УДК 517.984

О. А. Архипенко
Белорусский государственный технологический университет

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследование для заданного оператора B обратных операторов к $B - \lambda I$, т. е. резольвенты B, является одним из классических разделов теории операторов. При спектральном значении λ такой оператор необратим, но часто он оказывается правосторонне обратимым. В таком случае к оператору обычно присоединяется краевое условие и рассматриваются краевые задачи, решение которых эквивалентно построению правосторонних резольвент для исходного оператора. В последние годы в работах ряда авторов исследовались правосторонние резольвенты и обсуждалось их сходство и отличия от классической резольвенты. В связи с этим представляет интерес построение правосторонних резольвент для конкретных операторов.

Целью статьи является построение правосторонней резольвенты для дискретного оператора взвешенного сдвига, состоящей из операторов, образы которых совпадают с заданным подпространством L_η. Построение такой резольвенты эквивалентно решению краевой задачи для разностного уравнения. Резольвента определена только в некоторой части комплексной плоскости и нашей задачей является описание ее области определения.

В работе по заданному подпространству L_η построена вспомогательная аналитическая функция Q_η, с ее помощью построена резольвента рассматриваемой краевой задачи и показано, что область определения резольвенты состоит из явно заданного кольца, за исключением тех точек, в которых аналитическая функция Q_η обращается в нуль. Результат дает решение задачи в общем виде для произвольного пространства.

Ключевые слова: дискретный оператор взвешенного сдвига, правосторонняя резольвента, проектор Рисса, спектр оператора, краевая задача.

O. A. Arkhipenko
Belarusian State Technological University

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DIFFERENCE EQUATIONS

An investigation of inverse operators or resolvent for a given operator B is one of the classical sections of the theory of operators. Such operator is irreversible for a spectral value λ but it often turns out to be a right-side reversible. In this case, the boundary condition is usually attached to the operator and boundary value problems whose solution is equivalent to constructing right-side resolvents for the initial operator are considered. Right-side resolvents have been studied recently by a number of authors. As well as the similarities and differences between them and classical resolvent discussed in recent years. In this connection, it is of interest to construct right-sided resolvents for concrete operators.

The aim of the article is to construct a right-hand resolvent consisting of operators whose images coincide with a given subspace L_η for a discrete weighted shift operator. The construction of such a resolvent is equivalent to finding solution of the boundary value problem for the difference equation. The resolvent is defined only in some part of the complex plane and our task is to describe its domain.

An auxiliary analytic function Q_η is constructed on a given subspace L_η A resolvent of the boundary value problem is constructed using it. We show that the domain of the resolvent consists of an explicitly defined ring with the exception of those points at which the analytic function Q_η vanishes. The result gives the solution of the problem in general form for an arbitrary space.

Key words: discrete weighted shift operator, right-side resolvent, Riesz projection, boundary value problem, spectrum.

Введение. Пусть B – ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве F и простой замкнутый контур G не пересекается со спектром оператора B. Тогда резольвента $R(B;\ \lambda) = (B - \lambda I)^{-1}$ определена на контуре и формула

$$P = -\frac{1}{2\pi i}\int_G R(B;\ \lambda)d\lambda$$

задает проектор Рисса [1].

Этот проектор перестановочен с B и осуществляет разложение пространства в прямую сумму замкнутых подпространств

$$F = F^+ \oplus F^-,$$

инвариантных относительно оператора B, где

$$F^+ = \operatorname{Im} P,$$

$$F^- = \operatorname{Im}(I - P) = \operatorname{Ker} P.$$

При этом оператор разлагается в прямую сумму операторов

$$B = B^{+} \oplus B^{-},$$

действующих в соответствующих подпространствах. Причем спектр оператора B^{+} в подпространстве F^{+} совпадает с частью спектра $\Sigma(B)$, лежащей внутри контура G, а спектр оператора B^{-} в подпространстве F^{-} совпадает с частью спектра $\Sigma(B)$, лежащей вне контура G.

