Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра технологии деревообрабатывающих производств

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ В ДЕРЕВООБРАБОТКЕ

**Программа, методические указания
и контрольные задания для студентов
заочной формы обучения специальности
1-46 01 02 «Технология деревообрабатывающих производств»**

Минск 2009

УДК 519.863:674(073)
ББК 22.1я73
Б74

Рассмотрены и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета.

Составитель
Е. А. Бучнева

Рецензент
кандидат экономических наук, доцент кафедры экономики
и управления на предприятиях химико-лесного комплекса БГТУ
И. И. Пищ

По тематическому плану изданий учебно-методической литературы университета на 2009 год. Поз. 100.

Для студентов заочной формы обучения специальности 1-46 01 02 «Технология деревообрабатывающих производств».

ПРЕДИСЛОВИЕ

В инженерной практике и научных исследованиях возникает необходимость решать задачи, связанные с определением наилучшего или оптимального состояния системы, принимать по заданным критериям проектные или организационно-управленческие решения на основании опыта и интуиции исследователя. В более сложных ситуациях приходится обращаться к математическим методам нахождения оптимального варианта.

По дисциплине «Моделирование и оптимизация процессов в деревообработке» учебным планом в IX семестре предусмотрено написание контрольной работы, которая включает вопросы по теории и задачи.

Контрольную работу необходимо выполнить в соответствии со следующими правилами:

1) студент должен дать ответ на два вопроса и решить три задачи (табл. 1). Ответы на вопросы должны быть краткими и отражать глубину рассматриваемой темы. Их следует дополнить списком используемой литературы, оформленной в соответствии с СТП БГТУ 002-2007;

Таблица 1

Номера контрольных вопросов по теории и вариантов задач

Буква фамилии	Контрольные вопросы		Варианты задач		
	1	2	1	2	3
А	1	21	1	20	1
Б	2	22	2	19	2
В	3	23	3	18	3
Г	4	24	4	17	4
Д	5	25	6	15	6
Ж, З	7	27	7	14	7
И, Й, К	8	28	8	13	8
Л	9	29	9	12	9
М	10	30	10	11	10
Н	11	31	11	10	1
О	12	32	12	9	12
П	13	33	13	8	13
Р	14	34	14	7	14
С	15	35	15	6	15
Т	16	36	16	5	16
У, Ф	17	37	17	4	17

Окончание табл. 1

Буква фамилии	Контрольные вопросы		Варианты задач		
	1	2	1	2	3
Х, Ц, Ч	18	38	18	3	18
Ш, Щ, Ъ, Ы	19	39	19	2	19
Э, Ю, Я, Ь	20	40	20	1	20

2) студент должен выполнить контрольную работу только в соответствии со своим вариантом;

3) ответы на вопросы и решение задач необходимо представлять в порядке возрастания их номеров. Перед каждым ответом следует записать вопрос, а перед решением задачи – ее содержание;

4) контрольная работа, выполненная неправильно или с нарушением вышеперечисленных правил, возвращается студенту для исправлений. Исправленная работа должна быть выслана в университет до начала сессии.

Студент допускается к экзамену по курсу после собеседования с преподавателем по контрольной работе.

Для того чтобы определить номера контрольных вопросов по теории и вариантов задач, студент записывает свою фамилию и напротив каждой буквы ставит цифры (соответствующие номерам вопросов и вариантов задач), которые находит на пересечении буквенной и цифровой координат табл. 1.

Например, студент

Д	**я**	**т**	**к**	**о**
1	**2**	**1**	**2**	**3**

находит следующие контрольные вопросы: **Д-1 – № 5**, **я-2 – № 40**; варианты задач: **т-1 – № 16**, **к-2 – № 13**, **о-3 – № 12**.

1. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Введение

Исследование операций – научная дисциплина. Цель исследования операций. Понятие операции. Модель и эффективность операции. Выбор критерия эффективности. Общая постановка задачи исследования операций. Факторы постоянные и переменные, входящие в описание операции.

Роль оптимизационных методов в ускорении научно-технического прогресса в деревообрабатывающей промышленности.

1.2. Моделирование и постановка оптимизационных задач в деревообработке

Понятие о задачах оптимизации и исследовании операций. Классификация моделей в деревообработке. Оптимизационные модели в деревообработке. Обоснование, выбор и требования к критерию оптимизации. Критерий приведенного дохода. Понятие о многокритериальных задачах исследования операций.

1.3. Оптимизация технологических процессов деревообрабатывающих производств с применением методов математического программирования

Примеры моделей линейного программирования: модели задач формирования производственной программы деревообрабатывающего предприятия, оптимального раскроя плитных материалов и длинномерного сырья на заготовки, рационального использования ресурсов. Методы решения задач. Оптимизация перевозок лесных грузов с применением методов решения транспортных задач линейного программирования. Задачи линейного программирования, приведенные к транспортной: распределительная задача о загрузке оборудования, задача о выпуске продукции филиалами производственного объединения, задача о назначениях.

Задачи целочисленного программирования. Понятие о методах решения задач целочисленного программирования: методы отсечения, комбинаторные, приближенные.

Задачи нелинейного программирования. Постановка задачи. Методы поиска экстремума. Методы нелинейного программирования. Градиентный метод нелинейного программирования. Необходимое и достаточное условие экстремума.

1.4. Применение методов календарного, сетевого планирования и управления запасами в деревообработке. Элементы теории массового обслуживания

Методы составления календарных планов. График Ганта. Алгоритм Джонсона для задачи о двух станках и некоторые его обобщения. Применение их для установления оптимальной последовательности запуска деталей в обработку в мебельном производстве.

