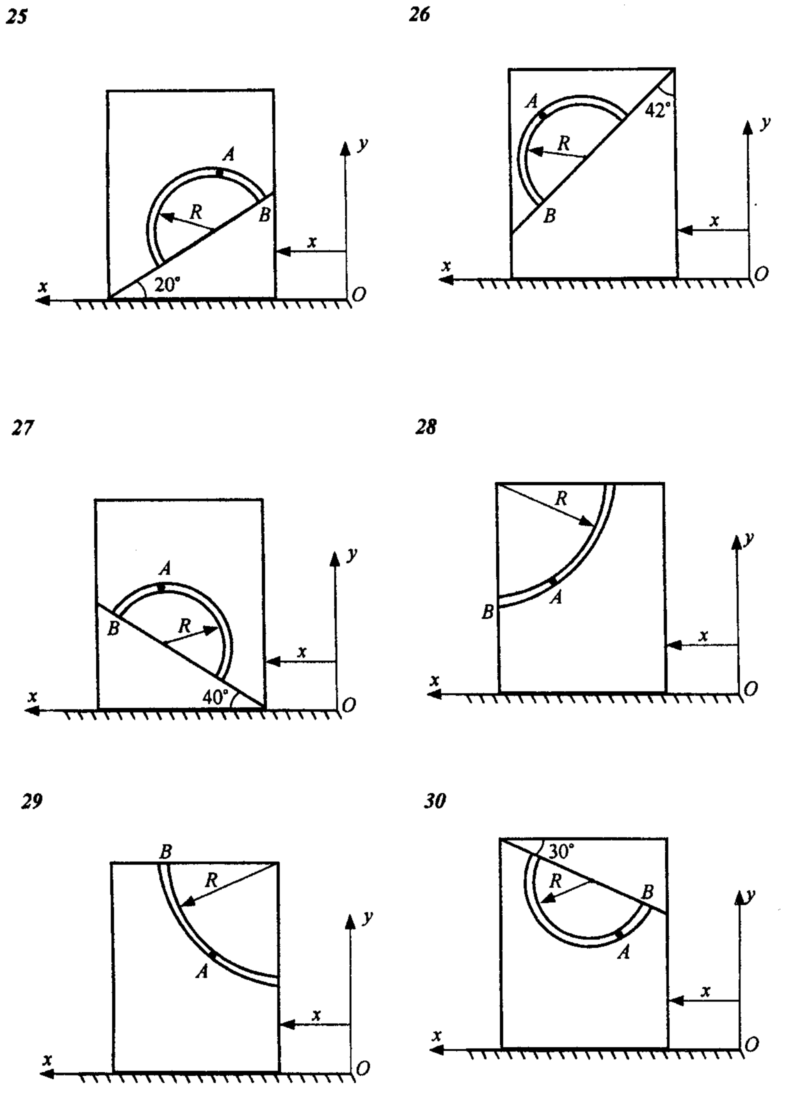
23



24



Рыс. 71


25
A
R
B
20°
x
y
x
O
26
A
R
42°
B
y
x
x
O
27
A
R
B
40°
y
x
x
O
28
R
A
B
y
x
x
O
29
B
R
A
y
x
x
O
30
30°
R
B
A
y
x
x
O

Рыс. 72

Пераноснае паскарэнне

$$a_e = \ddot{x} = -2\pi^2 \sin \pi t \ .$$

У момант τ пераноснае паскарэнне

$$a_e = -2\pi^2 \sin 1{,}5\pi = 2\pi^2 = 19{,}7 \text{ м/с}^2.$$

Паказваем на рыс. 67 вектар $\boldsymbol{a}_e$ у пункце A_1 паралельна восі Ox у дадатным яе накірунку.

Адноснае паскарэнне мае дзве складовыя з-за адноснага крывалінейнага руху пункта A.

$$\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_r^n + \boldsymbol{a}_r^\tau \ .$$

Адноснае нармальнае паскарэнне

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{4}{0{,}5} = 8 \text{ м/с}^2.$$

Вектар $\boldsymbol{a}_r^n$ накіроўваем на рыс. 67 ад пункта A_1 да цэнтра акружнасці O_1.

Адноснае тангенцыяльнае паскарэнне

$$a_r^\tau = \ddot{s} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Паказваем $\boldsymbol{a}_r^\tau$ у бок узрастання дугавой каардынаты s.

Знаходзім велічыню абсалютнага паскарэння пункта A ў момант τ па праекцыях паскарэння на восях Ox і Oy.

$$a_{ax} = a_e + a_r^\tau \cos\varphi_1 - a_r^n \sin\varphi_1 = 19{,}7 + 2\cdot\cos 86° - 8\sin 86° =$$

$$= 19{,}7 + 2\cdot 0{,}07 - 8\cdot 0{,}998 = 19{,}7 + 0{,}14 - 7{,}98 = 11{,}86 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{ay} = a_r^\tau \sin\varphi_1 + a_r^n \cos\varphi_1 = 2\sin 86° + 8\cos 86° =$$

$$= 2\cdot 0{,}998 + 8\cdot 0{,}07 = 2{,}56 \text{ м/с}^2;$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{11{,}86^2 + 2{,}56^2} = \sqrt{140{,}66 + 6{,}55} = 12{,}13 \text{ м/с}^2.$$

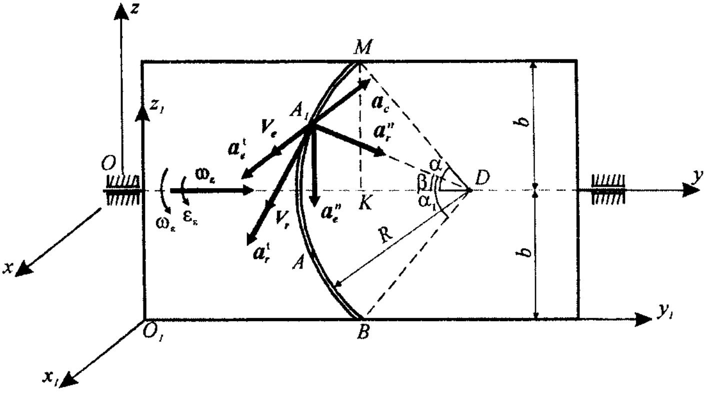
Заданне К-5

Вызначэнне скорасці і паскарэння пункта, калі пераносны рух вярчальны

Цела 1 удзельнічае ў вярчальным руху ў адпаведнасці з законам $\psi = f_1(t)$ (рыс. 74–78). Пункт A рухаецца адносна цела 1 па закону $s = BA = f_2(t)$ або па закону $\varphi = f_3(t)$. Вызначыць у момант τ абсалютную скорасць і абсалютнае паскарэнне пункта A. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 14.

Прыклад рашэння задання К-5

Прамавугольная пласціна (b=0,3 м) замацавана на гарызантальнай восі (рыс. 73) і верціцца вакол яе па закону $\varphi = 0{,}5t^2$. Па каналу, які мае форму дугі акружнасці радыуса R=0,4 м, у плоскасці пласціны рухаецца пункт A па закону $s = BA = 0{,}3+0{,}2\sin 0{,}6\pi t$ (м). У момант τ = 1с вызначыць абсалютную скорасць і абсалютнае паскарэнне пункта A.



Рыс. 73

Табліца 14

Варыянт	$\psi = f_1(t)$, рад	s = BA = $f_2(t)$, м $\varphi = f_3(t)$, рад	AB, м	OD, м	DB, м	R, м	τ, с
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$0{,}5t+t^2$	$0{,}3\pi t^2+t$	0,4				1
2	πt^2	$0{,}2t+t^2$	0,7	0,5	0,2		2

Заканчэнне табл. 14

1	2	3	4	5	6	7	8
3	$0,4t^2-t$	$0,2t^2+t$	0,8	0,3	0,8		3
4	$t^2+0,1t$	$\sin 2t$	0,5	0,6	0,2		1
5	$0,3e^t+2t$	$0,1t^2$		0,7	0,6		2
6	$0,2te^t$	$0,4t+0,1t^2$		0,8	0,3		1
7	$0,3t^3$	$t+0,6t^2$	0,4	0,5	0,2		3
8	$0,5t^2$	$0,5\cos 3t$	0,3	0,7	0,2		2
9	$0,3\pi t^2$	$0,3+0,2\sin t$		0,6	0,6		3
10	t^3-t^2+1	$0,5-0,3\sin 2t$		0,8	0,4		1
11	$2t^2-t$	$0,5\cos\frac{2}{3}\pi t$				0,4	2
12	$0,6\sin 0,5\pi t$	$0,4t^2-2t+1$				0,5	3
13	$\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{3}t$	$0,6\sin\frac{\pi}{4}t$				0,3	1
14	$0,2\sin 0,3t$	$\cos 0,6\pi t$				0,4	2
15	$2t-t^2+3$	$\sin 0,4\pi t$				0,6	3
16	$0,4t-t^2$	$0,2\cos 0,3t$				0,5	1
17	$t\sin\pi t$	$0,1t^2$				0,4	2
18	$2t+\cos t$	$0,04t^2$				0,3	3
19	$0,6\sin^2 t$	$0,4-0,3\sin t$				0,7	1
20	$0,5\cos\pi t$	$0,5t-0,1t^2$				0,5	2
21	$2t+\sin 0,5t$	$0,5+0,3\cos t$				0,3	3
22	$0,1t^2+t$	$0,3t^2+0,2t$		0,5	0,4		1
23	$0,4t^2-0,3t$	$0,2(t^2-t)$			0,7		2
24	$0,2\sin 3\pi t$	$0,4t+0,1t^2$				0,4	1
25	$0,5\cos 0,2t$	$0,6\sin 0,4t$				0,3	3
26	t^2+e^t	$0,5-0,3\cos t$				0,5	2
27	$t\sin 2t$	$0,4\sin 0,6t$				0,6	1
28	$0,7t-t^2$	$0,2t+0,5t^2$				0,4	3
29	$0,9t^2-t$	$0,6t+t^2$			0,4		2
30	$\sin 0,4t^2$	$0,2t^2+0,3t$			0,5		1

Рашэнне. Выбіраем нерухомую сістэму адліку $Oxyz$, восі каардынат якой замацоўваем на нерухомых апорах восі вярчэння пласціны. Рухомую сістэму адліку ўтвараем шляхам замацавання восей $O_1x_1y_1z_1$ на пласціне.

У такім выпадку адносны рух пункта A — крывалінейны рух па дузе акружнасці радыуса R па закону $s = 0,3+0,2\sin 0,6\pi t$ (м). Пераносным рухам пункта A з'яўляецца вярчальны рух пласціны па закону $\varphi = 0,5t^2$. Абсалютны рух пункта A ўяўляе сабою прасторавы крывалінейны рух.

Вызначым месцазнаходжанне пункта A на дузе акружнасці радыуса R у момант τ. Дуга BM адпавядае падвоенаму цэнтральнаму вуглу α.

$$\sin\alpha = \frac{KM}{MD} = \frac{b}{R} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75, \quad \alpha = 48{,}6°.$$

У момант τ дуга BA роўная $s = 0{,}3+0{,}2\sin 0{,}6\pi = 0{,}49$ м.

Такая даўжыня дугі акружнасці пры R=0,4 м адпавядае цэнтральнаму вуглу $ВДА_1$.

$$\alpha_1 = \frac{s}{R} = \frac{0{,}49}{0{,}4} = 1{,}225 \text{ рад},$$

$$\alpha_1 = 1{,}225 \cdot 57{,}3° = 70{,}19°.$$

Тады, як відаць на рыс. 73, вугал

$$\beta = \alpha_1 - \alpha = 70{,}19° - 48{,}6° = 21{,}59°.$$

Вугал β паказвае месцазнаходжанне A_1 пункта A на дузе акружнасці ў момант τ = 1 с.

Абсалютную скорасць пункта вызначаем па тэарэме складання скорасцей:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

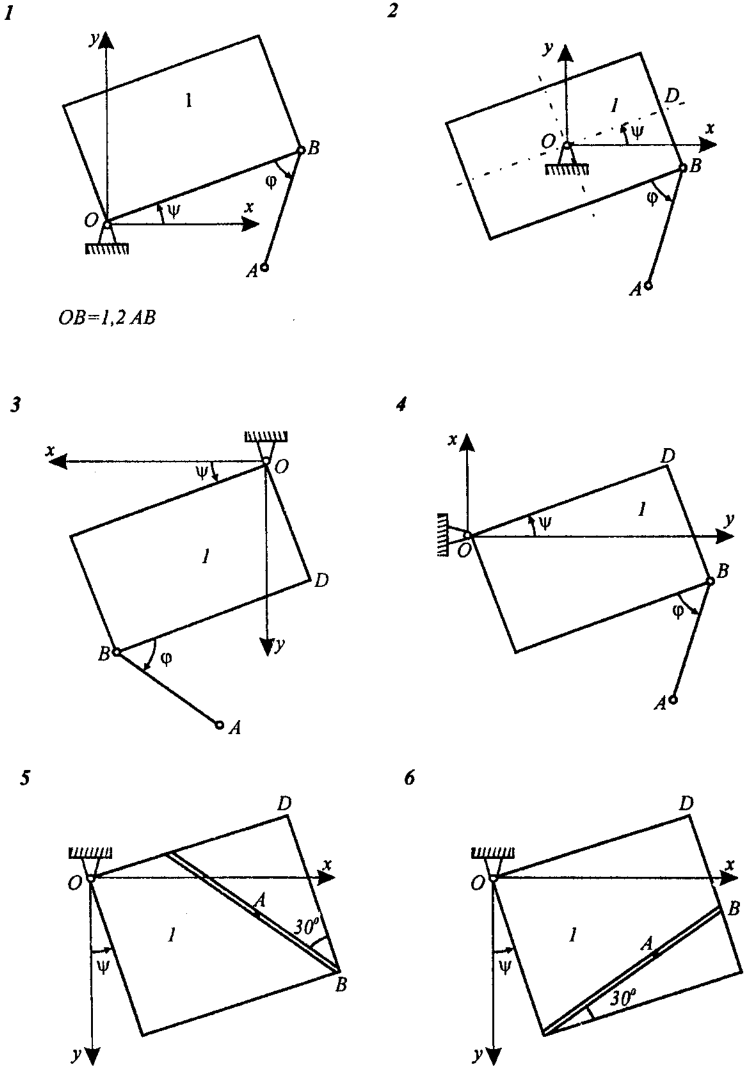
Пераносная скорасць $v_e = \omega_e \cdot h$, дзе пераносная вуглавая скорасць $\omega_e = \dot\varphi = t$, а ў момант τ = 1 с ω_e = 1 рад/с; h — адлегласць ад пункта A_1 да восі вярчэння пласціны, $h = A_1D \cdot \sin\beta = R \cdot \sin 21{,}59° = 0{,}4 \cdot 0{,}368 = 0{,}15$ м.

Тады ў момант τ пераносная скорасць

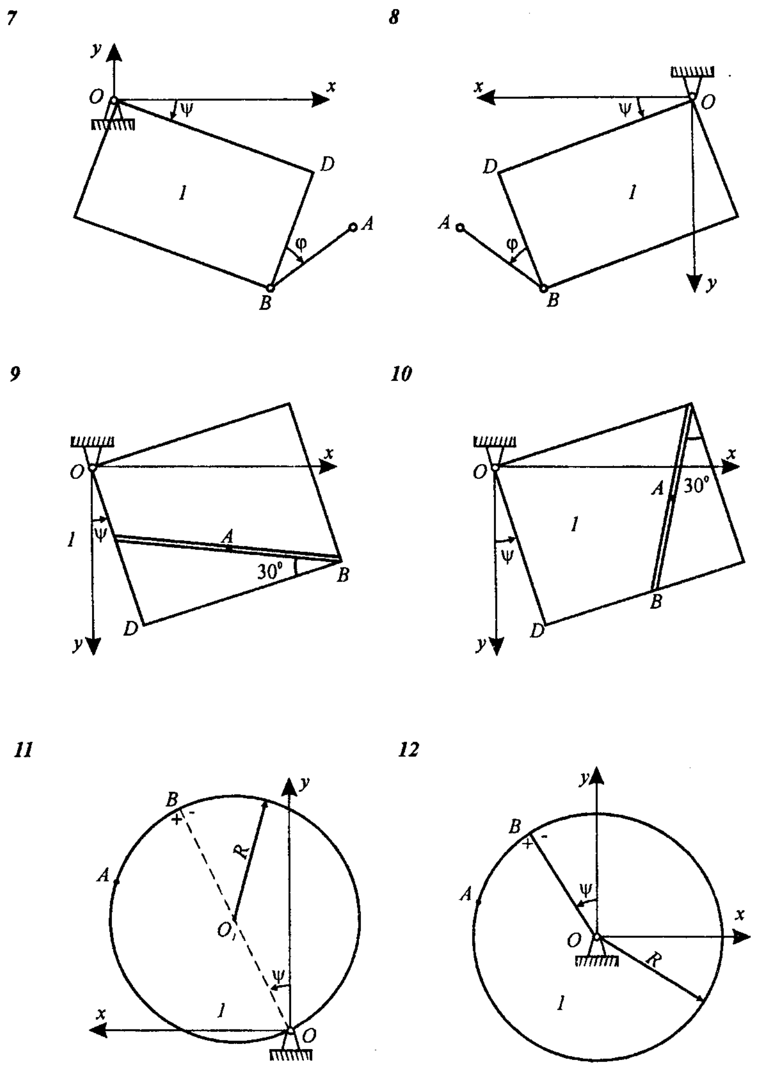
$$v_e = 1 \cdot 0{,}15 = 0{,}15 \text{ м/с}.$$

Вектар $\mathbf{v}_e$ накіраваны ў бок руху пункта A_1 пры вярчэнні пласціны, а гэта значыць перпендыкулярна да пласціны ў дадатным накірунку восі O_1x_1.

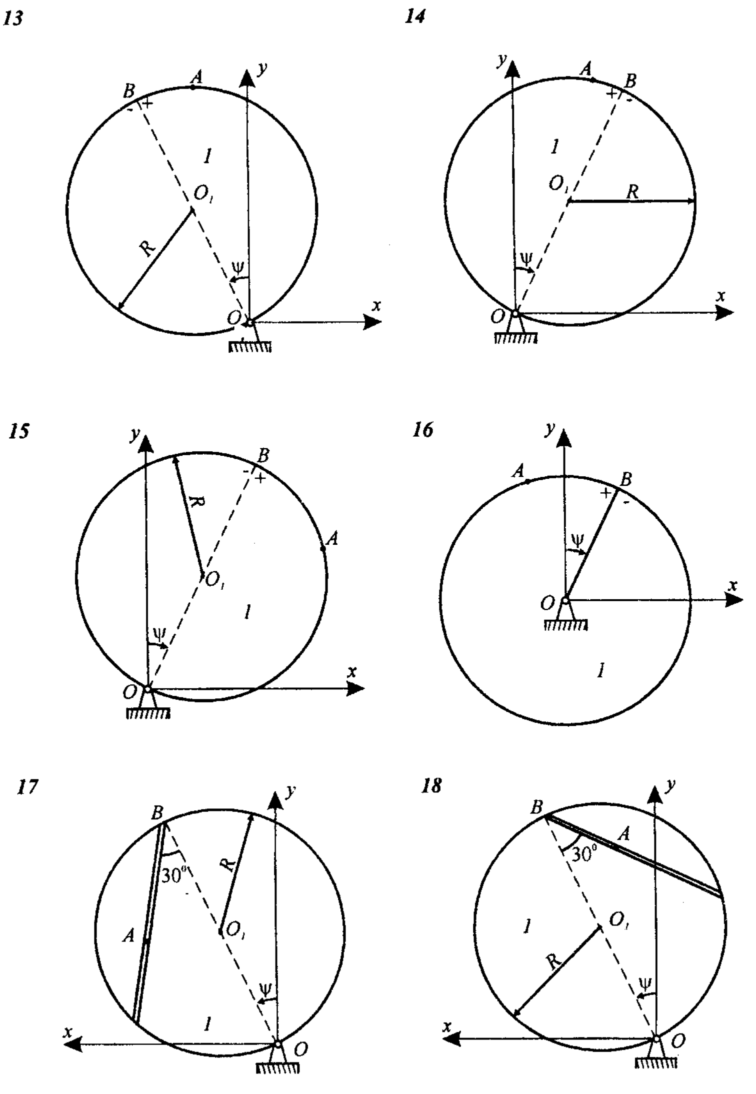
Адносная скорасць вызначаецца па закону адноснага руху пункта A.


