УДК 517.982.45

Т. Г. Шагова
Белорусский государственный технологический университет

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ РАЦИОНАЛЬНЫХ МНЕМОФУНКЦИЙ

В статье рассмотрена задача аппроксимации обобщенных функций семейством эквивалентных гладких рациональных функций, зависящих от малого параметра, так называемыми рациональными мнемофункциями, которые образуют подалгебру в алгебре новых обобщенных функций. Рассмотрены разложения мнемофункций в асимптотические ряды в пространстве обобщенных функций. Для рациональных мнемофункций коэффициенты таких разложений имеют специальный вид. Исследована зависимость главных членов асимптотических разложений мнемофункций от свойств порождающих их рациональных функций. Было показано, что рациональные мнемофункции ассоциированы с дельта-функцией, ее производными, степенными функциями и только ними. Ввиду этого получено разбиение множества рациональных функций на классы эквивалентности в зависимости от того, с какой обобщенной функцией они ассоциированы.

Ключевые слова: аппроксимация, мнемофункция, рациональная мнемофункция, асимптотическое разложение.

T. R. Shahava
Belarusian State Technological University

ON THE ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF RATIONAL MNEMOFUNCTIONS

The problem of generalized functions approximation by the family of equivalent smooth rational functions depended on small parameter is considered in the article. Such families are called rational mnemofunctions. Asymptotic expansions of rational mnemofunctions in the space of generalized functions are considered and it is noted that the coefficients of such expansions have a special type. The relations between the main terms of mnemofunctions asymptotic expansions and the properties of rational functions, which generate mnemofunctions, are investigated. It was shown that the rational mnemofunctions could be associated only with Dirac δ-finction, its derivatives, and power functions. That is why the set of rational functions is divided into classes of equivalence depending on what generalized function they associated with.

Key words: approximation, mnemofunction, rational mnemofunction, asymptotic expansion.

Введение. Основным препятствием к применению теории обобщенных функций к решению нелинейных уравнений и уравнений с обобщенными коэффициентами является невозможность определения корректной операции произведения обобщенных функций. Для преодоления этого препятствия начали развиваться различные подходы, один из которых основан на рассмотрении новых объектов, которые обладают основными свойствами обобщенных функций и в то же время допускают корректно определенную операцию умножения [1]. Такие объекты называют новыми обобщенными функциями, или мнемофункциями. По своей конструкции мнемофункции представляют собой семейство эквивалентных гладких функций $f_\varepsilon(x)$, зависящих от малого параметра ε. Если такое семейство имеет предел при $\varepsilon \to 0$ в пространстве обобщенных функций, то говорят, что мнемофункция и классическая обобщенная функция ассоциированы. Более детально связь с классическими обобщенными функциями устанавливается с помощью ее представления в виде ряда

$$f_\varepsilon \sim \sum_{k=-m}^{+\infty} \varepsilon^k u_k,\ u_k \in D'(\mathbf{R}),$$

который сходится асимптотически. Технически этот ряд получается при разложении интеграла, зависящего от малого параметра, в асимптотический ряд [2]. Первые примеры асимптотических разложений мнемофункций были получены А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским еще до развития теории новых обобщенных функций [3].

С точки зрения асимптотических разложений произведением обычных обобщенных функций можно считать асимптотическое разложение произведения ассоциированных мнемофункций [4]. Так как с заданной обобщенной функцией всегда ассоциировано обширное семейство мнемофункций, то выбор мнемофункции, ассоциированной с обобщенной функцией, есть внесение дополнительной информации, позволяющей корректно определять произведение.

Особый интерес вызывают мнемофункции, порожденные рациональными функциями, т. е.

мнемофункции вида $f_\varepsilon(x) = \dfrac{P(x/\varepsilon)}{Q(x/\varepsilon)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – полиномы и $Q(x) \neq 0, x \in \mathbf{R}$, которые будем в дальнейшем называть рациональными. Такие мнемофункции наиболее естественно возникают в ряде конкретных задач квантовой механики и квантовой теории поля.

В данной работе рассматриваются главные члены асимптотических разложений рациональных мнемофункций.

Осносная часть. Обобщенные функции, ассоциированные с рациональными мнемофункциями. Рациональные мнемофункции представляют собой особый класс новых обобщенных функций, так как они образуют подалгебру в алгебре обобщенных функций, и их асимптотические разложения имеют специальный вид, а именно: коэффициентами разложений являются δ-функция и ее производные, а также степенные функции. Возникает вопрос, от каких свойств порождающей рациональной функции зависит вид главного члена разложения в асимптотический ряд?

Любую рациональную функцию можно представить в виде $f(x) = R(x) + \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $R(x), P(x), Q(x)$ есть многочлены, причем $\deg P(x) < \deg Q(x)$. Для многочлена $R(x)$ справедливо асимптотическое разложение

$$R_\varepsilon(x) = R\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sim b_n \frac{x^n}{\varepsilon^n} + \ldots + b_1 \frac{x}{\varepsilon} + b_0,$$

где n – степень $R(x)$.

Поэтому ограничимся рассмотрением правильных рациональных дробей $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. При $x \to \infty$ $f(x)$ обладает асимптотическим разложением $f(x) \sim \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n x^{-n}, m \geq 1.$ Обозначим через M_k моменты функции f, $M_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx.$

Теорема 1. Если функция f интегрируема, т. е. $m > 1$, и момент функции f отличен от нуля, т. е. $M_0 \neq 0$, то первым членом асимптотического разложения мнемофункции f_ε будет $M_0\varepsilon\delta$.