Методы сетевого планирования. Оптимальное планирование комплекса ремонтных работ. Построение сетевой модели технологического процесса.

Задачи управления запасами в деревообработке. Математическая модель управления запасами. Оптимальный объем запаса. Формула Уилсона.

Предмет теории массового обслуживания. Классификация систем массового обслуживания. Одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью. Формула Литтла.

1.5. Имитационное моделирование процессов деревообработки

Сущность имитационного моделирования. Этапы имитационного моделирования. Построение имитационной модели процесса облицовывания мебельных деталей.

2. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Роль оптимизационных методов в организации и управлении производственными процессами.
2. Классификация моделей.
3. Выбор и требования к критерию оптимальности.
4. Многокритериальные задачи.
5. Постановка задачи и математическая модель формирования производственной программы предприятия.
6. Задача о рациональном использовании ресурсов.
7. Постановка задачи и математическая модель оптимизации раскроя плитных материалов. Критерий – максимум количества комплектов.
8. Постановка задачи и математическая модель оптимизации раскроя плитных материалов. Критерий – минимум отходов.
9. Постановка задачи и математическая модель оптимизации раскроя плитных материалов. Критерий – минимальный расход плит при заданном количестве комплектов заготовок для изделия мебели.
10. Применение методов линейного программирования для решения задачи раскроя длинномерного сырья. Критерий – минимум отходов.
11. Математическая модель транспортной задачи. Методы нахождения опорного и оптимального планов.
12. Задачи линейного программирования, которые приводятся к транспортной. Распределительная задача.
13. Задача о назначениях.
14. Задача о реконструкции.
15. Задача о выпуске продукции филиалами производственного объединения.
16. Методы поиска экстремума для одной переменной. Необходимое и достаточное условие экстремума. Задача оптимизации размеров оконного блока.
17. Численные методы поиска экстремума одной переменной. Градиентный метод.
18. Методы поиска экстремума функции двух переменных. Необходимое и достаточное условие экстремума.
19. Задача оптимизации размеров тарного ящика.
20. Метод покоординатного поиска.
21. Метод поиска экстремума функции двух переменных. Градиентный метод.

22. Задачи целочисленного программирования в деревообработке.

23. Методы решения задач целочисленного программирования.

24. Алгоритм решения задачи целочисленного программирования методом Р. Гомори.

25. Методы календарного планирования. Алгоритм Джонсона для оптимизации времени обработки деталей на двух станках. График Ганта.

26. Задача календарного планирования о трех и более станках для мебельного производства. Алгоритм решения задачи. Назначение графика Ганта.

27. Методы сетевого планирования и управления. Области применения.

28. Сетевая модель. Элементы сетевой модели.

29. Правила построения сетевой модели.

30. Правила расчета сетевой модели. Определение критического пути.

31. Система массового обслуживания. Элементы системы. Классификация.

32. Одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью. Расчет числа заявок в системе, в очереди. Формула Литтла.

33. Задачи управления запасами в деревообработке. Факторы, влияющие на объем и размеры запасов.

34. Оптимальный объем партии. Формула Уилсона.

35. Математическая модель управления запасами.

36. Оптимальное число пополнений запасами в течение планового периода и интервал времени между двумя последовательными поставками.

37. Имитационное моделирование процессов деревообработки. Его сущность.

38. Этапы имитационного моделирования.

39. Области применения имитационного моделирования.

40. Построение имитационной модели процесса облицовывания мебельных деталей.

При ответах на вопросы использовать рекомендованную литературу.

3. ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ

3.1. Задача о выпуске продукции при ограниченных ресурсах

Мебельное предприятие выпускает два вида изделий: шкафы и столы. В производстве применяется оборудование трех типов: фрезерные, сверлильные и шлифовальные станки. Нормы времени работы каждого вида оборудования, необходимые для изготовления одного изделия, известны и приведены в табл. 2.

Таблица 2

Нормы и ресурсы работы станков

Изделие	Время работы станков, ч			Ограничение на спрос продукции
	фрезерных	сверлильных	шлифовальных	
Шкаф	$a_1 =$	$a_2 =$	$a_3 =$	$c_1 =$
Стол	$b_1 =$	$b_2 =$	$b_3 =$	$c_2 =$
Ресурс времени	$T_1 =$	$T_2 =$	$T_3 =$	

Предприятие получает прибыль от изготовления одного шкафа в размере $П_1$ ден. ед. и одного стола – в размере $П_2$ ден. ед. Требуется определить план выпуска изделий каждого вида, при котором время работы оборудования не превысит допустимого ресурса, учтен спрос на продукцию и будет получена наибольшая прибыль.

Задания для индивидуального решения представлены в табл. 3.

Таблица 3

Задания для индивидуального решения

Параметры	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	5	3	3	3	5	1	1	3	3	3
a_2	4	5	1	3	4	2	4	3	2	5
a_3	5	4	4	3	4	1	5	2	1	1
b_1	2	4	4	2	2	4	2	3	3	4
b_2	1	4	1	4	1	4	1	4	4	4
b_3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
c_1	38	–	25	34	–	23	–	–	–	–
c_2	–	36	–	–	30	–	31	23	28	24
T_1	258	228	223	180	220	147	94	147	165	192
T_2	186	284	62	258	158	170	159	170	166	256
T_3	205	126	153	174	153	28	190	82	54	47
$П_1$	8	7	5	5	11	11	9	12	6	10
$П_2$	3	7	6	5	3	40	16	14	7	9