Оператор B называется гиперболическим, если $\Sigma(B) \cap \mathbb{S}^1 = \varnothing$, где $\mathbb{S}^1 = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$ – единичная окружность.

В случае гиперболического оператора спектр не пересекается с единичной окружностью $\mathbb{S}^1$, поэтому определен проектор Рисса

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=1} R(B;\, \lambda)\, d\lambda. \qquad (1)$$

Рассмотрим обобщение понятия гиперболического оператора, естественно возникающее при исследовании свойства односторонней обратимости.

Пусть B есть линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве F. Оператор B будем называть правосторонне гиперболическим, если операторы $B - \lambda I$ правосторонне обратимы для любого λ из некоторой окрестности единичной окружности и при этом существует семейство правых обратных $R_r(B;\, \lambda)$ для $B - \lambda I$, аналитически зависящее от λ.

Такое семейство $R_r(B;\, \lambda)$ будем называть правосторонней резольвентой для B.

Теорема 1. Пусть R_0 есть один из правых обратных к оператору $B - \lambda_0 I$. Тогда при

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_0\|}$$

ряд

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_0^{k+1}$$

сходится и задает в окрестности λ_0 правостороннюю резольвенту, состоящую из операторов, образы которых совпадают с образом оператора R_0.

Эта правосторонняя резольвента аналитически продолжается на некоторую область в комплексной плоскости, которая зависит от выбора правого обратного R_0.

В случае когда правосторонняя резольвента определена в окрестности единичной окружности, такая резольвента может быть записана в стандартной форме, описанной в следующей теореме.

Мы предполагаем, что оператор B обратим.

Теорема 2 **[2].** Пусть обратимый оператор B является правосторонне гиперболическим и пусть $R_r(B;\, \lambda)$ – некоторая его правосторонняя резольвента. Разложение правосторонней резольвенты $R_r(B;\, \lambda)$ в операторный ряд Лорана в окрестности единичной окружности имеет вид

$$R_r(B;\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I - P) - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P, \quad (2)$$

где оператор P связан с резольвентой той же формулой, что и проектор Рисса:

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{S}^1} R_r(B;\, \lambda)\, d\lambda.$$

Теорема 3 **[2].** Пусть оператор B обратим. Если существует такой ограниченный оператор P, что операторный ряд (2) сходится по норме, то сумма этого ряда является правосторонней резольвентой.

Правосторонняя обратимость часто встречается для операторов взвешенного сдвига [3–6], такие операторы исследовались с разных точек зрения многими авторами [7–9].

Среди указанных операторов наиболее простыми по форме являются дискретные операторы взвешенного сдвига, но и для них краевые задачи в общей постановке ранее не были исследованы.

Мы рассматриваем дискретные операторы взвешенного сдвига, действующие в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$. Это пространство состоит из двусторонних числовых последовательностей $u = (u(k))_{k=-\infty}^{+\infty},\ u(k) \in \mathbb{C}$, таких, что

$$\|u\| = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u(k)|^2 \right]^{1/2} < \infty.$$

Оператор сдвига W действует в этом пространстве по формуле

$$Wu(k) = u(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Оператор B в $l_2(\mathbb{Z})$ называется дискретным оператором взвешенного сдвига, если он действует по формуле

$$Bu(k) = a(k)u(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad (3)$$

где $a = (a(k))$ есть заданная ограниченная числовая последовательность.

Если $a(k) \neq 0$ для $k \in \mathbb{Z}$ и последовательность $\dfrac{1}{a(k)}$ ограничена, то оператор B обратим и

$$B^{-1}u(k) = \frac{1}{a(k-1)} u(k-1).$$

Известно, что если оператор обратим слева, то его сопряженный обратим справа [1]. В случае когда B – дискретный оператор взвешенного сдвига, сопряженный к нему – также оператор взвешенного сдвига. Таким образом, условия обратимости слева для B получаются аналогичным образом, как и для обратимости справа.