1
y
1
B
φ
O
ψ
x
A
OB=1,2 AB
2
y
D
1
ψ
x
O
B
φ
A
3
x
ψ
O
1
D
B
φ
y
A
4
x
D
1
ψ
y
O
B
φ
A
5
D
O
x
A
1
30°
ψ
B
y
6
D
O
x
B
1
A
ψ
30°
y

Рыс. 74

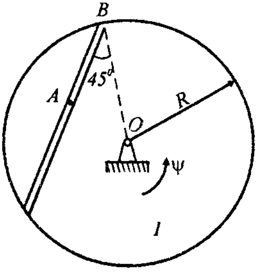


Рыс. 75

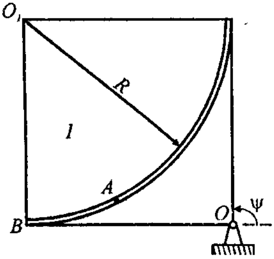

13
B
A
y
1
O1
R
ψ
O
x
14
y
A
B
1
O1
R
ψ
O
x
15
y
B
R
A
O1
1
ψ
O
x
16
y
A
B
ψ
O
x
1
17
B
y
30°
R
A
O1
ψ
x
1
O
18
B
y
A
30°
O1
1
R
ψ
x
O

Рыс. 76

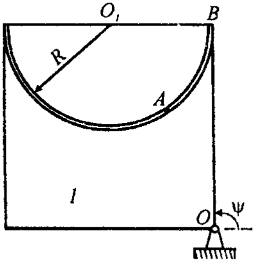
19



20

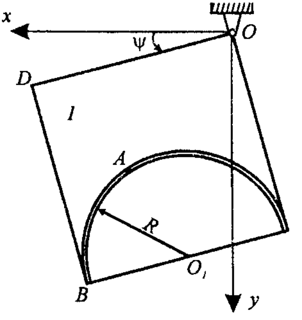


21

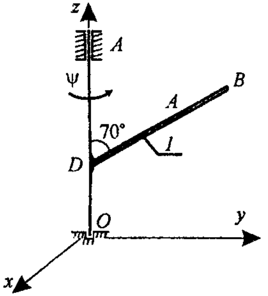


OB=2R

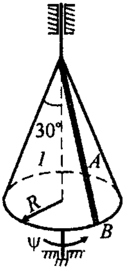
22



23

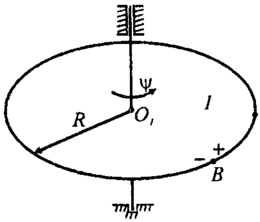


24

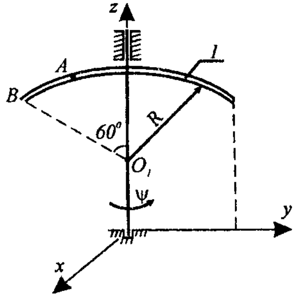


Рыс. 77

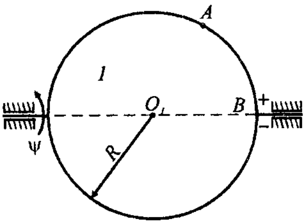
25



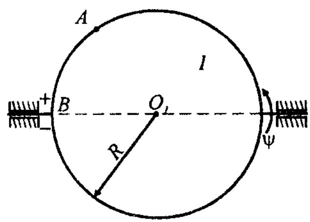
26



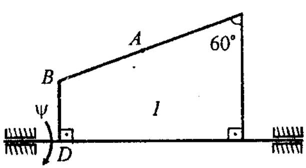
27



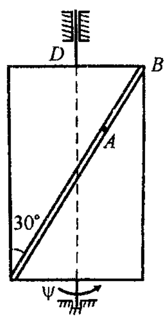
28



29



30



Рыс. 78

$$v_r = \dot{s} = 0{,}2 \cdot 0{,}6\pi \cos 0{,}6\pi t\,.$$

У момант τ адносная скорасць роўная

$$v_r = 0{,}12 \cdot 3{,}14 \cdot (-0{,}3) = -0{,}11 \text{ м/с}.$$

Знак "мінус" у адказе паказвае, што ў дадзены момант часу адносны рух пункта ажыццяўляецца ў бок памяншэння дугі s. Вектар $\mathbf{v}_r$ накіраваны па датычнай да дугі акружнасці ў бок пункта B. Паміж вектарамі скорасцей $\mathbf{v}_e$ і $\mathbf{v}_r$ вугал 90°. Таму для падліку модуля абсалютнай скорасці можам прымяніць тэарэму Піфагора.

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{0{,}15^2 + 0{,}11^2} = \sqrt{0{,}0225 + 0{,}0121} = 0{,}19 \text{ м/с}.$$

Абсалютнае паскарэнне пункта вызначаем па тэарэме Карыоліса:

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c\,.$$

З улікам віду і характару пераноснага і адноснага рухаў пункта вектарную роўнасць можна перапісаць у наступным выглядзе:

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_e^\tau + \boldsymbol{a}_r^n + \boldsymbol{a}_r^\tau + \boldsymbol{a}_c\,.$$

Пераноснае нармальнае паскарэнне роўнае

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot h = 1^2 \cdot 0{,}15 = 0{,}15 \text{ м/с}^2.$$

Вектар $\boldsymbol{a}_e^n$ накіраваны па радыусу вярчэння пункта A_1 да восі Oy.

Пераноснае тангенцыяльнае паскарэнне роўнае

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot h\,.$$

Пераноснае вуглавое паскарэнне $\varepsilon_e = \ddot{\varphi} = 1$ рад/с^2.

Тады $a_e^\tau = 1 \cdot 0{,}15 = 0{,}15$ м/с^2.

Вектар $\boldsymbol{a}_e^\tau$ накіраваны ў адзін бок з вектарам $\mathbf{v}_e$, таму што знакі алгебраічных значэнняў ω_e і ε_e супадаюць (вярчэнне пласціны паскоранае).

Адноснае нармальнае паскарэнне роўнае

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{0{,}11^2}{0{,}4} = 0{,}03 \text{ м/с}^2.$$

Вектар $\boldsymbol{a}_r^n$ накіраваны па радыусу дугі акружнасці да цэнтра D.

Адноснае тангенцыяльнае паскарэнне роўнае

$$a_r^\tau = \ddot{s} = -0{,}2 \cdot 0{,}6^2 \pi^2 \sin 0{,}6\pi t \ .$$

У момант τ адноснае тангенцыяльнае паскарэнне

$$a_r^\tau = -0{,}2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}95 = -0{,}67 \text{ м/с}^2.$$

Знакі ў a_r^τ і v_r атрымаліся аднолькавыя, таму вектары $\mathbf{v}_r$ і $\boldsymbol{a}_r^\tau$ накіраваны ў адзін бок (адносны рух пункта паскораны).

Паскарэнне Карыоліса роўнае

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\boldsymbol{\omega}_e, \mathbf{v}_r) = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}11 \cdot \sin(90° - \beta) = 0{,}22 \cdot 0{,}93 = 0{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Вектар $\boldsymbol{a}_c$ згодна з формулаю $\boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$ накіраваны перпендыкулярна да пласціны ў адваротны бок накірунку вектара $\mathbf{v}_e$.

Цяпер, калі вядомы ўсе складовыя абсалютнага паскарэння пункта, падлічваем яго велічыню праз праекцыі абсалютнага паскарэння на восі $Oxyz$.

$$a_{ax} = a_e^\tau - a_c = 0{,}15 - 0{,}2 = -0{,}05 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{ay} = a_r^n \cos\beta - a_r^\tau \sin\beta = 0{,}03 \cdot 0{,}93 - 0{,}67 \cdot 0{,}37 = -0{,}22 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{az} = -a_e^n - a_r^n \sin\beta - a_r^\tau \cos\beta = -0{,}15 - 0{,}03 \cdot 0{,}37 - 0{,}67 \cdot 0{,}93 = -0{,}78 \text{ м/с}^2;$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{0{,}0025 + 0{,}0484 + 0{,}6084} = \sqrt{0{,}6593} = 0{,}81 \text{ м/с}^2.$$

4. Складаны рух цвёрдага цела

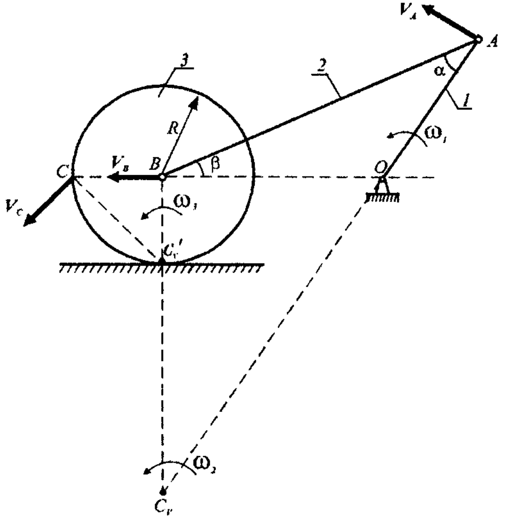
Заданне К-6

Вызначэнне скорасцей пунктаў цвёрдага цела пры плоскапаралельным руху

Знайсці ў дадзеным становішчы механізма (рыс. 80–82) скорасці пунктаў A, B, C і вуглавыя скорасці ўсіх звёнаў, калі вядома вуглавая скорасць вядучага звяна. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 15.

Прыклад рашэння задання К-6

Вызначыць скорасці пунктаў A, B, C механізма (рыс. 79) і вуглавыя скорасці звёнаў, калі $\omega_1 = 2$ рад/с, $OA = 0{,}6$ м, $\alpha = 35°$, $AB = 1{,}4$ м, $R = 0{,}3$ м. Кола 3 коціцца па нерухомай паверхні без праслізгвання.



Рыс. 79

Р а ш э н н е. Вядучае звяно — крывашып OA ўдзельнічае ў вярчальным руху з вуглавой скарасцю ω_1.

Скорасць пункта A крывашыпа OA роўная

$v_A = \omega_1 \cdot OA = 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$ м/с.

Разглядаем рух шатуна AB, які шарнірна прымацаваны ў пункце A да крывашыпа. Шатун удзельнічае ў плоскапаралельным руху. Можам дакладна паказаць скорасці пунктаў A і B. Вектар $\mathbf{v}_A$ перпендыкулярны да радыуса OA, а вектар $\mathbf{v}_B$ накіраваны паралельна гарызантальнай нерухомай паверхні ў бок прамалінейнага руху цэнтра кола 3. Цяпер можна пабудаваць імгненны цэнтр скорасцей звяна 2. Ён знаходзіцца на перасячэнні перпендыкуляраў да вектараў скорасцей у пункце C_V.

Па тэарэме косінусаў знойдзем адрэзак BO.

$$BO = \sqrt{AB^2 + OA^2 - 2 \cdot AB \cdot OA \cos\alpha} = \sqrt{1{,}96 + 0{,}36 - 1{,}37} = 0{,}97 \text{ м.}$$

Па тэарэме сінусаў вызначым вугал β.

$$\frac{OA}{BO} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}; \quad \sin\beta = \frac{OA \cdot \sin\alpha}{BO} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}574}{0{,}97} = 0{,}355,\ \beta = 20{,}8°.$$

Скорасць пункта B знаходзім па тэарэме аб праекцыях скорасцей.

$$v_B \cos 20{,}8° = v_A \cos 55°,$$

$$v_B = v_A \frac{\cos 55°}{\cos 20{,}8°} = 1{,}2 \cdot \frac{0{,}57}{0{,}935} = 0{,}73 \text{ м/с.}$$

Для вызначэння вуглавой скорасці шатуна AB неабходна ведаць імгненны радыус AC_V пункта A.

Па тэарэме сінусаў з трохвугольніка BAC_V атрымаем

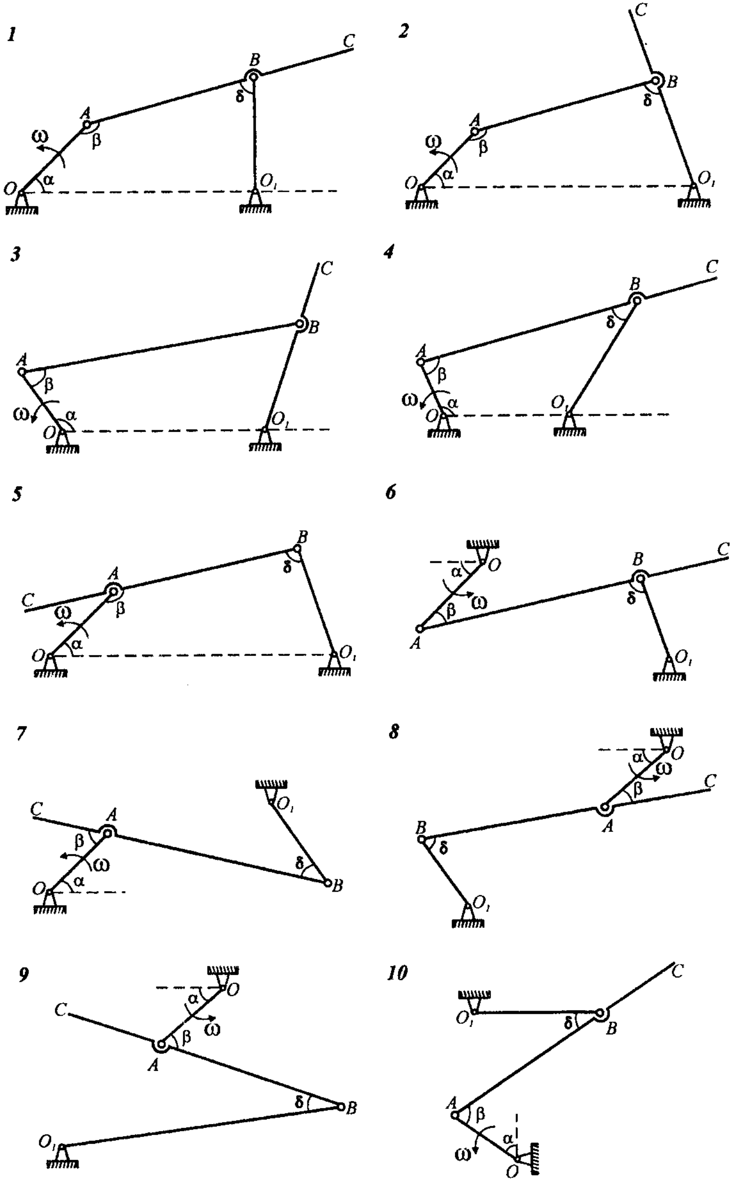
$$\frac{BA}{AC_V} = \frac{\sin\angle BC_V A}{\sin\angle ABC_V} = \frac{\sin 35°}{\sin 110{,}8°};$$

$$AC_V = BA\frac{\sin 110{,}8°}{\sin 35°} = 1{,}4 \cdot \frac{0{,}94}{0{,}57} = 2{,}3 \text{ м.}$$

Тады вуглавая скорасць шатуна AB роўная

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AC_V} = \frac{1{,}2}{2{,}3} = 0{,}5 \text{ рад/с.}$$

Далей разглядаем рух кола 3. Яно ўдзельнічае ў плоскапаралельным руху.


1
O α ω A β B δ C O_1
2
O α ω A β B δ C O_1
3
O α ω A β B C O_1
4
O α ω A β B δ C O_1
5
O α ω A β C B δ O_1
6
O α ω A β B δ C O_1
7
O α ω A β C B δ O_1
8
O α ω A β C B δ O_1
9
O α ω A β C B δ O_1
10
O α ω A β B δ C O_1

Рыс. 80

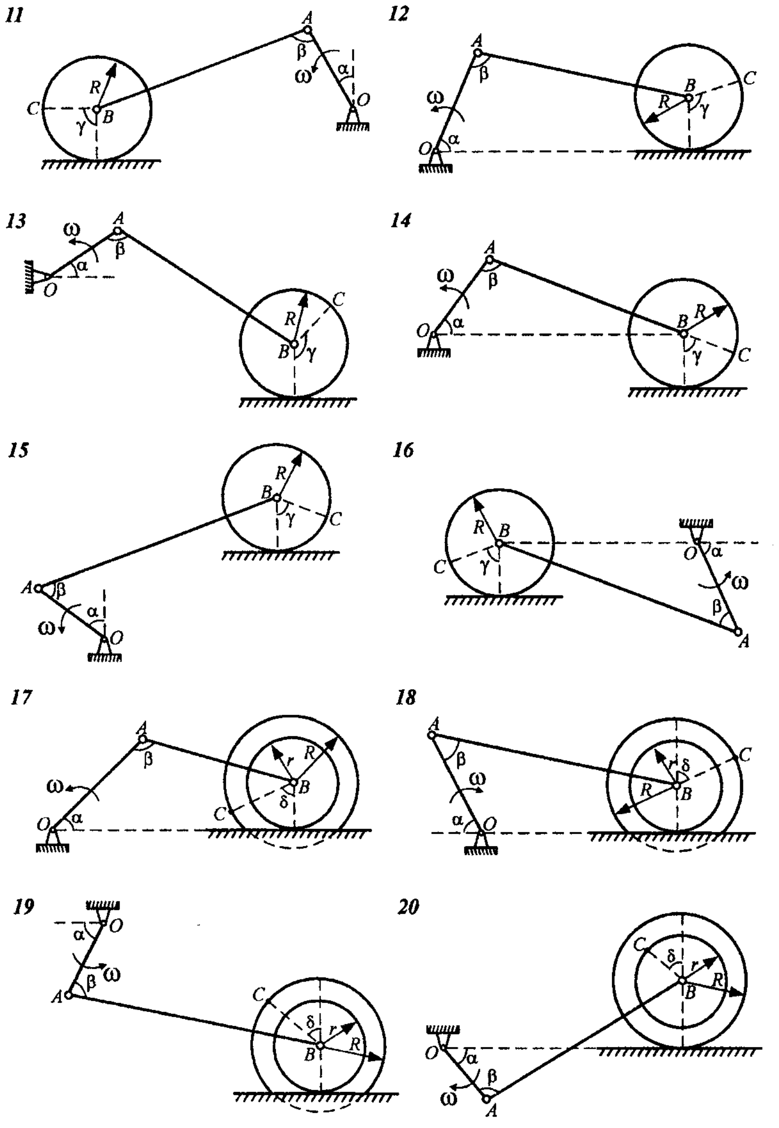
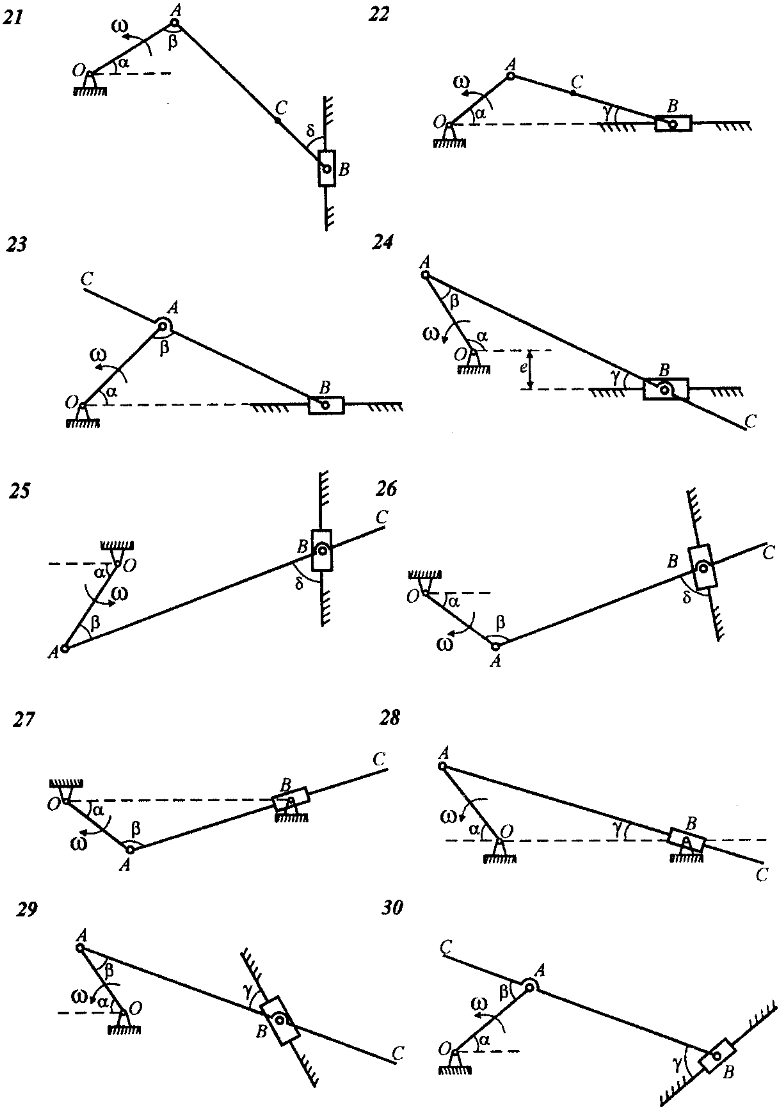


Рис. 81



Рыс. 82

Ва-рыянт	OA, м	α, град	β, град	AB, м	δ, град	BO_1, м	BC, м	ω, рад/с	R, м	γ, град	r, м
1	0,3	45	145	0,7	60		0,2	2,0			
2	0,4	35	150	0,6	100		0,3	1,5			
3	0,5	140	60	0,8		0,7	0,4	1,7			
4	0,6	110	80	1,2	45		0,5	1,4			
5	0,3	50	150	0,5	90		0,9	1,9			
6	0,4	60	30	1,0	95	0,5	0,4	1,3			
7	0,5	40	70	0,9	45	0,6	1,3	1,8			
8	0,2	45	30	0,7	65	0,4	1,0	1,6			
9	0,3	20	40	0,6	30	1,0	1,2	1,2			
10	0,4	60	45	0,8	35	0,6	1,1	1,1			
11	0,5	40	120	1,1				1,0	0,4	85	
12	0,4	45		1,0				2,0	0,3	120	
13	0,2	15	125	1,2				1,9	0,1	150	
14	0,3	42	128					1,8	0,2	50	
15	0,6	50	45	1,4				1,7	0,4	60	
16	0,5	70	40					1,6	0,3	45	
17	0,4	40	120		70			1,5	0,2		0,1
18	0,3	45	35		40			1,4	0,4		0,2
19	0,2	55	70	1,3	50			1,3	0,3		0,2
20	0,5	40	95		45			1,2	0,4		0,3
21	0,2	20	130	1,0	60		0,4	1,1			
22	0,3	25					0,2	1,0		20	
23	0,4	50	100				0,9	0,9			
24	0,5	140	20	1,2			0,5	0,8		20	
25	0,6	45	30	1,4	75		0,4	0,7			
26	0,2	35	110	1,1	80		0,1	0,6			
27	0,3	40	120				0,5	0,5			
28	0,4	50					0,6	1,0		25	
29	0,5	30	30	1,5			0,4	1,2		60	
30	0,2	30	60	1,3			1,6	1,4		75	

Калі кола коціцца без праслізгвання, то яго імгненны цэнтр скорасцей знаходзіцца ў пункце C'_v дотыку кола да нерухомай паверхні. У гэтым пункце скорасць роўная нулю.