Окончание табл. 3

Параметры	Вариант									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_1	3	2	2	3	1	4	4	2	1	4
a_2	1	5	1	2	3	3	5	4	4	5
a_3	2	3	5	2	3	3	4	3	3	5
b_1	5	4	5	5	3	2	5	3	5	4
b_2	3	5	2	3	3	5	5	5	2	2
b_3	1	0	4	0	0	0	0	0	0	0
c_1	–	28	35	–	–	24	–	32	20	–
c_2	29	–	–	33	23	–	30	–	–	21
T_1	238	168	210	273	104	166	250	163	170	168
T_2	118	280	91	171	174	247	275	293	140	147
T_3	123	146	371	119	145	91	171	197	70	135
$П_1$	10	9	7	9	7	14	5	9	6	10
$П_2$	27	12	16	14	15	11	6	12	23	8

Методические указания к решению задачи

Методы линейной оптимизации рассмотрены в работе [5]. Для решения задачи необходимо выполнить следующие действия:

– составить математическую модель задачи;

– решить полученную задачу линейного программирования графическим и симплекс-методом.

Пример постановки и решения задачи представлен в приложении 1.

3.2. Транспортная задача

Три производственных деревообрабатывающих объединения – ОАО «Мостовдрев» (A_1), ОАО «Речицадрев» (A_2) и ЗАО «Пинскдрев» (A_3) – поставляют древесностружечные плиты на пять предприятий по изготовлению корпусной мебели – ОАО «Гродненская мебельная фабрика» (B_1), Лидская мебельная фабрика (B_2), ОАО «ФанДОК» (B_3), ОАО «Могилевдрев» (B_4) и ОАО «Слуцкая Мебельная фабрика» (B_5). Запасы груза в пунктах отправления составляют соответственно a_1, a_2 и a_3 ед. При этом суммарный запас груза у поставщиков равен сумме потребностей потребителей (т. е. задача закрытая):

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j .$$

Затраты на перевозку единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю известны и равны c_{ij} ден. ед. Требуется определить оптимальный план перевозок груза, т. е. найти количество груза x_{ij}, которое необходимо перевезти от каждого поставщика каждому потребителю таким образом, чтобы все запасы были вывезены из пунктов отправления, удовлетворены потребности в грузе всех пунктов назначения и при этом суммарные затраты на все перевозки были минимальными.

Исходный план транспортной задачи представлен в табл. 4.

Таблица 4

Исходный план транспортной задачи

Поставщик	Запас груза поставщика, м^3	Потребитель				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	c_{14} x_{14}	c_{15} x_{15}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	c_{24} x_{24}	c_{25} x_{25}
A_3	a_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	c_{34} x_{34}	c_{35} x_{35}
Потребность потребителя в грузе		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5

Данные в соответствии со своим вариантом принять из табл. 5.

Таблица 5

Задания для индивидуального решения

Параметры	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	180	410	390	530	200	110	200	400	230	210
a_2	380	140	270	160	380	210	180	130	250	660
a_3	90	380	120	250	290	210	380	180	100	80
b_1	120	170	330	300	110	80	220	90	100	240
b_2	10	160	100	90	170	120	120	120	90	80
b_3	110	130	220	290	110	110	140	200	110	140
b_4	180	230	50	90	250	100	90	150	120	200
b_5	140	240	180	170	230	120	190	150	160	290
c_{11}	3	6	4	8	7	4	7	4	2	5
c_{12}	5	6	8	4	7	7	3	5	7	4
c_{13}	7	4	6	6	4	4	6	3	7	8
c_{14}	7	7	3	2	3	3	3	6	6	5
c_{15}	4	4	3	3	7	7	7	3	3	4

Продолжение табл. 5

Параметры	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_{21}	3	3	2	3	4	6	8	4	5	4
c_{22}	7	7	6	6	6	3	4	2	6	4
c_{23}	4	6	6	8	4	2	4	3	7	3
c_{24}	6	3	2	3	8	6	3	5	2	4
c_{25}	4	2	6	6	4	6	5	3	2	2
c_{31}	8	6	3	8	4	7	5	5	2	2
c_{32}	4	6	7	3	8	2	5	3	2	8
c_{33}	4	7	4	4	4	7	2	2	5	6
c_{34}	8	2	5	2	6	8	3	8	7	5
c_{35}	4	7	5	5	5	3	7	8	7	8

Окончание табл. 5

Параметры	Вариант									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_1	180	230	90	230	80	150	250	190	240	320
a_2	100	260	510	340	200	100	200	210	230	280
a_3	230	250	190	200	220	360	130	200	150	200
b_1	120	90	160	180	70	50	70	140	110	140
b_2	70	240	180	220	130	120	80	50	170	150
b_3	80	80	140	130	60	160	140	120	180	120
b_4	130	100	160	140	100	110	140	100	70	210
b_5	110	230	150	100	140	170	150	190	90	180
c_{11}	5	6	6	8	5	5	7	4	3	6
c_{12}	5	7	2	2	7	3	4	6	6	5
c_{13}	7	4	5	7	7	5	5	4	6	6
c_{14}	2	8	8	4	3	4	6	5	5	4
c_{15}	3	5	7	4	6	6	3	4	4	6
c_{21}	5	2	8	6	3	7	7	4	7	3
c_{22}	4	3	2	3	7	6	5	6	7	7
c_{23}	4	8	5	3	5	6	6	7	4	8
c_{24}	8	8	4	6	4	5	2	4	8	6
c_{25}	8	3	6	4	6	4	7	8	2	8
c_{31}	4	8	6	5	6	8	8	4	7	5
c_{32}	5	2	6	2	4	2	4	5	8	4
c_{33}	3	6	4	3	7	3	2	5	8	4
c_{34}	6	8	3	2	5	7	8	7	6	8
c_{35}	4	2	6	7	8	8	7	7	7	5

Методические указания к решению задачи

Разработка математической модели транспортной задачи и ее анализ рассмотрены в работе [5].

