Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

**Учебно-методическое пособие
для студентов экономических специальностей
заочной формы обучения**

Минск 2018

УДК 519.862.6+330.43(075.4)
ББК 22.172я73
Э40

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом Белорусского государственного технологического университета

Авторы:
И. М. Борковская, Н. В. Бочило, А. А. Якименко, Л. Д. Яроцкая

Рецензенты:
профессор кафедры методов оптимального управления
Белорусского государственного университета
доктор физико-математических наук *А. И. Калинин*;
доцент кафедры программного обеспечения информационных
технологий УО «Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»
кандидат физико-математических наук *Н. П. Можей*

Э40 **Эконометрика и экономико-математические методы и модели** : учеб.-метод. пособие для студентов экономических специальностей заочной формы обучения / И. М. Борковская [и др.]. – Минск : БГТУ, 2018. – 129 с.

Пособие предназначено для самостоятельного изучения студентами заочного факультета курса «Эконометрика и ЭММ» в течение семестра, а также для подготовки к экзамену в процессе аудиторной и самостоятельной работы. Оно содержит компактное изложение теоретических сведений, подробные примеры решения задач, вопросы для самоконтроля, набор задач для аудиторной работы, контрольные тренировочные задания.

УДК 519.862.6+330.43(075.4)
ББК 22.172я73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основной целью дисциплины «Эконометрика и экономико-математические методы и модели» является изложение теоретических основ, методологических принципов и конкретных подходов постановки и решения задач оптимального управления и экономического регулирования производством, снабжением, сбытом в условиях разных форм собственности на основе эконометрических и экономико-математических методов.

«Эконометрика и экономико-математические методы и модели» – одна из фундаментальных дисциплин, успешное освоение которой помогает решению профессиональных задач.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для самостоятельного изучения студентами заочного факультета курса «Эконометрика и ЭММ» в течение семестра, для подготовки к экзамену в процессе аудиторной и самостоятельной работы. Оно содержит компактное изложение теоретических сведений, подробные примеры решения задач, вопросы для самоконтроля, набор задач для аудиторной работы, контрольные тренировочные задания.

В пособие вошли такие основные разделы учебного курса, как «Элементы корреляционно-регрессионного анализа», «Временные ряды», «Системы одновременных уравнений», «Модели межотраслевого баланса», «Элементы теории игр», «Сетевое планирование и управление», «Модели управления запасами», «Элементы теории массового обслуживания».

Содержание учебного материала соответствует действующим образовательным стандартам и учебной программе.

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Введение

Объект и предмет курса «Экономико-математические методы и модели». Основные понятия, предмет и область применения экономико-математических методов и моделей. Теоретические основы экономико-математического моделирования.

Раздел 1. Эконометрика

1.1. Корреляционно-регрессионный анализ

Парный регрессионный анализ. Основные положения регрессионного анализа. Построение и анализ многофакторных регрессионных моделей.

1.2. Временные ряды

Стационарные временные ряды. Автокорреляционная функция. Авторегрессионные модели.

1.3. Системы одновременных уравнений

Системы одновременных уравнений. Идентификация. Нахождение структурных коэффициентов.

Раздел 2. Экономико-математические методы

2.1. Линейные экономико-математические модели и их анализ

Основные типы линейных экономико-математических моделей. Понятие критерия оптимальности. Задачи линейного программирования. Методы решения задач линейного программирования. Теория двойственности в линейном программировании. Теоремы двойственности, их экономическое содержание и применение в послеоптимизационном анализе. Задачи и модели оптимального размещения и концентрации производства. Модели с ограничениями оптимизирующих мощностей, с ограниченными пропускными способностями коммуникаций.

2.2. Понятие о методе динамического программирования

Постановка задачи динамического программирования. Уравнение Беллмана. Основные принципы решения задач динамического программирования. Нахождение кратчайшего пути. Задача оптимального распределения ресурсов. Оптимальная стратегия замены оборудования.

2.3. Модели межотраслевого баланса

Модели межотраслевого баланса, основные понятия, методы построения моделей межотраслевого баланса и их использование в анализе. Натуральный и стоимостной межотраслевой баланс. Матричные методы решения балансовых задач.

