

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет»



ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
Тезисы докладов 79-й научно-технической конференции
профессорско-преподавательского состава,
научных сотрудников и аспирантов
(с международным участием)

Минск 2015

УДК 53:51:005.745(0.034)

ББК 22я73

Ф 50

Физико-математические науки : тезисы 79-й науч.-техн. конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 2-6 февраля 2015 г. [Электронный ресурс] / отв. за издание И. М. Жарский; УО БГТУ. – Минск : БГТУ, 2015. – 44 с.

Сборник составлен по материалам докладов научно-технической конференции сотрудников Белорусского государственного технологического университета. Рассмотрена возможность описания наноразмерных систем на основе двухуровневого статистико-механического описания, приведены исследования термодинамических и диффузионных характеристик решеточных систем при наличии заблокированных узлов, а также квазиодномерной модели топливного элемента на основе диоксида циркония, стабилизированного в кубическую фазу оксидом иттрия. Описан обобщенный подход к построению поля плотности распределения заряда на основе использования представления химического в виде функционала плотности и результаты теоретических исследований импедансных характеристик керамических ионных проводников.

Описаны результаты по исследованию спектральных и фотофизических характеристик тетрапиррольных соединений и супрамолекулярных систем и особенностей кинетико-основных равновесий. Исследована возможность использования положений четырехорбитальной модели Гоутермана для анализа конфигурационного состава электронных переходов молекул тетрапиррольных соединений и изучено изменение конфигурационного остова при формировании неплоских конформеров макроцикла. Изучены механизмы проводимости в пленках фталоцианина меди, графена (в чистом виде и добавкой наночастиц меди). Рассмотрена проблема имплантации ионов металлов на поверхность различных материалов.

Приведены обобщения некоторых классических результатов по теории обобщенных функций, изложены применение классических методов при получении решений линейных дискретно-непрерывных систем. Представлены результаты исследований по стабилизации дескрипторных систем и систем нейтрального типа линейным регулятором. Приведены новые результаты по математической статистике, дифференциальным уравнениям с пограничным слоем и интегральным уравнениям а также по алгоритмам оптимального управления при большой длительности процесса и в условиях различного вида неопределенностей.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры теоретической механики В. С. Вихренко
д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики В. М. Марченко
д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры физики И. И. Наркевич
канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры высшей математики И. К. Асмыкович

Главный редактор

ректор, профессор И.М. Жарский

© УО «Белорусский государственный технологический университет», 2015

УДК 535.37+541.65+543.4

И.В. Вершиловская, ассист., канд. биол. наук;
Н.Н. Крук, зав. кафедрой физики, д-р физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

КИСЛОТНО-ОСНОВНЫЕ И ФОТОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АСИММЕТРИЧНЫХ ДЕНДРИМЕРОВ С ПОРФИРИНОВЫМ ЯДРОМ

Изучены спектральные и фотофизические свойства смешанных 5,10,15,20-арилпорфиринов с A_2B_2 -цис и A_2B_2 -транс типами периферического замещения, а также дендримеров с порфириновым ядром, обладающих такой же архитектурой спейсеров между тетрапиррольным макроциклом и индолокарбазольными дендронами, и исследовано формирование их моно- и дважды протонированных форм. Установлено, что в ходе кислотно-основного титрования всех исследованных соединений происходит последовательное формирование моно- и дважды протонированных форм, которое обнаруживается по отсутствию изобестических точек в спектрах поглощения при протонировании ядра тетрапиррольного макроцикла. Однако из-за близости констант протонирования $pK_{a1}(H_2P \leftrightarrow H_3P^+)$ и $pK_{a2}(H_3P^+ \leftrightarrow H_4P^{2+})$ концентрация монопротонированной формы оказывается малой по сравнению с концентрациями свободного основания и дважды протонированной формы как в основном синглетном S_0 состоянии, так и в первом возбужденном синглетном S_1 состоянии. Различная локализация периферических заместителей/спейсеров А (фенильные группы) и В (мезитильные группы) типов, которые различаются характером стерических взаимодействий с тетрапиррольным макроциклом, не приводит к заметным изменениям кислотно-основных свойств. Свободные основания всех соединений имеют близкие фотофизические характеристики. Обнаружено, что дважды протонированные формы дендримеров с порфириновым ядром и исходных порфиринов имеют различные вероятности каналов дезактивации первого возбужденного синглетного S_1 состояния. По сравнению с молекулами свободных оснований величина квантового выхода флуоресценции порфиринового ядра дендримеров уменьшается в 50-1000 раз, в то время как у исходных порфиринов наблюдается ее трехкратное увеличение. Таким образом, формирование дендримеров практически не меняет кислотно-основные свойства порфиринового макроцикла, но приводит к существенным изменениям его флуоресцентных свойств.

УДК 535.37+541.65+543.4

Д. В. Клеицкий, доц., канд. физ.-мат. наук;
Н. Н. Крук, зав. кафедрой физики, д-р физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

ВЗАИМОСВЯЗЬ ТИПА ПЕРИФЕРИЧЕСКОГО ЗАМЕЩЕНИЯ МАКРОЦИКЛА КОРРОЛОВ И ХАРАКТЕРА ЕГО НЕПЛОСКОСТНЫХ ИСКАЖЕНИЙ

Проведен анализ характера неплоскостных искажений тетрапиррольного макроцикла свободных оснований корролов для молекулярных конформаций NH таутомеров, полученных в результате квантово-химических расчетов (5,10-мезитил-15-2,6-дихлоропиримидинил-коррол) и рентгеноструктурного анализа (5,10,15-фенил-18-нитро-коррол). Установлено, что характер неплоскостных искажений близок для соответствующих NH таутомеров двух корролов, что свидетельствует о наличии характерных черт у молекулярных конформаций NH таутомеров. Несмотря на то, что для всех трех изученных молекулярных конформаций NH таутомеров обнаруживаются неплоскостные искажения волнообразного типа, амплитуды отклонений отдельных атомов макроцикла для них заметно различаются. Для количественной оценки величины неплоскостных искажений макроцикла корролов впервые введен параметр Δ_{23} , который представляет собой среднеквадратичное отклонение одного макроциклического атома от средней плоскости макроцикла $7C$. Отмечено небольшое увеличение величины Δ_{23} для 5,10,15-фенил-18-нитро-коррола, которое, по видимому, вызвано синергизмом неплоскостной деформации макроцикла и вращения арильных заместителей в мезо-положениях. Показано, что асимметрия молекулярной конформации корролов близка к асимметрии, наблюдаемой у стерически затрудненных порфиринов, для которых объемные заместители сгруппированы на одной половине макроцикла. Однако, в случае корролов действуют стерические факторы в ядре макроцикла, приводящие к формированию волнообразно искаженного макроцикла, а в случае порфиринов стерические факторы локализованы на периферии макроцикла, в результате чего формируется седлообразно искаженный конформер.

УДК 535.37+541.65+543.4

Е. С. Люлькович, студ.;
Н. Н. Крук, зав. кафедрой физики, д-р физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

КОНФИГУРАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРИ НЕПЛОСКОСТНЫХ ИСКАЖЕНИЯХ ТЕТРАПИРРОЛЬНОГО МАКРОЦИКЛА

Для нескольких семейств тетрапиррольных соединений изучено взаимодействие двух одноэлектронных (a_{1u}, e_g) и (a_{2u}, e_g) конфигураций под влиянием неплоскостных искажений молекулярной структуры. Для расчетов относительного вклада одноэлектронных конфигураций в формирование электронных переходов использован подход, использующий взаимосвязь коэффициентов экстинкции (интенсивностей) полос в электронных спектрах поглощения тетрапиррольных соединений в рамках четырехорбитальной модели Гоутермана. Показано, что характер конфигурационного взаимодействия не изменится при формировании неплоских конформеров тетрапиррольного макроцикла, переходе от свободных оснований к металлокомплексам, а также модификации периферии макроцикла электронодонорными либо электроноакцепторными заместителями. В результате получено однозначное соотношение между величиной квадрата вклада одноэлектронной конфигурации A^2 и величиной энергетического зазора между двумя нижними заполненными молекулярными орбиталями a_{1u} и a_{2u} . Установлена аддитивность влияния возмущающих факторов на конфигурационное взаимодействие одноэлектронных (a_{1u}, e_g) и (a_{2u}, e_g) конфигураций в тетрапиррольном макроцикле. Для свободных оснований и дважды протонированных форм 5,10,15,20-(пара-X-фенил)-порфиринов обнаружено различное влияние природы групп в пара-положении фенильных заместителей на величину конфигурационного взаимодействия. Предложено, что данное явление вызвано различием в перераспределении электронной плотности между макроциклом и заместителями из-за значительной разницы в степени перекрытия π -орбиталей макроцикла и фенильных заместителей.

УДК 535.37+541.65+543.4

А. Б. Крылов, доц., канд. биол. наук;
Н. Н. Крук, зав. кафедрой физики, д-р физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

МОЛЕКУЛЯРНАЯ СТРУКТУРА И КИСЛОТНО-ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА N-МЕТИЛЗАМЕЩЕННОГО ОКТАЭТИЛПОРФИРИНА

Изучены условия стабилизации моно- и дважды протонированных форм N-CH₃-замещенного октаэтилпорфирина. Поскольку макроциклическое ядро слишком мало, чтобы вместить объемную метильную группу, то даже в случае свободного основания наблюдаются существенные неплоскостные искажения макроцикла.

Установлено, что по сравнению с незамещенной молекулой H₂OЭП, наблюдается батохромное смещение всех полос в спектре поглощения свободного основания примерно на 20 нм, что вызвано формированием неплоского конформера. При переходе к протонированным формам такие различия исчезают. По-видимому это связано с тем, что моно- и дважды протонированные формы H(N-CH₃)OЭП обладают примерно такой же степенью искажения макроцикла, как и незамещенный H₂OЭП.

Установлено, что, в отличие от незамещенных аналогов, наблюдается сильное тушение флуоресценции протонированных форм H(N-CH₃)OЭП. Показано, что тушение вызвано резким ростом вероятности безызлучательной дезактивации S₁ состояния.

Величина сдвига Стокса при образовании монопротонированной формы существенно увеличивается, а при присоединении второго протона величина сдвига уменьшается до нуля. Это указывает на то, что дважды протонированная форма молекулы H(N-CH₃)OЭП представляет собой жесткий конформер с повышенной вероятностью безызлучательной дезактивации, который не испытывает заметных конформационных перестроек в возбужденном состоянии.

УДК 539.211:539.1.06

О.Г. Бобрович, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);

И.С. Ташлыков, проф., д-р. физ.-мат. наук (БГПУ им. М Танка, г. Минск)

КОМПОЗИЦИОННЫЙ СОСТАВ И ПОВРЕЖДЕНИЕ КРЕМНИЯ ПРИ НАНЕСЕНИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ (Co, Zr, W) ПОКРЫТИЙ В УСЛОВИЯХ ИОННОГО АССИСТИРОВАНИЯ

В представленной работе исследован состав, распределение элементов в покрытии нанесенном на пластины (100) Si при комнатной температуре, а также дефектообразование в кристаллах кремния при нанесении металлического (Co, Zr, W) покрытия в условиях ионного ассистирования.