Для решения задачи необходимо выполнить следующие действия:

1) представить исходные данные в виде плана перевозок;
2) составить математическую модель;
3) разработать опорный план перевозок методом наименьшего элемента;
4) использовать метод потенциалов для поиска оптимального плана перевозок груза;
5) произвести расчет затрат для каждого плана перевозок;

Пример постановки и решения задачи представлен в приложении 2.

3.3. Задача календарного планирования

На участок механической обработки поступает пять деталей (n = 5) из мебельного щита для комбинированного шкафа. Они последовательно проходят обработку на линии СГВП-1А (1) сверлением и на станке ШлПС-9 (2) шлифованием. Продолжительность обработки деталей указана в табл. 6. Требуется определить оптимальный порядок запуска этих деталей в обработку.

Таблица 6

Исходные данные задачи календарного планирования

Номер станка	Продолжительность обработки на станках детали n, мин				
	1	2	3	4	5
1	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}
2	t_{21}	t_{22}	t_{23}	t_{24}	t_{25}

Задания для индивидуального решения представлены в табл. 7.

Методические указания к решению задачи

Методы календарного планирования рассмотрены в работе [5]. Для решения задачи необходимо выполнить следующие действия:

1) выписать свой вариант в виде таблицы; определить оптимальный порядок запуска деталей в обработку, используя алгоритм Джонсона;

2) для нахождения оптимальной последовательности запуска деталей построить график Ганта и по нему определить оптимальное время обработки всех деталей.

Пример постановки и решения задачи календарного планирования представлен в приложении 3.

Таблица 7

Задания для индивидуального решения

Номер варианта	Номер станка	Продолжительность обработки на станках детали n, мин				
		1	2	3	4	5
1	1	7	4	5	3	1
	2	5	3	8	4	2
2	1	9	6	7	4	3
	2	5	5	4	6	8
3	1	8	2	6	5	3
	2	7	4	5	9	8
4	1	1	6	2	5	9
	2	4	3	7	5	6
5	1	2	4	3	5	7
	2	5	3	8	9	4
6	1	7	4	5	3	8
	2	7	6	3	9	7
7	1	6	7	3	8	2
	2	4	5	7	9	1
8	1	7	11	9	8	12
	2	10	9	6	9	5
9	1	3	7	5	8	6
	2	9	4	5	3	7
10	1	8	6	5	10	4
	2	5	3	8	9	2
11	1	3	2	4	1	6
	2	5	4	3	7	4
12	1	7	6	11	9	5
	2	9	2	8	6	7
13	1	3	5	1	4	7
	2	4	4	8	9	6
14	1	8	6	7	4	9
	2	9	5	6	7	8
15	1	3	5	2	4	8
	2	6	4	1	5	7
16	1	5	3	7	8	12
	2	9	4	5	7	6
17	1	3	1	2	8	7
	2	6	5	9	4	6
18	1	9	5	11	7	8
	2	10	4	6	9	5
19	1	7	4	8	5	9
	2	8	5	6	4	3
20	1	4	7	8	9	6
	2	6	9	7	5	11

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Пример решения задачи о выпуске продукции при ограниченных ресурсах

Исходные данные для решения задачи представлены в табл. 1.

Таблица 1

Ресурсы

Изделие	Время работы станков, ч			Ограничение на спрос продукции
	фрезерных	сверлильных	шлифовальных	
Шкаф	$a_1 = 2$	$a_2 = 5$	$a_3 = 1$	$c_1 = 0$
Стол	$b_1 = 3$	$b_2 = 1$	$b_3 = 0$	$c_2 = 33$
Ресурс времени	$T_1 = 151$	$T_2 = 163$	$T_3 = 29$	

Решение задачи начинаем с формирования математической модели.

Целевая функция

$$W = 9x_1 + 5x_2 \to \max, \tag{1}$$

где $П_1 = 9$; $П_2 = 5$.

Ограничения по ресурсам времени:

1) для фрезерных станков

$$2x_1 + 3x_2 \leq 151; \tag{2}$$

2) сверлильных станков

$$5x_1 + x_2 \leq 163; \tag{3}$$

3) шлифовальных станков

$$x_1 + 0x_2 \leq 29. \tag{4}$$

Ограничение по спросу на столы:

$$0x_1 + x_2 \leq 33. \tag{5}$$

Выпуск продукции не может быть отрицательным, поэтому дополнительно вводим ограничения неотрицательности переменных:

$$x_1 \geq 0; \tag{6}$$
$$x_2 \geq 0. \tag{7}$$

Итак, получена первоначальная модель задачи, состоящая из целевой функции и шести ограничений. Математически задачу можно сформулировать следующим образом. При решении системы неравенств (1)–(7) необходимо найти такие значения переменных, при которых целевая функция (1) принимает максимальное значение.