Вуглавая скорасць кола роўная

$$\omega_3 = \frac{v_B}{BC'_v} = \frac{0{,}73}{0{,}3} = 2{,}43 \text{ рад/с}.$$

Скорасць пункта C кола прапарцыянальна імгненнаму радыусу CC'_v :

$$v_C = \omega_3 \cdot CC'_v = \omega_3 \cdot R \cdot \sqrt{2} = 2{,}43 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}4 = 1 \text{ м/с}.$$

Вектар скорасці v_C накіраваны перпендыкулярна імгненнаму радыусу CC'_v у бок качэння кола 3.

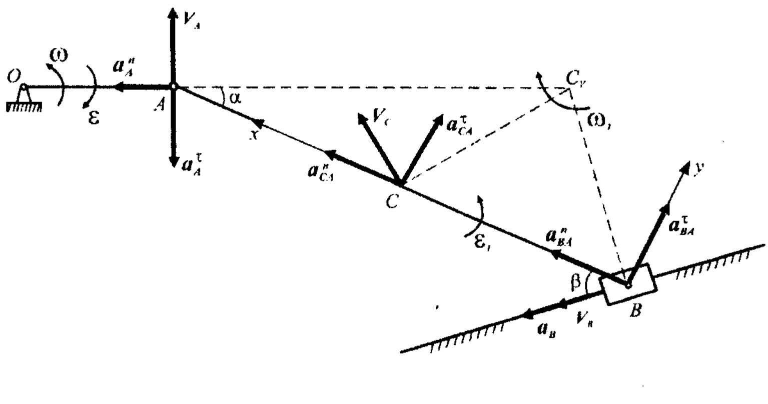
Заданне К-7

Вызначэнне скорасцей і паскарэнняў пунктаў цвёрдага цела пры плоскапаралельным руху

Вылічыць у дадзеным становішчы механізма скорасці і паскарэнні пунктаў *B* і *C* (рыс. 84–86). Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 16.

Прыклад рашэння задання К-7

У прыведзеным становішчы механізма (рыс. 83) вызначыць скорасці і паскарэнні пунктаў *B* і *C*, калі OA = 0,2 м, AB = 1,0 м, AC = 0,5 м, $\alpha = 20°$, $\beta = 40°$, $\omega = 1$ рад/с, $\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2.



Рыс. 83

Р а ш э н н е . Крывашып OA верціцца вакол нерухомай восі O роўназапаволена. Скорасць пункта A роўная

$$v_A = \omega \cdot OA = 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 \text{ м/с}.$$

Паскарэнне пункта A мае дзве складовыя — тангенцыяльнае і нармальнае паскарэнні.

Табліца 16

Ва-ры-янт	ω_1, рад/с	ω_2, рад/с	r_1, м	r_2, м	OA, м	AB, м	BC, м	α, град	δ, град	β, град	ε_1 рад/с^2
1	0,6				0,2	0,7	0,3	30			0,2
2	0,7				0,3		0,4	45	35		
3	0,5				0,4	0,9	1,2	120			0,4
4	0,8				0,5	1,2	0,4	30		100	
5	0,9				0,2	0,8	0,6	40	60		0,3
6	1,0				0,3	0,7	1,1	135		65	
7	0,5			0,2	0,6				70		0,2
8	0,6			0,3	0,7				120	70	0,3
9	0,7		0,7	0,2				20		65	0,4
10	0,8				0,4	0,9	0,3	30		110	
11	0,9				0,5	1,2	1,6	120	100		0,5
12	1,0				0,6	1,3	0,7	40	60		
13	0,5				0,3	0,7	0,5	25		65	0,2
14	0,6					0,4		45			0,3
15	0,7		0,4	0,6				50	30		0,3
16	0,8		0,5			0,4		60		70	0,4
17	0,9				0,4	0,9	0,4	40	70	130	0,4
18	1,0				0,3	1,0	0,4	45	45	60	0,5
19	0,4				0,5	1,2	0,3	50	60	60	0,2
20	0,5				0,4	0,8	1,2	25	50	45	0,3
21	0,6	0,5		0,5	0,3			45		100	0,3
22	0,7	0,6		0,5	0,3			60			
23	0,8	0,7		0,7	0,4			60			
24	0,9				0,2	0,6	0,2	70	90	140	0,4
25	1,0				0,3	0,9	1,3	90	45	120	0,5
26	0,4				0,4	1,0	0,5	120	70	80	0,3
27	0,5		0,3		0,5	1,2		65		50	0,4
28	0,6			0,2	0,3	0,9		60	50	45	0,5
29	0,7	0,6	0,4	0,2				70		90	
30	0,8			0,3	0,7			50			0,6

$$a_A^{\tau} = \varepsilon \cdot OA = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^{n} = \omega^2 \cdot OA = 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Паказваем на рыс. 83 вектары $\mathbf{v}_A, a_A^\tau$ і a_A^n.

Разглядаем рух шатуна AB. Ён удзельнічае ў плоскапаралельным руху. Ведаем скорасць пункта A і паказваем накірунак вектара скорасці пункта B (уздоўж нерухомай накіравальнай паўзуна B). На падставе вектараў $\mathbf{v}_A$ і $\mathbf{v}_B$ будуем імгненны цэнтр скорасцей шатуна AB. Гэта пункт C_V.

Вызначаем імгненныя радыусы пунктаў A і B шатуна AB пры развароце вакол імгненнага цэнтра скорасцей C_V. У трохвугольніку ABC_V вугал $AC_\mathrm{V}B$ роўны

$$180°-\alpha-(90°-\beta) = 180°-20°-50° = 110°.$$

Па тэарэме сінусаў вызначым BC_V і AC_V.

$$\frac{BC_\mathrm{V}}{AB} = \frac{\sin 20°}{\sin 110°}; \quad \frac{AC_\mathrm{V}}{AB} = \frac{\sin 50°}{\sin 110°}.$$

$$BC_\mathrm{V} = AB\frac{\sin 20°}{\sin 110°} = 1\frac{0{,}342}{0{,}940} = 0{,}36 \text{ м};$$

$$AC_\mathrm{V} = AB\frac{\sin 50°}{\sin 110°} = 1\frac{0{,}766}{0{,}94} = 0{,}81 \text{ м}.$$

Вуглавая скорасць шатуна AB

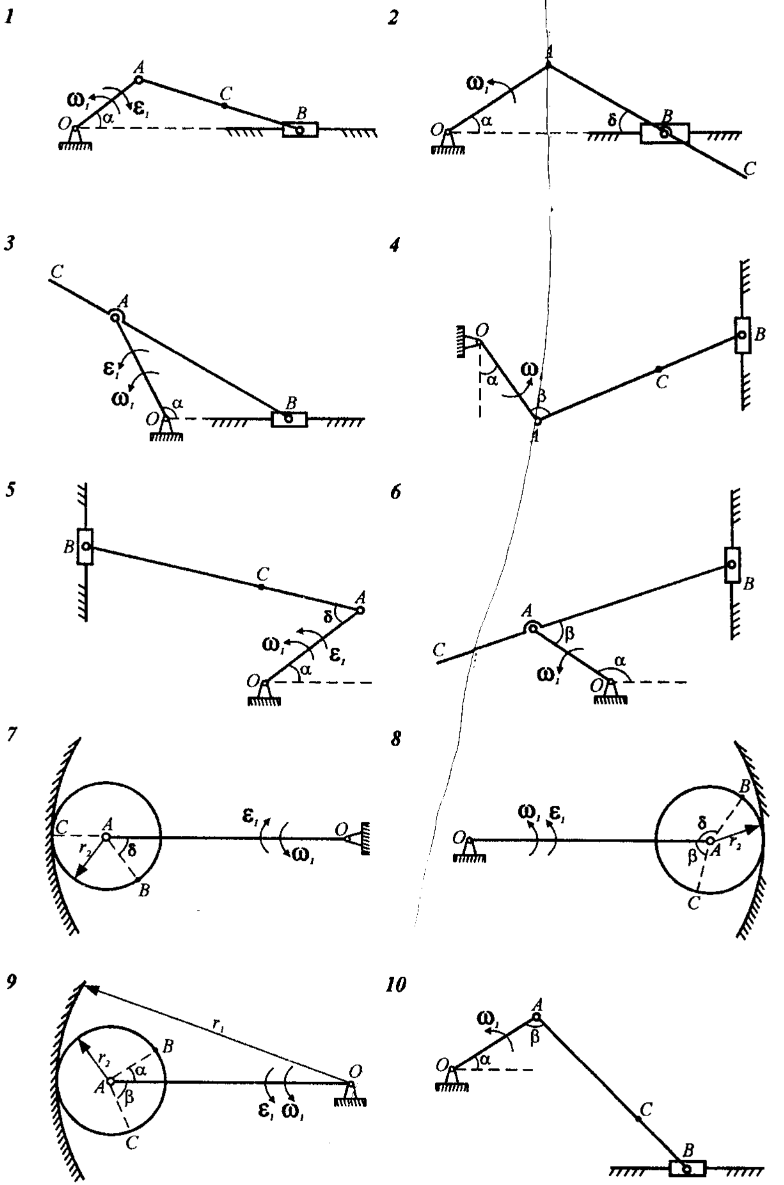
$$\omega_1 = \frac{\mathrm{v}_A}{AC_\mathrm{V}} = \frac{0{,}2}{0{,}81} = 0{,}25 \text{ рад/с}.$$

Скорасць пункта B шатуна AB

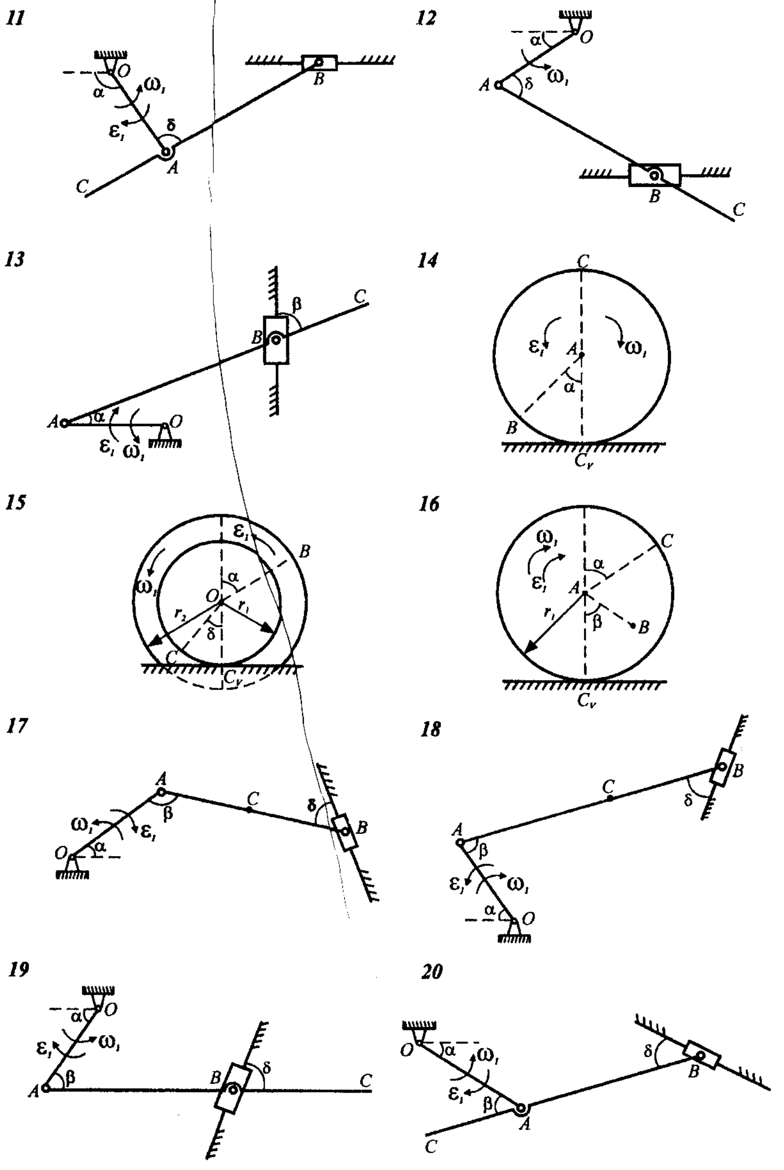
$$\mathrm{v}_B = \omega_1 \cdot BC_\mathrm{V} = 0{,}25 \cdot 0{,}36 = 0{,}09 \text{ м/с}.$$

Для вызначэння скорасці пункта C шатуна AB паказваем імгненны радыус гэтага пункта CC_V. Вектар скорасці $\mathbf{v}_C$ накіроўваем перпендыкулярна імгненнаму радыусу CC_V у бок развароту шатуна AB вакол імгненнага цэнтра скорасцей C_V.

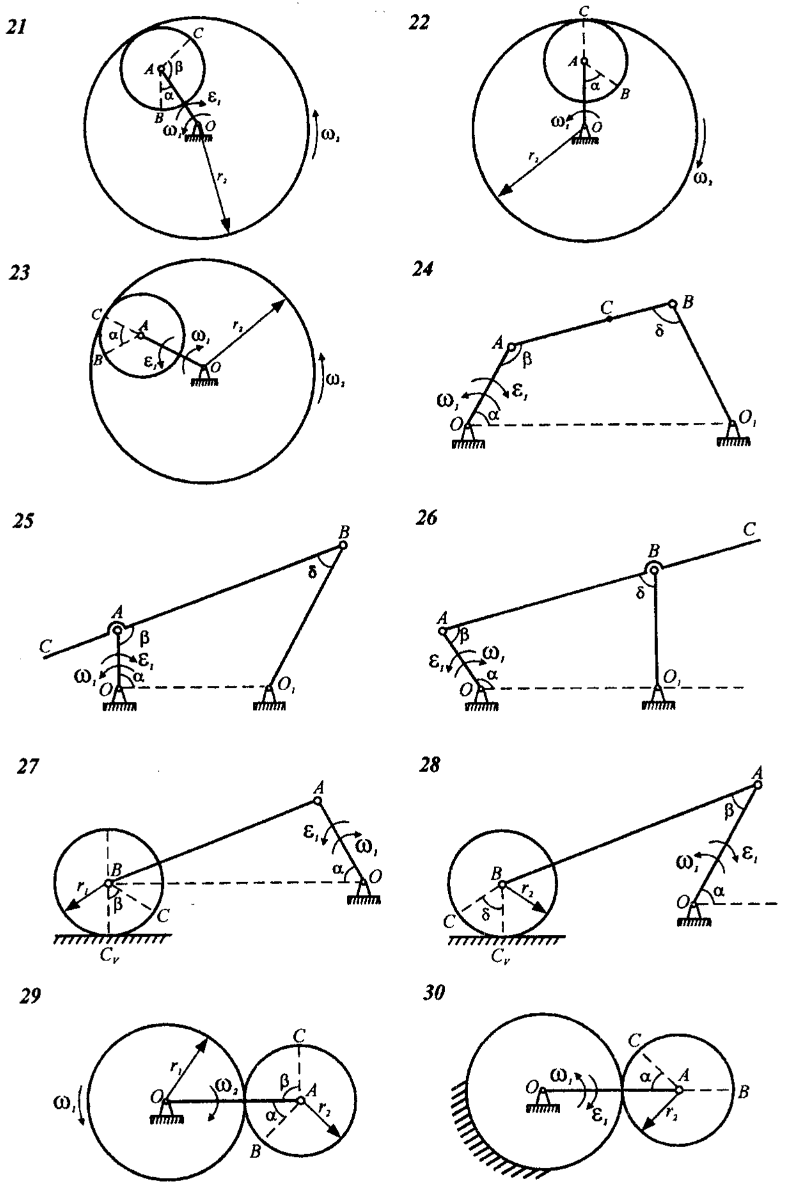
З трохвугольніка ACC_V па тэарэме косінусаў вызначаем CC_V.


1
A
C
B
O
α
ω_1
ε_1
2
A
ω_1
O
α
δ
B
C
3
C
A
ε_1
ω_1
O
α
B
4
O
B
α
ω
β
C
A
5
B
C
A
δ
ω_1
ε_1
O
α
6
B
A
β
C
ω_1
O
α
7
ε_1
C
A
O
r_2
δ
ω_1
B
8
ω_1 ε_1
B
δ
O
A
r_2
β
C
9
r_1
B
r_2
α
O
A
β
ε_1 ω_1
C
10
A
ω_1
β
O
α
C
B

Рыс. 84


11
O
α
ω₁
ε₁
δ
A
B
C
12
O
α
A
δ
ω₁
B
C
13
A
α
ε₁ ω₁
O
B
β
C
14
C
ε₁
A
ω₁
α
B
C_v
15
ε₁
B
ω₁
O
α
r_2
r_1
δ
C
C_v
16
ω₁
C
α
ε₁
A
r_1
β
B
C_v
17
A
C
δ
B
β
ω₁
ε₁
O
α
18
B
C
δ
A
β
ε₁
ω₁
α
O
19
O
α
ε₁
ω₁
A
β
B
δ
C
20
O
α
ω₁
ε₁
β
A
δ
B
C

Рыс. 85



Рыс. 86

$$CC_v = \sqrt{AC^2 + AC_v^2 - 2AC \cdot AC_v \cdot \cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}81^2 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}94} = \sqrt{0{,}145} = 0{,}38 \text{ м}.$$

Скорасць пункта C шатуна AB

$$v_C = \omega_1 \cdot CC_v = 0{,}25 \cdot 0{,}38 = 0{,}095 \text{ м/с}.$$

Паскарэнне пункта B шатуна AB вызначым па тэарэме складання паскарэнняў у плоскапаралельным руху.

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}, \text{ або } \underline{\boldsymbol{a}}_B = \underline{\underline{\boldsymbol{a}}}{}_A^{\tau} + \underline{\underline{\boldsymbol{a}}}{}_A^{n} + \underline{\underline{\boldsymbol{a}}}{}_{BA}^{n} + \underline{\boldsymbol{a}}{}_{BA}^{\tau}.$$

Складовыя паскарэння пункта A нам вядомыя па модулю і накірунку (падкрэсліваем іх у вектарным ураўненні двойчы).

Паскарэнні $\boldsymbol{a}_B$, $\boldsymbol{a}_{BA}^n$, $\boldsymbol{a}_{BA}^{\tau}$ можам паказаць на рыс. 83, тым самым яны будуць вядомыя па накірунку (падкрэслім адною рыскаю). Велічыню паскарэння $\boldsymbol{a}_{BA}^n$ можам падлічыць, таму што ведаем вуглавую скорасць шатуна AB (падкрэсліваем $\boldsymbol{a}_{BA}^n$ яшчэ адною рыскаю).

$$a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot AB = 0{,}25^2 \cdot 1 = 0{,}06 \text{ м/с}^2.$$

Такім чынам, у вектарным ураўненні засталіся толькі дзве невядомыя: a_B і a_{BA}^{τ}, якія можна вызначыць, калі запішам дзве праекцыі вектарнай роўнасці на восі Bxy.

$$\begin{cases} a_B \cos\beta = -a_A^{\tau} \sin\alpha + a_A^n \cos\alpha + a_{BA}^n, \\ -a_B \sin\beta = -a_A^{\tau} \cos\alpha - a_A^n \sin\alpha + a_{BA}^{\tau}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_B \cdot 0{,}766 = -0{,}1 \cdot 0{,}342 + 0{,}2 \cdot 0{,}94 + 0{,}06, \\ -a_B \cdot 0{,}643 = -0{,}1 \cdot 0{,}94 - 0{,}2 \cdot 0{,}342 + a_{BA}^{\tau}. \end{cases}$$

$$a_B = \frac{0{,}216}{0{,}766} = 0{,}28 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^{\tau} = -0{,}28 \cdot 0{,}643 + 0{,}094 + 0{,}068 = -0{,}02 \text{ м/с}^2.$$

Тады вуглавое паскарэнне шатуна AB

$$\varepsilon_1 = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{0{,}02}{1} = 0{,}02 \text{ рад/с}^2.$$

Адказ для a_{BA}^{τ} атрымалі са знакам “мінус”. Гэта азначае, што вектар $\boldsymbol{a}_{BA}^{\tau}$, што паказаны на рыс. 83, павінен быць накіраваны ў процілеглы бок. Таму вуглавое паскарэнне шатуна ε_1 паказваем па ходу гадзіннікавай стрэлкі. У выніку атрымліваем аднолькавыя накірункі для вуглавой скорасці і вуглавога паскарэння шатуна і робім вывад, што шатун у дадзены момант часу паварочваецца паскорана.