2.4. Экономико-математические модели конфликтных ситуаций

Моделирование конфликтных ситуаций с помощью теории игр, основные понятия теории игр, их классификация. Матричные игры с нулевой суммой. Решение матричных игр в чистых стратегиях. Игры с «природой». Критерии Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

2.5. Методы сетевого планирования и управления

Математические методы сетевого планирования и управления. Основные понятия сетевого планирования и управления. Правила построения сетевых графиков. Расчет основных параметров сетевого графика. Построение календарного графика.

2.6. Модели массового обслуживания

Методы и модели массового обслуживания, основные понятия и классификация систем массового обслуживания, графическое представление систем массового обслуживания, расчет основных характеристик. Уравнения Колмогорова. Финальные вероятности состояний систем массового обслуживания. Системы массового обслуживания с отказами. Системы массового обслуживания с неограниченной очередью.

2.7. Модели управления запасами. Имитационное моделирование экономических процессов

Задачи и модели управления запасами и сбытом готовой продукции. Общая постановка задачи. Модель Уилсона. Точка заказа. Модель производственных поставок. Модель запасов, включающая штрафы.

Тема 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭКОНОМЕТРИКИ

Эконометрика – наука, объединяющая совокупность математико-статистических методов, которые позволяют дать количественное выражение взаимосвязей экономических явлений и процессов.

Одним из важнейших направлений эконометрики является построение прогнозов по различным экономическим показателям. Эконометрика делает упор на количественные, а не на качественные аспекты явлений.

Цель эконометрики – разработка способов моделирования и количественного анализа реальных экономических объектов.

Задачами эконометрики являются:

- спецификация модели (составление моделей для анализа);
- параметризация модели (оценка ее параметров);
- верификация модели (проверка качества модели);
- прогнозирование (составление прогноза и рекомендаций для конкретных экономических явлений по результатам моделирования).

Эконометрическая модель – совокупность математических отношений между входными (объясняющими, независимыми, экзогенными) переменными – факторами, обозначаемыми обычно X, и выходными (объясняемыми, зависимыми, эндогенными, результативными) переменными, обозначаемыми Y, изучаемого экономического явления, основанная на реальных статистических данных. **Эконометрическое моделирование** – исследование экономических явлений и процессов посредством их эконометрических моделей.

Этапы эконометрического моделирования:

- постановочный;
- априорный;
- параметризации;
- информационный;
- этап идентификации;
- этап верификации.

Классы эконометрических моделей:

1. Регрессионные модели с одним уравнением:

$$Y = f(X) + \varepsilon;$$

$$Y = f(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_k) + \varepsilon.$$

Например, регрессионной моделью с одним уравнением описывается зависимость спроса от цены на товар, зависимости цены от объема поставки и т. д.

2. Временные ряды.

3. Системы одновременных уравнений. Состоят из тождеств и регрессионных уравнений, в которые наряду с факторными признаками включены и результативные признаки из других уравнений. Например, системой одновременных уравнений является модель спроса и предложения кейнсианского типа.

В эконометрическом моделировании рассматриваются следующие **типы данных**:

• **пространственные данные** – набор сведений по разным объектам, взятым за один и тот же период времени (например, объем производства нескольких предприятий региона и др.);

• **временные данные** – набор сведений, характеризующих один и тот же объект за разные периоды времени (заработная плата за разные промежутки времени на предприятии и др.).

Рассмотрим основные разделы эконометрики, соответствующие классам эконометрических моделей.

Тема 2

ЭЛЕМЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

2.1. Основные понятия корреляционно-регрессионного анализа

Корреляционный анализ – раздел математической статистики, который изучает силу (тесноту) связи между признаками (двумя признаками при парной связи, между результативным и множеством факторных признаков при многофакторной связи). **Регрессионный анализ** – раздел математической статистики, изучает форму связи между признаками.

Различают следующие **типы зависимостей:**

1. **Функциональная зависимость** – связь, при которой каждому значению независимой переменной X соответствует точно определенное значение зависимой переменной Y (например, зависимость выработки продукции на одного рабочего от объема выпущенной продукции и численности рабочих).

2. **Статистическая зависимость** – связь, при которой каждому значению независимой переменной X соответствует множество значений зависимой переменной Y, изменение которой происходит в условиях неопределенности, имеющей, как правило, случайный характер (например, зависимость всхожести семян некоторых культур от количества микроэлементов при их обработке, зависимость производительности труда на предприятии от его энерговооруженности и т. д.).