Для решения задачи графическим методом построим на координатной плоскости прямые, соответствующие ограничениям задачи (см. рисунок), записанным в виде равенств

$$2x_1 + 3x_2 = 151 \text{ (прямая } \mathit{1}\text{)}; \tag{8}$$

$$5x_1 + x_2 = 163 \text{ (прямая } \mathit{2}\text{)}; \tag{9}$$

$$x_1 + 0x_2 = 29 \text{ (прямая } \mathit{3}\text{)}; \tag{10}$$

$$0x_1 + x_2 = 33 \text{ (прямая } \mathit{4}\text{)}; \tag{11}$$

$$x_1 = 0 \text{ (прямая } \mathit{5}\text{)}; \tag{12}$$

$$x_2 = 0 \text{ (прямая } \mathit{6}\text{)}. \tag{13}$$

Каждая прямая делит плоскость на две полуплоскости. Координаты любой точки, принадлежащей одной из них, удовлетворяют исходному неравенству, координаты точек другой полуплоскости – нет. Стрелками показаны полуплоскости, в которых условия неравенств выполняются. Можно видеть, что все они одновременно выполняются только в заштрихованной области (многоугольник *OABCD*). Следовательно, данная область является областью допустимых решений (ОДР), т. е. решение задачи находится в точке, принадлежащей многоугольнику *OABCD*.

Итак, все точки области *OABCD* удовлетворяют всем ограничениям математической модели задачи, но лишь в одной из этих точек целевая функция W принимает максимальное значение. Для того чтобы найти точку максимума функции W, необходимо построить градиент функции $\vec{W}$, т. е. вектор, который показывает направление наиболее быстрого возрастания функции.

Данный вектор проходит через точку (0; 0) и точку (9; 5). Далее необходимо построить прямую целевой функции $W = 9x_1 + 5x_2$, выбрав любое значение $W = \text{const}$, при котором прямая имеет общие точки с областью допустимых решений.

Так, например, на рисунке построена прямая целевой функции при значении $W = 90$. Перемещаем данную прямую в направлении вектора $\vec{W}$ до пересечения с последней точкой многоугольника *OABCD*. В рассматриваемом примере эта точка B, координаты которой являются решением задачи. Их находят путем совместного решения уравнений прямых, на пересечении которых находится точка B, т. е. прямой *1* и прямой *2*:

$$5x_1 + x_2 = 163;$$
$$2x_1 + 3x_2 = 151.$$

При решении системы уравнений получаем $x_1 = 26$, $x_2 = 33$.

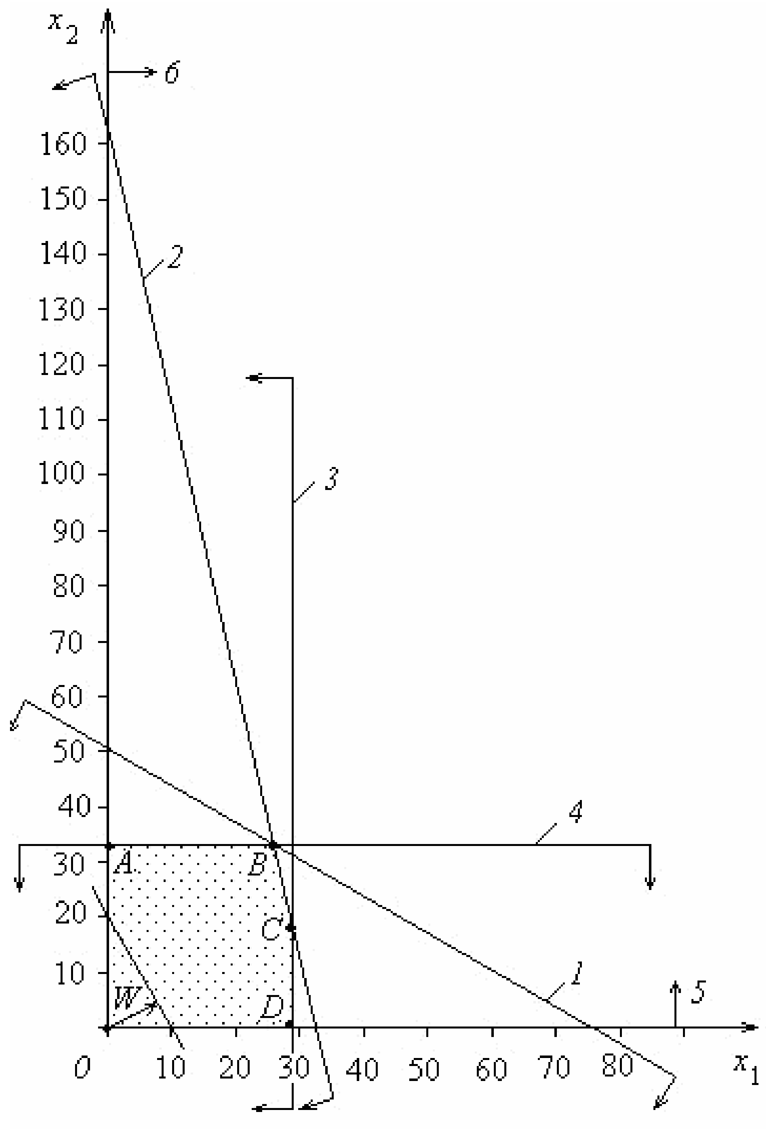

Рисунок. Геометрическая интерпретация решения задачи линейного программирования

В этой же точке B проходит прямая *4* ($0x_1 + x_2 = 33$), которая указывает на ограничение по выпуску столов. При анализе уравнения (4) можно видеть, что на операции шлифования ресурс времени не используется в полном объеме. Резерв времени в данном случае составляет 3 ч.

Вычислим целевую функцию при полученных значениях переменных:

$$W = 9 \cdot 26 + 5 \cdot 33 = 399 \text{ ден. ед.}$$

Итак, максимальная прибыль, равная 399 ден. ед., будет получена при изготовлении 26 шкафов и 33 столов.