Паскарэнне пункта C шатуна вызначым па тэарэме складання паскарэнняў у плоскапаралельным руху.

$$\boldsymbol{a}_C = \underline{\underline{\boldsymbol{a}}}_A^n + \underline{\underline{\boldsymbol{a}}}_A^{\tau} + \underline{\underline{\boldsymbol{a}}}_{CA}^n + \underline{\underline{\boldsymbol{a}}}_{CA}^{\tau}.$$

Паскарэнне пункта A мы ведаем, а складовыя паскарэння развароту пункта C адносна полюса A падлічым і пакажам на рыс. 83 (у правай частцы вектарнай роўнасці ўсе вектары падкрэслены двойчы).

$$a_{CA}^n = \omega_1^2 \cdot AC = 0{,}25^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}03 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CA}^{\tau} = \varepsilon_1 \cdot AC = 0{,}02 \cdot 0{,}5 = 0{,}01 \text{ м/с}^2.$$

Невядомае паскарэнне $\boldsymbol{a}_C$ вызначым па яго праекцыях на восі каардынат Bxy.

$$a_{Cx} = a_A^n \cos\alpha - a_A^{\tau} \sin\alpha + a_{CA}^n = 0{,}2 \cdot 0{,}94 - 0{,}1 \cdot 0{,}342 + $$
$$+ 0{,}03 = 0{,}19 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Cy} = -a_A^n \sin\alpha - a_A^{\tau} \cos\alpha - a_{CA}^{\tau} = -0{,}2 \cdot 0{,}342 - 0{,}1 \cdot 0{,}94 - 0{,}01 =$$
$$= -0{,}17 \text{ м/с}^2.$$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{0{,}19^2 + 0{,}17^2} = \sqrt{0{,}065} = 0{,}255 \text{ м/с}^2.$$

З а д а н н е К - 8

Вызначэнне скорасцей і паскарэнняў пунктаў плоскага механізма

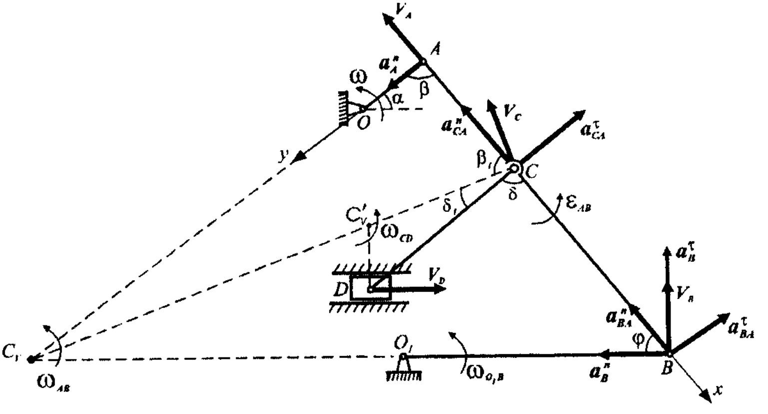
У дадзеным становішчы плоскага механізма (рыс. 88–92) вызначыць скорасці ўсіх шарніраў механізма, вуглавыя скорасці звёнаў, паскарэнні пунктаў *B* і *C*. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 17.

Прыклад рашэння задання К-8

Вызначыць скорасці ўсіх шарніраў плоскага механізма (рыс. 87), вуглавыя скорасці звёнаў і паскарэнні пунктаў *B* і *C*, калі $OA =$ $= 0{,}15$ м, $AB = 0{,}7$ м, $CB = 0{,}4$ м, $BO_1 = 0{,}5$ м, $CD = 0{,}45$ м, $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$, $\varphi = 60°$, $\delta = 90°$, $\omega = 2$ рад/с.

Р а ш э н н е. У выбраным маштабе згодна з прыведзенымі данымі будуем кінематычную схему механізма. Вызначаем скорасці рухомых пунктаў механізма, паказаных на рысунку, і вуглавыя скорасці звёнаў. Крывашып *OA* ўдзельнічае ў вярчальным руху.

$$v_A = \omega \cdot OA = 2 \cdot 0{,}15 = 0{,}3 \text{ м/с}.$$



Рыс. 87

Шатун AB удзельнічае ў плоскапаралельным руху. У пунктах A і B шатуна паказваем на рысунку дакладныя накірункі вектараў скорасцей $\mathbf{v}_A$ і $\mathbf{v}_B$. Яны перпендыкулярныя адпаведным радыусам OA і O_1B.

На перасячэнні перпендыкуляраў да вектараў скорасцей у пунктах A і B знаходзіцца імгненны цэнтр скорасцей звяна AB. Гэта пункт C_v.

$$\frac{\text{v}_A}{\text{v}_B} = \frac{AC_\text{v}}{BC_\text{v}}.$$

З улікам таго, што $\beta = 90°$, а $\varphi = 60°$, маем

$$\frac{AC_\text{v}}{BC_\text{v}} = \sin 60°, \quad \frac{\text{v}_A}{\text{v}_B} = \sin 60°, \quad \text{v}_B = \frac{\text{v}_A}{\sin 60°} = \frac{0{,}3}{0{,}866} = 0{,}35 \text{ м/с}.$$

У пункце C шатуна AB вектар скорасці $\mathbf{v}_C$ накіраваны перпендыкулярна да імгненнага радыуса CC_v у бок развароту шатуна AB вакол імгненнага цэнтра скорасцей C_v.

$$AC_\text{v} = AB \operatorname{tg}\varphi = 0{,}7 \cdot \sqrt{3} = 1{,}2 \text{ м};$$

$$CC_\text{v} = \sqrt{(AC_\text{v})^2 + (AC)^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}3^2} = 1{,}24 \text{ м};$$

$$\frac{\text{v}_A}{\text{v}_C} = \frac{AC_\text{v}}{CC_\text{v}}, \quad \text{v}_C = \text{v}_A \frac{CC_\text{v}}{AC_\text{v}} = 0{,}3 \frac{1{,}24}{1{,}2} = 0{,}31 \text{ м/с}.$$

Вуглавая скорасць шатуна AB

$$\omega_{AB} = \frac{\text{v}_A}{AC_\text{v}} = \frac{0{,}3}{1{,}2} = 0{,}25 \text{ рад/с}.$$

Вуглавая скорасць звяна O_1B (карамысла)

$$\omega_{O_1B} = \frac{\text{v}_B}{O_1B} = \frac{0{,}35}{0{,}5} = 0{,}7 \text{ рад/с}.$$

Табліца 17

Варыянт	α, град	OA, м	ω, рад/с	β, град	AB, м	BC, м	AC, м	δ, град	CD, м	BO_1, м	DO_2, м	φ, град	γ, град
1	20	0,3	1,0	110	0,8			70	0,9			65	
2	80	0,2	0,8	60	0,7	1,2		65	0,8		0,7		70
3	45	0,4	0,9	50			0,5	130	0,8	0,6		50	60
4	30	0,3	1,0	65	1,2		0,6	120	0,5		0,6		65
5	50	0,2	1,1	80			1,0	75	0,9			30	
6	40	0,4	1,2	100		0,4		70	0,8		0,7	30	
7	30	0,5	0,7	75			0,8	60	0,7	0,7		25	30
8	65	0,4	0,8	150	1,4	0,6			0,8				100
9	45	0,3	0,9	110	0,6	0,5			0,7		0,6	80	75
10	40	0,2	1,0	50	1,1			50	0,9	0,5		45	30
11	20	0,3	1,1	60	0,7	0,3		45	0,7	0,8		40	
12	70	0,4	1,2	55	0,6			60	0,6	0,7	0,5	90	110
13	30	0,5	0,7	60	0,5		0,5	140	1,2	0,9		60	60
14	35	0,2	0,8	85	1,0	0,4		90	0,7	0,8		75	
15	45	0,3	0,9	135	1,2		0,7	20	1,4	0,5		55	
16	25	0,4	1,0	65	1,1	0,6		50	0,7		0,7	50	
17	20	0,5	1,1	80	1,4		0,6	65	0,8	0,7	0,8	30	30
18	30	0,2	1,2	100		0,4	0,4		0,6	0,5		60	40
19	40	0,3	1,3	75		0,6	1,0	150	0,5	0,6	0,4	70	35
20	35	0,4	0,7	65	0,3		0,9		0,7	0,8		20	60
21	70	0,5	0,8	120	1,0		0,4	70	0,8	0,5	0,6	110	135
22	15	0,2	0,9	130	1,1	0,3			0,5	0,9		90	45
23	45	0,3	1,0	40	1,2		0,7	30	0,6	0,8	0,7	80	50
24	50	0,4	1,1	110	0,6		0,3	60	0,8	0,7	0,9	140	115
25	20	0,5	1,2	80	0,9	0,6		40	0,7	0,7		75	150
26	40	0,2	1,3	60	0,8		0,4	30	0,5		0,6	45	
27	45	0,4	0,7	50	0,9		0,4		0,6			60	20
28	65	0,3	0,8	100	1,0	0,2		90	1,2		0,4	30	130
29	50	0,5	0,9	45	1,4		1,2	25	1,0	1,0	0,5	140	45
30	35	0,4	1,0	155		0,5	1,3	100	1,2	0,7	0,9	110	60

Шатун DC рухаецца плоскапаралельна. Вектар скорасці паўзуна D накіраваны ўздоўж нерухомых накіравальных, гэта значыць паралельна звяну O_1B. Па скорасцях $\mathbf{v}_C$ і $\mathbf{v}_D$ будуем імгненны цэнтр скорасцей C'_{v} шатуна DC.

Вылічым вуглы β_1 і δ_1.

Па тэарэме косінусаў у трохвугольніку ACC_{v}

$$\left(AC_{\mathrm{v}}\right)^2 = \left(AC\right)^2 + \left(CC_{\mathrm{v}}\right)^2 - 2AC \cdot CC_{\mathrm{v}} \cos\beta_1;$$

$$1{,}2^2 = 0{,}3^2 + 1{,}24^2 - 2 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}24 \cdot \cos\beta_1;$$

$$1{,}44 = 0{,}09 + 1{,}54 - 0{,}74\cos\beta_1;$$

$$\cos\beta_1 = 0{,}257, \qquad \beta_1 = 75°.$$

$$\delta_1 = 180° - \beta_1 - \delta = 180° - 75° - 90° = 15°.$$

Вуглы β і δ роўныя 90°. Таму звёны *OA* і *DC* паралельныя. Вектар $\mathbf{v}_D$ складае са звяном *DC* вугал α, а вугал C'_vDC роўны 90°–α = 60°. Вугал DC'_vC роўны 180°–60°–15° = 105°. З трохвугольніка C'_vDC па тэарэме сінусаў маем:

$$\frac{CD}{C'_vC} = \frac{\sin 105°}{\sin 60°}, \quad C'_vC = CD\frac{\sin 60°}{\sin 105°} = 0{,}45\frac{0{,}866}{0{,}966} = 0{,}4 \text{ м};$$

$$\frac{CD}{C'_vD} = \frac{\sin 105°}{\sin 15°}, \quad C'_vD = CD\frac{\sin 15°}{\sin 105°} = 0{,}45\frac{0{,}259}{0{,}966} = 0{,}12 \text{ м}.$$

Вылічым скорасць пункта *D* і вуглавую скорасць звяна *CD*.

$$\frac{\mathrm{v}_D}{\mathrm{v}_C} = \frac{C'_vD}{C'_vC}, \quad \mathrm{v}_D = \mathrm{v}_C\frac{C'_vD}{C'_vC} = 0{,}31\frac{0{,}12}{0{,}4} = 0{,}09 \text{ м/с};$$

$$\omega_{CD} = \frac{\mathrm{v}_C}{C'_vC} = \frac{0{,}31}{0{,}4} = 0{,}78 \text{ рад/с}.$$

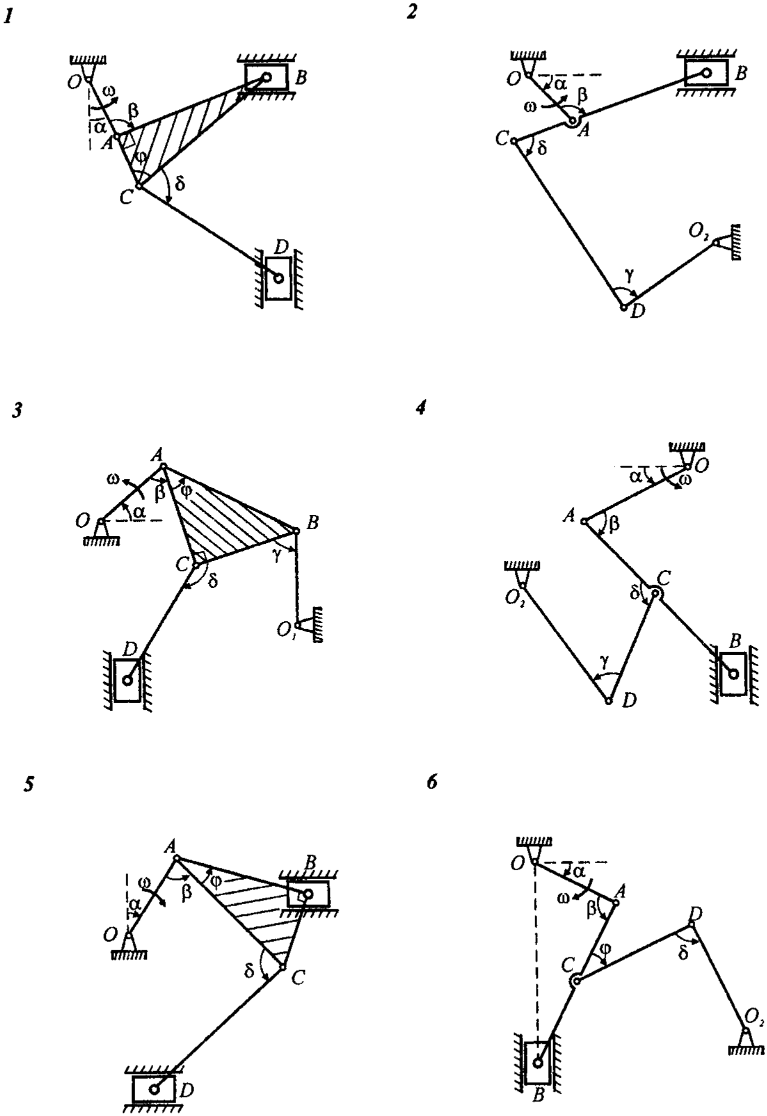
Вылічым паскарэнні пунктаў *A*, *B* і *C*. Па ўмове задання крывашып *OA* верціцца раўнамерна. Таму $a_A = a_A^n$.

$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 0{,}15 = 0{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Паскарэнне пункта *B* шатуна *AB* вызначаем па тэарэме складання паскарэнняў пры плоскапаралельным руху звяна.

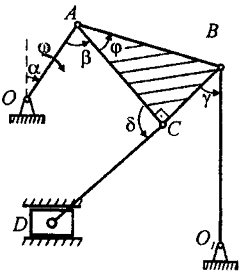
$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}, \text{ або } \boldsymbol{a}_B^n + \boldsymbol{a}_B^\tau = \boldsymbol{a}_A^n + \boldsymbol{a}_{BA}^n + \boldsymbol{a}_{BA}^\tau.$$

Паказваем на рысунку ўсе складовыя паскарэнняў, якія ўтрымлівае вектарная роўнасць. Падлічваем нармальныя складовыя паскарэнняў.

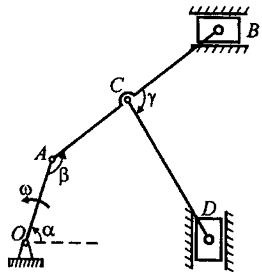

1
O
ω
β
α
A
φ
B
C
δ
D
2
O
α
β
ω
A
B
C
δ
O₂
γ
D
3
A
ω
β
φ
O
α
B
C
γ
δ
O₁
D
4
O
α
ω
A
β
C
O₂
δ
γ
D
B
5
A
ω
β
φ
B
α
O
δ
C
D
6
O
α
ω
A
β
D
C
φ
δ
O₂
B

Рыс. 88

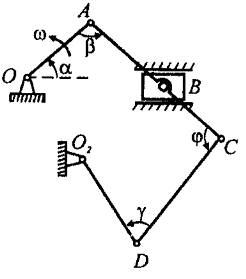
7



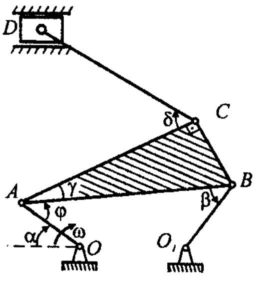
8



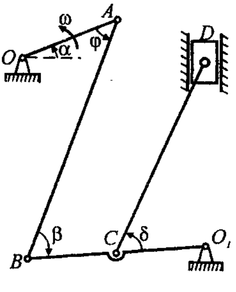
9



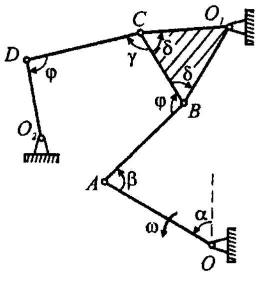
10



11

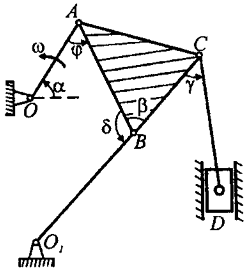


12

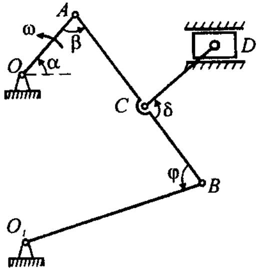


Рыс. 89

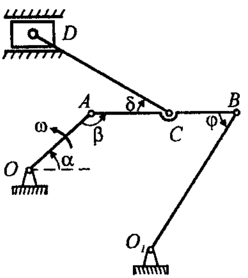
13



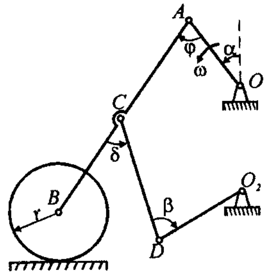
14



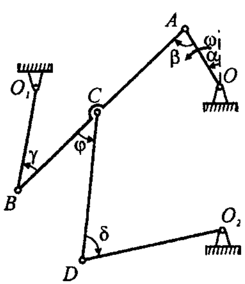
15



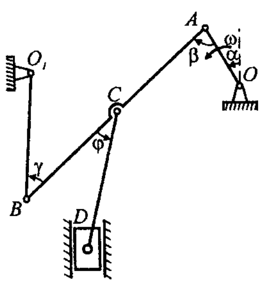
16



17

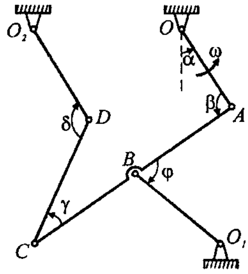


18

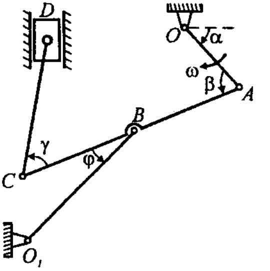


Рыс. 90

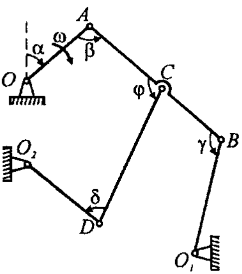
19



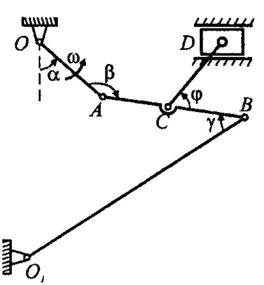
20



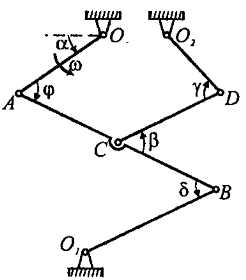
21



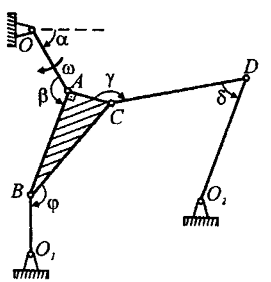
22



23

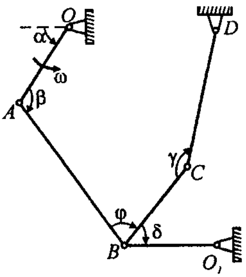


24

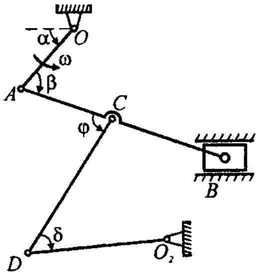


Рыс. 91

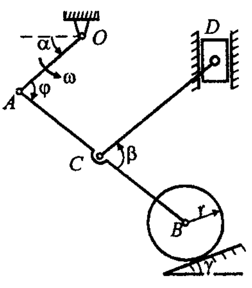
25



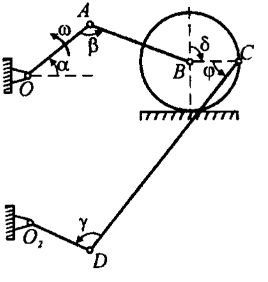
26



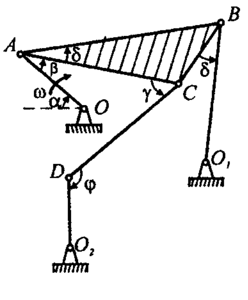
27



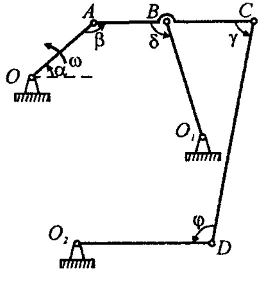
28



29



30



Рыс. 92

$$a_B^n = \omega_{O_1B}^2 \cdot O_1B = 0{,}7^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0{,}25^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}04 \text{ м/с}^2.$$

Падкрэслім у вектарнай роўнасці вектары адной рыскай, калі ведаем толькі накірунак вектара, і дзвюма рыскамі, калі ведаем накірунак і модуль вектара.

$$\underline{\underline{\boldsymbol{a}_B^n}} + \underline{\boldsymbol{a}_B^\tau} = \underline{\underline{\boldsymbol{a}_A^n}} + \underline{\underline{\boldsymbol{a}_{BA}^n}} + \underline{\boldsymbol{a}_{BA}^\tau}.$$

Бачым, што ў вектарнай роўнасці засталіся дзве невядомыя: a_B^τ і a_{BA}^τ.