Корреляционная зависимость – частный случай статистической зависимости – связь, при которой каждому значению независимой переменной X соответствует определенное математическое ожидание (среднее значение) зависимой переменной Y.

Эконометрика рассматривает корреляционную зависимость, которая исследуется с помощью методов корреляционного и регрессионного анализа. Основные **задачи** корреляционно-регрессионного анализа:

1. Установление формы корреляционной связи, т. е. установление вида функции регрессии (линейная, квадратичная, показательная и т. д.).

2. Оценка тесноты корреляционной связи Y и X, которая определяется величиной рассеяния значений случайной величины (СВ) Y около $\overline{Y_x}$. Большое рассеяние означает слабую зависимость Y от X либо вообще ее отсутствие. Малое рассеяние указывает на существование достаточно сильной зависимости Y от X.

3. Анализ неизвестных параметров регрессионной модели, проверка гипотез об их значимости и адекватности модели рассматриваемому экономическому объекту.

Условным математическим ожиданием $M_x(Y) = M(Y \mid X = x) = \overline{Y_x}$ (условной средней) называется математическое ожидание СВ Y, вычисленное в предположении, что СВ X приняла значение x.

Теоретическим уравнением регрессии называется уравнение

$$M(Y \mid X = x) = \vec{Y}_x = f(x), \text{ или } Y = f(x) + \varepsilon.$$

Поскольку реальные значения зависимой переменной не всегда совпадают с ее условными математическими ожиданиями и могут быть различными при одном и том же значении объясняющей переменной (наборе объясняющих переменных), фактическая зависимость должна учитывать ошибку (погрешность) ε, которая также является случайной величиной. Таким образом, связи между зависимой и объясняющей(ими) переменными можно описать соотношениями:

$$Y = M(Y \mid x) + \varepsilon;$$

$$Y = M(Y \mid x_1, x_2, \ldots, x_k) + \varepsilon.$$

Выбор формулы связи переменных называется спецификацией уравнения регрессии.

По количеству признаков различают парную и множественную корреляционную связь, по направлению действия различают прямую связь (большему значению X соответствует большее значение Y) и обратную связь (большему значению X соответствует меньшее значение Y).

1. **Парная связь** – связь между двумя признаками (результативным Y и факторным X или двумя факторными).

2. **Множественная связь** – зависимость между результативным признаком и двумя и более факторными признаками, включенными в исследование.

Частная связь – зависимость между результативным и одним факторным признаком или двумя факторными признаками при фиксированных значениях других факторных признаков.

В случае парной регрессии выбор формулы связи переменных обычно осуществляется по графическому изображению статистических данных (корреляционному полю). Функция $f(x)$ называется (теоретической) **регрессией** Y на X, а ее график – линией регрессии Y на X. При этом X является независимой (объясняющей) переменной, Y – зависимой (объясняемой) переменной. Различают линейную и нелинейную регрессию в зависимости от типа функции $f(x)$ в уравнении регрессии.

2.2. Линейная парная регрессия. Метод наименьших квадратов

Теоретическим уравнением линейной парной регрессии называют уравнение

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon.$$

Эмпирическим (выборочным) уравнением линейной парной регрессии выступает выражение

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x,$$

где b_0 и b_1 – **оценки** неизвестных параметров, называемые эмпирическими коэффициентами линейной регрессии.

Модель линейной регрессии (линейное уравнение) является наиболее распространенным и простым видом зависимости между экономическими переменными. Кроме того, построенное линейное уравнение может служить начальным этапом эконометрического анализа.

Задачи линейного регрессионного анализа:

1. По имеющимся статистическим данным (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$ необходимо получить наилучшие оценки неизвестных параметров.

2. Проверить статистические гипотезы о параметрах модели.

3. Проверить, достаточно ли хорошо модель согласуется со статистическими данными (адекватна ли модель данным наблюдений).