Элементный состав покрытия и распределение элементов по глубине изучали с применением резерфордовского обратного рассеяния (РОР) ионов гелия, а повреждение структуры кремния – методом просвечивающей электронной микроскопии и методом РОР в сочетании с каналированием (РОР/КИ) ионов гелия.

Установлено, что покрытие однородно по составу по всей толщине. В состав получаемых покрытий на кремнии входят атомы наносимого металла (Co, Zr, W), технологических примесей С и О из вакуумной камеры, а также Si в результате встречной диффузии из подложки в покрытие. Уменьшение ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов Zr^+ от 10 кВ до 5 кВ приводит к увеличению толщины покрытия в $\sim 1,5$ раза при одинаковом времени модифицирования образцов кремния, что связано с разной интенсивностью процессов распыления, осаждаемого покрытия, при различных энергиях ассистирующих ионов и активацией миграционных процессов в результате управляемого энерговыделения в процессе осаждения покрытия.

Структура кремния повреждается лишь в начальный момент времени модифицирования образца, когда толщина осаждаемого покрытия меньше пробега ассистирующих ионов в материале покрытия. Обнаружено также, что ионно-ассистируемое осаждение покрытий на структуры металлическое покрытие – кремний, созданные предварительным вакуумным осаждением на кремний покрытий, позволяет снизить дефектность в поверхностном слое кремния размером 30-40 нм. Концентрация смещенных из узлов атомов кремния уменьшается в 1,7 – 3,7 раза при одинаковых условиях осаждения металлического покрытия на кремний и на структуру металлическое покрытие – кремний.

**ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ
МАТЕРИАЛОВ ПО ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ
КОЭФФИЦИЕНТА ПРОПУСКАНИЯ В ОБЛАСТИ СВЧ**

Измерения интенсивности излучения, прошедшего через полупроводниковую пластину дают информацию о проводимости зондируемой среды. Коэффициент пропускания СВЧ-излучения проводящей среды зависит от диэлектрической проницаемости и удельной электропроводности среды. Расчет показывает, что для большинства полупроводников широкого применения с проводимостью $\sigma > 30$ См/м можно выделить диапазон частот в области 20–80 ГГц, на котором зависимость коэффициента пропускания от частоты зондирующего излучения будет близка к линейной. Удельную электропроводность можно определить по наклону этой зависимости. Из сравнения данных, полученных для пластин различной толщины, установлено, что на результат измерения могут значительное влияние оказывать многократные внутренние отражения от граней образца. Наряду с этим, с ростом частоты, когда длина волны становится сравнимой с толщиной образца, начинает сказываться интерференционное гашение зондирующей волны. Поэтому, целесообразно проводить измерения на образцах, толщина которых значительно меньше длины волны.

Значения удельной электропроводности, полученные с помощью линейных участков частотных характеристик в диапазоне 40–75 ГГц, хорошо согласуются с расчетными данными собственной проводимости образца при температурах порядка комнатной в предположении энергетического больцмановского распределения носителей заряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мадьяров В. Р. Исследование релаксационных свойств полупроводников с помощью интерферометрии миллиметрового диапазона. / В. Р. Мадьяров // Труды БГТУ. Физ.-мат. науки и информ. –N 6 (162). – 2013. – С.54 – 56.

УДК 539.213.2

А. Е. Почтенный, канд. физ.-мат. наук, доц.;
А. В. Мисевич, канд. физ.-мат. наук, доц.;
С. А. Климович, магистрант;
А. О. Ковалёнок, магистрант (БГТУ, г. Минск);
В. К. Долгий, доц. (БГАТУ, г. Минск);
А. В. Кухто, вед. науч. сотр. (ИЯП БГУ, г. Минск)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМА ПРОВОДИМОСТИ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ ПЛЁНКАХ МЕТОДОМ ЦИКЛИСКОЙ ТЕРМОДЕСОРБЦИИ

Применяемые в микроэлектронике поликристаллические и аморфные пленки полупроводников и диэлектриков, как правило обладают достаточно высокой адсорбционной активностью. Это позволяет исследовать электрические свойства таких пленок методом циклической термодесорбции газообразных примесей. Цель данной работы – изучение возможности применения метода циклической термодесорбции для идентификации механизма проводимости в конденсированных пленках.

Для исследования были выбраны пленки с заведомо разными механизмами проводимости: фторзамещенный фталоцианин меди – органический полупроводник с предположительно прыжковым механизмом проводимости; двуокись титана – оксидный полупроводник с зонным механизмом проводимости, а также пленки на основе графена, механизм проводимости которых пока мало изучен. Оказалось, что метод циклической термодесорбции применим для идентификации механизма проводимости в пленках с прыжковой проводимостью, зонной полупроводниковой и металлической проводимостью. Показано, что в пленках фторзамещенного фталоцианина меди реализуется прыжковая проводимость либо по собственным состояниям материала, либо по примесным состояниям кислорода, причем примесные уровни лежат по шкале энергий выше собственных; определены значения радиусов локализации собственных и примесных состояний и концентрация центров локализации в исходном материале. В пленках двуокиси титана, полученных по золь-гель технологии, реализуется зонный механизм проводимости, причем эти пленки являются примесными полупроводниками, в которых адсорбированный кислород является мелкой примесью. В пленках на основе графена реализуется зонный механизм проводимости, причем проводимость носит металлический характер, а адсорбированный кислород играет роль центров рассеяния.

УДК 674.055:621.934(043.3)

В. В. Чаевский, канд. физ.-мат. наук, доц., доц.;

А. А. Гришкевич, канд. техн. наук, доц., зав кафедрой;

В. В. Жилинский, канд. хим. наук, ст. преп.

(БГТУ, г. Минск);

О. Чернашеус, техн. наук, доц., зам. декана

(Вильнюсский технический университет им. Гядиминаса, г. Вильнюс)

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ZrN-Ni-Co-ПОКРЫТИЙ НА ЛЕЗВИЯХ СТАЛЬНЫХ НОЖЕЙ ДЕРЕВОРЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА

Одним из наиболее эффективных способов обработки поверхности лезвий ножей дереворежущих с целью повышения периода стойкости инструментов является метод конденсации вещества из плазменной фазы в вакууме с ионной бомбардировкой поверхности (КИБ), существенно увеличивающий эксплуатационные свойства резцов при осаждении на их поверхность покрытий нитридов тугоплавких металлов Ti, Mo, Zr и др. В настоящее время в машиностроении также широко используются гальванические сплавы на основе железа и покрытия, полученные из сульфатных электролитов на основе железоникель, которые являются достаточно износостойкими.

Определены параметры электролитического синтеза из сернокислого электролита Ni-Co-покрытий на стальную поверхность. Подобраны режимы и сформированы КИБ методом ZrN-покрытия, гальваническим и КИБ методами комбинированные ZrN-Ni-Co-покрытия на лезвиях стальных (марки Р6М5) ножей дереворежущего фрезерного инструмента. Сформированные гальванические Ni-Co-слои не перемешиваются со стальной основой и ZrN-покрытием.

Основным видом износа стального лезвия ножа с Ni-Co- и ZrN-Ni-Co-покрытиями при резании ламинированных древесностружечных плит является абразивный износ. Покрытия на поверхности стальных лезвий ножей фрез уменьшают интенсивность их износа. Величина рассчитанного объемного износа лезвия ножа с ZrN-Ni-Co-покрытием при резании ламинированных ДСтП в лабораторных условиях имела более чем в 3 раза меньше значение, чем для лезвия с Ni-Co-покрытием. Проведенные опытно-промышленные испытания на ОАО «Минскдрев» модифицированных фрез с комбинированными ZrN-Ni-Co-покрытиями на лезвиях ножей показали увеличение периода стойкости фрез при резании сосны (штапик) до 30% по сравнению с инструментом без покрытий.

УДК 531.19; 539.682

Е.В. Фарафонтова, ассист., канд. физ.-мат. наук;
И.И. Наркевич, проф., д-р физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МАЛОЙ ПОДСИСТЕМЫ МОЛЕКУЛ В ПОЛЕ ОСТАЛЬНЫХ МОЛЕКУЛ СРЕДЫ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПО ОБЪЕМАМ МИКРОЯЧЕЕК

Для описания структуры и термодинамических свойств макроскопической системы используется ранее предложенная единая статистическая модель кристалла, жидкости и газа. Молекулярная система с парным взаимодействием молекул описывается с помощью межмолекулярного потенциала Леннарда-Джонса.

В рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода разработана методика учета взаимодействия выделенной молекулы со своим окружением внутри макроскопической системы. Она учитывает взаимодействие молекулы с ближайшими соседями в первой и второй координацион

ных сферах с помощью потенциалов средних сил модифицированного метода условных распределений, а взаимодействие с молекулами на достаточно больших расстояниях, соответствующих третьей и четвертой сферам, описывается с помощью средних потенциалов, которые рассчитываются аналитически. Система молекул, распределенных в четырех первых координационных сферах гранцентрированной решетки, образует малую подсистему по отношению к остальным молекулам всей системы. Влияние этих молекул окружающей однородной среды на распределение молекул в малой подсистеме учитывается в приближении среднего поля.

Составлена система уравнений [1], которая позволила рассчитать младшие функции распределения и свободную энергию системы. Исследована сходимость итерационной процедуры решения этой системы двух интегральных уравнений. Построена изотерма свободной энергии системы при температуре, которая меньше температуры критической точки, но больше температуры тройной точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наркевич И. И., Фарафонтова Е. В., Клышко В. Б. Полная система уравнений для расчета свободной энергии системы с учетом неоднородного распределения молекул в микроячейках метода условных распределений / И. И. Наркевич, Е. В. Фарафонтова, В. Б. Клышко // Труды БГТУ. – 2014. – № 6 (170). Физ.-мат. науки и информатика – С. 41–43.

УДК 531.19; 539.682

И.И. Наркевич, проф., д-р физ.-мат. наук;

Е.В. Фарафонтowa, ассист., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

ОПИСАНИЕ СТРУКТУРЫ СФЕРИЧЕСКИХ НАНОЧАСТИЦ С ПОМОЩЬЮ ДВУХУРОВНЕВОГО МОЛЕКУЛЯРНО-СТАТИСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

При использовании ранее разработанного двухуровневого молекулярно-статистического подхода для описания структуры малых кластеров, занимающих ограниченный объем (например, наночастиц), следует учитывать неоднородное распределение молекул по совокупности микроячеек метода условных распределений Ротта, принадлежащих этой малой системе. В результате одноячеечные числа заполнения n_i^{μ} образуют дискретное поле, изменяющееся на расстояниях, которые больше молекулярных размеров. Соответственно нормировочные константы Q_i^{μ} и $Q_{ij}^{\mu\nu}$ для унарных и бинарных функций распределения, а, следовательно, и двухъячеечные числа $n_{ij}^{\mu\nu}$ становятся функционалами от дискретного поля чисел n_i^{μ} . В качестве примера применения этого подхода рассмотрим сферическую наночастицу радиуса R с радиальным распределением чисел заполнения $n_l = n(r_l)$, где r_l – радиус координационной сферы или тонкого слоя с номером l с центром в центре наночастицы.