Запісваем роўнасць праз праекцыі вектараў на восі каардынат. Вось Ax накіроўваем уздоўж шатуна AB, а вось Ay — перпендыкулярна да яго.

Атрымаем

$$\begin{cases} -a_B^n \cos\varphi - a_B^\tau \sin\varphi = -a_{BA}^n, \\ a_B^n \sin\varphi - a_B^\tau \cos\varphi = a_A^n - a_{BA}^\tau. \end{cases}$$

З сістэмы алгебраічных роўнасцей знаходзім велічыні a_B^τ і a_{BA}^τ.

$$a_B^\tau = \frac{a_{BA}^n - a_B^n \cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{0{,}04 - 0{,}25 \cdot 0{,}5}{0{,}866} = -0{,}1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^\tau = a_A^n - a_B^n \sin\varphi + a_B^\tau \cos\varphi = 0{,}6 - 0{,}25 \cdot 0{,}866 - 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}33 \text{ м/с}^2.$$

Знак “мінус” у адказе для a_B^τ гаворыць аб тым, што вектар a_B^τ на самай справе накіраваны ў процілеглы бок.

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^n\right)^2 + \left(a_B^\tau\right)^2} = \sqrt{0{,}25^2 + 0{,}1^2} = 0{,}27 \text{ м/с}^2.$$

Вуглавое паскарэнне шатуна AB

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{0{,}33}{0{,}7} = 0{,}47 \text{ рад/с}^2.$$

Паскарэнне пункта C таксама вызначаем па тэарэме складання паскарэнняў.

$$\boldsymbol{a}_C = \underline{\underline{\boldsymbol{a}_A^n}} + \underline{\underline{\boldsymbol{a}_{CA}^n}} + \underline{\underline{\boldsymbol{a}_{CA}^\tau}}.$$

Можам падлічыць a_{CA}^n і a_{CA}^τ.

$$a_{CA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 0{,}25^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}02 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 0{,}47 \cdot 0{,}3 = 0{,}14 \text{ м/с}^2.$$

Пакажам на рысунку вядомыя па накірунку вектары паскарэнняў. Падкрэслім у вектарнай роўнасці ўсе вядомыя велічыні. Атрымалі, што паскарэнне $\boldsymbol{a}_C$ невядома ні па накірунку, ні па модулю.

Падлічым праекцыі паскарэння $\boldsymbol{a}_C$ на восі каардынат у адпаведнасці з вектарнай роўнасцю.

$$a_{Cx} = -a_{CA}^n = -0{,}02 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Cy} = a_A^n - a_{CA}^\tau = 0{,}6 - 0{,}14 = 0{,}46 \text{ м/с}^2.$$

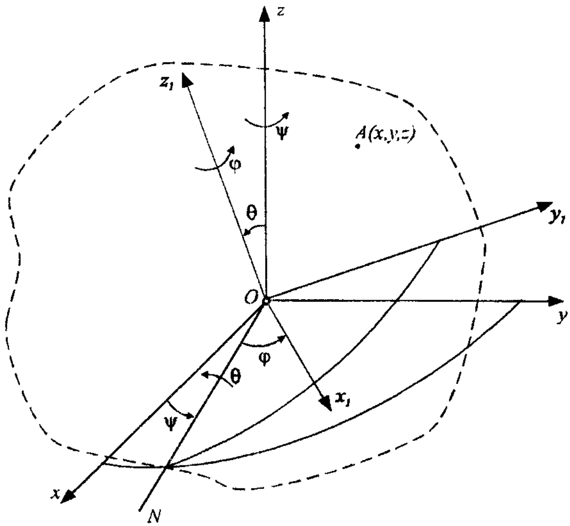
Тады паскарэнне пункта C шатуна AB

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}46^2} = 0{,}46 \text{ м/с}^2.$$

Заданне К-9

Вызначэнне кінематычных характарыстык сферычнага руху цвердага цела і яго пунктаў па ўраўненнях Эйлера

Рух цела, замацаванага з дапамогай нерухомага сферычнага шарніра (рыс. 93), апісваецца трыма ўраўненнямі Эйлера: $\Psi = f_1(t)$, $\theta = f_2(t)$, $\varphi = f_3(t)$. Вызначыць у момант τ скорасць і паскарэнне пункта A цела, які мае ў гэты момант каардынаты x, y, z (пачатак нерухомых восей каардынат супадае з цэнтрам сферычнага шарніра O).



Рыс. 93

Вызначыць вуглы паміж вектарамі ω і ε, а таксама паміж вектарамі скорасці і паскарэння пункта цела.

Знайсці адлегласць ад пункта A цела да імгненнай восі вярчэння цела ў разліковы момант.

Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 18.

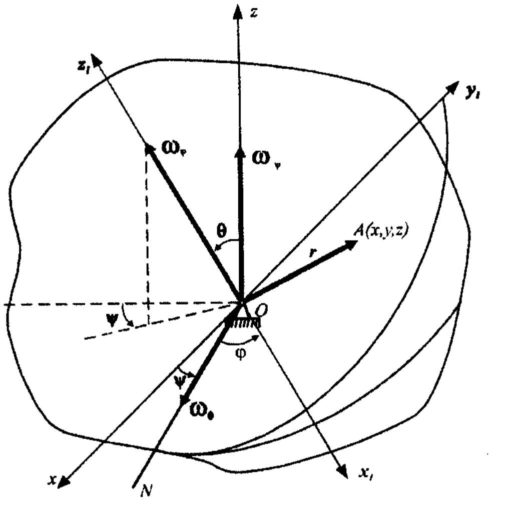
Прыклад рашэння задання К-9

Цела, замацаванае нерухомым сферычным шарнірам, рухаецца згодна з ўраўненнямі Эйлера (рыс. 94):

$$\Psi = 2t(\text{рад}),\ \theta = t(\text{рад}),\ \varphi = t^2(\text{рад}).$$

У момант $\tau = 1$ с вызначыць скорасць і паскарэнне пункта A цела, які ў гэты час мае каардынаты $x = 0$, $y = 2$ м, $z = 1$ м (пачатак нерухомых восей каардынат супадае з цэнтрам O сферычнага шарніра).

Вызначыць вуглы паміж ω і ε, v_A і a_A. Знайсці адлегласць ад пункта A да імгненнай восі вярчэння цела ў разліковы момант.



Рыс. 94

Табліца 18

Варыянт	Ψ, рад	θ, рад	φ, рад	τ, с	*x*, м	*y*, м	*z*, м
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$0{,}3t$	$0{,}05t^2$	$-2t^2+1$	2	0,5	0,1	0,2
2	$0{,}2t$	$0{,}4t$	$3t^3+2$	1,8	0,4	0	0,1
3	$-0{,}5t$	$0{,}3t$	$-e^{0{,}2t}$	1,6	0,3	0,9	0
4	$0{,}6t^2$	$1-0{,}2\sin t$	$e^{0{,}1t}$	1,4	0,2	0,8	1,0
5	$0{,}2t^2$	$0{,}5+0{,}3\sin t$	$e^{0{,}3t}$	1,2	0,1	0,7	0,9
6	$0{,}3t^2$	$0{,}4+0{,}4\sin t$	$2+t^2$	1,0	0	0,6	0,8
7	$-0{,}4t$	$1+0{,}2\cos t$	$1+t^3$	0,8	0,2	0,8	1,0
8	$0{,}5t+1$	$0{,}5+0{,}4\cos t$	$1-e^t$	0,6	0,4	1,0	0
9	$0{,}7t+1{,}5$	$0{,}6(1+\cos t)$	$0{,}7+e^t$	0,4	0,6	0	0,2
10	$-0{,}4t^2+1$	$0{,}2t$	$0{,}3t+t^2$	0,2	0,8	0,2	0,4
11	$0{,}5t^2+1{,}5$	$0{,}3-0{,}1t$	$0{,}2e^t$	0,3	1,0	0,4	0,6
12	$0{,}2t^2+1$	$0{,}4+0{,}1t$	$0{,}3e^t$	0,5	0	0,6	0,8
13	$0{,}2t^2+1{,}5$	$0{,}2(1+\sin t)$	$-0{,}4e^t$	0,7	0,1	0,7	0,9
14	$0{,}2t+1$	$1-0{,}1t$	$1+0{,}1e^t$	0,9	0,3	0,9	0,1
15	$-0{,}2t+1{,}5$	$1{,}3-0{,}2t$	$t^3+0{,}2$	1,1	0,5	0,1	0,3
16	$0{,}2t+2$	$1{,}4-0{,}3t$	$t^2+0{,}4$	1,3	0,7	0,3	0,5
17	$0{,}3t+1$	$1-0{,}4t$	$t+0{,}6$	1,5	0,9	0,5	0,7
18	$0{,}3t+2$	$1{,}2-0{,}4t^2$	$-2t+0{,}8$	1,7	0	0,7	0,9

1	2	3	4	5	6	7	8
19	$-0{,}6t+2$	$t^{-1}+0{,}1$	$3t+1$	1,9	0,1	0,3	0,5
20	$0{,}3t+1{,}5$	$t^{-1}+0{,}2$	$4t+1{,}2$	2,1	0,2	0,4	0,6
21	$0{,}2t+t^2$	$t^{-1}+0{,}3$	$-0{,}6t^2$	2,0	0,3	0,5	0,7
22	$0{,}3t-t^2$	$t^{-2}+0{,}3$	$0{,}8t^2$	1,8	0,4	0,6	0,8
23	$0{,}8t+t^2$	$t^{-1}+0{,}04$	$t^2+0{,}5$	1,6	0,5	0,7	0,9
24	$0{,}4t$	$t^{-1}+0{,}06$	$-t^2+0{,}7$	1,4	0,6	0,8	1,0
25	$-0{,}2t^2+2$	$t^{-1}+0{,}08$	$t^3+0{,}6$	1,2	0,7	0,9	0,1
26	$0{,}1t^3$	$t+0{,}09$	$-0{,}1t^3$	1,0	0,8	1,0	0,2
27	$0{,}2t^3+1$	$t+0{,}1$	$0{,}2t^3$	0,8	0,9	0	0,3
28	$-0{,}3t^3+1{,}5$	$t+0{,}5$	$0{,}3e^t$	0,6	0	0,1	0,4
29	$0{,}4t^3+2$	$0{,}03t$	$-0{,}5e^t$	0,4	0,1	0,2	0,5
30	$0{,}5t^3+t$	$-0{,}05t$	$0{,}3e^{0{,}5t}$	0,2	0,2	0,3	0,6

Рашэнне. Па ўраўненнях Эйлера падлічым вуглавыя скорасці прэцэсіі, нутацыі і ўласнага вярчэння.

$$\omega_\psi = \dot\psi = 2 \text{ рад/с}, \quad \omega_\theta = \dot\theta = 1 \text{ рад/с},$$

$$\omega_\varphi = \dot\varphi = 2t, \quad \omega_\varphi(\tau) = 2 \text{ рад/с}.$$

Вектар вуглавой скорасці цела ў сферычным руху

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\varphi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\psi .$$

Атрымаем праекцыі ω на нерухомыя восі $Oxyz$.

$$\omega_x = \omega_\theta \cos\psi + \omega_\varphi \sin\theta \cdot \sin\psi ,$$

$$\omega_y = \omega_\theta \sin\psi - \omega_\varphi \sin\theta \cdot \cos\psi ,$$

$$\omega_z = \omega_\psi + \omega_\varphi \cos\theta .$$

У момант τ праекцыі вуглавой скорасці ω на восі каардынат роўныя:

$$\omega_x = 1 \cdot \cos 2 + 2 \cdot \sin 1 \cdot \sin 2 = -0{,}416 + 2 \cdot 0{,}841 \cdot 0{,}909 = 1{,}1 \text{ рад/с},$$

$$\omega_y = 1 \cdot \sin 2 - 2 \cdot \sin 1 \cdot \cos 2 = 0{,}909 - 2 \cdot 0{,}841(-0{,}416) = 1{,}6 \text{ рад/с},$$

$$\omega_z = 2 + 2\cos 1 = 2 + 2 \cdot 0{,}540 = 3{,}1 \text{ рад/с}.$$

Модуль вуглавой скорасці цела ў момант τ

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{1{,}1^2 + 1{,}6^2 + 3{,}1^2} = 3{,}6 \text{ рад/с}.$$

Скорасць пункта A у момант τ знойдзем з выкарыстаннем формул Эйлера:

$$\mathrm{v}_x = \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y = 1{,}6 \cdot 1 - 3{,}1 \cdot 2 = -4{,}6 \text{ м/с},$$

$$\mathrm{v}_y = \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z = 3{,}1 \cdot 0 - 1{,}1 \cdot 1 = -1{,}1 \text{ м/с},$$

$$\mathrm{v}_z = \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x = 1{,}1 \cdot 2 - 1{,}6 \cdot 0 = 2{,}2 \text{ м/с},$$

$$\mathrm{v}_A = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2} = \sqrt{4{,}6^2 + 1{,}1^2 + 2{,}2^2} = 5{,}2 \text{ м/с}.$$

Вектар $\boldsymbol{\omega}$ накіраваны ўздоўж імгненнай восі вярчэння цела. Таму адлегласць ад пункта A да імгненнай восі вярчэння ў момант τ можна вызначыць з формулы скорасці пункта A:

$$\mathrm{v}_A = \omega \cdot h, \quad h = \frac{\mathrm{v}_A}{\omega} = \frac{5{,}2}{3{,}6} = 1{,}44 \text{ м}.$$

Падлічым вуглавое паскарэнне цела ў сферычным руху па яго праекцыях на восі каардынат.

$$\omega_x = \cos 2t + 2t \sin t \cdot \sin 2t,$$

$$\omega_y = \sin 2t - 2t \sin t \cdot \cos 2t,$$

$$\omega_z = 2 + 2t \cos t.$$

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x = -2\sin 2t + 2\sin t \cdot \sin 2t + 2t\cos t \cdot \sin 2t + 4t \sin t \cdot \cos 2t,$$

$$\varepsilon_y = \dot{\omega}_y = 2\cos 2t - 2\sin t \cdot \cos 2t - 2t\cos t \cdot \cos 2t + 4t \sin t \cdot \sin 2t,$$

$$\varepsilon_z = 2\cos t - 2t \sin t.$$

У момант τ

$$\varepsilon_x = -2 \cdot \sin 2 + 2\sin 1 \cdot \sin 2 + 2\cos 1 \cdot \sin 2 + 4\sin 1 \cdot \cos 2 =$$

$$= -2 \cdot 0{,}909 + 2 \cdot 0{,}841 \cdot 0{,}909 + 2 \cdot 0{,}54 \cdot 0{,}909 - 4 \cdot 0{,}841 \cdot 0{,}416 =$$

$$= -1{,}818 + 1{,}529 + 0{,}982 - 1{,}399 = -0{,}7 \text{ рад}/\text{с}^2.$$

$$\varepsilon_y = 2 \cdot \cos 2 - 2\sin 1 \cdot \cos 2 - 2\cos 1 \cdot \cos 2 + 4\sin 1 \cdot \sin 2 =$$

$$= -2 \cdot 0{,}416 + 2 \cdot 0{,}841 \cdot 0{,}416 + 2 \cdot 0{,}54 \cdot 0{,}416 + 4 \cdot 0{,}841 \cdot 0{,}909 =$$

$$= -0{,}832 + 0{,}7 + 0{,}449 + 3{,}058 = 3{,}4 \text{ рад}/\text{с}^2.$$

$$\varepsilon_z = 2 \cdot \cos 1 - 2\sin 1 = 2 \cdot 0{,}54 - 2 \cdot 0{,}841 = 1{,}08 - 1{,}682 = -0{,}6 \text{ рад/с}^2.$$

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{0{,}7^2 + 3{,}4^2 + 0{,}6^2} = \sqrt{12{,}41} = 3{,}5 \text{ рад/с}^2.$$

Паскарэнне пункта A ў момант τ вылічым па яго праекцыях на восі каардынат.

$$a_x = \varepsilon_y \cdot z - \varepsilon_z \cdot y + \omega_y \cdot \mathrm{v}_z - \omega_z \cdot \mathrm{v}_y =$$

$$= 3{,}4 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 2 + 1{,}6 \cdot 2{,}2 + 3{,}1 \cdot 1{,}1 = 3{,}4 + 1{,}2 + 3{,}5 + 3{,}4 = 11{,}5 \text{ м/с}^2.$$

$$a_y = \varepsilon_z \cdot x - \varepsilon_x \cdot z + \omega_z \cdot \mathrm{v}_x - \omega_x \cdot \mathrm{v}_z =$$

$$= -0{,}6 \cdot 0 + 0{,}7 \cdot 1 - 3{,}1 \cdot 4{,}6 - 1{,}1 \cdot 2{,}2 = 0{,}7 - 14{,}3 - 2{,}4 = -16 \text{ м/с}^2.$$

$$a_z = \varepsilon_x \cdot y - \varepsilon_y \cdot x + \omega_x \cdot \mathrm{v}_y - \omega_y \cdot \mathrm{v}_x =$$

$$= -0{,}7 \cdot 2 - 3{,}4 \cdot 0 - 1{,}1 \cdot 1{,}1 + 1{,}6 \cdot 4{,}6 = -1{,}4 - 1{,}2 + 7{,}4 = 4{,}8 \text{ м/с}^2.$$

$$a_A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{11{,}5^2 + 16^2 + 4{,}8^2} = 20{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Вугал паміж вектарамі $\boldsymbol{\omega}$ і $\boldsymbol{\varepsilon}$ знойдзем з формул скалярнага здабытку гэтых вектараў.

$$\omega \cdot \varepsilon \cdot \cos\alpha = \omega_x \cdot \varepsilon_x + \omega_y \cdot \varepsilon_y + \omega_z \cdot \varepsilon_z,$$

$$\cos\alpha = \frac{\omega_x \cdot \varepsilon_x + \omega_y \cdot \varepsilon_y + \omega_z \cdot \varepsilon_z}{\omega \cdot \varepsilon} =$$

$$= \frac{-1{,}1 \cdot 0{,}7 + 1{,}6 \cdot 3{,}4 - 3{,}1 \cdot 0{,}6}{3{,}6 \cdot 3{,}5} = \frac{2{,}81}{12{,}6} = 0{,}223;$$

$$\alpha = \arccos 0{,}223 = 1{,}346 \text{ рад.}$$

Аналагічна падлічым вугал паміж вектарамі $\mathbf{v}_A$ і $\mathbf{a}_A$.

$$\cos\beta = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y + v_z \cdot a_z}{v_A \cdot a_A} =$$

$$= \frac{-4{,}6 \cdot 11{,}5 + 1{,}1 \cdot 1{,}6 + 2{,}2 \cdot 4{,}8}{5{,}2 \cdot 20{,}3} = \frac{-24{,}8}{105{,}6} = -0{,}235.$$

$$\beta = \arccos(-0{,}235) = 1{,}808 \text{ рад.}$$

Заданне К-10

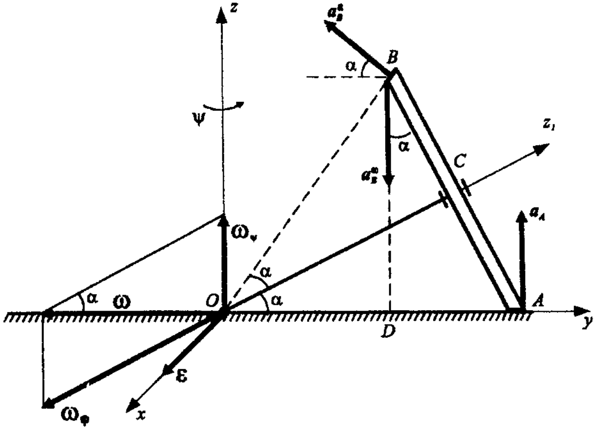
Вызначэнне скорасцей і паскарэнняў пунктаў цвёрдага цела, якое коціцца па нерухомай паверхні і мае пры гэтым адзін нерухомы пункт

Цвёрдае цела правільнай канічнай формы (рыс. 96–98) коціцца без праслізгвання па нерухомай паверхні і робіць n абаротаў у хвіліну вакол нерухомай восі Oz. Пункт O цела ўвесь час супадае з пачаткам нерухомых восей каардынат $Oxyz$. Вызначыць скорасці і паскарэнні пунктаў A і B цела з улікам даных, прыведзеных у табл. 19.

Прыклад рашэння задання К-10

Канічнае кола насаджана на вось OC, якая можа паварочвацца вакол нерухомага сферычнага шарніра O. Кола коціцца па нерухомай гарызантальнай паверхні без праслізгвання (рыс. 95) і робіць за хвіліну 6 абаротаў вакол вертыкальнай восі Oz. Вызначыць скорасці і паскарэнні пунктаў A і B кола, калі $\alpha = 30°$, $BC=CA=0{,}3$ м. Таўшчыню кола не ўлічваць.

Р а ш э н н е . Кола ўдзельнічае ў сферычным руху (нерухомы пункт O). Рух кола вакол восі Oz — прэцэсійны. Вуглавая скорасць прэцэсіі падлічваецца праз вядомую колькасць абаротаў кола вакол восі Oz за хвіліну.