Здесь мы рассматриваем случай, когда для последовательности коэффициентов существуют пределы

$$\lim_{k\to\pm\infty} a(k) = a(\pm\infty). \tag{4}$$

Лемма 1 [2, 6] Пусть B есть оператор вида (3), $a(k)\neq 0$ для всех k и $a(\pm\infty)\neq 0$. Спектром оператора является кольцо

$$\Sigma(B) = \left\{\lambda : r(a) \le |\lambda| \le R(a)\right\},$$

где

$$R(a) = \max\left\{|a(+\infty)|,\ |a(-\infty)|\right\},$$
$$r(a) = \min\left\{|a(+\infty)|,\ |a(-\infty)|\right\}.$$

Оператор $B-\lambda I$ обратим слева, когда

$$|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|.$$

Оператор $B-\lambda I$ обратим справа, когда $|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|$. При этом $\dim\mathrm{Ker}(B-\lambda I) = 1$.

Оператор $B-\lambda I$ необратим, когда $|\lambda| = |a(\pm\infty)|$.

Таким образом, при $r < |\lambda| < R$ оператор $B-\lambda I$ односторонне обратим. В частности, если $|a(-\infty)| < |a(+\infty)|$, то оператор $B-\lambda I$ обратим справа и у него существует много правых обратных операторов и много правосторонних резольвент.

Примеры правосторонних резольвент для рассматриваемого оператора, определенных во всем открытом кольце $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, приведены в [2, 6].

Теорема 4. Пусть P_0 есть проектор на подпространство

$$F_0 = \{u\in l_2(\mathbb{Z}) : u(k) = 0,\ k\le 0\},$$

действующий по формуле

$$(P_0u)(k) = \begin{cases} u(k), & k\ge 0,\\ 0, & k<0.\end{cases} \tag{5}$$

Если $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, то ряд

$$R_0(B;\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P_0) - \sum_{k=-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}P_0$$

сходится и задает правостороннюю резольвенту для оператора B, определенную в кольце $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$.

Образы всех операторов $R_0(B;\ \lambda)$ совпадают с подпространством

$$L_0 = \left\{u\in l_2(\mathbb{Z}) : u(0) = 0\right\}.$$

Другими словами, теорема утверждает, что для разностного уравнения краевая задача $(B-\lambda I)u = f,\ f\in L_0$, заданная условием $u(0)=0$, имеет решение для $\forall f\in l_2(\mathbb{Z})$ и при том единственное, т. е. корректность краевой задачи при $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$.

Основная часть – краевые задачи общего вида. В работе для разностного уравнения

$$a(k)u(k+1) - \lambda u(k) = f(k) \tag{6}$$

изучается корректность краевой задачи, заданной условием

$$u\in L_\eta,\ \eta = (\ldots,\eta_{-1},\eta_0,\eta_1,\ldots)\in l_2(\mathbb{Z}),$$

где

$$L_\eta = \{u\in l_2(\mathbb{Z}) : \sum_{k=-\infty}^{\infty}\eta_k u(k) = 0\}. \tag{7}$$

Нахождение решения этой задачи эквивалентно построению правосторонней резольвенты для оператора взвешенного сдвига B, состоящей из операторов, образы которых совпадают с подпространством L_η. Заметим, что любая корректная краевая задача для уравнения (6) может быть записана в указанном виде, т. е. это общий вид краевых задач для уравнения (6).

В отличие от случая, описанного в лемме 1, может оказаться, что такая правосторонняя резольвента определена не во всех точках кольца

$$|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|. \tag{8}$$

Одним из необходимых условий существования такой правосторонней резольвенты является правосторонняя обратимость оператора $B-\lambda I$. Согласно лемме 1, оператор $B-\lambda I$ может быть правосторонне обратимым только в случае, когда коэффициенты оператора удовлетворяют условию

$$|a(-\infty)| < |a(+\infty)|$$

и правосторонняя обратимость имеет место только при условии (8).

Найдем сначала необходимое условия для того, чтобы у оператора $B-\lambda I$ существовал правый обратный, образ которого совпадает с подпространством L_η.