Теперь решим эту же задачу *симплекс-методом*. В условии задачи ограничения (2)–(7) представлены в виде линейных неравенств. Преобразуем их в эквивалентные уравнения. Для этого в неравенства введем дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 и x_6. Тогда ограничения примут вид линейных следующих уравнений:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 151; \tag{14}$$

$$5x_1 + x_2 + x_4 = 163; \tag{15}$$

$$x_1 + 0x_2 + x_5 = 29; \tag{16}$$

$$0x_1 + x_2 + x_6 = 33. \tag{17}$$

Переменные x_3, x_4 и x_5 – это недоиспользованные ресурсы рабочего времени соответственно фрезерных, сверлильных и шлифовальных станков. Переменная x_6 – выполнение условия по ограничению выпуска столов в связи с их спросом и наличием на предприятии ресурсов. Дополнительные переменные, так же как и основные, должны быть неотрицательными.

Целевая функция в условии задачи, приведенная к каноническому виду, представляется в расширенном виде:

$$W = 9x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \max. \tag{18}$$

Представленная система линейных уравнений (14)–(18) имеет множество решений. Нас интересует лишь такое, которое обеспечивало бы получение максимальной суммарной прибыли от реализации продукции. Поэтому задачу можно сформулировать следующим образом: необходимо найти такое неотрицательное решение системы линейных уравнений, при котором целевая функция достигает максимального значения.

Решение задачи по алгоритму симплекс-метода представлено в табл. 2–5.

Первая итерация – это исходная программа, отражающая состояние производства, когда еще ничто не вырабатывается, никакие производственные ресурсы не расходуются и прибыль соответственно равна нулю.

Таблица 2

Первая итерация

		C_j	9	5	0	0	0	0	β
C_i	P_i	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	151	2	3	1	0	0	0	75,5
0	x_4	163	5	1	0	1	0	0	32,6
0	x_5	29	1	0	0	0	1	0	29
0	x_6	33	0	1	0	0	0	1	–
$W = 0$			–9	–5	0	0	0	0	Δ_{ij}

Необходимо обратить внимание на то, что в столбце B представлено имеющееся рабочее время станков. Коэффициенты при переменных – это нормы расхода этого времени на единицу продукции. Поэтому делением ресурса времени станков на нормы получаем количество единиц продукции, которое указываем в столбце β. Для нахождения разрешающей строки принимаем минимальное значение из этих отношений, так как большее количество единиц продукции не будет обеспечено возможностями всех станков.

В качестве разрешающего столбца выбираем тот, который имеет наибольшее по модулю отрицательное значение Δ_{ij}, указывающее прибыль на единицу продукции.

Следуя алгоритму симплекс-метода, производим соответствующие преобразования, результаты которых представлены в табл. 3–5. Признаком оптимальности плана является отсутствие в оценочной строке отрицательных значений.

Анализируя данные табл. 5, можно видеть, что максимальная прибыль, равная 399 ден. ед., будет получена при изготовлении и реализации 26 шкафов и 33 столов. При производстве полностью будет использован ресурс времени фрезерных и сверлильных станков. Неиспользованными являются 3 ч шлифовальных станков. Спрос на столы будет удовлетворен полностью.

Таблица 3

Вторая итерация

		C_j	9	5	0	0	0	0	β
C_i	P_i	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	93	0	3	1	0	–2	0	31
0	x_4	18	0	1	0	1	–5	0	18
9	x_1	29	1	0	0	0	1	0	–
0	x_6	33	0	1	0	0	0	1	33
$W = 261$			0	–5	0	0	9	0	Δ_{ij}

Таблица 4

Третья итерация

		C_j	9	5	0	0	0	0	β
C_i	P_i	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	39	0	0	1	–3	13	0	3
5	x_2	18	0	1	0	1	–5	0	–
9	x_1	29	1	0	0	0	1	0	29
0	x_6	15	0	0	0	–1	5	1	15
	$W = 351$		0	0	0	5	–16	0	Δ_{ij}

Таблица 5

Четвертая итерация

		C_j	9	5	0	0	0	0	β
C_i	P_i	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_5	3							
5	x_2	33							
9	x_1	26							
0	x_6	0							
	$W = 399$		0	0	1,23	8,7	0	0	Δ_{ij}

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Пример решения транспортной задачи

Исходные данные для решения задачи представлены в табл. 1.

Таблица 1

Условие задачи

Поставщик	Запас груза поставщика, м^3	Потребитель					Потенциал поставщика
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	$a_1 = 70$	$c_{11} = 6$ x_{11}	$c_{12} = 2$ x_{12}	$c_{13} = 4$ x_{13}	$c_{14} = 5$ x_{14}	$c_{15} = 7$ x_{15}	u_1
A_2	$a_2 = 120$	$c_{21} = 6$ x_{21}	$c_{22} = 3$ x_{22}	$c_{23} = 7$ x_{23}	$c_{24} = 5$ x_{24}	$c_{25} = 6$ x_{25}	u_2
A_3	$a_3 = 480$	$c_{31} = 2$ x_{31}	$c_{32} = 7$ x_{32}	$c_{33} = 8$ x_{33}	$c_{34} = 7$ x_{34}	$c_{35} = 8$ x_{35}	u_3
Потребность потребителя в грузе		$b_1 = 170$	$b_2 = 100$	$b_3 = 80$	$b_4 = 100$	$b_5 = 220$	
Потенциал потребителя		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	

Сумма запаса груза у поставщиков:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 70 + 120 + 480 = 670.$$

Сумма потребностей в грузе у потребителей:

$$\sum_{j=1}^{5} b_i = 170 + 100 + 80 + 100 + 220 = 670.$$

Поскольку $\Sigma a_i = \Sigma b_j$, транспортная задача является закрытой.
Целевая функция задачи:

$$W = 6x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 5x_{14} + 7x_{15} + 6x_{21} + 3x_{22} + 7x_{23} +$$
$$+ 5x_{24} + 6x_{25} + 2x_{31} + 7x_{32} + 8x_{33} + 7x_{34} + 8x_{35} \to \min.$$

Ограничения по поставщикам:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 70;$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 120;$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 480.$$

Ограничения по потребителям:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 170;$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 100;$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80;$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 100;$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 220.$$

Составим опорный план методом наименьшего элемента (табл. 2).