Если объем ω_l всех микроячеек одинаковый ($\omega_l = \omega = const$), то числа заполнения n_l оказываются пропорциональными плотности ρ_l ($n_l = \omega_l / \nu_l = \omega \rho_l$, ν_l – молекулярный объем в слое l). Переходя в общем выражении для свободной энергии от суммирования по микроячейкам к суммированию по сферам или слоям радиусов r_l , содержащим Z_l микроячеек (узлов решетки), и учитывая зависимость плотности f_l^* свободной энергии от чисел заполнения только в трех соседних сферах (слоях) с номерами $l-1$, l и $l+1$, получим:

$$F\{n_m\} = \theta \sum_{l=1}^L Z_l (n_l \ln n_l + (1-n_l) \ln(1-n_l)) + \sum_{l=1}^L Z_l f_l^*(l-1, l, l+1). \quad (1)$$

Варьируя функционал $\Omega = F - \mu N$ по числу заполнения n_k в сфере или слое с номером k , получим вариационное уравнение

$$\theta Z_k (\ln n_k - \ln(1-n_k)) + \sum_{l=k-1}^{l=k+1} Z_l \frac{\delta f_l}{\delta n_k} - \mu Z_k = 0, \quad (2)$$

которое в общем случае является аналогом интегрального уравнения для искомого профиля плотности $\rho_l = n_l / \omega$.

УДК 539.1.06:539.23.234

В.В. Тульев, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);
И.С. Ташлыков, проф., д-р физ.-мат. наук (БГПУ им. М. Танка, г. Минск)

ЭЛЕМЕНТНЫЙ СОСТАВ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПОНЕНТОВ ПО ГЛУБИНЕ В СТРУКТУРАХ Me/Be, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ ИОННО-АССИСТИРУЕМОГО ОСАЖДЕНИЯ

В данном докладе обсуждаются экспериментальные результаты по изучению элементного состава и распределения элементов по глубине в приповерхностных слоях структур Me/Be, сформированных методом ионно-ассистируемого осаждения. Этот метод позволяет в процессе осаждения покрытия облучать поверхность формируемой структуры ускоренными ионами материала покрытия. Так происходит перемешивание атомов на поверхности подложки с атомами осаждаемого покрытия, в результате чего формируется покрытие с высокой степенью адгезии к основе.

Ионно-ассистируемое нанесение покрытий на основе хрома, титана, меди и вольфрама осуществлялось при ускоряющем напряжении 20 кВ. Плотность ионного тока составляла $\sim 6\text{--}20$ мкА/см², а интегральный поток облучающих ионов $(0,4\text{--}1,2)\cdot 10^{17}$ ион/см². В рабочей камере в процессе осаждения покрытий поддерживался вакуум при давлении $\sim 10^{-2}$ Па.

Элементный состав поверхности структур Me/Be, распределение элементов в покрытии изучались методом резерфордовского обратного рассеяния (РОР) ионов гелия с энергией $E_0 = 2,0$ МэВ при углах рассеяния, влета и вылета 165° , 0° , 15° , соответственно. Относительная погрешность при определении слоевого содержания рассеивающих атомов $\varepsilon \approx 5\%$. Для послойного анализа элементного состава на поверхности и в объеме использовалась программа RUMP компьютерного моделирования экспериментальных спектров РОР.

Среднее зарядовое число Q^* в ионном пучке рассчитывалось по эмпирической формуле, приведенной в работе [1]. Используя измеренные значения ионного тока и среднее зарядовое число, были рассчитаны интегральные потоки Φ ассистирующих ионов. Так же по среднему зарядовому числу определялась энергия E_i ассистирующих ионов, величина которой была использована в программе TRIM для расчета среднего проективного пробега R_p и страгглинга пробега ΔR_p Cr^+ , Ti^+ , Cu^+ , W^+ ионов в бериллии и коэффициентов распыления бериллия, углерода, кислорода и металла ассистирующими ионами.

Спектры РОР ионов гелия от исходного и модифицированных образцов представлены на рисунок 1.

Исследования показали, что на Be формируется поверхностная структура толщиной ~50-60 нм. В состав покрытия входят атомы осажденного металла (0,5-3,3 ат.%), атомы технологических примесей углерода (0,8-1,8 ат.%) и кислорода (6,3-9,9 ат.%), атомы Be из подложки.

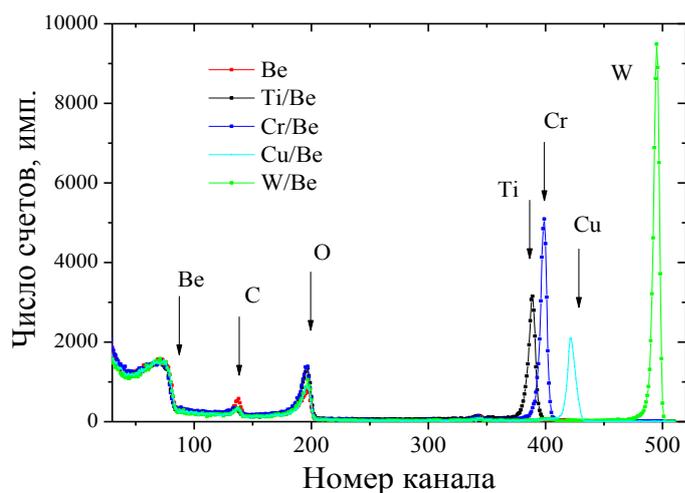


Рисунок 1 - Спектры РОР ионов гелия от образцов из бериллия до и после ионно-ассистированного осаждения покрытий

Установлено что содержание кислорода в покрытии возрастает по сравнению с не модифицированным образцом и достигает наибольшего значения при осаждении покрытия на основе Cr и Ti. А содержание углерода в покрытии уменьшается по сравнению с не модифицированным образцом, и достигает своего наименьшего значения при осаждении покрытия на основе W. Источниками дополнительных атомов кислорода и углерода, на наш взгляд, являются остаточные газы в вакуумной камере и летучая фракция вакуумного масла диффузионного паромасляного насоса.

При формировании покрытия наблюдается проникновение атомов осаждаемых металлов и атомов кислорода в бериллий вследствие атомного перемешивания в каскадах атомных столкновений и радиационно-стимулированной диффузии, проникновение атомов бериллия и углерода в пленку вследствие встречной диффузии, а также распыление формирующейся пленки ассистирующими ионами

ЛИТЕРАТУРА

1. Sasaki J. [et. al.]. Implantation of titanium, chromium, yttrium, molybdenum, silver, hafnium, tantalum, tungsten and platinum ions generated by a metal vapour vacuum ion source into 440C stainless steel // Surf. Coat. Technol. 1992. Vol. 51. P. 166–175.

УДК 544.478:537.533.9 В.В. Поплавский, доц., канд. физ.-мат. наук;
В.Г. Матыс, доц., канд. хим. наук (БГТУ, г. Минск);
И.П. Смягликов, канд. тех. наук (ФТИ НАН Беларуси, г. Минск)

ИОННО-ЛУЧЕВОЕ И ИОННО-ПЛАЗМЕННОЕ МОДИФИЦИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ТОКОВЫХ КОЛЛЕКТОРОВ ТОПЛИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Основными компонентами топливного элемента являются: мембранно-электродный блок, состоящий из ионопроводящей мембраны (электролита) и контактирующих с ней каталитических слоев и диффузионных слоев из пористых металлических или специальных углеродных материалов с развитой поверхностью, через которые осуществляются подвод топлива и окислителя, токосъем, а также отвод продуктов электрохимической реакции; токовые коллекторы – электроды с каналами для подачи топлива в анодное пространство и окислителя в катодное. В низкотемпературных топливных элементах, в основе принципа действия которых электрохимические процессы окисления водорода, метанола и этанола, в качестве электролита используется полимерная ионообменная мембрана DuPont™ Nafion® N 115. Материал мембраны Nafion представляет собой фторуглеродный полимер, содержащий функциональные сульфогруппы, способные к обмену с внешней средой катионами. В условиях работы топливного элемента рабочие поверхности токовых коллекторов, контактирующие с мембранно-электродным блоком, подвержены электрохимической коррозии вследствие достаточно высокой агрессивности среды, содержащей анионы SO_4^- и F^- .

Целью работы явилось исследование возможности получения защитных слоев на поверхности токовых коллекторов из нержавеющей стали с применением вакуумного осаждения хрома. Хромсодержащие покрытия на образцах нержавеющей стали 12Х18Н9Т и токовых коллекторах, изготовленных из нее, получены двумя методами вакуумного осаждения – ионно-ассистированным и ионно-плазменным. Исследованы состав и микроструктура получаемых слоев. Испытания материалов на коррозионную устойчивость проведены электрохимическим методом поляризационных кривых в растворе $1\text{M H}_2\text{SO}_4 + 2 \cdot 10^{-6}\text{M HF}$ при температуре $70\text{--}80^\circ\text{C}$. Установлено, что коррозионная стойкость модифицированной поверхности в условиях работы топливного элемента зависит от состава поверхностного слоя и метода его формирования. Сделан вывод о возможности применения вакуумных методов осаждения покрытий для повышения коррозионной устойчивости токовых коллекторов топливных элементов с полимерным мембранным электролитом.

УДК 544.478:537.533.9

В.В. Поплавский, доц., канд. физ.-мат. наук;
 О.Г. Бобрович, доц., канд. физ.-мат. наук;
 В.Г. Матыс, доц., канд. хим. наук;
 В.В. Тульев, доц., канд. физ.-мат. наук
 (БГТУ, г. Минск)

ПОДГОТОВКА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛИМЕРНОГО МЕМБРАННОГО ЭЛЕКТРОЛИТА К ФОРМИРОВАНИЮ МЕМБРАННО-ЭЛЕКТРОДНЫХ БЛОКОВ ТОПЛИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Мембранно-электродный блок, состоящий из ионопроводящей мембраны и контактирующих с ней диффузионных слоев, является основным функциональным компонентом топливного элемента с полимерным мембранным электролитом. Через диффузионные слои топливного элемента осуществляются подвод топлива и окислителя, токосъем, а также отвод продуктов реакции. При формировании мембранно-электродного блока посредством горячего прессования необходимо обеспечить надежный электрический контакт диффузионных слоев с мембраной, что требует специальной подготовки ионообменной мембраны. Подготовка поверхности полимерного мембранного электролита DuPont™ Nafion® N 115 включает многостадийную химико-термическую обработку (ХТО) с целью удаления органических и неорганических поверхностных загрязнений с последующим ионно-ассистируемым осаждением платины до доз $\sim 5 \cdot 10^{15}$ ат./см².

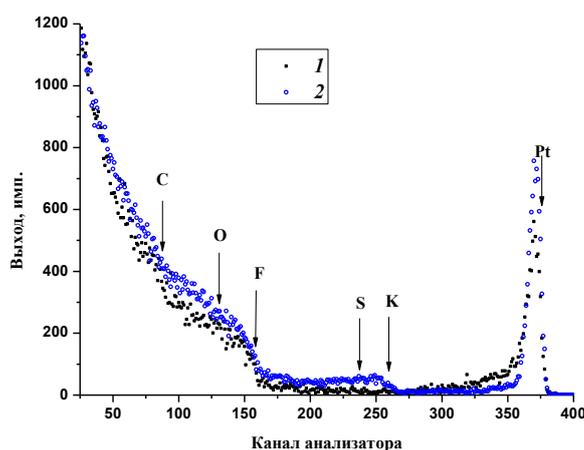


Рисунок 1 - Спектры резерфордовского обратного рассеяния ионов ⁴He от поверхности образцов Nafion® N 115 с поверхностным слоем, сформированным ионно-ассистируемым осаждением платины до (1) и после (2) ХТО

Состав модифицированной поверхности электролита исследован методами спектрометрии резерфордовского обратного рассеяния (рисунок 1) и рентгеновского спектрального микроанализа.