По подпространству L_η и оператору B построим ряд Лорана по степеням λ:

$$Q_\eta(\lambda) = Q_\eta^+(\lambda) + Q_\eta^-(\lambda) =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\eta_k\lambda^k}{\prod_{j=0}^{k-1}a(j)} + \sum_{k=-\infty}^{-1}\eta_k\frac{\prod_{j=k}^{-1}a(j)}{\lambda^{-k}}. \tag{9}$$

Теорема 5. Если выполняется (8), то условие

$$Q_\eta(\lambda) \neq 0$$

является необходимым для того, чтобы существовал правый обратный оператор к $B - \lambda I$, образ которого принадлежит подпространству L_η.

Пусть существует правый обратный R к оператору $B - \lambda I$ и $\operatorname{Im} R$ совпадает с L_η. Тогда $L_\eta \cap \operatorname{Ker}(B-\lambda I) = \{0\}$.

При выполнении (8) подпространство $\operatorname{Ker}(B-\lambda I)$ одномерно и для его построения достаточно найти одно ненулевое решение однородного уравнения $(B-\lambda I)\omega = 0$, т. е. уравнения $a(\tau)\omega(\tau+1) - \lambda\omega(\tau) = 0, \tau \in \mathbb{Z}$.

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\omega(0) = 1$, задается формулой

$$\omega_\lambda(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\tau}{\prod\limits_{j=0}^{\tau-1} a(j)}, & \tau \geq 0, \\ \dfrac{\prod\limits_{j=\tau}^{-1} a(j)}{\lambda^{-\tau}}, & \tau < 0. \end{cases} \tag{10}$$

При выполнении (8) построенная последовательность $\omega_\lambda(\tau)$ принадлежит пространству $l_2(\mathbb{Z})$.

Заметим, что эта последовательность может быть представлена в виде

$$\omega_\lambda = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda^k B^{-k} e_0,$$

где e_0 есть последовательность

$$e_0(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \neq 0, \\ 1, & \tau = 0. \end{cases}$$

Подставив (10) в (7), получаем, что условие $\omega_\lambda \in L_\eta$ имеет вид $Q_\eta(\lambda) = 0$. Заметим, что выражение $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k \omega_\lambda(k)$ есть скалярное произведение двух элементов из пространства $l_2(\mathbb{Z})$ и, следовательно, определено для всех λ, удовлетворявших условию (8). Поэтому условие $Q_\eta(\lambda) \neq 0$ эквивалентно тому, что $L_\eta \cap \operatorname{Ker}(B-\lambda I) = \{0\}$ и оно следует из существования правого обратного R к оператору $B - \lambda I$, образ которого совпадает с L_η.

Теорема 6. Правый обратный оператор к $B - \lambda I$, образ которого принадлежит подпространству L_η, существует в тех точках λ, где

$$Q_\eta(\lambda) \neq 0$$

и выполняется (8). Семейство таких правых обратных $R_\eta(B; \lambda)$ аналитически зависит от λ, т. е. является правосторонней резольвентой, определенной для указанных λ. Эта правосторонняя резольвента имеет вид

$$R_\eta(B;\lambda) f = [\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I-P_0) f - \\ - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_0 f] + \frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)} \omega_\lambda,$$

где P_0 – проектор (5), $\Phi_\lambda(f)$ есть функционал из $l_2(\mathbb{Z})$, заданный формулой

$$\Phi_\lambda(f) = -\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{i} \frac{\lambda^{i-j} \eta_{i+1}}{\prod\limits_{k=j}^{i} a(k)} f(j) - \\ - \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=i}^{-1} \lambda^{i-j-1} \eta_i \prod_{k=i}^{j-1} a(k) f(j).$$

Пусть $f \in l_p(\mathbb{Z})$. Будем строить решение уравнения $(B-\lambda I)u = f$, принадлежащее L_η. В координатной записи это уравнение имеет вид

$$a(\tau)u(\tau+1) - \lambda u(\tau) = f(\tau).$$

Найдем выражения для $u(\tau)$ через f и $u(0)$.