Рыс. 95

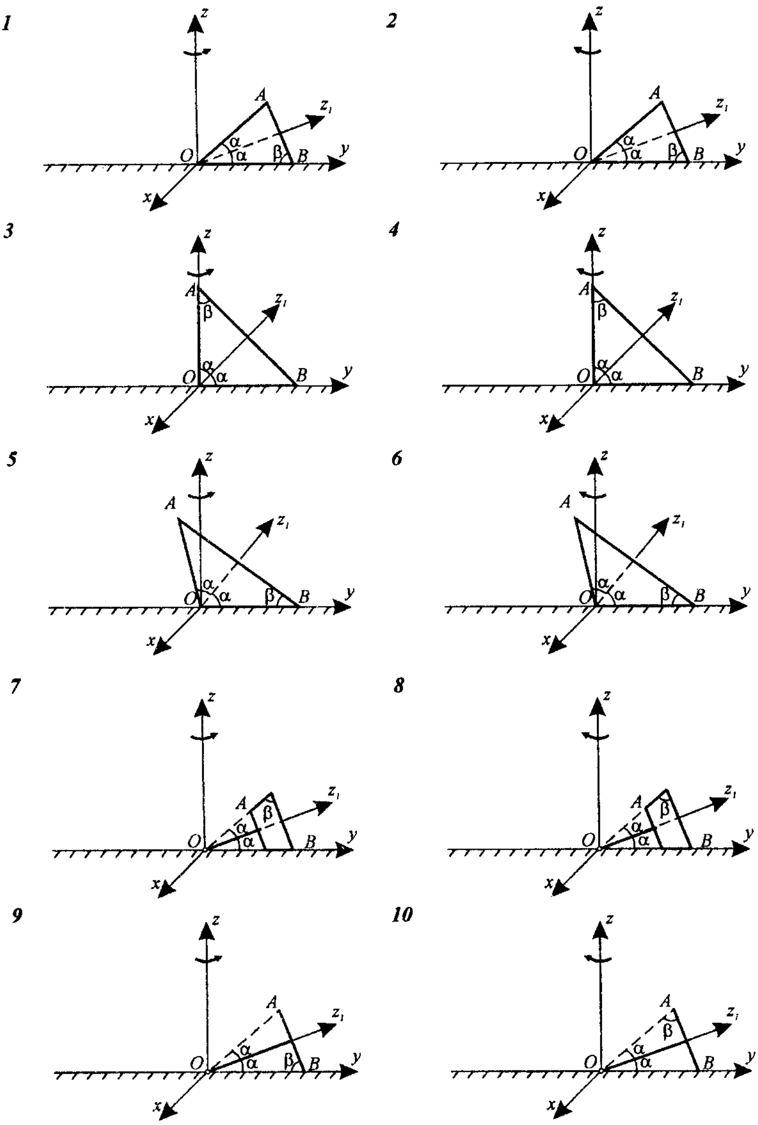
$$\omega_\psi = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{2\pi \cdot 6}{60} = 0{,}2\pi \text{ рад/с.}$$

Прымем накірунак вярчэння супраць гадзіннікавай стрэлкі пры назіранні з дадатнага накірунку восі Oz. Тады вектар $\boldsymbol{\omega}_\psi$ будзе накіраваны ўздоўж восі Oz уверх (рыс. 95). Ўласная вось вярчэння кола Oz_1 пры качэнні кола па нерухомай паверхні складае нязменны вугал з воссю Oz. Гэта вугал нутацыі θ. Таму $\theta = \text{const}$, $\theta = 60°$, $\omega_\theta = 0$.

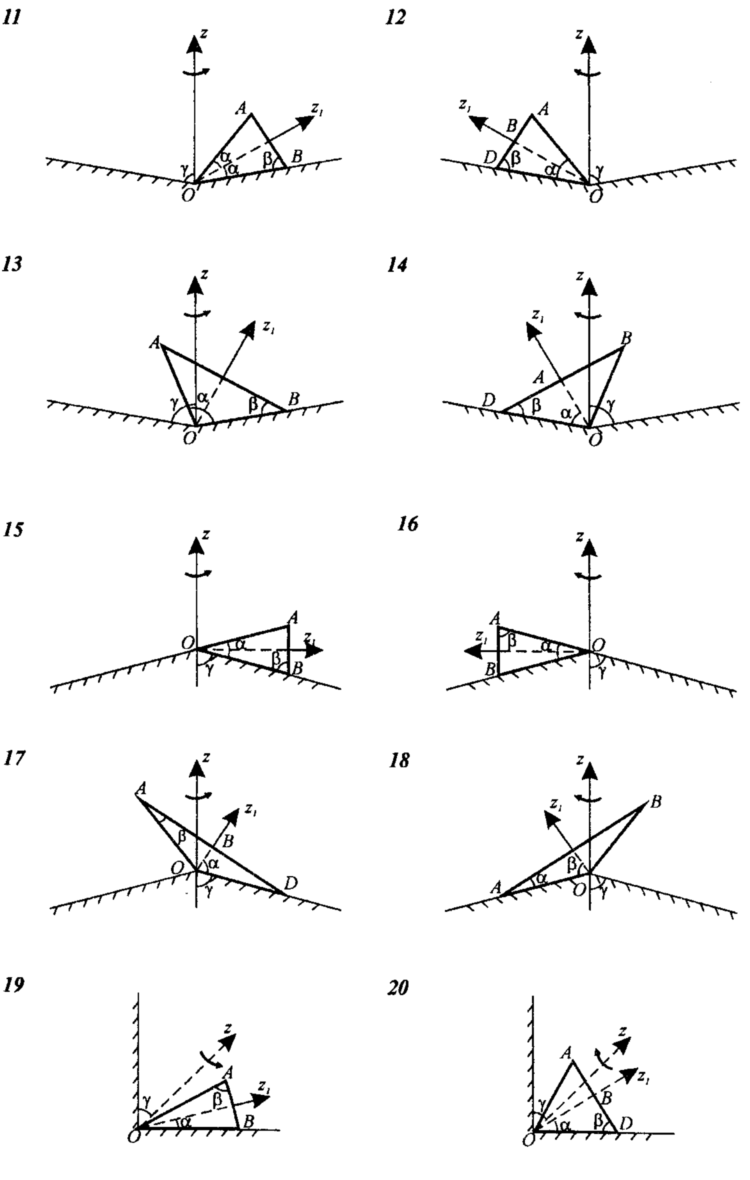
Вектар вуглавой скорасці асабістага вярчэння $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ накіраваны ўздоўж восі Oz_1 улева (па правілу "правай шрубы").

Пры качэнні кола без праслізгвання скорасць пункта A роўная нулю. Імгненная вось вярчэння кола будзе праходзіць праз вызначаныя два нерухомыя пункты: O і A. Таму вектар абсалютнай (імгненнай) вуглавой скорасці кола накіраваны ўздоўж OA.

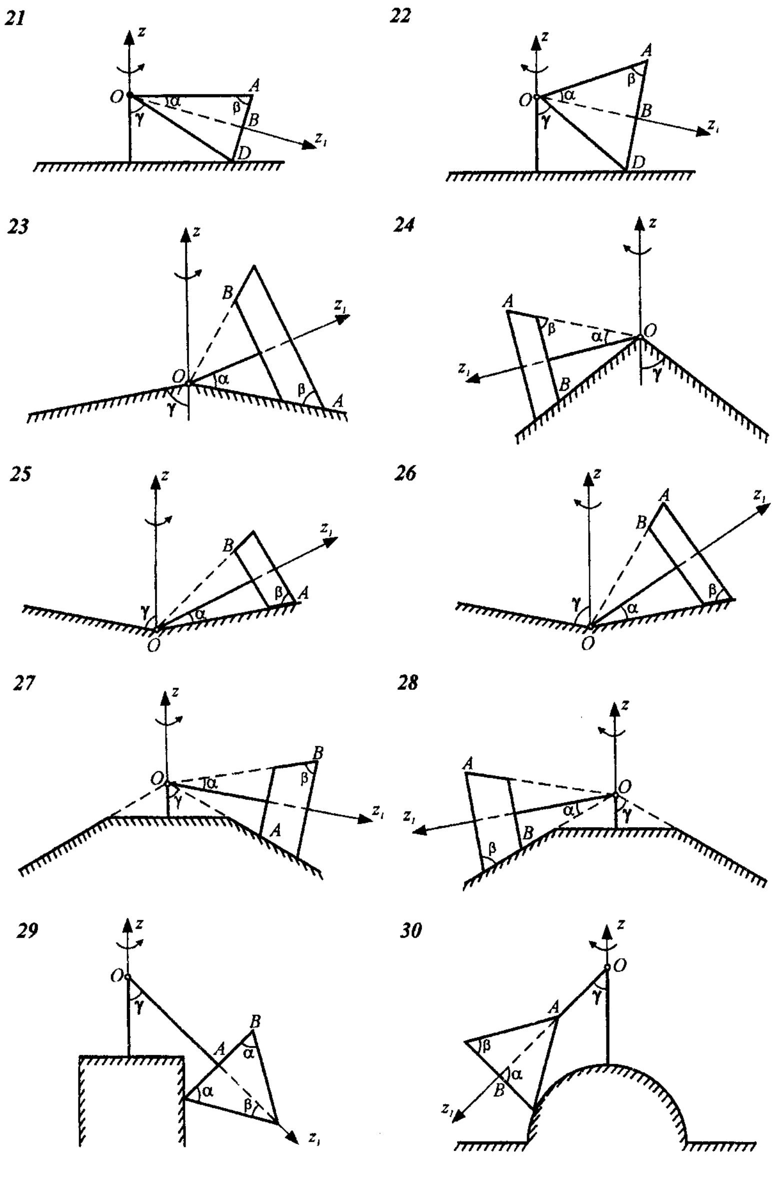
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\psi + \boldsymbol{\omega}_\varphi.$$



Рыс. 96



Рыс. 97



21
z
O
A
α
β
γ
B
D
z_1
22
z
A
O
α
β
γ
B
D
z_1
23
z
B
z_1
O
α
γ
β
A
24
z
A
β
α
O
z_1
B
γ
25
z
B
z_1
γ
β
A
α
O
26
z
A
z_1
B
γ
β
α
O
27
z
B
O
α
β
γ
z_1
A
28
z
A
O
z_1
α
γ
B
β
29
z
O
γ
B
A
α
α
β
z_1
30
z
O
A
γ
β
α
B
z_1

Рыс. 98

Згодна з вектарнай роўнасцю паказваем усе вектары на рыс. 95. Вектар ω пры гэтым павінен быць дыяганаллю паралелаграма, пабудаванага на вектарах ω_ψ і ω_φ

Табліца 19

Варыянт	*n*, аб/хвіл	α, град	OA, м	OB, м	AB, м	β, град	γ, град
1	2	20	0,5			70	
2	4	30			0,4	60	
3	6	45		0,6		45	
4	3	45	0,7			45	
5	5	60		0,4		30	
6	4	70			1,1	20	
7	6	30	0,4	0,5		60	
8	2	25	0,5	0,7		65	
9	3	35			0,6	55	
10	4	30	0,3			60	
11	5	20		0,4		70	65
12	6	44			0,2	68	60
13	2	100	0,4			40	70
14	3	60		0,5		30	65
15	4	40			0,3	70	70
16	5	40	0,5			70	70
17	6	70		0,2		20	85
18	2	18			0,6	72	75
19	3	15	0,6			75	45
20	4	30		0,4		60	45
21	5	17			0,2	73	56
22	6	25	0,4			65	50
23	2	30	0,6	0,4		60	84
24	3	22	0,5	0,4		68	55
25	4	20	0,6	0,5		70	80
26	5	28	0,7	0,5		62	75
27	6	23	0,4	0,6		67	42
28	2	22	0,6	0,4		68	54
29	3	45	0,5		0,2	45	45
30	4	90	0,3	0,6		60	45

Цяпер маем магчымасць падлічыць модуль абсалютнай вуглавой скорасці кола.

$$\omega = \omega_\psi \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 0{,}2\pi \cdot \mathrm{ctg}30° = 0{,}2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}732 = 1{,}09 \text{ рад/с}.$$

У дадзеным выпадку руху кола, калі ω_ψ=const, θ=const, вектар ω змяняецца толькі па накірунку. Таму вектар вуглавога паскарэння кола роўны адной складовай $\varepsilon_\perp(\varepsilon_\parallel=0)$.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\perp} = \boldsymbol{\omega}_{\psi} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Велічыня вуглавога паскарэння кола

$$\varepsilon = \omega_{\psi} \cdot \omega \cdot \sin 90° = 0{,}2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}09 = 0{,}68 \text{ рад/с}^2.$$

Вектар $\boldsymbol{\varepsilon}$ па правілу "правай рукі" накіраваны з цэнтра O да нас (перпендыкулярна плоскасці Oyz). Скорасць пункта B вызначаецца праз імгненную вуглавую скорасць ω.

$$v_B = \omega \cdot BD = \omega \cdot AB\cos\alpha = 1{,}09 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}866 = 0{,}57 \text{ м/с}.$$

Вектар $\mathbf{v}_B$ накіраваны ад нас (перпендыкулярна плоскасці Oyz). Паскарэнне пункта B мае дзве складовыя:

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_B^{\omega} + \boldsymbol{a}_B^{\varepsilon}.$$

Восеімклівае паскарэнне пункта B

$$a_B^{\omega} = \omega^2 \cdot BD = 1{,}09^2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}866 = 0{,}62 \text{ м/с}^2.$$

Вярчальнае паскарэнне пункта B

$$a_B^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot OB \sin 90° = 0{,}68 \cdot 0{,}6 = 0{,}41 \text{ м/с}^2.$$

Вектары $\boldsymbol{a}_B^{\omega}$ і $\boldsymbol{a}_B^{\varepsilon}$ знаходзяцца ў плоскасці Oyz. Вектар $\boldsymbol{a}_B^{\omega}$ накіраваны перпендыкулярна да імгненнай восі вярчэння, вектар $\boldsymbol{a}_B^{\varepsilon}$ – перпендыкулярна да OB з улікам накірунку вектара $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Модуль паскарэння пункта B вызначым праз праекцыі вектара $\boldsymbol{a}_B$ на восі Oy і Oz.

$$a_{By} = -a_B^{\varepsilon} \cos\alpha = -0{,}41 \cdot 0{,}866 = -0{,}35 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Bz} = -a_B^{\omega} + a_B^{\varepsilon} \sin\alpha = -0{,}62 + 0{,}41 \cdot 0{,}5 = -0{,}42 \text{ м/с}^2;$$

$$a_B = \sqrt{a_{By}^2 + a_{Bz}^2} = \sqrt{0{,}35^2 + 0{,}42^2} = 0{,}55 \text{ м/с}^2.$$

Паскарэнне пункта A роўнае вярчальному паскарэнню a_A^{ε}, таму што пункт A знаходзіцца на імгненнай восі вярчэння, $v_A=0$, $a_A^{\omega} = 0$.

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_A^{\varepsilon}.$$

$$a_A = \varepsilon \cdot OA = 0{,}68 \cdot 0{,}6 = 0{,}41 \text{ м/с}^2.$$

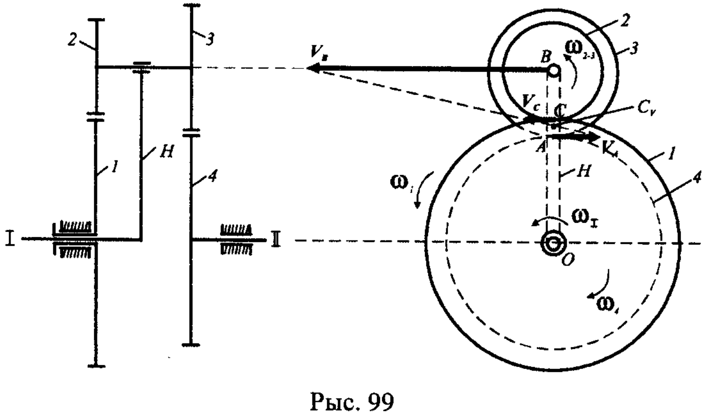
Вектар $\boldsymbol{a}_A$ паказваем з улікам накірунку вектара $\boldsymbol{\varepsilon}$ перпендыкулярна адрэзку OA ўверх.

Заданне К-11

Вызначэнне вуглавых скорасцей звёнаў планетарнага рэдуктара з цыліндрычнымі коламі

У планетарным рэдуктары з цыліндрычнымі коламі (рыс. 100–102) вызначыць вуглавыя скорасці вядзёнага вала II і ўсіх рухомых звёнаў. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 20.

Прыклад рашэння задання К-11



Рыс. 99

Вядучы вал I рэдуктара з цыліндрычнымі коламі, схема якога паказана на рыс. 99, верціцца з вуглавой скорасцю 120 рад/с, а зубчастае кола 1 — з вуглавой скорасцю 20 рад/с. Накірункі іх вярчэнняў аднолькавыя. Вызначыць вуглавыя скорасці вядзёнага вала II і астатніх рухомых звёнаў рэдуктара, калі $R_1 = 20$ см, $R_2 = 6$ см, $R_3 = 10$ см, $R_4 = 16$ см.

Рашэнне.

1. Выкарыстанне тэорыі плоскапаралельнага руху цела.

Блок шасцерняў 2 і 3, змацаваных разам адной рухомай воссю (сатэліт), удзельнічае ў плоскапаралельным руху. Праз вуглавую скорасць кола 1 знойдзем скорасць пункта дотыку колаў 1 і 2.

$$v_C = \omega_1 \cdot R_1 = 20 \cdot 0{,}2 = 4 \text{ м/с}.$$

Вуглавая скорасць вадзіла H роўная вуглавой скорасці вядучага вала I.

$$\omega_H = \omega_I = 120 \text{ рад/с}.$$

Тады скорасць пункта B на рухомай восі сатэліта роўная

$$v_B = \omega_H \cdot OB = \omega_I(R_1 + R_2) = 120 \cdot 0{,}26 = 31{,}2 \text{ м/с}.$$

Такую скорасць маюць усе пункты рухомай восі. Тым самым на коле 2 нам вядомы скорасці ў двух пунктах кола. Будуем імгненны цэнтр скорасцей кола 2. Паказваем скорасці (рыс. 99) у цэнтры кола і ў пункце дотыку да кола 1, праз канцы вектараў скорасцей праводзім прамую, якая перасякае адрэзак BO ў пункце C_v – імгненным цэнтры скорасцей.

Знойдзем адлегласць CC_v.

$$\frac{v_B}{v_C} = \frac{BC_v}{CC_v}, \text{ або } \frac{v_B}{v_C} = \frac{BC + CC_v}{CC_v};$$

$$v_B \cdot CC_v = v_C \cdot BC + v_C \cdot CC_v;$$

$$CC_v = \frac{v_C \cdot BC}{v_B - v_C} = \frac{4 \cdot 0{,}06}{31{,}2 - 4} = \frac{0{,}24}{27{,}2} = 0{,}008824 \text{ м}.$$

Вуглавая скорасць сатэліта 2–3 роўная

$$\omega_{2-3} = \frac{v_C}{CC_v} = \frac{4}{0{,}008824} = 453{,}3 \text{ рад/с}.$$

Кола 3 рухаецца плоскапаралельна разам з колам 2 як адно цела. Таму і для яго на той жа адлегласці ад рухомай восі сатэліта знаходзіцца імгненны цэнтр скорасцей C_v.

Табліца 20

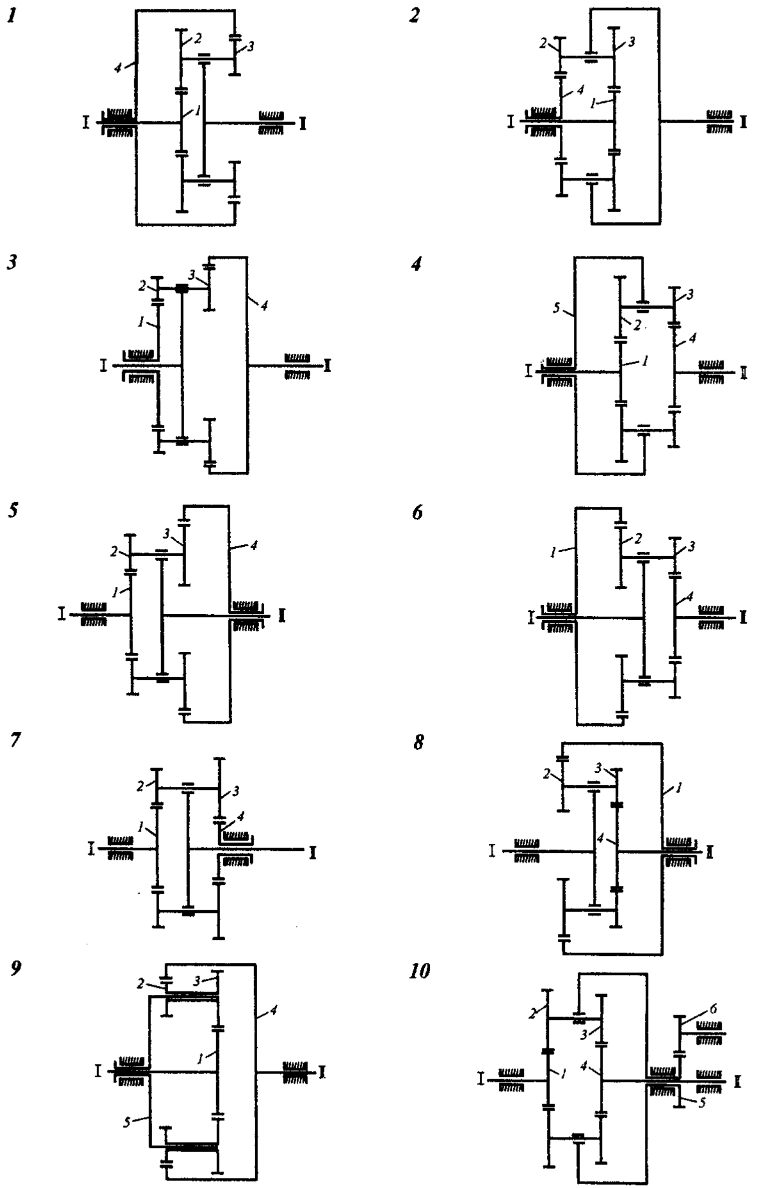
Варыянт	Радыусы колаў, см						Вуглавыя скорасці, рад/с				
	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	ω_I	ω_1	ω_4	ω_5	ω_6
1	20	20	15	55			300		–50		
2	35	25	30	40			240		40		
3	40	15	20	75			100	–150			
4	50	30	25	55			200			–80	
5	40	15	30	85			120		30		
6	75	30	15	30			140	40			
7	25	10	15	20			220		–60		
8	70	26	20	24			80	120			
9	20	15	25	60			320			–30	
10	30	35	20	45	30	25	280				70
11	35	20	30		85		260		50		
12	50	20	25	95	20	10	90				–150
13	30	20	10	90			100	–140			
14	10	25	20	10	40	50	220	160			
15	60	22	16	54			180	60			
16	25	15	20	60	24	16	160				–120
17	56	18	22	60			80	–150			
18	75	10	15	25	40	10	120				80
19	70	12	16	10	22		50	–70			
20	40	25	18	20	50	77	60	110			
21	78	20	14	16	10	18	90	–80			
22	26	56	40	10	16	22	200			–50	
23	54	10	12	56			110	140			
24	68	18	14	36	24	12	140				–180
25	70	24	30	16			180			60	
26	50	20	15	45			150			40	
27	24	16	56	30	22		220			–80	
28	62	22	12	28	20	16	100				140
29	20	18	40	15	70		80	–160			
30	26	20	16	30			50	120			

Заўвага. Дадатныя і адмоўныя значэнні вуглавых скорасцей адпавядаюць накірункам вярчэння супраць ходу і па ходу гадзіннікавай стрэлкі пры назіранні з боку вядучага вала.