УДК 535.14

Т.Б. Карлович, ст. преп., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

БЕСПОРОГОВАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ОДНОКУБИТНЫМ ЛАЗЕРОМ

В литературе последних лет активно дискусируется вопрос о существовании порога генерации для микролазера. Некоторые авторы предлагают в качестве порога генерации рассматривать так называемый однофотонный предел (среднее число фотонов в резонаторе равно единице). Другие авторы утверждают, что для микролазера доля спонтанного испускания в нерезонаторные моды поля мала и, следовательно, порог генерации может быть очень низким или вообще отсутствовать.

В данной работе мы определяем два порога генерации для модели однокубитного лазера. Однокубитный лазер представляет собой систему, состоящую из одного сверхпроводящего кубита (т.н. островка), который характеризуется двумя зарядовыми состояниями: с избыточной куперовской парой $|2\rangle$ и без нее $|0\rangle$. Куперовская пара поступает на островок через контакт Джозефсона с электрода земли. При этом частота перехода настроена в резонанс с расположенным рядом копланарным волноводом (резонатором), в результате чего возможно испускание фотона. Лазерный режим генерации создается путем перекачки нескольких куперовских пар на островок с последующим испусканием N фотонов. Такой режим экспериментально был продемонстрирован в работе [1].

Пороги генерации для однокубитного лазера определялись нами на основе P - и Q -функций квазивероятности. Первый порог связан с генерацией излучения с ненулевой амплитудой, а второй порог - с достижением единицы среднего числа внутрирезонаторных фотонов. Для случая высокодобротного резонатора получены аналитические выражения для обоих порогов генерации. Обнаружено, что при определенном соотношении между параметрами, описывающими однокубитный лазер, генерация излучения с ненулевой амплитудой осуществляется при любой интенсивности некогерентной накачки. Это говорит об исчезновении первого порога генерации у однокубитного лазера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Single artificial-atom lasing /O.Astafiev et.al. //Nature.-2007.-V.449.-P.588-593.

УДК 531.19

П. Аргиракис, проф., д-р, Л. Скарпалезос, докт.,
(Университет имени Аристотеля, г. Салоники, Греция);

В. С. Вихренко, проф., д-р физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

ПРОЯВЛЕНИЕ ЭФФЕКТОВ ПАМЯТИ В ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТЕ ДИФФУЗИИ

Статистико-механическое рассмотрение кинетических процессов в сплошных средах приводит к выводу, что на определенных временных масштабах проявляются эффекты памяти, приводящие к интегро-дифференциальному виду уравнений переноса. Естественно, эти же эффекты свойственны и решеточным моделям сплошных сред, причем в таких моделях причины возникновения эффектов памяти более наглядны и интуитивно понятны.

В частности, при термоактивированном перемещении частиц по решетке особую роль играют так называемые специальные вакансии [1] – свободные узлы, возникающие вследствие перемещения из них частиц в соседние узлы. Для только что переместившейся частицы ее специальная вакансия нарушает трансляционную однородность среды, так как возвращение частицы обратно в специальную вакансию является более предпочтительным по сравнению с перемещением в любой другой ближайший узел решетки, который может быть занят уже находящейся там частицей (многократное заполнение узлов в данной модели среды запрещено).

С течением времени исходное состояние с существующей специальной вакансией забывается, однако шлейф специальных вакансий сопровождает движущуюся частицу, и процесс забывания начального состояния может длиться достаточно долго. Наиболее отчетливо эффекты памяти должны проявляться в процессе самодиффузии, то есть в процессе случайных блужданий индивидуальных частиц системы и, соответственно, в зависимости от времени коэффициента самодиффузии [2]. Обычно предполагается, что среднеквадратичное смещение частицы пропорционально времени. Это справедливо лишь при отсутствии эффектов памяти.

Для исследования эффектов памяти использована одночастичная пространственно-временная функция ван Хова $G_s(\mathbf{r}, t)$, описывающая некогерентное рассеяние излучения средой. Эта функция Ван Хова определяет плотность вероятности нахождения некоторой частицы в пространстве в заданный момент времени при условии, что в начальный момент частица была фиксирована в определенном положении. Кинетика этой функции описывается уравнением неразрывности

$$\frac{\partial G_s(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t),$$

в котором поток плотности вероятности подчиняется обобщенному закону Фика

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\int_V \widehat{D}_s(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \cdot \frac{\partial G_s(\mathbf{r}', t)}{\partial \mathbf{r}'} d^3 \mathbf{r}',$$

где интегрирование производится по объему V системы, а тензор коэффициентов самодиффузии \widehat{D}_s зависит от расстояния и времени. Как отмечено выше, для решеточного флюида эти зависимости очевидны, так как предпочтительным является перескок частицы назад в прежнее положение (в специальную вакансию), создавая, таким образом, особое пространственное распределение вакантных мест, зависящее от времени после начала движения частицы.

Записывая зависимость среднего квадрата смещения частицы от времени с использованием функции $G_s(\mathbf{r}, t)$, дифференцируя его по времени и учитывая уравнение неразрывности, приходим к интегральному выражению, допускающему интегрирование по частям [3]. Последующее использование теоремы Гаусса–Остроградского и повторное интегрирование по частям с использованием свойств симметрии позволяет получить соотношение

$$\frac{d\langle [\mathbf{r}(t)]^2 \rangle}{dt} = 2n \int_V D_s(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) d^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 2nD_s(t),$$

где n – размерность пространства, и средний квадрат смещения определяется интегралом по времени от коэффициента диффузии

$$\langle [\mathbf{r}(t)]^2 \rangle = 2n \int_0^t D_s(t') dt'.$$

При достаточно больших временах это выражение аппроксимируется линейной зависимостью

$$\langle [\mathbf{r}(t)]^2 \rangle = b + 2nD_s t,$$

с постоянным коэффициентом самодиффузии D_s в пределе больших времен, а параметр b характеризует величину эффектов памяти.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kutner R., Kehr K. W. Phys. Rev. B. – 1990. – Vol. 41. – P. 2784.
2. L. Skarpalezos, N. Tsakiris, P. Argyrakis, and V. S. Vikhrenko. Phys. Rev. B – 2011. – Vol. 84. – Art. #075476.
3. L. Skarpalezos, P. Argyrakis, and V. S. Vikhrenko. Phys. Rev. E – 2014. – Vol. 89. – Art. #053318.

УДК 531.19

П. Аргиракис, проф., д-р; Л. Скарпалезос, д-р
(Университет имени Аристотеля, г. Салоники, Греция);

В. С. Вихренко, проф., д-р физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

**РЕШЕТОЧНАЯ МОДЕЛЬ С БЛОКИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ:
ОСОБЕННОСТИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ
И ДИФФУЗИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК**

Как известно, идеальные упорядоченные структуры не существуют ввиду присутствия тех или иных несовершенств, зачастую существенно влияющих на свойства систем. Одним из возможных нарушений симметрии решеточных систем является наличие заблокированных узлов, то есть узлов, недоступных движущимся частицам. Существует обширный класс физических объектов, свойства которых могут моделироваться решеточными системами с заблокированными узлами [1]. В работе представлены результаты моделирования по методу Монте Карло термодинамических и диффузных характеристик системы частиц с притяжением ближайших соседей на квадратной решетке при наличии заблокированных узлов с концентрацией до $c_b=0,3$.

Используя большой канонический ансамбль, построены изотермы химического потенциала в зависимости от концентрации подвижных частиц. При моделировании использовалось постепенное изменение химического потенциала в направлении увеличения концентрации частиц и в обратном направлении, что позволило по наличию или отсутствию гистерезиса судить о критической температуре фазового перехода и форме кривой сосуществования фаз. Критическая температура убывает практически линейно с концентрацией заблокированных узлов, уменьшившись примерно в 2,3 раза при $c_b=0,3$.

По результатам моделирования диффузии исследовалось влияние заблокированных узлов на эффекты памяти. Последние проявляются в отклонении среднего квадрата смещения частиц от линейной временной зависимости [2]. Установлено, что в движении индивидуальных частиц влияние эффектов памяти характеризуется минимумом при $c_b \approx 0,2$, тогда как в коллективной диффузии эти эффекты, слабые при отсутствии заблокированных узлов, становятся весьма существенными уже при концентрации c_b порядка нескольких процентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ellery A. J., Simpson M. J., McCue S. W., Baker R. E. Journ. Chem. Phys. – 2014. – Vol. 140. – Art. #054108.
2. L. Skarpalezos, P. Argyrakis, and V. S. Vikhrenko. Phys. Rev. E – 2014. – Vol. 89. – Art. #053318.

КВАЗИХИМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕТКИ С ЗАБЛОКИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ

В докладе рассмотрена модель решеточного флюида на плоской квадратной решетке, в которой некоторая часть решеточных узлов является заблокированной, т. е. недоступной как для частиц, так и для вакансий. По аналогии со стандартной моделью решеточного флюида наряду с исследуемой системой может быть рассмотрена подобная ей базисная решеточная система, взаимодействие в которой определяется одночастичными средними потенциалами. Это позволяет представить свободную энергию в виде суммы энергии базисной системы и диаграммной части свободной энергии. Первая из этих частей может быть легко факторизована, а вторая допускает разложение в ряд по перенормированным с помощью средних потенциалов функциям Майера. При таком представлении свободной энергии квазихимическое приближение соответствует учету двухузловых членов в отмеченном выше разложении. Это приводит к тому, что радиус действия одночастичных потенциалов в базисной системе совпадает с радиусом действия потенциалов взаимодействия в исходной, а диаграммная часть свободной энергии обращается в ноль. В этом случае выражения для свободной энергии F , химического потенциала μ , вероятности двум ближайшим узлам быть занятыми частицами $P(1;1)$ и термодинамического фактора χ_T принимают вид:

$$\beta F = \theta \ln \theta + (1 - \theta - c) \ln(1 - \theta - c) + c \ln c - \frac{z}{2} \ln Y + \frac{z}{2} (1 - 2c) \ln \eta;$$

$$\beta \mu = \ln \frac{c}{1 - \theta - c} - z \ln \frac{Y - c}{1 - c}; \quad P(1;1) = \frac{e^2 (1 - c) W}{Y(Y - c)};$$

$$\chi_T = \frac{1 - \theta}{1 - \theta - c} + z \frac{c}{1 - 2Y} \left(\frac{W}{Y - c} - \frac{1}{1 - c} \right),$$

где $Y = 0.5 \left(1 + \sqrt{1 + 4c(1 - c)(W - 1)} \right)$; $\eta = \frac{Y - c}{1 - c}$; $W = \exp(-\beta J)$; c –

концентрация частиц на решетке, θ – концентрация заблокированных узлов, $\beta = 1/k_B T$ – обратная температура, k_B – постоянная Больцмана, z – число ближайших соседей (в случае квадратной решетки $z=4$), J – энергия взаимодействия двух частиц занимающих ближайшие соседние узлы.