При $\tau > 0$

$$u(\tau) = [\frac{f(\tau-1)}{a(\tau-1)} + \frac{\lambda f(\tau-2)}{a(\tau-1)a(\tau-2)} + \\ + \frac{\lambda^2 f(\tau-3)}{a(\tau-1)a(\tau-2)a(\tau-3)} + \ldots \\ + \ldots \frac{\lambda^{\tau-1} f(0)}{a(0)\ldots a(\tau-1)}] + \frac{\lambda^\tau}{a(0)\ldots a(\tau-1)} u(0).$$

При $\tau < 0$ получаем

$$u(\tau) = -[\frac{f(\tau)}{\lambda} + \frac{a(\tau) f(\tau+1)}{\lambda^2} + \\ + \frac{a(\tau)a(\tau+1) f(\tau+2)}{\lambda^3} + \ldots \\ + \ldots \lambda^\tau a(\tau)a(\tau+1)\ldots a(-2) f(-1)] + \\ + \lambda^\tau a(\tau)\ldots a(-1) u(0).$$

Подставим найденные выражения для $u(\tau)$ в условие $u \in L_\eta$

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \eta_\tau u(\tau) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \eta_\tau u(\tau) + \sum_{\tau=-\infty}^{-1} \eta_\tau u(\tau) = \\ = u(0)[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\eta_{i+1}\lambda^i}{\prod\limits_{j=0}^{i} a(j)} + \sum_{i=-\infty}^{-1} \eta_i \lambda^i \prod_{j=i}^{-1} a(j)] - \\ - [\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{i} \frac{\lambda^{i-j} \eta_{i+1}}{\prod\limits_{k=j}^{i} a(k)} f(j) + \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=i}^{-1} \lambda^{i-j-1} \eta_i \prod_{k=i}^{j-1} a(k) f(j)].$$

Тогда из равенства $\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty}\eta_\tau u(\tau)=0$ находим, что

$$u(0)=\frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)},$$

где

$$\Phi_\lambda(f)=-\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{i}\frac{\lambda^{i-j}\eta_{i+1}}{\prod_{k=j}^{i}}f(j)-$$

$$-\sum_{i=-\infty}^{-1}\sum_{j=i}^{-1}\lambda^{i-j-1}\eta_i\prod_{k=i}^{j-1}a(k)f(j).$$

Выражение для каждого $u(\tau)$ состоит из двух слагаемых: первое слагаемое при $\tau > 0$ совпадает с выражением для координат вектора

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P_0)f,$$

где P_0 есть проектор, заданный в (5), а при $\tau<0$ совпадает с выражением для координат вектора

$$-\sum_{k=-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}P_0 f.$$

В частности, первое слагаемое задает последовательность, принадлежащую $l_2(\mathbb{Z})$.

Второе слагаемое имеет вид $\omega_\lambda(\tau)u(0)$. Поэтому получаем следующее выражение для построенного правого обратного

$$R_\eta(B;\lambda)f=[\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P_0)f-$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}P_0 f]+\frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)}\omega_\lambda. \qquad (11)$$

Заметим, что при фиксированном λ последнее слагаемое

$$\frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)}\omega_\lambda$$

в (11) есть оператор ранга 1, а само это слагаемое есть семейство операторов ранга 1, аналитически зависящее от λ. Таким образом, построенное семейство правых обратных аналитически зависит от λ, т. е. задает правостороннюю резольвенту для оператора B. Также заметим, что полученное выражение не есть представление резольвенты в виде ряда Лорана, так как последнее слагаемое не представлено в виде ряда по степеням λ.