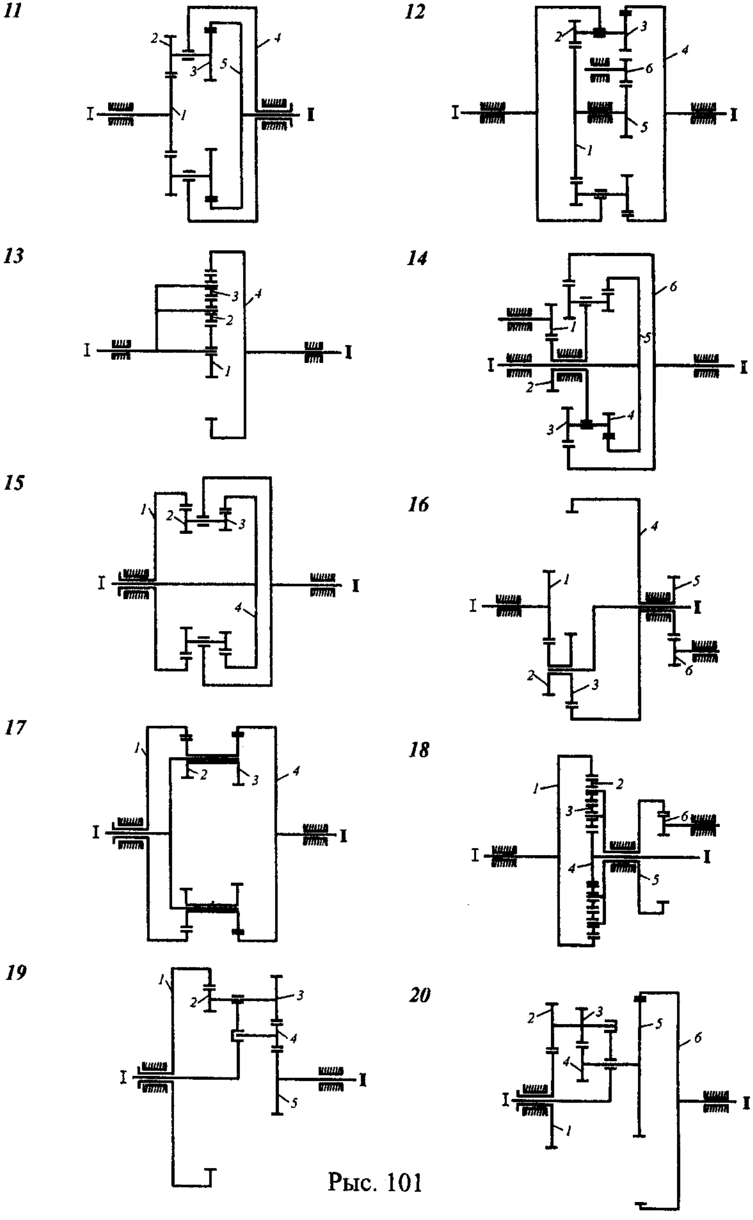
$$BC_v = BC + CC_v = 0{,}06 + 0{,}008824 = 0{,}068824 \text{ м}.$$

Адлегласць ад імгненнага цэнтра скорасцей да пункта дотыку A колаў 3 і 4 роўная

$$AC_v = R_3 - BC_v = 0{,}1 - 0{,}068824 = 0{,}031176 \text{ м}.$$

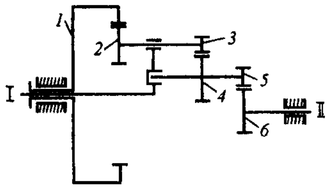


Рыс. 100

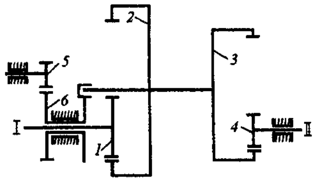


Рыс. 101

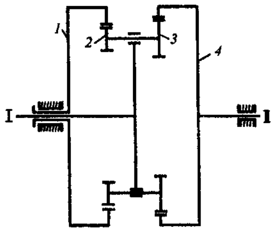
21



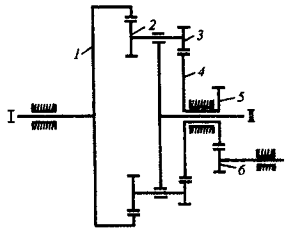
22



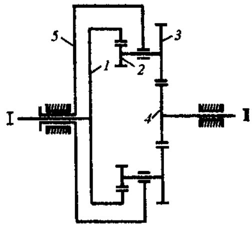
23



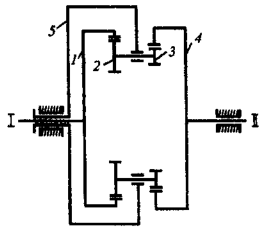
24



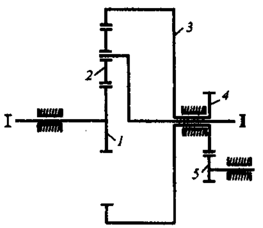
25



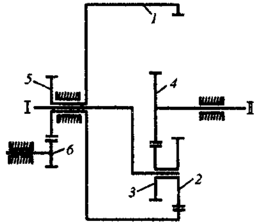
26



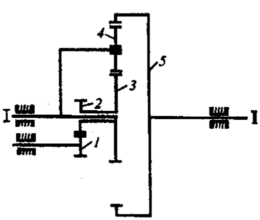
27



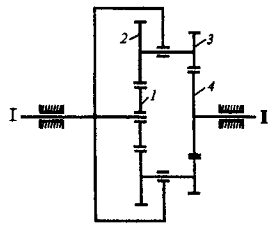
28



29



30



Рыс. 102

Знойдзем скорасць пункта A

$$v_A = \omega_{2-3} \cdot AC_v = 453{,}3 \cdot 0{,}031176 = 14{,}13 \text{ м/с}.$$

Тады вуглавая скорасць кола 4

$$\omega_4 = \frac{v_A}{R_4} = \frac{14{,}13}{0{,}16} = 88{,}3 \text{ рад/с}.$$

Кола 4 і вядзёны вал II верцяцца як адно цвёрдае цела. Таму

$$\omega_{II} = \omega_4 = 88{,}3 \text{ рад/с}.$$

Вядучы вал I і вядзёны вал II маюць розныя накірункі вярчэння.

2. Вызначэнне вуглавых скорасцей звёнаў спосабам Віліса.

Рухомую сістэму адліку звязваем з вадзілам H. Тады з пункту гледжання тэорыі складання вярчэнняў цела вакол паралельных восей кожнае кола рэдуктара ўдзельнічае ў пераносным вярчальным руху разам з вадзілам і ў адносным руху (адносна вадзіла) вакол асабістай восі. У гэтым выпадку пераносная вуглавая скорасць кожнага кола роўная вуглавой скорасці вадзіла. Адносная вуглавая скорасць кола вызначаецца як рознасць алгебраічных (абазначана знакам ~ — тыльда) значэнняў абсалютных і пераносных вуглавых скорасцей:

$$\tilde{\omega}_{1r} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_e, \qquad \tilde{\omega}_{2r} = \tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_e,$$

$$\tilde{\omega}_{3r} = \tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_e, \qquad \tilde{\omega}_{4r} = \tilde{\omega}_4 - \tilde{\omega}_e.$$

Для нашага выпадку, у якім знакі ω_1 і ω_I дадатныя, адносныя вуглавыя скорасці роўныя

$$\tilde{\omega}_{1r} = \omega_1 - \omega_I, \quad \tilde{\omega}_{2r} = \tilde{\omega}_2 - \omega_I,$$

$$\tilde{\omega}_{3r} = \tilde{\omega}_3 - \omega_I, \quad \tilde{\omega}_{4r} = \tilde{\omega}_4 - \omega_I.$$

Адносныя вуглавыя скорасці колаў адваротна прапарцыянальныя адпаведным радыусам (знак "мінус" у адносінах радыусаў узяты для вонкавага зачаплення колаў).

$$\frac{\omega_1 - \omega_{\mathrm{I}}}{\widetilde{\omega}_2 - \omega_{\mathrm{I}}} = -\frac{R_2}{R_1}; \qquad \frac{\widetilde{\omega}_3 - \omega_{\mathrm{I}}}{\widetilde{\omega}_4 - \omega_{\mathrm{I}}} = -\frac{R_4}{R_3}.$$

Колы 2 і 3 маюць аднолькавую вуглавую скорасць.

$$\omega_2 = \omega_3.$$

Падлічым ω_2 і ω_4.

$$\frac{20-120}{\widetilde{\omega}_2 - 120} = -\frac{6}{20}, \quad \frac{100}{\widetilde{\omega}_2 - 120} = \frac{3}{10},$$

$$1000 = 3\widetilde{\omega}_2 - 360, \quad \widetilde{\omega}_2 = \frac{1360}{3} = 453{,}3 \text{ рад/с}.$$

$$\frac{453{,}3-120}{\widetilde{\omega}_4 - 120} = -\frac{16}{10}, \quad \frac{333{,}3}{\widetilde{\omega}_4 - 120} = -\frac{8}{5},$$

$$1666{,}5 = 960 - 8\widetilde{\omega}_4, \quad \widetilde{\omega}_4 = -\frac{706{,}5}{8} = -88{,}3 \text{ рад/с}.$$

Вуглавая скорасць кола 4 роўная вуглавой скорасці вядзёнага вала II. Знак "мінус" у адказе паказвае, што вал II верціцца ў адваротны бок валу I.

Заданне К-12

Вызначэнне вуглавых скорасцей звёнаў рэдуктара з канічнымі коламі

Вызначыць вуглавыя скорасці вядзёнага вала II і шасцерняў рэдуктара з канічнымі коламі (рыс. 104–106). Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 21.

Прыклад рашэння задання К-12

Знайсці вуглавыя скорасці вядзёнага вала II і блока шасцерняў 2–3 (сатэліта) рэдуктара з канічнымі коламі (рыс. 103а).

$\omega_I = 100$ рад/с, $\omega_1 = -80$ рад/с, $r_1 = 30$ см, $r_2 = 20$ см, $r_3 = 35$ см, $r_4 = 40$ см.

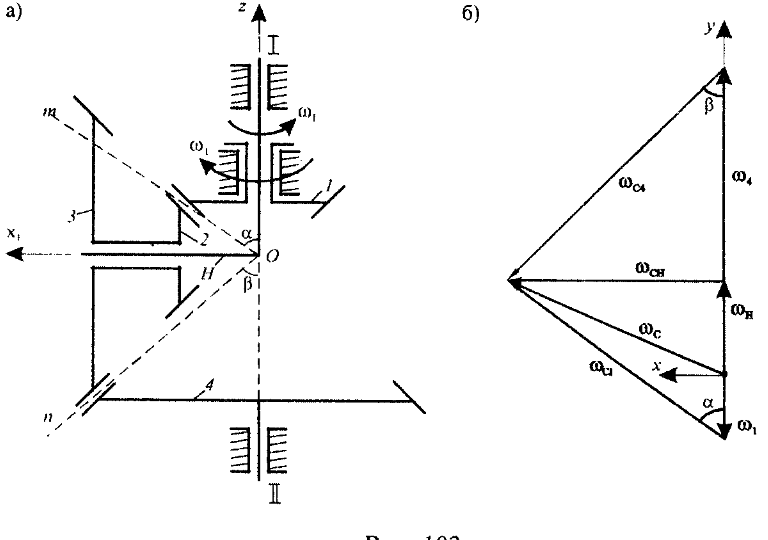
Р а ш э н н е.

1. *Выкарыстанне тэорыі складання вярчэнняў цвёрдага цела вакол восей, якія перасякаюцца.*

Сатэліт удзельнічае ў складаным руху. Калі рухомую сістэму восей каардынат замацаваць на вадзіле H, то пераносны рух сатэліта — вярчэнне з вуглавой скорасцю $\omega_H = \omega_I$ вакол вертыкальнай восі Oz. Адносны рух сатэліта — вярчэнне вакол гарызантальнай восі Ox_1 з вуглавой скорасцю ω_{CH}. Абсалютная вуглавая скорасць сатэліта

$$\boldsymbol{\omega}_C = \boldsymbol{\omega}_H + \boldsymbol{\omega}_{CH}.$$

Калі рухомую сістэму каардынат звязаць з шасцерняй 1, то пераносная вуглавая скорасць сатэліта роўная ω_1. Адносны рух — вярчэнне вакол восі Om, якая праходзіць праз нерухомы цэнтр O і пункт зачаплення сатэліта і шасцерні 1, з вуглавой скорасцю ω_{C1}.



Рыс. 103

Абсалютная вуглавая скорасць сатэліта

$$\boldsymbol{\omega}_C = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{C1}.$$

У абедзвюх вектарных роўнасцях вядомы лініі дзеяння вектараў, што запісаны ў правых частках.

З некаторага пункта O (рыс. 103б) пабудуем вектары $\boldsymbol{\omega}_H$ і $\boldsymbol{\omega}_1$. З канцоў вектараў правядзём адпаведныя лініі дзеяння вектараў $\boldsymbol{\omega}_{CH}$ і $\boldsymbol{\omega}_{C1}$ паралельна Ox_1 і Om (рыс. 103а). Пункт перасячэння з'яўляецца канцом вектара $\boldsymbol{\omega}_C$. Пакажам вектар $\boldsymbol{\omega}_C$ з пункта O.

Запішам праекцыі вектарных роўнасцей на восі Ox і Oy (рыс. 103б)

$$\omega_{Cx} = \omega_{CH};$$

$$\omega_{Cy} = \omega_H;$$

$$\omega_{Cx} = \omega_{C1}\sin\alpha;$$

$$\omega_{Cy} = -\omega_1 + \omega_{C1}\cos\alpha.$$

Адсюль падлічым модулі ўсіх невядомых вектараў.

$$\omega_{Cy} = \omega_H = \omega_I = 100 \text{ рад/с},$$

$$100 = -80 + \omega_{C1}\cdot\frac{20}{\sqrt{1300}}, \quad \omega_{C1} = 324 \text{ рад/с};$$

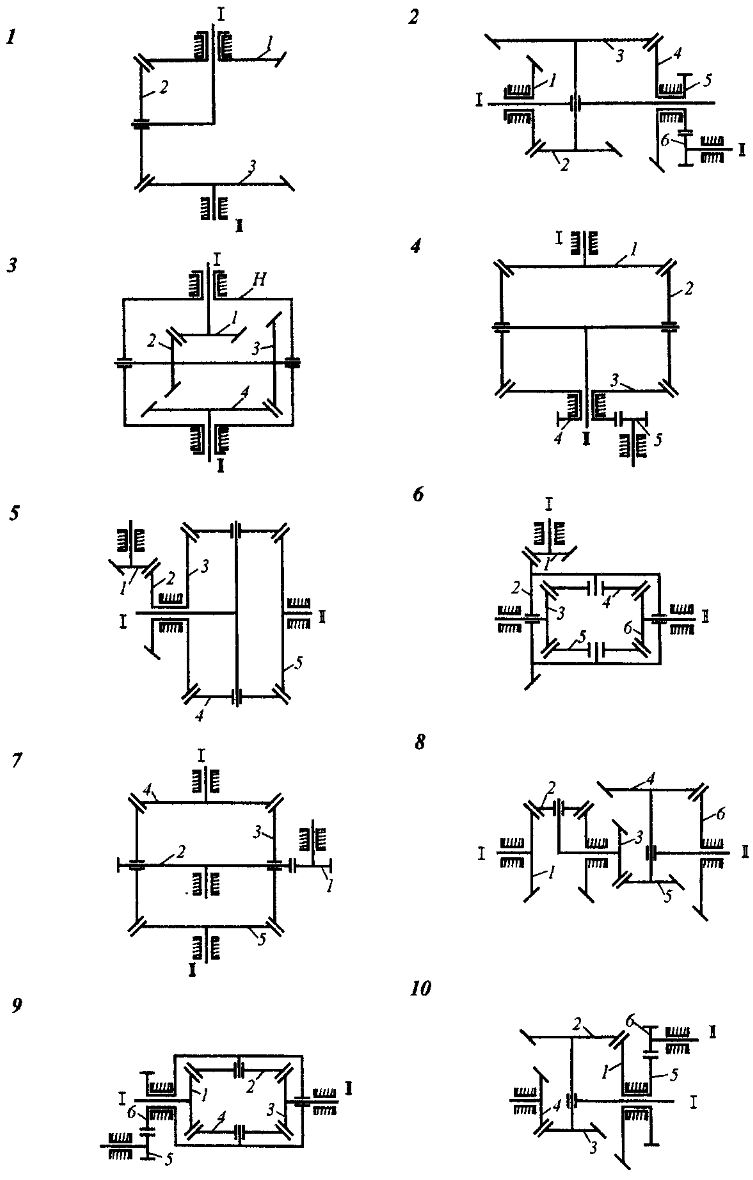
$$\omega_{Cx} = 324\cdot\frac{30}{\sqrt{1300}} = 270 \text{ рад/с};$$

$$\omega_{CH} = 270 \text{ рад/с}.$$

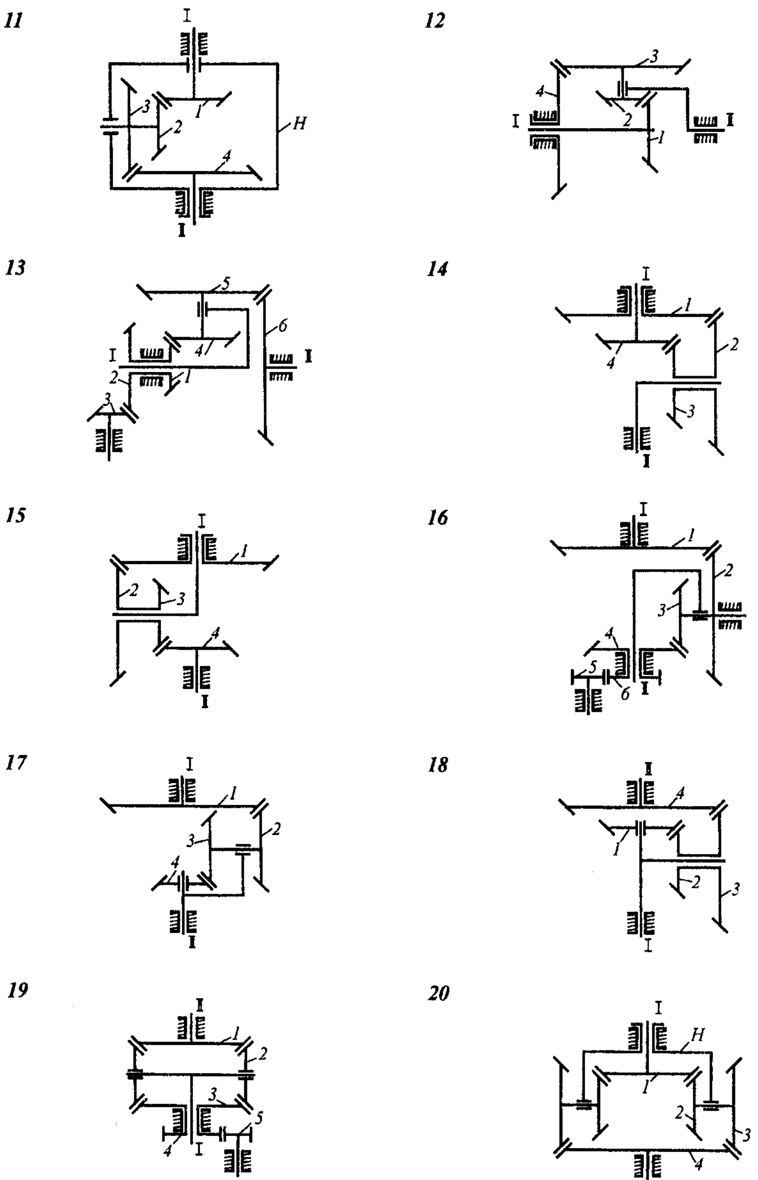
Вуглавая скорасць сатэліта роўная

$$\omega_C = \sqrt{\omega_{Cx}^2 + \omega_{Cy}^2} = \sqrt{270^2 + 100^2} = 287{,}9 \text{ рад/с}.$$

Вектар $\boldsymbol{\omega}_C$ накіраваны ўздоўж імгненнай восі вярчэння сатэліта.