Таблица 2

Опорный план. Первая транспортная таблица

Поставщик	Запас груза поставщика, м^3	Потребитель					Потенциал поставщика
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	a_1 = **70**	6 7	2 **70**	4 –1	5 1	7 2	$u_1 = –3$
A_2	a_2 = **120**	6 6	3 **30**	7 1	5 **90**	6 0	$u_2 = –2$
A_3	a_3 = **480**	2 **170**	7 2	8 **80**	7 **10**	8 **220**	$u_3 = 0$
Потребность потребителя в грузе		$b_1 = 170$	$b_2 = 100$	$b_3 = 80$	$b_4 = 100$	$b_5 = 220$	
Потенциал потребителя		$V_1 = 2$	$V_2 = 5$	$V_3 = 8$	$V_4 = 7$	$V_5 = 8$	

Проверим, выполняется ли условие по количеству заполненных клеток:

$$N = m + n – 1 = 5 + 3 – 1 = 7.$$

Условие выполняется, следовательно, составленный план может быть принят в качестве опорного.

Вычисляем значение целевой функции в опорном плане:

$$W = 2 \cdot 70 + 3 \cdot 30 + 5 \cdot 90 + 2 \cdot 170 + 8 \cdot 80 +$$
$$+ 7 \cdot 10 + 8 \cdot 220 = 3490 \text{ ден. ед.}$$

Поставщикам присваиваем потенциалы u_1, u_2 и u_3, потребителям – потенциалы V_1, V_2, V_3, V_4 и V_5. По заполненным клеткам составляем систему уравнений:

$$u_1 + V_2 = 2;$$
$$u_2 + V_2 = 3;$$
$$u_2 + V_4 = 5;$$
$$u_3 + V_1 = 2;$$
$$u_3 + V_3 = 8;$$
$$u_3 + V_4 = 7;$$
$$u_3 + V_5 = 8.$$

Принимаем, что $u_3 = 0$. Решая систему уравнений, получаем значения остальных потенциалов, которые заносим в соответствующие графы первой транспортной таблицы.

Для незаполненных клеток рассчитываем значения δ_{ij} по формуле

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + V_j).$$

Результат расчета записываем в нижнем левом углу соответствующих клеток. Так, например, для клетки 11

$$\delta_{11} = c_{11} - (u_1 + V_1) = 6 - (-3 + 2) = 7.$$

Из табл. 2 видно, что в клетке 13 получено отрицательное значение $\delta_{13} = -1$. Следовательно, представленный в табл. 2 план перевозок не является оптимальным и необходимо перераспределение груза по циклу для снижения суммарных затрат на перевозки.

Для перераспределения груза найдем цикл и отразим его во второй транспортной таблице (табл. 3). Первая вершина цикла находится в клетке с отрицательным значением δ_{ij} (клетка 13). Остальные лежат в заполненных клетках 12, 22, 24, 34, 33. Последовательно помечаем вершины цикла чередующимися знаками «+» и «–». При этом начинаем с клетки 13, в которой ставим знак «+». Среди клеток, помеченных знаком «–» (клетки 12, 24, 33), находим ту, в которой количество груза меньше. Это клетка 12, в ней $x_{11} = 70$. Таким образом, по циклу переносим 70 единиц груза. Это число мы прибавляем в клетках со знаком «+» и отнимаем в клетках со знаком «–».

Полученные новые значения x_{ij} заносим во вторую транспортную таблицу, причем клетки, в которых не лежали вершины цикла, остаются без изменения. Заново рассчитываем значения потенциалов u_1, V_j и разностей δ_{ij}. Из третьей транспортной таблицы (табл. 4) видно, что все значения $\delta_{ij} \geq 0$, следовательно, план является оптимальным.

Значение целевой функции оптимального плана является минимальным возможным значением расходов на перевозки.

$$W_2 = 4 \cdot 70 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 20 + 2 \cdot 170 +$$
$$+ 8 \cdot 10 + 7 \cdot 80 + 8 \cdot 220 = 3420 \text{ ден. ед.}$$

Таблица 3

Вторая транспортная таблица

Поставщик	Запас груза поставщика, м^3	Потребитель					Потенциал поставщика
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	a_1 = **70**	6	2 **70** –	4 +	5	7	$u_1 = -3$
A_2	a_2 = **120**	6	3 **30** +	7	5 – **90**	6	$u_2 = -2$
A_3	a_3 = **480**	2 **170**	7	8 – **80**	7 + **10**	8 **220**	$u_3 = 0$
Потребность потребителя в грузе		$b_1 = 170$	$b_2 = 100$	$b_3 = 80$	$b_4 = 100$	$b_5 = 220$	
Потенциал потребителя		$V_1 = 2$	$V_2 = 5$	$V_3 = 8$	$V_4 = 7$	$V_5 = 8$	

Таблица 4

Третья транспортная таблица

Поставщик	Запас груза поставщика, м^3	Потребитель					Потенциал поставщика
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	a_1 = **70**	6 8	2 1	4 **70**	5 2	7 3	$u_1 = -4$
A_2	a_2 = **120**	6 6	3 **100**	7 1	5 **20**	6 0	$u_2 = -2$
A_3	a_3 = **480**	2 **170**	7 2	8 **10**	7 **80**	8 **220**	$u_3 = 0$
Потребность потребителя в грузе		$b_1 = 170$	$b_2 = 100$	$b_3 = 80$	$b_4 = 100$	$b_5 = 220$	
Потенциал потребителя		$V_1 = 2$	$V_2 = 5$	$V_3 = 8$	$V_4 = 7$	$V_5 = 8$	

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Пример решения задачи календарного планирования

Исходные данные для решения задачи представлены в нижеприведенной таблице.