Спектр краевой задачи. Согласно теореме 6, спектр краевой задачи состоит из нулей функции $Q_\eta(\lambda)$, лежащих в кольце (8), в связи с чем для описания спектра краевой задачи желательно получить информацию о виде и количестве таких нулей. Если ряд Лорана для функции $Q_\eta(\lambda)$ сходится в более широком кольце, чем кольцо, заданное условием (8), то в последнем может лежать лишь конечное число нулей. Но если аналитическая функция $Q_\eta(\lambda)$ имеет особенности на границе кольца $\lambda|=|a(+\infty)|$, $\lambda|=|a(-\infty)|$, то в (8) может лежать счетное количество нулей.

Получим условие, при котором есть сходимость ряда Лорана в более широком кольце. В соответствии с признаком сходимости Коши ряд $Q_\eta^+(\lambda)$ сходится, когда

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{\eta_k\lambda^k}{\prod_{j=0}^{k-1}a(j)}\right|^{\frac{1}{k}}<1.$$

Покажем, что результат зависит от величины

$$q^+=\lim_{k\to+\infty}|\eta_k|^{\frac{1}{k}}.$$

Так как известно, что

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\prod_{j=0}^{k-1}a(j)\right|^{\frac{1}{k}}=|a(+\infty)|,$$

получаем

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{\eta_k\lambda^k}{\prod_{j=0}^{k-1}a(j)}\right|^{\frac{1}{k}}=\frac{|\lambda|}{|a(+\infty)|}q^+.$$

Из предыдущих вычислений следует, что ряд $Q_\eta^+(\lambda)$ сходится при

$$|\lambda|<\frac{|a(+\infty)|}{q^+}.$$

Аналогично, пусть $q^-=\lim_{k\to+\infty}|\eta_{-k}|^{\frac{1}{k}}$, тогда

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\prod_{j=1}^{k}a(-j)\right|^{\frac{1}{k}}=|a(-\infty)|,$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\eta_{-k}\lambda^k\prod_{j=1}^{k}a(-j)\right|^{\frac{1}{k}}=|\lambda||a(-\infty)|q^-.$$

Отсюда следует, что ряд для $Q_\eta^-(\lambda)$ сходится при

$$|\lambda|>|a(-\infty)|\,q^-.$$

Теорема 7. Если $q^+ < 1$ и $q^- < 1$, тогда функция $Q_\eta(\lambda)$ может принимать нулевое значение только в конечном числе точек из кольца (8).

При выполнении условия теоремы функция $Q_\eta(\lambda)$ аналитическая во всех точках замкнутого кольца

$$\overline{K} = \{\lambda : |a(-\infty)| \le |\lambda| \le |a(+\infty)|\}.$$

Если функция имеет счетное множество нулей, содержащихся в открытом кольце,

$$K = \{\lambda : |a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|\},$$

то последовательность нулей имеет предельную точку в замкнутом кольце.

Поскольку функция $Q_\eta(\lambda)$ аналитическая во всех точках замкнутого кольца, то она, согласно теореме единственности [10], тождественно равна нулю. Получаем противоречие.

Пример 1. Если у последовательности η_k только конечное число ненулевых элементов, то функция $Q\eta(\lambda)$ является рациональной и имеет конечное число корней. Этот случай был рассмотрен ранее и опубликован в статье [11].

Пример 2. Пусть $\eta_k = \dfrac{1}{|k|+1}$, тогда

$$\lim_{k\to+\infty} |\eta_k|^{\frac{1}{k}} = 1.$$

Поэтому мы не можем утверждать, что функция $Q_\eta(\lambda)$ имеет только конечное число корней.

Пример 3. Пусть $\eta_k = \dfrac{1}{2^{|k|}}$, тогда

$$\lim_{k\to+\infty} |\eta_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2}.$$

В этом примере функция $Q_\eta(\lambda)$ аналитическая в кольце $\dfrac{1}{2}|a(-\infty)| < |\lambda| < 2\,|a(+\infty)|$, тогда применима теорема 7 и краевая задача (6)–(7) имеет только конечное множество спектральных значений, лежащих в кольце (8).

Таким образом, вид спектра краевой задачи зависит от скорости убывания последовательности η_k на бесконечности.