Следствие. Для любой рациональной функции f, такой что $M_0 = 1$, мнемофункция вида $\dfrac{1}{\varepsilon} f\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ ассоциирована с δ-функцией.

Из теории обобщенных функций известно, что функции $1/x$ соответсвуют обобщенные функции вида $P(1/x) + c\delta$, где

$$\langle P(1/x), \varphi \rangle = \text{v.p.} \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

константа c зависит от способа регуляризации [5].

В случае когда $f(x)$ является рациональной мнемофункцией, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если $m = 1$, то

$$f_\varepsilon(x) \sim \varepsilon a_1 P(1/x) + \varepsilon c\delta + \ldots,$$

где коэффициент a_1 равен отношению старших коэффициентов многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, а константа c определяется следующим образом:

$$c = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) + f(-x)}{2} dx.$$

Следствие 1. Если $f(x)$ нечетная рациональная функция и $a_1 \neq 0$, то первый член разложения будет $a_1 P(1/x)\varepsilon$.

Следствие 2. Для любой нечетной рациональной функции f, такой что $m = 1$, мнемофункция $\dfrac{1}{\varepsilon a_1} f\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ ассоциирована с $P(1/x)$.

Если $f(x)$ является быстроубывающей, т. е. убывает при $x \to \infty$ как $\dfrac{1}{x^{n+1}}$, то

$$f_\varepsilon(x) \sim M_0\delta\varepsilon - M_1\delta'\varepsilon^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} M_{n-1}\delta^{(n-1)}}{(n-1)!}\varepsilon^n + $$
$$+ (-1)^n \frac{\tilde{M}_n \delta^{(n)}}{n!}\varepsilon^{n+1} + a_{n+1} P\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)\varepsilon^{n+1} + \ldots,$$

где $\tilde{M}_n$ – регуляризованный момент.

Соответственно, если $M_0 = 0, M_1 \neq 0$, то, нормировав, получим мнемофункцию, ассоциированную с первой производной дельта-функции, т. е. $-\dfrac{1}{M_1\varepsilon^2} f\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$. Таким образом можно получить мнемофункции, ассоциированные с $\delta^{(n)}$, а именно $\dfrac{(-1)^n}{M_n \varepsilon^{n+1}} f\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, где $f(x)$ убывает быстрее $\dfrac{1}{x^{n+1}}$ и M_n – первый отличный от нуля момент функции f.

Если f убывает как $\dfrac{1}{x^n}$ и $M_i = 0$, $i = \overline{1, n-2}$, то главным членом разложения мнемофункции f_ε будет обобщенная функция $P(1/x^n)$.

Следует также отметить, что если функция $f(x)$ является четной, то асимптотическое разложение будет содержать только коэффициенты вида $\delta^{(2k)}$ и $P\left(\frac{1}{x^{2k}}\right)$. В случае когда $f(x)$ нечетная, то $\delta^{(2k+1)}$ и $P\left(\frac{1}{x^{2k+1}}\right)$. Так как любую функцию f можно представить в виде суммы четной g и нечетной h, то для определения главного члена асимптотического разложения мнемофункции, порожденной f, достаточно определить главные члены разложений мнемофункций, порожденных функциями g и h.

Исходя из вышесказанного, получаем, что множество рациональных функций разбивается на классы эквивалентности. В класс эквивалентности попадают такие функции, что порожденные ими мнемофункции ассоциированы с δ-функцией, ее производными или со степенными функциями.

Заключение. В ходе работы была исследована зависимость главного члена асимптотического разложения от свойств порождающей рациональной функции. Были сформулированы условия ассоциированности рациональных мнемофункций с основными обобщенными функциями. Получено, что множество рациональных функций разбивается на классы эквивалентности в зависимости от ассоциированности порожденных ими мнемофункций с δ-функцией, ее производными или со степенными функциями.

Литература

1. Colombeau J. F. A multiplication of distributions // Journal of mathematical analysis and applications. 1983. No. 94. P. 96–115.

2. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1974. Т. 1. 392 с.

3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Асимптотическое разложение интегралов с медленно убывающим ядром // Доклады Академии наук СССР. 1959. Т. 126, № 1. С. 26–29.

4. Антоневич А. Б., Пыжкова О. Н., Третьякова Л. Г. Асимптотические разложения для произведений базовых обобщенных функций // Труды Института математики НАН Беларуси. 2000. Т. 5. С. 18–31.

5. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. Т. 1. 470 с.

References

1. Colombeau J. F. A multiplication of distributions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 1983, no. 94, pp. 96–115.

2. Riekstyn'sh E. Ya. *Asimptoticheskiye razlozheniya integralov* [Asymptotic expansions of integral]. Riga, Zinatne Publ., 1974. Vol. 1. 392 p.

3. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. Asymptotic expansions of integrals with slowly decreasing kernel. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1959, vol. 126, no. 1, pp. 26–29 (In Russian).

4. Antonevich A. B., Pyzhkova O. N., Tret'yakova L. G. Asymptotic expansions for products of basic distributions. *Trudy Instituta matematiki NAN Belarusi* [Proceedings of mathematical institution of NASB], 2000, vol. 5, pp. 18–31 (In Russian).

5. Gel'fand I. M., Shilov G. E. *Obobshchennyye funktsii i deystviya nad nimi* [Generalized functions: properties and actions]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1959. Vol. 1. 470 p.

Информация об авторе

Шагова Татьяна Григорьевна – аспирант. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр. Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: tanya.shagova@gmail.com

Information about the author

Shahava Tatsiana Rygoraŭna – PhD student. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tanya.shagova@gmail.com

Поступила 28.12.2017