Различные выборки из одной и той же генеральной совокупности обычно приводят к определению отличающихся друг от друга оценок. Требуется по конкретной выборке (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$, найти оценки b_0 и b_1 неизвестных параметров уравнения $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ так, чтобы соответствующая линия регрессии (прямая) являлась бы наилучшей в определенном смысле среди всех других прямых. Другими словами, построенная прямая должна быть «ближайшей» к точкам наблюдений по их совокупности (рис. 2.1). Мерами качества найденных оценок могут служить определенные функции отклонений (невязок) $e_i = y_i - \hat{y}_i$, $i = \overline{1, n}$.

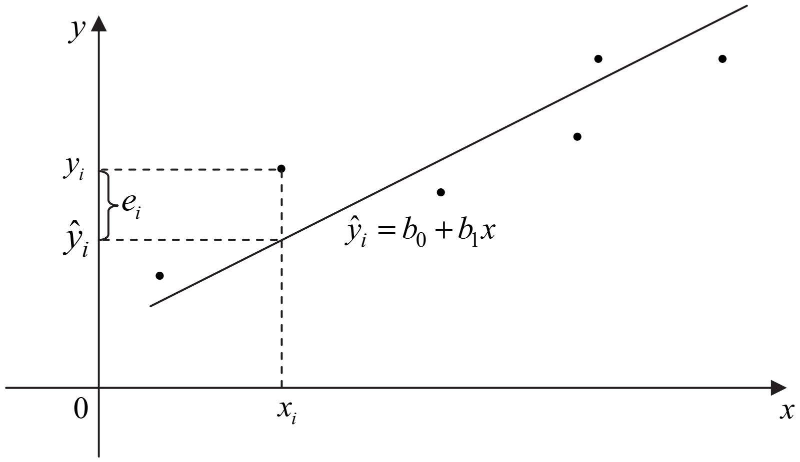


Рис. 2.1. Корреляционное поле

Самым распространенным методом нахождения коэффициентов (оценок) b_0 и b_1 уравнения эмпирической линейной регрессии является метод наименьших квадратов (МНК). Согласно МНК эти коэффициенты выбираются таким образом, чтобы **минимизировать сумму квадратов отклонений выборочных значений от расчетных**, т. е. минимизировать функцию

$$S(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2.$$

Необходимым (а можно показать, что и достаточным) условием минимума данной функции является равенство нулю ее частных производных по параметрам b_0 и b_1, откуда для определения параметров линейной регрессии получаем линейную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} nb_0 + b_1\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \\ b_0\sum_{i=1}^{n} x_i + b_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

Коэффициент b_1 называется **выборочным коэффициентом регрессии *Y* на *X*.** Он показывает, на сколько единиц в среднем изменяется переменная *Y* при увеличении переменной *X* на одну единицу.

Коэффициент b_1 нельзя непосредственно использовать для оценки влияния факторного признака *X* на результативный признак *Y* из-за различия единиц измерения исследуемых показателей. Для этих целей применяется **коэффициент эластичности**, который в случае линейной парной регрессии находится по формуле

$$Э_{yx} = b_1 \frac{\overline{x}}{\overline{y}},$$

где $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ – средние значения независимой и зависимой переменной.

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов в среднем изменяется результативный признак *Y* при изменении факторного признака *X* на один процент.

Для проверки гипотезы о статистической значимости коэффициента регрессии, т. е. гипотезы H_0: $b_1 = 0$, при конкурирующей (альтернативной) гипотезе H_1: $b_1 \neq 0$, используется *t*-статистика:

$$t_{\text{расч}\, b_1} = \frac{b_1}{S_{b_1}},$$

которая при выполнении исходных предпосылок модели имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы $v = n - 2$, где n – число наблюдений (S_{b_1} – стандартная ошибка коэффициента регрессии).

Гипотеза H_0 отклоняется, если $\left| t_{\text{расч}\, b_1} \right| \geq t_{\alpha, n-2}$, где α – требуемый уровень значимости, в противном случае – принимается.

Если гипотеза H_0 принимается, это дает основание полагать, что величина *Y* не зависит от *X*. В этом случае говорят, что коэффициент b_1 статистически незначим. При отклонении H_0 коэффициент b_1 считается статистически значимым, что дает основание говорить о наличии определенной линейной зависимости между Y и X.