УДК 531.19 Г.С. Бокун, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

**ХИМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ В ФОРМЕ
ФУНКЦИОНАЛА ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ
МНОГООБРАЗИЯ СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ
ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

Модель решеточного флюида является одной из стандартных моделей физики конденсированного состояния и широко используется для описания физико-химических процессов в объеме и на поверхностях твердых тел. В частности, она оказывается полезной при описании свойств твердых электролитов. В настоящей работе рассматриваются варианты решения линеаризованных уравнений. Их можно использовать как базовые для описания механизмов переноса заряда и формирования равновесных состояний в твердотельных механических системах. В соответствии с этими уравнениями суммарный поток частиц в среде определяется градиентом электрохимического потенциала и состоит соответственно из двух составляющих, порождаемых движущими силами, пропорциональными градиентам электрического потенциала и концентрации числа частиц. Такому описанию механизма перемещения частиц соответствует рассмотрение их химического потенциала как некоторой функции локальной плотности. Рассматриваемый подход оказывается успешным при анализе миграции частиц в пределах одной фазы и при малой неоднородности распределения плотности по объему системы. Для описания более сложных случаев предлагается вводить компоненту с противоположным зарядом частиц, моделируя таким образом возникновение двойного слоя противоположным смешением частиц разного знака, и привлекая другие дополнительные предположения. В результате окончательный результат становится зависящим от последовательности выполнения тождественных операций, в частности от того, на каком шаге преобразований используется условие электронейтральности.

В силу сказанного возникает необходимость поиска других путей совершенствования описания процессов переноса в электрохимических системах. В частности, оказался перспективным подход, основанный на использовании того факта, что в случае неоднородных систем термодинамические и коррелятивные функции являются не функциями локальной плотности, а соответствующими функционалами поля плотности. Указанная особенность химического потенциала как функционала явилась решающей при описании многофазных состояний и интерфейсных областей между ними в простых системах. Показано, что соответствующая модернизация исходной системы уравнений Нернста-Планка-Пуассона позволяет описывать наличие двойного электрического слоя в электрохимической системе.

УДК 531.19

Г.С. Бокун, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИМПЕДАНСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КЕРАМИКИ ПО ХАРАКТЕРИСТИКАМ ОТДЕЛЬНЫХ ФАЗ

Процессы переноса заряда описываются уравнениями вида

$$I = -qD \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} - C_q \int_0^x \rho(x) dx \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - C_q \rho \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{C_q}{\gamma_T} \rho \quad (3)$$

Интегрируя уравнение (1), после преобразования Лапласа получим выражение, описывающее распределение плотности заряда по объему системы

$$\rho(x, \omega) = C_1 (\exp(\lambda x) - \exp(-\lambda x)) \quad (4)$$

Используя уравнение (2) и соответствующие граничные условия, получим, что разность потенциалов, определяющуюся распределением заряда в соответствии с (4), можно найти по формуле

$$\Delta \varphi = \frac{2C_q C_1 L}{\gamma_T \lambda} \left(\cosh\left(\frac{\lambda L}{2}\right) - \frac{1}{\lambda L} \sinh\left(\frac{\lambda L}{2}\right) \right) \quad (5)$$

Выражение, определяющее импеданс $Z(\omega)$, получим, разделив разность потенциалов, определяемую соотношением (5), на величину тока, создаваемого этим напряжением. Для определения величин тока используем выражение (1), преобразовав последнее с учетом граничных условий. В итоге выражение тока в приэлектродной области будет иметь вид

$$I_{el} = -C_1 D \lambda \left(\exp\left(-\lambda \frac{L}{2}\right) + \exp\left(\lambda \frac{L}{2}\right) \right) = -2C_1 D \lambda \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda L}{2}\right) \quad (6)$$

Разделив (5) на (6), получим зависимость импеданса от ω .

Полученная зависимость использована для построения импедансных диаграмм электролитов и токопроводящей керамики.

УДК 531.19

Р.Н. Ласовский, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ ВКЛАД МЕЖЗЕРЕННОЙ И ОБЪЕМНОЙ ОБЛАСТЕЙ В ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКИЙ ИМПЕДАНС ТОКОПРОВОДЯЩЕЙ КЕРАМИКИ

Решается задача об установлении механизма электропереноса в электропроводящих керамиках. Из-за присутствия высокоподвижных ионов, например, лития или кислорода, исследуемые вещества относятся к интеркаляционным соединениям, подходящим инструментом изучения которых является теория решеточных систем [1]. Для описания материалов с микроструктурной структурой используется теория переходного слоя, определяющая межзеренную границу как отдельную фазу с двумя переходными слоями.

Рассматривая керамику как последовательность областей, состоящих из объемных и межзеренных участков, импеданс системы можно определить как сумму импедансов соответствующих участков системы. Различие свойств в каждом из случаев будем передавать через различные значения коэффициентов диффузии, принимая, что процессы переноса заряда в каждой из областей описываются уравнениями Нернста-Планка-Пуассона.

Получено бикубическое уравнение, из анализа которого можно найти области изменения параметров, соответствующие наличию одного или трех корней.

Построены диаграммы Нернста, из которых видно, что по мере увеличения β (отношение коэффициентов диффузии в межзеренном и объемном участках) сперва кривая в области высоких частот, соответствующая импедансу объема зерен, начинает увеличивать свой вклад в диаграмму Нернста, затем становится преобладающей, а после превышения параметром β граничного значения переходит в кривую с одним экстремумом. По мере приближения параметра β к единице диаграмма Нернста приближается к идеальному полукругу, поскольку при $\beta=1$ объем зерна и межзеренная граница становятся неразличимыми с точки зрения электротранспортных свойств и импеданс системы становится эквивалентным импедансу однородного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вихренко, В.С. Равновесные и диффузионные характеристики интеркаляционных систем на основе решеточных моделей: монография / В. С. Вихренко, Я. Г. Грода, Г. С. Бокун. – Минск: БГТУ, 2008. – 326 с.

УДК 531.19 Я.Г. Грода, зав. кафедрой, доц., канд. физ.-мат. наук;
В.С. Вихренко, проф., д-р физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

КВАЗИОДНОМЕРНАЯ РЕШЕТОЧНАЯ МОДЕЛЬ ТОПЛИВНОЙ ЯЧЕЙКИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЕЕ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

В докладе рассмотрена одномерная дискретная модель электролита, в которой весь массив электролита разбит на слои, содержащие по три ячейки, которые могут быть заняты ионом или вакансией. При отсутствии внешнего потенциала, приложенного к электродам, каждый из выделенных слоев содержит только одну вакансию. При этом каждый из слоев имеет два возможных положения для отрицательно заряженного иона и одно – для положительно заряженного. В дальнейшем положительные ионы считаются фиксированными, тогда как отрицательные могут совершать переходы из одного слоя на другой.

Предложенная решеточная модель является удобной для численного моделирования с помощью динамического метода Монте-Карло, в рамках которого вероятность перехода отрицательно заряженного иона из слоя j в соседний слой k определяется как действием электрического поля, так и величиной энергетического барьера между слоями. Величина последнего принимает случайные значения в соответствии с выбранным распределением.

В докладе представлены результаты компьютерного моделирования данной системы. В частности, при моделировании системы с заблокированными электродами при высоких температурах образуется двойной электрический слой вблизи каждого из электродов. При использовании периодических граничных условий определена зависимость логарифма тока, протекающего через электролит, от обратной температуры. Линейный характер этой зависимости позволил определить среднюю энергию активации системы E_a и рассмотреть ее зависимость от коэффициента масштаба при равномерном распределении высот межузельных барьеров. Анализ полученных результатов позволил аппроксимировать данную зависимость линейной функцией вида

$$E_a = 2.718\varepsilon_0 + 0.624\delta\varepsilon,$$

где ε_0 – средняя величина межузельного барьера, $\delta\varepsilon$ – коэффициент масштаба (полуширина) равномерного распределения.

При экспоненциальном распределении высот межузельных барьеров средняя энергия активации оказалась равной $3.2\varepsilon_0$, где ε_0 – параметр распределения.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СТВОЛА ДЕРЕВА СО СХВАТОМ МАНИПУЛЯТОРА

В работе исследуется влияние гибкости ствола дерева на динамику его взаимодействия со схватом манипулятора в режиме подъема. Рассмотрена модель ствола дерева в виде набора жестких стержней, соединенных упругими шарнирами [1]. Влияние кроны дерева моделируется силой сопротивления, пропорциональной скорости и приложенной к последним стержням модели в соответствии с расположением кроны. Для рассматриваемой системы составлена и решена система уравнений Лагранжа второго рода с неопределенными множителями.

Рассмотренная модель позволила учесть влияние упругости ствола дерева на силу, действующую на схват манипулятора. Рассмотрено несколько вариантов перемещения ствола дерева манипулятором. На движение манипулятора накладывалось кинематическое возбуждение, и рассматривался динамический отклик механической системы. Получены графики зависимости силы воздействия ствола дерева на манипулятор в режиме подъема и после его остановки.

Установлено, что наиболее неблагоприятный режим для манипулятора при мгновенном ускорении в начале движения, перемещении ствола с постоянной скоростью и мгновенным остановом. При таком режиме во время перемещения и после остановки на манипулятор воздействует переменная сила с амплитудой, в 3 раза превышающей вес поднимаемого дерева. При подъеме дерева с постоянным ускорением сила в режиме подъема практически не изменяется и равняется весу дерева. После внезапной остановки на схват действует переменная сила с амплитудой, в 7 раз превышающей вес дерева. При подъеме дерева по косинусоидальному закону, с плавным началом движения и остановкой, сила на протяжении подъема и после остановки изменяется незначительно, и в наиболее неблагоприятный момент в 1.5 раза превышает вес дерева. Таким образом, на основании рассмотренных в работе режимов, наиболее благоприятный наблюдается при подъеме с постоянным ускорением и с плавной остановкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисевич, С.А. Численная дифференциально-разностная модель движения гибкого ствола дерева в трехмерном пространстве и алгоритм ее интегрирования / С. А. Борисевич // Труды БГТУ, сер. II, Лесная и деревообаб. пром-сть. – 2010. – Вып. XVIII. – С. 344–347.

УДК 519.71

В. М. Марченко, проф., д-р физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ ИНВЕСТИЦИЙ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Исследуется задача инвестирования капитала, когда доступны два способа его инвестирования. При первом способе инвестирования прирост капитала пропорционален его величине и времени инвестирования, а во втором инвестирование происходит в виде депозита из расчета p процентов годовых с ежемесячной капитализацией полученного дохода.

Построим математическую модель задачи. Пусть $x_1(t), x_2[k]$ – величины капиталов, инвестируемых соответственно по первому способу инвестирования в момент времени t и в начале k -го месяца по второму способу инвестирования. Тогда по условию задачи $x_1(t + \Delta t) - x_1(t) = a_{11}\Delta t x_1(t)$, где a_{11} – коэффициент пропорциональности, откуда, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем $\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t)$; аналогично имеем $x_2[k + 1] = (1 + \frac{p}{1200})x_2[k]$.