Заключение. Основным результатом работы является получение необходимых и достаточных условий корректности краевой задачи общего вида для дискретного оператора взвешенного сдвига, заданной условием на бесконечное число координат вектора *u* и построение решений такой задачи.

Литература

1. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Иностранная литература, 1954. 499 с.

2. Antonevich A. B., Panteleeva E. V. Right-Side Hyperbolic Operators // Scientific Publications of the State University of Novi Pazar. Ser. A, Applied Mathematics, Informatics and Mechanics. 2014. No. 1. P. 1–9.

3. Мардиев Р. Критерий полунетеровости одного класса сингулярных интегральных операторов с некарлемановским сдвигом // Доклады АН УзССР. 1985. Т. 2, No. 2. С. 5–7.

4. Belitskii G., Lyubich Yu. On the normal solvability of cohomological equations on compact topological spaces // Operator Theory: Advances and Applications. 1998. No. 103. P. 75–87.

5. Karlovich A. Yu., Karlovich Yu. I. One sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces // Integral Equations Operator Theory. 2002. No. 2 (42). P. 201–228.

6. Antonevich A., Makowska Yu. On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points // Complex analysis and Operator theory. 2008. Vol. 2, No. 2. P. 215–240.

7. Ridge W. C. Spectrum of a composition operator // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. No. 37. P. 121–127.

8. Kravchenko V. G, Litvinchuk G. S. Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift. Kluwer, Math. Appl., 1994. 289 p.

9. Antonevich A. B. Linear Functional Equation. Operator Approach. Birkhauser Verlag, Operator Theory Advances and Applications, 1996. 180 p.

10. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М: Наука, 1969. 576 с.

11. Шукур Али А., Архипенко О. А. Резольвента краевой задачи для разностного уравнения // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 3 (28). С. 70–75.

References

1. Riss F., Sekefal'vi-Nad' B. *Lektsii po funktsional'nomu analizu* [Lectures on functional analysis]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1954. 499 p.

2. Antonevich A. B., Panteleeva E. V. Right-Side Hyperbolic Operators. *Scientific Publications of the State University of Novi Pazar*. Ser. A, Applied Mathematics, Informatics and Mechanics, 2014, no. 1, pp. 1–9.

3. Mardiev R. Criterion for the semenergality of a class of singular integral operators with a non-Carleman shift. *Doklady Akademii nauk UzSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the UzSSR], 1985, vol. 2, no. 2, pp. 5–7 (In Russian).

4. Belitskiiy G., Lyubich Yu. On the normal solvability of cohomological equations on compact topological spaces. *Operator Theory: Advances and Applications*, 1998, no. 103, pp. 75–87.

5. Karlovich A. Yu., Karlovich Yu. I. One sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 2002, no. 2 (42), pp. 201–228.

6. Antonevich A. B., Makowska Yu. On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points. *Complex analysis and Operator theory*, 2008, no. 2, pp. 215–240.

7. Ridge W. C. Spectrum of a composition operator. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1973, no. 37, pp. 121–127.

8. Kravchenko V. G, Litvinchuk G. S. Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift. Kluwer, Math. Appl. Publ., 1994. 289 p.

9. Antonevich A. B. *Lineynyye funktsional'nyye uravneniya. Operatornyy podkhod* [Linear Functional Equations. Operator Approach]. Minsk, Universitetskoye Publ., 1988. 233 p.

10. Shabat B. V. *Vvedeniye v kompleksnyy analiz* [Introduction to complex analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 576 p.

11. Shukur Ali A., Arkhipenko O. A. The resolvent of the boundary value problem for the difference equation. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki* [Problems of Physics, Mathematics and Technology], 2016, no. 3 (28), pp. 70–75 (In Russian).

Информация об авторе

Архипенко Ольга Александровна – преподаватель-стажер кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: arhipenko@belstu.by

Information about the author

Arkhipenko Ol'ga Aleksandrovna – trainee teacher, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: arhipenko@belstu.by

Поступила 25.11.2017