По аналогичной схеме на основе t-статистики проверяется гипотеза о статистической значимости коэффициента b_0:

$$t_{\text{расч}\, b_0} = \frac{b_0}{S_{b_0}},$$

где S_{b_0} – стандартная ошибка коэффициента b_0. Для парной регрессии более важным является анализ статистической значимости коэффициента b_1, так как именно он позволяет оценить влияние объясняющей переменной X на зависимую переменную Y.

2.3. Коэффициент корреляции. Проверка значимости коэффициента корреляции. Коэффициент детерминации

Теснота связи между признаками количественно выражается величиной **коэффициента корреляции**:

$$r_{xy} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}}.$$

Используется также формула

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(y,x)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n\sigma_x \sigma_y},$$

или

$$r_{xy} = b_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y},$$

где σ_x, σ_y – средние квадратические отклонения случайных величин X и Y:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}};$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n}}.$$

Коэффициент парной корреляции используется в качестве меры, характеризующей степень линейной связи двух переменных. Коэффициент корреляции может принимать значения от –1 до +1. Если $r > 0$, то корреляционная связь между переменными является прямой, если $r < 0$ – обратной.

Если $r = \pm 1$, корреляционная связь представляется линейной функциональной зависимостью. При $r = 0$ линейная корреляционная связь отсутствует.

Качественные характеристики связи приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Характеристики связи

Значение $\lvert r \rvert$	Характер связи
От 0 до 0,3	Практически отсутствует
От 0,3 до 0,5	Слабая
От 0,5 до 0,7	Умеренная
От 0,7 до 1	Сильная

Для проверки гипотезы о статистической значимости коэффициента корреляции, т. е. гипотезы:

$$H_0:\ r = 0;$$

$$H_1:\ r \neq 0,$$

при заданном уровне значимости α и объеме выборки n используется t-статистика:

$$t_{\text{расч}} = \frac{|r|}{\sqrt{1 - r^2}}\sqrt{n - 2}.$$

По таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = n - 2$ находят $t_{\alpha, n-2}$ для двусторонней критической области. Если $t_{\text{расч}} < t_{\alpha, n-2}$ – нет оснований отвергнуть гипотезу H_0. Если $t_{\text{расч}} > t_{\alpha, n-2}$, то гипотезу H_0 о равенстве коэффициента корреляции нулю отвергают. Другими словами, r значимо отличается от нуля, т. е. СВ X и Y коррелированы.

Коэффициентом детерминации называется величина $D = r_{xy}^2$. Она характеризует долю дисперсии, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака.

2.4. Проверка адекватности модели

Значимость построенной модели проверяется следующим образом. Выдвигаем гипотезу H_0: модель незначима. Конкурирующая гипотеза H_1: модель значима. Гипотеза проверяется по критерию Фишера.

Фактическая величина

$$F_{\text{расч}} = \frac{r^2}{1 - r^2}(n-2)$$

сопоставляется с табличной и делается заключение о надежности связи. Если $F_{\text{расч}} \geq F_{\text{таб}(\alpha;\, \nu_1;\, \nu_2)}$ со степенями свободы $\nu_1 = k$, $\nu_2 = n - k - 1$ (для парной регрессии количество факторов $k = 1$) при заданном уровне значимости α, то линейную модель можно считать адекватной, гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется и признается их статистическая значимость и надежность (нулевая гипотеза отвергается).

Определение меры точности модели производится с помощью расчета **средней относительной ошибки аппроксимации**

$$E_{\text{отн}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{e_i}{y_i}\right| 100\%.$$

Допустимый предел значений $E_{\text{отн}}$ составляет не более 8–15%.

2.5. Предпосылки метода наименьших квадратов. Теорема Гаусса – Маркова

МНК обеспечивает оптимальные свойства оценкам лишь при выполнении следующих классических предположений (**предпосылок МНК – условий Гаусса – Маркова**):

1. Математическое ожидание случайного отклонения ε_i равно 0: $M(\varepsilon_i) = 0$ для всех наблюдений. Данное условие означает, что случайное отклонение в среднем не оказывает влияния на зависимую переменную.

2. Дисперсия случайных отклонений ε_i постоянна: $D(\varepsilon_i) = D(\varepsilon_j) = \sigma^2$ для любых i и j. Выполнимость данной предпосылки называется **гомоскедастичностью** (постоянством дисперсий отклонений). Так как $D(\varepsilon_i) = M(\varepsilon_i - M(\varepsilon_i))^2 = M(\varepsilon_i^2)$, то данное условие можно записать в виде $M(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$.