Учитывая возможность перераспределения в начале каждого месяца после получения дохода вкладываемых капиталов между способами инвестирования с весовыми коэффициентами $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, а также дополнительное управляемое внешнее финансирование $u = u(t)$ с весовыми коэффициентами b_1, b_2 , получаем математическую модель задачи максимизации дохода рассматриваемых инвестиций:

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2[k] + b_1u(t), \quad x_2[k + 1] = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2[k] + b_2u(t),$$

$$t \in [k, k + 1), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \theta; \quad x_1(0) = x_{10}, \quad x_2[0] = x_{20}; \quad J(u) = x_1(\theta) + x_2(\theta);$$

с начальными капиталами x_{10}, x_{20} и целевой функцией $J(u) \rightarrow \max$ ую

Для таких дискретно-непрерывных нестационарных систем общего вида в матричной форме дается постановка начальной задачи и получено ее решение в виде определенных интегралов, где в качестве ядер интегральных преобразований использованы решения специальных сопряженных систем, что обобщает на гибридные дискретно-непрерывные системы известное для обыкновенных динамических систем представление решений формулой Коши. Результаты уточняются в стационарном случае.

УДК 517.52

О.Н. Пыжкова, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

К ВОПРОСУ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ САМОПОДОБНЫХ МНЕМОФУНКЦИЙ

Теория обобщенных функций позволяет корректно оперировать с некоторыми бесконечно большими величинами (такими как δ -функция), при этом бесконечно малые считаются равными нулю. В результате произведением бесконечно большой на бесконечно малую оказывается нулем и обладает плохими свойствами. Введение мнемофункций сбалансировало теорию: наряду с бесконечно большими величинами среди мнемофункций есть и бесконечно малые, и множество мнемофункций оказывается ассоциативной алгеброй.

В качестве приложения полученных результатов вычислено в смысле мнемофункций произведение из контрпримера Л. Шварца о неассоциативности операции произведения обобщенной функции на гладкую. Умножая по Шварцу, в зависимости от порядка выполнения

операций, получаем разные результаты: $\left(P\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x\right) \cdot \delta = 1 \cdot \delta = \delta$ или

$P\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (x \cdot \delta) = P\left(\frac{1}{x}\right) \cdot 0 = 0$, в то время как для аппроксимаций $\left(P\left(\frac{1}{x}\right)\right)_\nu$ и

δ_ν эти умножения дают асимптотические разложения $\left(P\left(\frac{1}{x}\right)_\nu \cdot \delta_\nu\right) \cdot x \sim$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \delta^{(k)} M_{k-1}(f\psi) \varepsilon^k, \quad x \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) \sim 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(M_{k-1}(\psi) P\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right) + \frac{(-1)^k}{k!} \delta^{(k)} A_k \right) \varepsilon^{k+1},$$

$A_k = \int_{|x|>1} x^k \left(x f(x) - \sum_{l=0}^{k-1} M_l(\psi) x^{-l} \right) dx + \int_{-1}^1 \left(x^{k+1} f(x) - \sum_{l=0}^k M_l(\psi) x^{k-l} \right) dx$ и регулярная

часть разложения есть 1, как и при классическом умножении, но в последующие члены входят бесконечно малые выражения $\varepsilon^{k+1} \delta^{(k)}$, после их умножения на δ получаются выражения с ненулевой регулярной частью, и на регулярную часть произведения влияют бесконечно малые члены сколь угодно высокого порядка в этом разложении. В случае «обычного умножения» эти бесконечно малые считаются нулем, и именно здесь происходит потеря ассоциативности произведения обобщенной функции на гладкую функцию.

УДК 517.977

И.М. Борковская, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

О ПОСТРОЕНИИ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Одной из основных проблем в качественной теории управления динамическими системами является проблема стабилизации. С помощью воздействия регулятора, построенного по принципу обратной связи, необходимо обеспечить устойчивость замкнутой системы. В докладе исследуется задача стабилизации дескрипторных систем с запаздывающим аргументом. Теория дескрипторных систем – развивающийся раздел качественной теории управления. Такие системы достаточно достоверно описывают в физически реальных переменных работу систем автоматического управления и технологические процессы.

Рассмотрим объект управления, описываемый следующей дескрипторной системой:

$$\begin{aligned} S\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t-h) + bu(t), t > 0, \\ u(\cdot) &\in R, x(\cdot) \in R^n, S, A_i \in R^{n \times n}, i = 0, 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Присоединим к системе (1) линейную обратную связь в виде разностного регулятора

$$u(t) = q_0'x(t) + q_1'x(t-h), \quad q_0, q_1 \in R^n. \quad (2)$$

Систему (1), где $\det S = 0$, но S – ненулевая, назовем $Sx(t)$ -стабилизируемой регулятором (2), если найдется линейная обратная связь вида (2), что замкнутая система (1), (2) является $Sx(t)$ -асимптотически устойчивой.

В докладе представлены результаты, представляющие собой достаточные условия стабилизации дескрипторных систем с запаздыванием в двумерном случае, использующие параметры исходных систем. Разработаны алгоритмы построения линейной обратной связи типа разностных регуляторов вида (2), обеспечивающих $Sx(t)$ -асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Рассмотрена проблема стабилизации двумерных систем при любых положительных значениях запаздывания. Представлены примеры, иллюстрирующие рассмотренный метод.

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ РАЗНОСТНЫХ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ В СИСТЕМАХ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассмотрим линейную систему нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где $A_i, i = 0, 1, 2$ - постоянные (2×2) -матрицы, b - ненулевой 2-вектор, $h > 0$ - постоянное запаздывание. Не ограничивая общности, считаем $b' = [0, 1]$.

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^L \sum_{j=1}^M q'_{ij} x^{(i)}(t-jh), \quad (2)$$

где $q_{00}, q_{ij} (i = 0, \dots, L, j = 0, \dots, M)$ - 2-векторы; $x^{(i)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^i}{dt^i} x(t)$, $x^{(0)}(t) \equiv x(t)$.

Введём (2×2) -матрицы $A(\lambda) = A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h}$, $W(\lambda) = [A(\lambda)b, b]$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Возможны следующие варианты:

Вырожденный случай: $\det W(\lambda) \equiv 0$.

В этом случае матрица $A(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \beta_2 \lambda e^{-\lambda h} & 0 \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $a_1(\lambda), a_2(\lambda)$ - квазиполиномы:

$$a_i(\lambda) = a_{i0} + a_{i1} e^{-\lambda h} + a_{i2} \lambda e^{-\lambda h}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}; \quad i = 1, 2, j = 0, 1, 2. \quad (3)$$

Строго циклический случай: $\det W(\lambda) \equiv c \neq 0 (c \in \mathbb{R})$.

Матрица $A(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \beta_2 \lambda e^{-\lambda h} & c \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $\beta_i, i = 0, 1, 2$ – некоторые действительные числа; $a_j(\lambda), j = 1, 2,$ – квазиполиномы вида (3).

Слабо циклический случай: $\det W(\lambda) = c(\gamma_0 + e^{-\lambda h}), (c \neq 0)$.

Матрица $A(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \beta_2 \lambda e^{-\lambda h} & c(\gamma_0 + e^{-\lambda h}) \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $\beta_i, i = 0, 1, 2, \gamma_0$ – некоторые действительные числа; $a_j(\lambda), j = 1, 2,$ – квазиполиномы вида (3).

Обще циклический случай

$$\det W(\lambda) = c(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}), (c \neq 0).$$

Матрицу $A(\lambda)$ можно привести к следующему виду:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} & c(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}) \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $\beta_i, \gamma_i, i = 0, 1,$ – некоторые действительные числа; $a_j(\lambda), j = 1, 2,$ – квазиполиномы вида (3).

Используя результаты, полученные в [1], в каждом из рассматриваемых случаях получены необходимые и достаточные условия стабилизируемости системы (1) дифференциально-разностным регулятором вида (2). Приведены конкретные регуляторы вида (2), обеспечивающие замкнутой ими системе (1) асимптотическую устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Предельное запаздывание в одном уравнении нейтрального типа // Труды БГТУ. Сер. физико-математические науки и информатика. – Минск: БГТУ. – № 6 (169), 2014. – С. 19 – 21.

УДК 517.977

В.В. Крахотко, Г.П. Размыслович (БГУ, Минск);
Игнатенко В.В. (БГТУ, Минск)

К УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО- АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЧИСТЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ

Рассмотрим стационарную линейную систему управления вида

$$\begin{aligned} A_0 \dot{x}(t) &= Ax(t-h) + Bu(t), \quad t \geq 0, \\ x_0(\cdot) &= \{x(t) = \varphi(t), \quad -h \leq t < 0, x(0) = x_0\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$; A_0, A, B - постоянные матрицы соответствующих размеров; $h > 0$ - число (запаздывание); $\varphi(t)$ - кусочно-непрерывная n -вектор-функция; x_0 - заданный n -вектор.

Если $A_0 A = A A_0$, $\ker A_0 \cap \ker A = \{0\}$, то решение системы (1) представимо в виде [1]

$$\begin{aligned} x(t) &= F(t) A_0^D A_0 q + \int_{-h}^0 F(t-\tau-h) A_0^D A A_0 \psi(\tau) d\tau + A_0^D \int_0^t F(t-\tau) B u(\tau) d\tau + \\ &+ (E - A_0^D A_0) \sum_{i=0}^{k_0-1} (-1)^i A_0^i (A^D)^{i+1} B u^{(i)}(t + (i+1)h, \end{aligned}$$

где $q \in R^n$; $\psi(\tau)$, $\tau \in [-h, 0)$ - произвольная кусочно-непрерывная n -вектор-функция из множества $\{\psi(\cdot): A(E - A_0^D A_0)\psi(t) \equiv 0, t \in [-h, 0)\}$; $F(t)$ - решение уравнения $\dot{F}(t) = A_0^D A F(t-h)$, $F(0) = E$, $F(t) \equiv 0$ при $t < 0$; k_0 - индекс матрицы A_0 .

Для системы (1) рассматривается задачи Н-управляемости и полной Н-управляемости. Следуя результатам работ [2,3], получены критерии, выраженные через параметры системы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. Линейные сингулярные системы с запаздыванием. // Вестник БГУ, сер.1, № 2, 1988г., С.76 - 77.
2. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. К проблеме полной управляемости динамических систем. // Дифференц. уравн. Т.15, № 9, 1979г., С.1707 - 1709.
3. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. К проблеме управляемости дифференциально-алгебраических систем. // Дифференц. уравн. Т.41, № 9, 2005г., С.1291 - 1292.

УДК 519.71

И.К. Асмыкович, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

О РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ И НОРМАЛИЗУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ

Пусть объект управления описывается дескрипторной системой

$$\begin{aligned} H\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ Hx(0) &= Hx_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(t)$ – n -вектор, $u(t)$ – r -вектор управления, который предполагается достаточно гладким, H, A, B – матрицы соответствующих размеров.

К настоящему времени наиболее подробно изучены регулярные системы вида (1), т. е. системы с регулярным пучком матриц $[\lambda H - A]$. Как известно, это означает, что выполняется условие регулярности

$$\det[\lambda H - A] \neq 0 \quad (2)$$

При этом условия система (1) имеет единственное решение.

Определение 1. Система (1) с квадратной матрицей H называется нормализуемой, если существует обратная связь по производной, т. е. матрица F , такая что матрица $[H - BF]$ – невырождена.

Для нормализуемых дескрипторных систем можно использовать все результаты по качественной теории управления обыкновенными линейными системами.

Так как проблема нормализации сводится к решению линейного матричного уравнения $H - BF = P$, $\det P \neq 0$, то воспользуемся техникой решения матричных уравнений, разработанной под руководством В.Н. Букова [2], которая называется методом канонизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асмыкович, И.К. Об уравнениях нулевой динамики для дескрипторных систем / И.К. Асмыкович // «Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты – 2013», Донецк 21 мая 2013 г. материалы II Межд. научно-практической интернет-конференции. 2013, Донецк, Дон НУЕТ, С. 21-23.