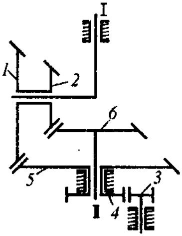
Рыс. 104



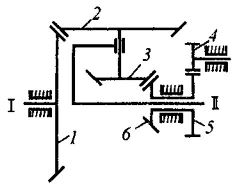
11
I
3
1
2
H
4
I
12
3
4
2
I
1
I
13
5
4
6
I
I
2
1
3
14
I
1
2
4
3
I
15
I
1
2
3
4
I
16
I
1
2
3
4
5
6
I
17
I
1
2
3
4
I
18
I
4
1
2
3
I
19
I
1
2
3
5
4
I
20
I
H
1
2
3
4
I

Рыс. 105

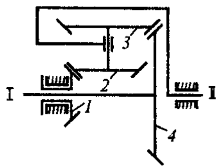
21



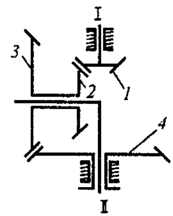
22



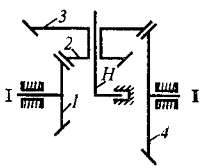
23



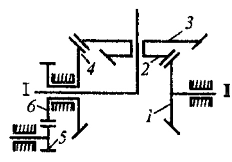
24



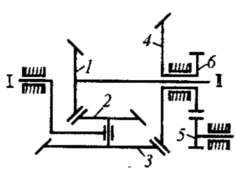
25



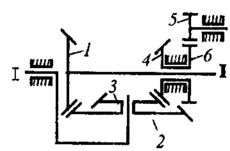
26



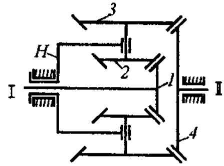
27



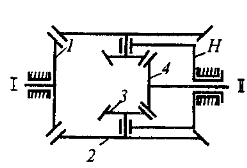
28



29



30



Рыс. 106

Табліца 21

Варыянт	Радыус, см						Вуглавая скорасць, рад/с					
	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	ω_1	ω_1	ω_3	ω_4	ω_5	ω_H
1	30	25	30				80	–200				
2	18	20	35	30	15	18	120	240				
3	15	20	32	36			140					–80
4	36	24	36	18	12		200				100	
5	16	22	40	32	40		180	90				
6	20	42	22	38	38	22	160		–70			
7	22	40	28	34	28		150	60				
8	34	16	14	30	16	40	130					
9	24	32	24	32	14	26	220				140	
10	32	30	22	20	24	18	100			–120		
11	18	14	24	34			140					–100
12	15	10	20	30			110			–90		
13	12	24	26	28	40	34	120		140			
14	40	34	24	26			180	–110				
15	36	28	22	20			90	140				
16	38	20	10	16	12	22	150				–120	
17	34	24	20	14			200			–130		
18	20	18	32	38			100	–50				
19	32	20	32	12	16		80				–100	
20	24	16	28	38			160					–40
21	26	18	22	18	40	30	60		150			
22	40	36	18	16	20	16	180			120		
23	18	22	34	40			70	–100				
24	28	32	36	34			140			–80		
25	24	20	28	32			120					–60
26	26	28	36	30	20	16	80				–130	
27	18	16	22	26	10	14	60				110	
28	30	32	20	18	10	16	50				150	
29	16	20	26	28			160					90
30	32	36	16	20			190					–50

Цяпер рухомую сістэму восей каардынат замацуем на шасцерні 4. Пераносная вуглавая скорасць сатэліта будзе роўная вуглавой скорасці ω_4. Адносна шасцерні 4 сатэліт будзе паварочвацца вакол восі *On*, якая праходзіць праз нерухомы цэнтр *O* і пункт зачаплення сатэліта з шасцерняй 4, з адноснай вуглавой скорасцю ω_{C4}.

Абсалютная вуглавая скорасць сатэліта

$$\boldsymbol{\omega}_C = \boldsymbol{\omega}_4 + \boldsymbol{\omega}_{C4}.$$

На рыс. 103б зробім пабудову вектараў з улікам таго, што вектар $\boldsymbol{\omega}_C$ ужо ведаем (паказаны на рыс. 103б), вектар $\boldsymbol{\omega}_4$ накіраваны ўздоўж восі вярчэння шасцерні 4, вектар $\boldsymbol{\omega}_{C4}$ накіраваны ўздоўж восі *On*.

Запішам праекцыі вектарнай роўнасці на восі *Ox* і *Oy*.

$$\omega_{Cx} = \omega_{C4}\sin\beta;$$

$$\omega_{Cy} = \omega_4 - \omega_{C4}\cos\beta.$$

Раней атрымалі: $\omega_{Cx} = 270$ рад/с; $\omega_{Cy} = 100$ рад/с.

Тады $\omega_{C4} = \dfrac{\omega_{Cx}}{\sin\beta}$;

$$\omega_{Cy} = \omega_4 - \frac{\omega_{Cx}\cdot\cos\beta}{\sin\beta} = \omega_4 - \omega_{Cx}\cdot\mathrm{ctg}\beta.$$

Адкуль $\omega_4 = \omega_{Cy} + \omega_{Cx}\cdot\mathrm{ctg}\beta = 100 + 270\cdot\dfrac{35}{40} = 336$ рад/с.

Вуглавая скорасць вядзёнага вала II роўная вуглавой скорасці шасцерні 4.

$$\omega_{II} = \omega_4 = 336 \text{ рад/с}.$$

Знак вуглавой скорасці ω_{II} вядзёнага вала супадае са знакам вуглавой скорасці ω_I вядучага вала, таму іх накірункі вярчэння супадаюць.

2. Спосаб Віліса.

Пры прымяненні спосабу Віліса для рэдуктара з канічнымі коламі трэба мець на ўвазе, што, калі восі вярчэння шасцерняў перасякаюцца, адносная вуглавая скорасць не можа быць атрымана як алгебраічная рознасць паміж абсалютнай і пераноснай вуглавымі скорасцямі. Гэта справядліва толькі тады, калі восі паралельныя.

Знакі перадатачных лікаў вызначаюцца ў формуле Віліса наступным чынам:

знак “плюс” прымаецца тады, калі пры назіранні з дадатных накірункаў восей пры спыненым вадзіле бачым вярчэнне шасцерняў, што знаходзяцца ў зачапленні, у адным накірунку;

знак “мінус” прымаецца ў выпадку назірання вярчэнняў, якія адбываюцца ў процілеглыя бакі.

У разглядаемым рэдуктары (рыс. 103а) вуглавая скорасць вадзіла ω_H роўная вуглавой скорасці вядучага вала ω_1. Вуглавую скорасць сатэліта адносна вадзіла абазначым ω_{CH}.

Запішам суадносіны паміж алгебраічнымі значэннямі адносных вуглавых скарасцей шасцерняў 1 і 2, а таксама для шасцерняў 3 і 4:

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_H}{\tilde{\omega}_{CH}} = -\frac{r_2}{r_1}; \qquad \frac{\tilde{\omega}_{CH}}{\tilde{\omega}_4 - \tilde{\omega}_H} = \frac{r_4}{r_3}.$$

Пры перамнажэнні левых і правых частак роўнасцей атрымаем

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_H}{\tilde{\omega}_4 - \tilde{\omega}_H} = -\frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3}.$$

Адкуль $\tilde{\omega}_4 = \tilde{\omega}_H + (\tilde{\omega}_H - \tilde{\omega}_1)\dfrac{r_1 \cdot r_3}{r_2 \cdot r_4}$.

Пасля падстаноўкі лікавых значэнняў знаходзім

$$\tilde{\omega}_4 = 100 + (100 + 80)\frac{30 \cdot 35}{20 \cdot 40} = 336 \text{ рад/с}.$$

Вядзёны вал II верціцца з вуглавой скорасцю

$$\omega_{II} = \omega_4 = 336 \text{ рад/с}.$$

Тое, што алгебраічнае значэнне $\tilde{\omega}_4$ атрымана са знакам “плюс”, пацвярджае вярчэнне вядзёнага вала II у адзін бок з вядучым валам I (супраць гадзіннікавай стрэлкі, калі назіраць з дадатнага накірунку восі Oy).

Падлічым вуглавую скорасць сатэліта адносна вадзіла.

$$\frac{\widetilde{\omega}_1-\widetilde{\omega}_H}{\widetilde{\omega}_{CH}}=-\frac{r_2}{r_1}.$$

Адкуль $\widetilde{\omega}_{CH}=(\widetilde{\omega}_H-\widetilde{\omega}_1)\dfrac{r_1}{r_2}$.

Пасля падстаноўкі лікавых значэнняў атрымаем

$$\widetilde{\omega}_{CH}=(100+80)\frac{30}{20}=270\text{ рад/с.}$$

Абсалютная вуглавая скорасць сатэліта

$$\boldsymbol{\omega}_C=\boldsymbol{\omega}_H+\boldsymbol{\omega}_{CH}.$$

З улікам таго, што $\boldsymbol{\omega}_H$ і $\boldsymbol{\omega}_{CH}$ узаемна перпендыкулярныя, атрымаем модуль $\boldsymbol{\omega}_C$ па тэарэме Піфагора:

$$\omega_C=\sqrt{\omega_H^2+\omega_{CH}^2}=\sqrt{100^2+270^2}=287{,}9\text{ рад/с.}$$

ТАБЛІЦА ВАРЫЯНТАЎ ЗАДАННЯЎ, ЯКІЯ ЎВАХОДЗЯЦЬ У РАЗЛІКОВУЮ РАБОТУ

Шыфр	Нумары заданняў												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	30	23	12	1	29	22	11	26	18	20	15	9	5
2	27	20	9	3	1	24	5	7	11	14	18	22	29
3	24	17	6	5	3	26	1	8	10	12	14	20	22
4	21	14	3	9	5	28	30	24	19	17	10	8	6
5	18	11	1	12	7	30	2	4	9	16	24	22	13
6	15	8	30	16	9	2	3	5	12	20	21	24	27
7	12	5	27	18	11	4	29	23	21	19	17	14	8
8	9	2	24	21	13	6	28	26	20	15	11	10	4
9	6	19	21	24	15	8	27	30	1	28	2	11	17
10	3	16	18	27	17	10	25	6	28	30	1	12	19
11	29	13	15	2	19	12	24	3	30	27	4	14	18
12	26	10	12	5	21	14	23	2	13	29	3	15	20
13	23	7	9	8	23	16	22	1	14	18	26	13	21
14	20	4	6	11	25	18	21	9	16	26	5	24	22
15	17	15	3	14	27	20	19	10	29	25	6	16	23
16	14	30	1	17	2	22	20	11	27	24	7	18	16
17	11	27	29	20	4	24	18	12	26	23	8	17	15
18	8	24	26	23	6	26	17	13	25	22	9	19	14
19	5	21	23	26	8	28	16	14	24	20	11	2	13
20	2	18	20	29	10	30	15	16	23	21	12	24	12
21	28	15	17	2	12	1	14	18	22	13	16	21	11
22	25	12	14	5	14	4	13	19	21	11	23	7	10
23	22	9	11	8	16	7	12	15	17	10	13	23	4
24	19	6	8	11	18	10	16	17	15	12	20	5	9
25	16	3	5	14	20	13	11	21	6	9	22	25	7
26	13	1	2	17	22	16	10	18	30	12	23	28	8
27	10	29	28	20	24	19	9	13	16	11	25	27	6
28	7	28	25	23	26	22	8	11	20	10	24	16	5
29	4	23	22	26	28	25	7	9	19	8	27	15	3
30	1	20	19	29	30	28	6	7	18	9	26	14	4
31	27	14	16	1	3	30	5	4	28	7	29	13	2
32	24	11	13	4	5	1	3	6	14	2	30	12	8
33	21	8	10	7	9	3	2	30	13	6	28	11	1
34	18	5	7	10	11	8	1	29	12	4	30	9	2
35	15	2	4	13	7	9	30	16	11	5	29	8	3
36	12	19	1	14	13	7	28	15	10	3	27	6	4
37	9	16	27	17	15	11	26	14	8	2	28	5	6
38	6	13	24	20	17	14	22	12	9	1	26	4	7
39	3	10	21	23	19	15	24	13	7	14	25	2	9
40	26	7	18	25	21	17	20	11	6	13	24	1	10

Шыфр	Нумары заданняў												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
41	23	4	15	29	25	19	18	10	5	16	22	26	11
42	20	30	12	2	23	21	16	9	4	15	27	25	18
43	17	27	9	5	29	23	14	8	3	17	21	24	12
44	14	24	6	8	27	25	12	7	2	18	20	23	13
45	11	21	3	16	4	27	10	6	1	19	18	22	14
46	8	18	1	14	6	29	8	5	30	20	19	21	15
47	5	15	26	17	8	2	6	28	29	21	16	20	17
48	2	12	23	20	10	4	1	27	28	22	17	19	21
49	25	9	20	23	12	6	4	26	27	24	15	18	19
50	22	6	17	26	14	8	2	25	24	23	13	30	20
51	19	3	14	29	16	10	30	4	26	21	12	17	22
52	16	1	11	3	18	12	29	2	25	22	14	24	23
53	13	29	8	7	20	14	28	3	23	29	11	22	24
54	10	26	5	19	22	16	27	1	21	30	9	20	25
55	7	23	2	18	24	18	26	17	22	25	10	19	27
56	4	20	25	16	26	21	24	18	2	23	8	29	28
57	1	17	22	19	28	23	25	20	3	24	7	26	29
58	24	14	19	22	30	25	23	21	4	26	6	27	1
59	21	28	16	25	5	27	22	19	20	1	4	18	26
60	18	25	13	28	7	29	21	22	19	2	5	1	30
61	15	22	10	1	9	20	19	23	18	3	2	25	3
62	12	18	7	4	11	22	20	24	17	5	3	9	2
63	9	16	4	7	13	24	18	1	15	6	30	10	5
64	6	13	1	10	15	26	17	2	16	7	29	11	4
65	3	10	24	13	17	30	16	8	14	4	28	2	6
66	23	7	21	16	19	28	15	3	13	8	1	12	18
67	20	4	18	19	21	29	14	5	12	9	27	3	7
68	17	30	15	22	23	27	13	4	11	10	26	14	8
69	14	27	12	25	29	23	11	6	10	13	25	4	9
70	11	24	9	28	25	21	12	7	8	12	23	13	10
71	8	21	6	2	27	19	10	9	7	11	24	14	12
72	5	18	3	6	1	17	9	10	4	14	22	15	11
73	2	15	23	8	3	16	7	11	9	17	21	5	13
74	22	12	20	11	5	13	8	12	16	15	19	6	14
75	19	9	17	14	7	11	6	13	5	16	20	17	15
76	16	6	14	17	9	10	5	15	3	18	30	7	20
77	13	3	11	20	14	9	4	16	6	19	29	18	17
78	10	1	8	23	13	7	3	14	2	20	28	19	16
79	7	29	5	26	15	4	2	17	1	21	27	20	18
80	4	26	2	29	17	5	1	18	3	22	23	8	19
81	1	9	22	3	19	2	30	20	4	23	26	21	24
82	21	20	19	6	23	1	29	25	5	24	22	9	27
83	18	17	16	9	21	30	28	19	6	25	24	10	20
84	15	14	13	12	25	29	27	21	7	26	20	11	22
85	12	11	10	15	27	28	26	22	8	29	21	24	23

Шыфр	Нумары заданняў												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
86	9	8	7	18	29	27	25	23	1	30	19	12	21
87	6	5	4	21	2	26	24	25	9	27	18	13	8
88	3	2	1	24	4	25	23	26	10	28	17	14	9
89	20	25	3	27	6	24	22	28	11	1	16	15	10
90	17	21	6	30	8	23	20	24	12	2	15	16	25
91	14	7	9	4	10	22	21	29	13	3	12	23	26
92	11	19	12	7	14	21	18	27	15	4	13	22	28
93	8	30	15	10	12	20	19	1	14	5	11	24	29
94	5	27	18	13	16	19	17	30	17	6	14	25	1
95	2	24	21	16	18	17	15	3	19	7	10	26	30
96	19	21	24	18	20	16	14	2	22	8	9	27	2
97	16	18	27	22	24	15	13	4	23	9	8	28	3
98	13	15	30	25	22	18	12	5	24	10	7	29	4
99	10	12	21	28	26	14	11	6	16	12	5	30	7
100	7	9	18	1	28	13	10	8	18	11	6	2	5
101	4	6	15	14	30	12	9	7	20	13	3	1	10
102	1	26	12	17	3	11	8	9	21	14	4	5	6
103	18	25	9	20	5	10	7	11	26	15	2	6	8
104	15	22	6	23	7	9	5	10	25	16	1	3	11
105	12	19	3	26	9	8	6	13	27	17	2	4	7
106	9	16	1	29	11	7	4	12	28	18	3	8	6
107	6	13	2	11	15	5	3	14	29	19	4	7	30
108	3	10	5	8	13	6	2	15	30	20	7	9	29
109	17	7	8	5	19	4	1	16	2	21	9	10	28
110	14	4	11	2	17	3	30	18	1	22	10	15	5
111	11	29	14	30	21	2	26	19	3	23	12	16	4
112	8	27	17	28	23	1	22	20	4	24	13	14	3
113	5	24	20	26	25	4	29	17	6	27	14	18	2
114	2	21	23	24	27	5	28	22	7	25	15	17	1
115	16	18	26	22	29	6	27	23	8	28	17	19	24
116	13	15	29	20	4	7	25	24	9	26	11	21	27
117	10	29	20	18	6	8	24	25	10	30	5	22	26
118	7	12	17	16	8	2	23	26	5	1	6	24	25
119	4	9	14	15	10	3	22	27	11	2	8	25	23
120	1	6	11	14	12	9	21	28	13	3	16	20	22
121	15	3	8	13	14	10	20	29	12	4	18	26	21
122	12	1	5	10	16	11	19	30	14	6	20	27	17
123	9	29	2	11	18	12	17	1	15	5	19	28	20
124	6	26	7	12	20	13	18	2	16	8	21	29	19
125	3	23	10	8	22	14	16	4	17	7	24	30	18
126	14	20	13	7	24	15	22	3	18	9	23	1	16
127	11	17	16	6	26	10	15	5	19	12	22	2	14
128	8	14	19	5	28	16	20	6	30	13	25	3	15
129	5	11	22	4	30	17	14	7	20	10	26	21	13
130	2	8	25	3	5	18	13	9	21	11	27	4	12

Шыфр	Нумары заданняў												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
131	13	5	28	2	7	19	12	8	22	14	29	23	11
132	10	2	30	1	9	20	11	12	23	15	28	5	18
133	7	19	27	29	11	21	10	9	24	16	30	6	20
134	4	16	24	28	13	22	9	14	25	17	1	7	10
135	1	13	21	27	15	23	8	16	26	18	2	22	9
136	3	10	18	26	17	24	7	11	27	19	4	8	25
137	16	7	15	25	19	26	6	10	28	20	3	9	8
138	9	4	12	24	21	25	5	13	29	22	7	10	28
139	12	1	9	23	25	27	4	15	2	21	5	11	7
140	15	30	6	22	23	28	3	16	1	24	8	12	21
141	18	27	3	21	29	30	2	17	4	23	6	13	22
142	21	24	1	20	27	6	30	18	3	25	9	14	29
143	24	21	2	19	1	8	7	20	5	26	10	15	6
144	27	18	5	16	3	10	29	19	6	28	11	24	23
145	30	15	8	17	5	12	28	21	7	27	13	16	5
146	29	12	11	18	7	14	27	22	8	30	15	17	4
147	26	9	14	15	11	16	25	23	10	29	12	18	3
148	23	6	17	14	9	18	26	24	11	1	16	19	2
149	20	3	20	13	15	22	24	25	12	2	14	26	1
150	22	1	23	12	17	24	28	26	9	4	18	20	30

ЛІТАРАТУРА

1. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1968.— 419 с.

2. Бать М.И. , Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 2 т. М.: Наука, 1990. Т. 1.— 670 с.

3. Хвясько Г.М. Курс тэарэтычнай механікі. Мн.: БДТУ, 2000.— 353 с.

4. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. СПб.: Лань, 2001.— 764 с.

ЗМЕСТ

КІНЕМАТЫКА

Вучэбнае выданне

Хвясько Генадзій Міхайлавіч

ТЭАРЭТЫЧНАЯ МЕХАНІКА

Практыкум

У 2-х частках

Частка 1

Рэдактар М.П. Мурашка
Карэктар Я.І. Гоман
Камп'ютэрная вёрстка І.А. Кананові́ч

Падпісана да друку 18.02.04. Фармат 60×84 $^1/_{16}$.
Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Друк афсетны.
Ум. друк. арк. 12,4. Ул.-выд. арк. 10,6.
Тыраж 1000 экз. Заказ 85 .

Установа адукацыі
«Беларускі дзяржаўны тэхналагічны універсітэт».
220050. Мінск, Свярдлова, 13а. Ліцэнзія ЛВ № 276 ад 15.04.03.

Аддрукавана ў лабараторыі паліграфіі ўстановы адукацыі
«Беларускі дзяржаўны тэхналагічны універсітэт».
220050. Мінск, Свярдлова, 13.

Пераплётна-брашуровачныя працэсы выкананы
ў ААТ «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа».
220600. Мінск, Чырвоная, 23. Заказ 590 .