Невыполнение указанной предпосылки носит название **гетероскедастичности**.

3. Случайные отклонения ε_i и ε_j являются независимыми друг от друга для $i \neq j$. Если данное условие выполняется, то говорят об отсутствии **автокорреляции**. С учетом выполнимости условия это требование можно переписать в виде $M(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ для $i \neq j$.

4. Случайное отклонение должно быть независимо от объясняющих переменных. Обычно это условие выполняется автоматически, если объясняющая переменная x_i не является случайной в данной модели.

5. Случайное отклонение ε_i есть нормально распределенная случайная величина.

Теорема Гаусса – Маркова. Если предпосылки МНК выполнены, то оценки b_0 и b_1, полученные по этому методу, обладают следующими свойствами:

- являются **несмещенными**, так как математическое ожидание отклонений равно нулю, что говорит об отсутствии систематической ошибки в определении положения линии регрессии;
- они **состоятельны**, так как дисперсия оценок параметров при возрастании числа n наблюдений стремится к нулю. Другими словами, при увеличении объема выборки надежность оценок увеличивается;

• являются **эффективными**, т. е. они имеют наименьшую дисперсию по сравнению с любыми другими оценками данных параметров, линейными относительно величин y_i.

Проблемы автокорреляции и гетероскедастичности в эконометрических моделях затрудняют применение МНК и требуют устранения.

Графическое представление поведения остаточного члена

$$e_i = y_i - \hat{y}_i, \ i = 1, 2, ..., n$$

позволяет проанализировать наличие автокорреляции и гетероскедастичности, с помощью графического представления отклонений может быть обнаружена неправильная спецификация уравнения.

Воздействие неучтенных факторов и ошибок наблюдений определяется с помощью дисперсии случайных отклонений $D(\varepsilon_i)$. Несмещенной оценкой этой дисперсии является выборочная остаточная дисперсия.

Прогнозируемое значении переменной y вычисляется по формуле

$$y^*_{\text{прогн}} = b_0 + b_1 x_{\text{прогн}}.$$

Данный прогноз является точечным.

Отметим, что уравнение отражает лишь общую тенденцию в поведении рассматриваемых переменных. Индивидуальные значения переменных в силу различных причин могут отклоняться от модельных значений. Однако при определенных условиях уравнение регрессии служит основным качественным инструментом анализа и прогнозирования.

2.6. Линейная множественная регрессия

Уравнение множественной эмпирической линейной регрессии имеет вид

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k.$$

Оценка параметров $b_0, b_1, \ldots, b_k$ обычно осуществляется по методу наименьших квадратов, который предусматривает их нахождение из условия минимума суммы квадратов отклонений выборочных значений от расчетных:

$$S(b_0, b_1, \ \ldots, \ b_k) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_{i1} - \ldots - \ b_k x_{ik})^2 \to \min.$$

Используя необходимое условие экстремума, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $b_0, \ b_1, \ \ldots, \ b_k$:

$$\begin{cases} nb_0 + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1} + \ldots + b_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ik} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ b_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1} + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1}^2 + \ldots + b_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1} x_{ik} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1} y_i, \\ \qquad \vdots \\ b_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ik} + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1} x_{ik} + \ldots + b_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ik}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ik} y_i. \end{cases}$$

Оценку параметров модели можно провести в матричной форме. Уравнение линейной множественной регрессии в матричной форме имеет вид

$$Y = XB,$$

где $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ – вектор значений зависимой переменной размерности $(n \times 1)$, знаком «$'$» обозначена операция транспонирования матрицы; $X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ & & \ldots & & \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{bmatrix}$ – матрица значений независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$; $B = (b_0, b_1, \ b_2, \ \ldots, \ b_k)'$ – подлежащий оцениванию вектор неизвестных параметров.

Тогда формула для вычисления параметров регрессионного уравнения по методу наименьших квадратов имеет вид

$$B = (X'X)^{-1}(X'Y),$$

где X' – транспонированная к X матрица; $(X'X)^{-1}$ – обратная матрица.