2. Буков, В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. – Калуга: Издательство научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.

Л.И. Лавринович (БГУ, г. Минск)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БОЛЬШОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ПРОЦЕССА

В классе r -мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in T = [0, t^*/\mu]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_*,$$

$$x(t^*/\mu) = x^*,$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*/\mu} (x^T M(t)x + u^T P(t)u) dt \rightarrow \min,$$

где μ – малый положительный параметр, x – n -вектор состояний, u – r -вектор управления, $M(t)$ – неотрицательно-определенная симметрическая матрица, а $P(t)$ – положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \in T$.

Определение. Управление $u(t, \mu)$, $t \in T$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем асимптотически субоптимальным в исходной задаче, если для любого натурального числа N выполняются соотношения

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{J(u(\cdot, \mu)) - J(u^0(\cdot, \mu))}{\mu^N} \rightarrow 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{x(t^*/\mu, \mu) - x^*}{\mu^N} \rightarrow 0,$$

где $u^0(t, \mu)$, $t \in T$, оптимальное управление в задаче, а $x(t, \mu)$, $t \in T$, траектория, порожденная управлением $u(t, \mu)$, $t \in T$.

В данном докладе показано, что рассмотренная задача сводится к сингулярно возмущенной задаче терминального управления и асимптотически субоптимальное управление в ней может быть построено с помощью алгоритма, изложенного в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Калинин А.И. Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск: Экоперспектива, 2000.

УДК 532.517

А.М. Волк, доц., канд. техн. наук; Е.В. Терешко, ассист.
(БГТУ, г. Минск)

АНАЛИЗ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТВЕРДУЮ ЧАСТИЦУ В СПЛОШНОМ ПОТОКЕ

Процессы разделения многофазных систем являются составной частью многих технологических процессов в химической, пищевой, нефтехимической, микробиологической, энергетической и других отраслях промышленности. Характер движения частиц в сплошной среде является определяющим при сепарации, разделении фаз, массообмене и других процессах. Важным моментом для исследования движения частицы в потоке и особенно вблизи ограничивающей поверхности является учет всех действующих на твердую частицу сил. Сравнительная оценка сил необходима и для исследования процесса осаждения частиц на фильтровальную поверхность.

При расчете движения частицы необходимо учесть следующие силы.

1. Сила воздействия внешних силовых полей – сила тяжести.
2. Силы, обусловленные неравномерным распределением давления по поверхности частицы при её движении в сплошном потоке:
 - а) сила Архимеда;
 - б) сила, обусловленная изменением давления при ускорении несущего потока или торможении;
 - в) гидродинамическая сила Жуковского возникает в результате неравномерного обтекания частицы набегающим потоком или при вращении частицы в однородном поле – эффект Магнуса.
3. Сила гидродинамического воздействия потока, движущегося с некоторой скоростью относительно частицы.
4. Силы, возникающие в результате взаимодействия поверхности частицы с несущей средой или с ограничивающей поверхностью:
 - а) силы сопротивления вращению, обусловленные касательными напряжениями вязкой среды на поверхности частицы;
 - б) силы трения при контакте движущейся частицы с ограничивающей поверхностью. Сила трения зависит от всех сил, действующих по нормали к поверхности, включая центробежную силу.

УДК 621.383.29:621.514.015

В.И. Никитенок, канд. техн. наук, доц. (БГУ, г. Минск);
С.С. Ветохин, канд. физ.-мат. наук, доц. (БГТУ, г. Минск)
**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ОБНАРУЖЕНИИ СЛАБЫХ
ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ**

Метод счета фотонов [1] обладает несомненными преимуществами при измерении слабых световых сигналов, в том числе в обнаружителях [2]. При этом выходной сигнал фотодетектора рассматривается как стационарная пуассоновская последовательность импульсов, обусловленных как измеряемым световым сигналом, так и шумами фотоприемника и световым фоном.

Обычно обнаружитель рассматривают как устройство, подсчитывающее количество таких импульсов за заданный фиксированный интервал времени при наличии и в отсутствие измеряемого сигнала. В этом случае оптимальное по критерию Неймана – Пирсона принятие решения на обнаружение состоит в сравнении количество принимаемых импульсов за фиксированное время с порогом обнаружения, зависящим от задаваемой вероятности ложной тревоги и интенсивности потока шума [3].

В альтернативном варианте, являющемся предметом настоящей работы, в качестве анализируемых данных используется экспоненциальное распределение интервалов между соседними импульсами последовательности. Показано, что для критерия Неймана – Пирсона такая процедура также оптимизируется. При этом установлено, что в системах автоматической обработки информации поддержание постоянным уровня ложной тревоги будет связано с трудностями, вызванными изменениями интенсивности шума. В этой связи в работе представлен анализ устойчивости показателей качества обнаружения в этих условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ветохин, С. С. Одноэлектронные фотоприемники / 2-е изд., перераб. и доп. / С. С. Ветохин [и др.]. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 246 с.
2. Ветохин, С. С. Контрастность изображений биообъектов при измерениях методом счета фотонов / С. С. Ветохин // Тр. БГТУ. Сер. IV. Химия и технология орган. вещ. – 2008. – Вып. XVI. – С. 263 – 265.
3. Шереметьев, А. Г. Статистическая теория лазерной связи / А. Г. Шереметьев. – М.: Связь, 1971. – 264 с.

УДК 517.948

С. В. Пономарева, доц., канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск)

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассматриваются уравнения

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x c(x-t)(x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t} \phi(t) dt = f(x), \quad (a < x < b < \infty) \quad (1)$$

со степенно-логарифмическими ядрами с действительными степенями логарифмов на отрезке $[a, b]$ действительной оси $-\infty < a < b < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma > b - a$. Решение уравнений с целыми степенями логарифмов в пространствах интегрируемых и непрерывных функций было получено в [1] и в другом виде в [2].

Для решения нам понадобятся формула обращения интегрального оператора типа свертки (см. [1])

$$(I_{a^+}^{\alpha, \beta} \phi)(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t} \phi(t) dt = f(x), \quad (a < x < b < \infty) \quad (2)$$

По аналогии с целочисленным случаем (где для решения использовался оператор $J_{a^+}^\alpha f$) введем обозначение

$$(J_{\gamma, \alpha, \beta} f)(x) = \frac{1}{\gamma} \int_a^x \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) f(t) dt$$

Оператор $J_{\gamma, \alpha, \beta} f$ сохраняет классы абсолютно непрерывных и непрерывных на отрезке функций. Это его свойство позволяет формулировать достаточные условия разрешимости уравнения (1) в следующем виде:

Теорема. Пусть $f(x) \in AC_0[a, b]$, $c(x) \in AC[a, b]$. Тогда уравнение (1) разрешимо в $L_p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$ и его единственное решение дается формулой $\phi(x) = (E + T_\psi)^{-1}((J_{\gamma, \alpha, \beta} f')(x))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Демьянко С.В. Решение интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами в пространствах интегрируемых и непрерывных функций: Автореферат дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.01./ БГУ–Минск, 2002. – 20 с.

О БАЙЕСОВСКИХ КРИТЕРИЯХ В ЗАДАЧЕ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ О СРЕДНЕМ МНОГОМЕРНОГО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассматривается задача проверки гипотезы $H_0: \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ о равенстве нулю среднего многомерной нормально распределенной случайной величины против сложной альтернативы $H_1: \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$. Наблюдение $\mathbf{X} = (X_1; X_2; \dots; X_n)$ имеет нормальное распределение со средним $\boldsymbol{\mu}$ и единичной матрицей ковариаций. При байесовском подходе к вопросу о неизвестном значении параметра (в данном случае – математического ожидания $\boldsymbol{\mu}$) вводится априорное распределение вероятностей $\pi(\boldsymbol{\mu})$ на пространстве значений параметра, соответствующих альтернативе. В качестве априорного распределения рассмотрим нормальное с нулевым средним и независимыми компонентами: $\boldsymbol{\mu} \sim N(\mathbf{0}; C)$, где матрица ковариаций C диагональна: $C = \text{diag}(\sigma_1^2; \sigma_2^2; \dots; \sigma_n^2)$.

Обозначим $p_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x})$ – плотность n -мерного нормального распределения со средним $\boldsymbol{\mu}$ и единичной матрицей ковариаций. Тогда байесовский критерий получается как критерий Неймана-Пирсона для проверки гипотезы $H_0: \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ против простой альтернативы, которой соответствует «усредненная» плотность

$$p_{\pi}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} p_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}) d\pi(\boldsymbol{\mu})$$

Этот критерий основывается на отношении правдоподобия:

$$\frac{p_{\pi}(\mathbf{X})}{p_0(\mathbf{X})} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma_i^2}} \exp \left\{ \frac{\sigma_i^2 X_i^2}{2(1 + \sigma_i^2)} \right\},$$

и, следовательно, статистика байесовского критерия имеет вид

$$T_n = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{1 + \sigma_i^2} X_i^2,$$

где коэффициенты положительны и убывают с уменьшением дисперсий σ_i^2 , т. е. с большим весом берутся те компоненты наблюдения, математические ожидания которых имеют больше шансов отклоняться от нуля.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКА БУТРУ

В комплексной плоскости дан контур L , состоящий из m уходящих в бесконечность лучей $L_j = \{\arg z = \beta_j\}$, $0 = \beta_1 < \dots < \beta_m < 2\pi$, $\beta_{m+1} = 2\pi$. В [1] получены условия разрешимости однородной краевой задачи Римана, состоящей в нахождении всех ограниченных кусочно-аналитических функций $\Phi(z)$ с линией скачков L , непрерывные граничные значения которых, удовлетворяют соотношению

$$\Phi^+(t) = G(t) \cdot \Phi^-(t), \quad t \in L \setminus \{\infty\}. \quad (1)$$

Заданный коэффициент задачи $G(t)$ подчинен условиям

$$G(t) = \exp \left\{ 2\pi \cdot i \cdot \lambda_j \cdot |t|^{l(j)} \right\}, \quad t \in L_j, \quad \lambda_j \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

в которых $l(r)$ – уточненный порядок Бутру, то есть положительная, непрерывно дифференцируемая на $[0, +\infty)$ функция, такая что.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} l'(t) \cdot r \cdot \ln(r) = 0, \quad 0 < \nu = \lim_{r \rightarrow \infty} l(r) \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} l(r) = \rho < \infty.$$

Рассмотрим функции

$$h^\alpha(\theta) = -\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \sum_{j=1}^m \lambda_j \cos(\alpha(|\theta - \beta_j| - \pi)), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \nu \leq \alpha \leq \rho, \quad \alpha \in \mathbf{N}, \quad (3)$$

которые характеризуют асимптотическое поведение канонической функции по последовательностям окружностей $\{|z| = r_{n,\alpha}\}$, сгущающихся к бесконечности и построенных по порядку Бутру $l(r)$.