Таблица

Исходные данные

Номер варианта	Номер станка	Продолжительность обработки на станках детали *n*, мин				
		1	2	3	4	5
–	1	8	7	2	4	9
	2	5	6	5	6	7

Решение задачи начинаем с определения оптимальной последовательности запуска деталей в обработку. Воспользуемся алгоритмом Джонсона, согласно которому все детали, подлежащие обработке, делят на две группы. К первой группе относят те, у которых время обработки на первом станке не превышает время обработки на втором ($t_{1j} \le t_{2j}$), ко второй – все остальные детали. Вначале следует обрабатывать детали первой группы в порядке возрастания длительности их обработки на первом станке. После них в обработку запускают детали второй группы в порядке убывания времени их обработки на втором станке.

Таким образом, к первой группе относим детали № 3 и 4, ко второй – детали № 1, 2 и 5, а оптимальный вариант запуска деталей в обработку следующий: 3, 4, 5, 2 и 1. Для установления времени обработки воспользуемся графиком Ганта (см. рисунок).

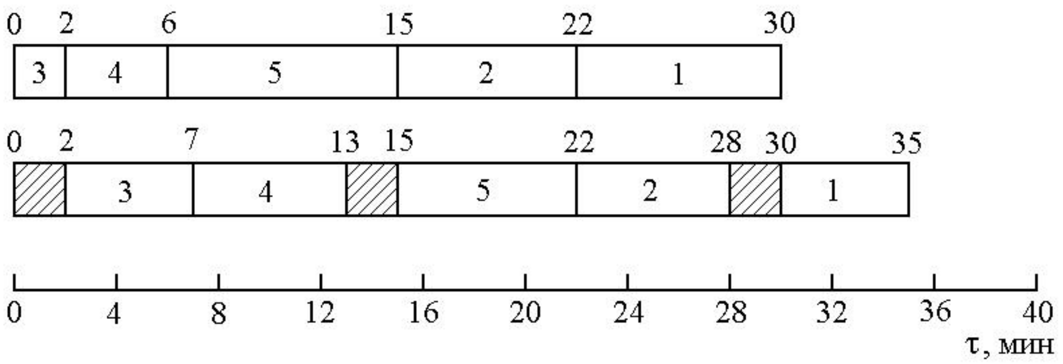

Рисунок. График Ганта

На графике каждому станку соответствует своя ось времени τ, на которой незаштрихованными ячейками отмечаем промежутки, в течение которых станок занят обработкой детали. Номер обрабатываемой детали указываем внутри ячейки, а отметки шкалы временной оси делаем на границах ячейки. Промежутки времени, соответствующие простою станков, изображаем заштрихованными ячейками.

Как видно из графика, суммарное время обработки пяти деталей на двух станках составляет 35 мин. При этом первый станок будет работать без простоев, а суммарное время простоев второго станка составит 2 + 2 + 2 = 6 мин.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Пижурин, А. А. Основы моделирования и оптимизации процессов деревообработки / А. А. Пижурин, М. С. Розенблит. – М.: Лесная пром-сть, 1988.

2. Пижурин, А. А. Моделирование и оптимизация процессов деревообработки / А. А. Пижурин, А. А. Пижурин. – М.: Лесная пром-сть, 2004.

3. Игнатенко, В. В. Моделирование и оптимизация процессов лесозаготовок: учеб. пособие / В. В. Игнатенко, И. В. Турлай, А. С. Федоренчик. – Минск: БГТУ, 2004.

4. Математические методы и модели в расчетах на ЭВМ: учеб.-метод. пособие / сост. А. М. Волк, В. В. Игнатенко. – Минск: БГТУ, 2003.

5. Бучнева, Е. А. Моделирование и оптимизация процессов деревообработки: лаб. практикум для студентов специальности 1-46 01 02 «Технология деревообрабатывающих производств» / Е. А. Бучнева, Н. В. Мазаник. – Минск: БГТУ, 2006.

Дополнительная

6. Перепелицкий, С. Н. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении на предприятиях лесной промышленности / С. Н. Перепелицкий. – М.: Лесная пром-сть, 1989.

7. Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методологии / Е. С. Вентцель. – М.: Высш. шк., 2001.

8. Производственный менеджмент: учеб. для вузов / С. Д. Ильенкова [и др.]; под ред. С. Д. Ильенковой. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ В ДЕРЕВООБРАБОТКЕ

Составитель
Бучнева Евгения Алексеевна

Редактор *О. А. Бычковская*
Компьютерный набор *Л. И. Куис*
Компьютерная верстка *О. А. Бычковская*

Подписано в печать 09.10.2009. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,7. Уч.-изд. л. 1,8.
Тираж 100 экз. Заказ .

Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13а.
ЛИ № 02330/0549423 от 08.04.2009.

Отпечатано в лаборатории полиграфии учреждения образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13.
ЛП № 02330/0150477 от 16.01.2009.