Коэффициенты $b_1, \ldots, b_k$ показывают количественное воздействие каждого фактора на результативный показатель при неизменности значений других факторов.

Коэффициенты эластичности в случае линейной множественной регрессии рассчитываются по формуле

$$Э_i = b_i \frac{\overline{x}_i}{\overline{y}}.$$

Коэффициенты эластичности показывают, на сколько процентов в среднем изменяется функция с изменением i-го аргумента на 1%.

Коэффициенты парной корреляции рассчитываются аналогично рассмотренному выше парному коэффициенту корреляции.

Важным вопросом является выяснение взаимосвязи факторов между собой. В корреляционную модель следует подбирать независимые между собой факторы. Если коэффициент корреляции двух факторов выше 0,8, то говорят о наличии проблемы мультиколлинеарности (тесной связи между факторами).

Такая проблема может нарушить достоверность результатов МНК, поэтому один из взаимосвязанных факторов необходимо исключить из модели.

Матрица коэффициентов парной корреляции (корреляционная матрица) имеет вид

$$K = \begin{bmatrix} 1 & r_{yx_1} & \cdots & r_{yx_k} \\ r_{x_1y} & 1 & \cdots & r_{x_1x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{x_ky} & r_{x_kx_1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

По данным этой матрицы можно примерно оценить, какие факторы существенно влияют на переменную y, а какие – несущественно, а также выявить взаимосвязь между ними.

Коэффициент множественной корреляции определяется по формуле

$$R = \sqrt{1 - \frac{\det K}{K_{11}}},$$

где $\det K$ – определитель корреляционной матрицы; K_{11} – алгебраическое дополнение элемента первой строки и первого столбца матрицы K. Коэффициент множественной корреляции принимает значения от 0 до 1. Чем ближе его значение к единице, тем в большей степени учтены факторы, которые влияют на зависимую переменную, тем более точной является построенная на основе отобранных факторов модель.

Индекс корреляции (коэффициент множественной корреляции) вычисляется по формуле

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y}_i)^2}}.$$

Чем выше значение R, тем вероятнее близость расчетных значений результативного признака к фактическим. Данный показатель используется при любой форме связи переменных.

Коэффициентом детерминации называется величина, получаемая при возведении в квадрат коэффициента корреляции:

$$D = R^2.$$

О полноте связи можно судить по величине множественных коэффициентов корреляции и детерминации. Например, если R = 0,92, а D = 0,85, то это значит, что вариация результативного признака на 85% зависит от изменения исследуемых факторов, а на долю других факторов приходится 15% вариации результативного показателя. Значит, в корреляционную модель удалось включить наиболее существенные факторы.

Для проверки гипотезы о статистической значимости коэффициентов корреляции, как и ранее, используется критерий Стьюдента. В случае $\left| t_{b_i} \right| \geq t_{\alpha, n-k-1}$ коэффициент регрессии b_i признается значимым.

При проверке адекватности модели в целом по критерию Фишера фактическая величина критерия принимает вид

$$F_{\text{расч}} = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{(n - k - 1)}{k}.$$

Она сопоставляется с табличной и делается заключение о надежности связи. Здесь k – количество независимых переменных в уравнении связи (в случае линейной парной регрессии k = 1, $R = |r|$). Если $F_{\text{расч}} \geq F_{\text{табл}(\alpha;\nu_1;\nu_2)}$ со степенями свободы $\nu_1 = k$, $\nu_2 = n - k - 1$ при заданном уровне значимости α, то линейную модель можно считать адекватной, гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется и признается их статистическая значимость и надежность (нулевая гипотеза отвергается).

2.7. Нелинейная регрессия

Многие экономические зависимости не являются линейными по своей сути, и поэтому их моделирование линейными уравнениями регрессии не дает положительного результата. Вид нелинейной модели можно подобрать, исходя из построенного корреляционного поля.

В некоторых случаях возможно сведение исходной нелинейной модели к линейной модели с помощью преобразования переменных.

Отметим, что в случае нелинейной регрессии коэффициент эластичности следует находить по общей формуле

$$Э_{yx} = f'(x)\frac{x}{y}.$$

1. ***Степенные модели*** (рис. 2.2) вида $y = bx^a$, где a, b – параметры модели.