Теорема. Пусть выполнены неравенства $0 \leq p < \nu < \rho < p+1 < \infty$. Тогда для разрешимости в классе ограниченных кусочно-аналитических функций однородной задачи Римана (1), (2) необходимо, чтобы существовала 2π -периодическая тригонометрически ρ -выпуклая функция $h_{\mp}(\theta)$, для которой выполняются неравенства $h_{\mp}(\beta_{j_k}) \leq -h^{\rho}(\beta_{j_k})$, $k = \overline{1, n}$,

$$\text{и, если } \rho > \sigma_k = \frac{\pi}{\beta_{j_{k+1}} - \beta_{j_k}}, \text{ то } h_{\mp}(\theta) \equiv -h^{\rho}(\theta), \quad \theta \in [\beta_{j_k}, \beta_{j_{k+1}}]$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Алехно, А.Г. Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом уточненного порядка Бутру / А.Г. Алехно, А.Б. Севрук // Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 6. – С. 5–10.

**ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ
ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ**

Рассмотрим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с малым положительным параметром при производной, приведенную к нормализованному виду и присоединенному к нему двухточечного граничного условия:

$$y' = f(t, y, \varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \quad (1)$$

где $y: [a, b] \rightarrow R^n$, $y: [a, b] \rightarrow R^n \times R \rightarrow R^n$, $\varepsilon > 0$. Зависимость функции f от малого параметра ε такая, что в граничных задачах возникают пограничные либо внутренние переходные слои, что усложняет их решение вблизи граничных точек, т.е. вблизи зон быстрого роста решений и особенно градиентов решений.

Присоединенное к уравнению (1) двухточечное граничное условие записывается в наиболее общем виде:

$$g(y(a), y(b)) = 0, \quad (2)$$

где $g: R^n \times R^n \rightarrow R$. Будем предполагать, что отображения f и g такие, что задача (1)-(2) имеет единственное решение и обладает необходимой гладкостью.

Для решения такого рода задач предлагается модификация метода множественной двусторонней пристрелки. В ней есть возможность выбора точек пристрелки, точек сшива решений, выбора параметров пристрелки и длин положительных и отрицательных подынтервалов $J_{2j-1}^{(+)}$ и $J_{2j-1}^{(-)}$. А т. к. граничная задача по алгоритму метода сводится к совокупности трех задач Коши, благоприятных в вычислительном отношении, то это создает необходимые условия для качественного численного моделирования траектории искомого решения.

Для иллюстрации свойств данного метода было предложено численное решение граничной задачи с малым параметром при производной. Задача решалась с помощью математического пакета Mathcad и подтвердила достоинства модификации метода множественной двусторонней пристрелки.

**УПРАВЛЕНИЕ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ
ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ
ПО НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫМ МОДЕЛЯМ
И НЕСОВЕРШЕННЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ**

Рассматривается задача оптимального управления в реальном времени линейным динамическим объектом по недетерминированной модели с двумя измерительными устройствами:

$$\begin{aligned} c'x(t^*) &\rightarrow \max; \\ \dot{x} &= A(t)x + B(t)u + M(t)w(t), \quad x(t_*) = x_0 \in X_*; \quad x(t^*) \in X^*; \\ w(t) &= L(t)w, \quad w \in W; \quad u(t) \in U, \quad t \in T; \\ y_x(\theta) &= C_x(\theta)x(\theta) + \xi_x(\theta), \quad \xi_x(\theta) \in \Xi_x, \quad \theta \in T_h; \\ y_w(\theta) &= C_w(\theta)w(\theta) + \xi_w(\theta), \quad \xi_w(\theta) \in \Xi_w, \quad \theta \in T_h. \end{aligned}$$

Здесь $T = [t_*, t^*]$ – конечный промежуток времени; $T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^* - h\}$, $h = (t^* - t_*)/N$ – период квантования времени ($N > 1$ – натуральное число); $A(t) \in R^{n_x \times n_x}$, $B(t) \in R^{n_x \times r}$, $M(t) \in R^{n_x \times n_w}$, $L(t) \in R^{n_w \times q}$, $t \in T$, – кусочно-непрерывные функции; $C_x(t) \in R^{q_x \times n_x}$, $C_w(t) \in R^{q_w \times n_w}$, $t \in T$, – непрерывные функции; $X_* = \{x \in R^{n_x} : d_* \leq x \leq d^*\}$, $U = \{u \in R^r : u_* \leq u \leq u^*\}$, $W = \{w \in R^q : w_* \leq w \leq w^*\}$, $X^* = \{x \in R^{n_x} : g_* \leq Hx \leq g^*\}$, $\Xi_w = \{\xi \in R^{q_w} : \xi_* \leq \xi \leq \xi^*\}$, $\Xi_x = \{\xi \in R^{q_x} : \xi_* \leq \xi \leq \xi^*\}$ – ограниченные множества; $x = x(t) \in R^{n_x}$ – состояние объекта управления в момент времени t . x_0 – неизвестное начальное состояние объекта, им может оказаться любая точка множества X_* ; $u = u(t) \in R^r$ – значение управляющего воздействия в момент времени t , управляющие воздействия $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$ выбираются из класса дискретных функций (с периодом квантования h): $u(t) \equiv u(\tau)$, $t \in [\tau, \tau + h]$, $\tau \in T_h$; $w(t) \in R^{n_w}$ – значение возмущения в момент времени t , возмущение может реализоваться в виде любой конечно-параметрической функции: $w(t) = L(t)w$, $t \in T$, где w – q -вектор неизвестных параметров возмущения.

Вводятся понятия текущих распределений начального состояния и параметров возмущения. Описывается метод реализации размыкаемой связи с использованием принципа разделимости (задача оптимального управления в условиях неопределенности состоит из 3-х задач оптимального наблюдения, оптимальной идентификации и оптимального управления детерминированной системой). При

построении размыкаемых связей используется двухстадийная процедура управления.

Описанный метод иллюстрируется на примере динамического объекта 4-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. Ч.1. Линейные задачи. Мн.: Университетское, 1984. – 214 с.

2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Павленок Н.С. Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний // Докл. РАН. – 2012. – Т. 444. № 4. – С. 371-375.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Вершиловская И.В., Крук Н.Н.</i> Кислотно-основные и фотофизические свойства ассиметричных дендримеров с порфириновым ядром.....	3
<i>Кленицкий Д.В., Крук Н.Н.</i> Взаимосвязь типа периферического замещения макроцикла корролов и характера его неплоскостных искажений.....	4
<i>Люлькевич Е.С., Крук Н.Н.</i> Конфигурационное взаимодействие при неплоскостных искажениях тетрапиррольного макроцикла.....	5
<i>Крылов А.Б., Крук Н.Н.</i> Молекулярная структура и кислотно-основные свойства N-метил замещенного октаэтилпорфирина.....	6
<i>Бобрович О.Г., Ташлыков И.С.</i> Композиционный состав и повреждение кремния при нанесении металлических (Co, Zr, W) покрытий в условиях ионного ассистирования.....	7
<i>Мадьяров В.Р.</i> Измерение параметров полупроводниковых материалов по частотной зависимости коэффициента пропускания в области СВЧ.....	8
<i>Почтенный А.Е., Мисевич А.В., Климович С.А., Ковалёнок А.О., Долгий В.К., Кухто А.В.</i> Идентификация механизма проводимости в конденсированных плёнках методом циклической термодесорбции.....	9
<i>Чаевский В.В., Гришкевич А.А., Жилинский В.В., Чернашеус О.</i> Физико-механические свойства ZrN-Ni-со-покрытий на лезвиях стальных ножей дереворежущего инструмента.....	10
<i>Фарафонтова Е.В., Наркевич И.И.</i> Итерационная процедура решения системы двух интегральных уравнений для малой подсистемы молекул в поле остальных молекул среды с учетом неоднородностей в их распределении по объемам микрочаеек.....	11
<i>Наркевич И.И., Фарафонтова Е.В.</i> Описание структуры сферических наночастиц с помощью двухуровневого молекулярно-статистического подхода... ..	12
<i>Тульев В.В., Ташлыков И.С.</i> Элементный состав и распределение компонентов по глубине в структурах Me/Be, полученных методом ионно-ассистируемого осаждения.....	13
<i>Поплавский В.В., Матыс В.Г., Смягликов И.П.</i> Ионно-лучевое и ионно-плазменное модифицирование поверхности токовых коллекторов топливных элементов.....	15
<i>Поплавский В.В., Бобрович О.Г., Матыс В.Г., Тульев В.В.</i> Подготовка поверхности полимерного мембранного электролита к формированию мембранно-электродных блоков топливных элементов.....	16
<i>Карлович Т.Б.</i> Беспороговая генерация излучения однокубитным лазером.....	17
<i>Аргиракис П., Скарпалезос Л., Вихренко В.С.</i> Проявление эффектов памяти в зависящем от времени коэффициенте диффузии.....	18
<i>Аргиракис П., Скарпалезос Л., Вихренко В.С.</i> Решеточная модель с заблокированными узлами: особенности термодинамических и диффузионных характеристик.....	20
<i>Грода Я.Г.</i> Квазихимическое приближение для решетки с заблокированными узлами.....	21
<i>Бокун Г.С.</i> Химический потенциал в форме функционала плотности для описания многообразия состояния неоднородной электрохимической системы.....	22
<i>Бокун Г.С.</i> Моделирование импедансных характеристик керамики по характеристикам отдельных фаз.....	23

<i>Ласовский Р.Н.</i> Сравнительный вклад межзеренной и объемной областей в электрохимический импеданс токопроводящей керамики.....	24
<i>Грода Я.Г., Вихренко В.С.</i> Квазиодномерная решеточная модель топливной ячейки и исследование ее электрофизических характеристик.....	25
<i>Борисевич С.А.</i> Моделирование взаимодействия ствола дерева со схватом манипулятора.....	26
<i>Марченко В.М.</i> Линейные дискретно-непрерывные модели инвестиций. Представление решений.....	27
<i>Пыжкова О.Н.</i> К вопросу об асимптотических разложениях самоподобных мнемофункций.....	28
<i>Борковская И.М.</i> О построении стабилизирующих регуляторов для двумерных дескрипторных систем с запаздыванием.....	29
<i>Якименко А.А.</i> К вопросу о построении разностных стабилизирующих регуляторов в системах нейтрального типа.....	30
<i>Краютко В.В., Размыслович Г.П., Игнатенко В.В.</i> К управляемости дифференциально-алгебраических систем с чистым запаздыванием по состоянию.....	32
<i>Асмыкович И.К.</i> О регуляризуемости и нормализуемости линейных дескрипторных систем.....	33
<i>Лавринович Л.И.</i> Асимптотика решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления с большой длительностью процесса.....	34
<i>Волк А.М., Терешко Е.В.</i> Анализ сил, действующих на твердую частицу в сплошном потоке.....	35
<i>Никитенок В.И., Ветохин С.С.</i> Об оптимальном обнаружении слабых оптических сигналов.....	36
<i>Пономарева С.В.</i> Решение интегральных уравнений первого рода в некоторых пространствах.....	37
<i>Ловенецкая Е.И.</i> О байесовских критериях в задаче проверки гипотезы о среднем многомерного нормального распределения.....	38
<i>Севрук А. Б.</i> Необходимые условия разрешимости однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом порядка Бутру.....	39
<i>Соловьёва И.Ф.</i> Исследование и решение нелинейных граничных задач с пограничным слоем.....	40
<i>Ха Во Тхи Тань</i> Управление в реальном времени линейными динамическими объектами по недетерминированным моделям и несовершенным измерениям.....	41