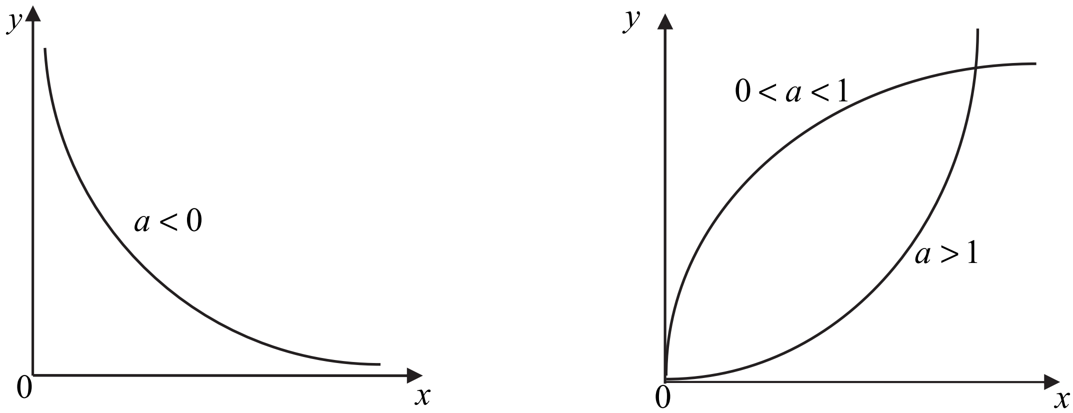


Рис. 2.2. Зависимость $y = bx^a$, $b > 0$, $x > 0$

Прологарифмируем выражение $y = bx^a$: $\ln y = \ln b + a\ln x$ и выполним замену $Y = \ln y$, $X = \ln x$, $b_0 = \ln b$, $b_1 = a$. Тогда получим $Y = b_0 + b_1X$. Данная модель является линейной.

2. ***Показательная модель*** (рис. 2.3) вида $y = be^{ax}$, $b > 0$.

Прологарифмируем выражение $y = be^{ax}$: $\ln y = \ln b + ax$.

Выполним замену $Y = \ln y$, $X = x$, $b_0 = \ln b$, $b_1 = a$, получим линейную модель $Y = b_0 + b_1X$.

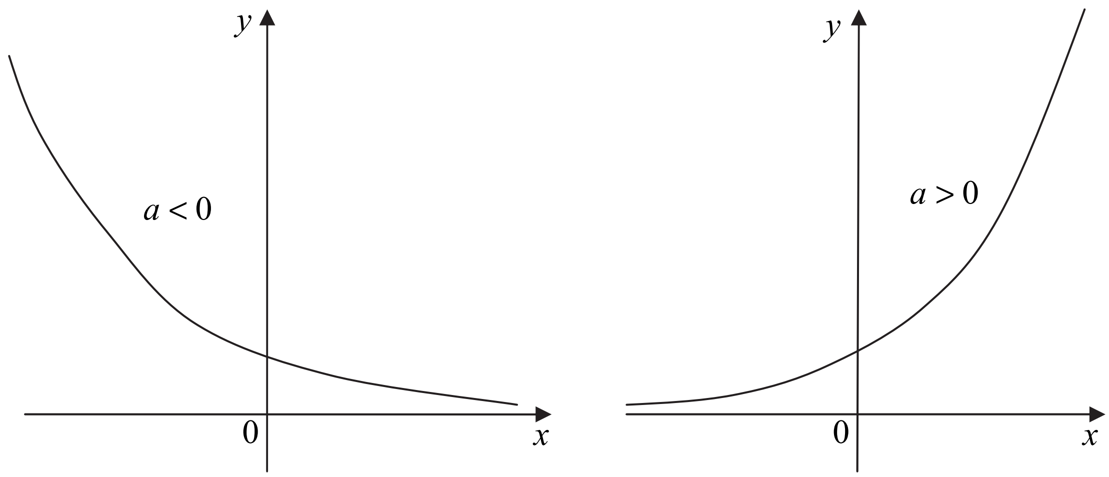


Рис. 2.3. Зависимость $y = be^{ax}$, $b > 0$

3. **Логарифмические модели** (рис. 2.4) – это модели вида $y = b + a\ln y$. Такие модели сводятся к линейной за счет замены $X = \ln x$, $Y = y$.

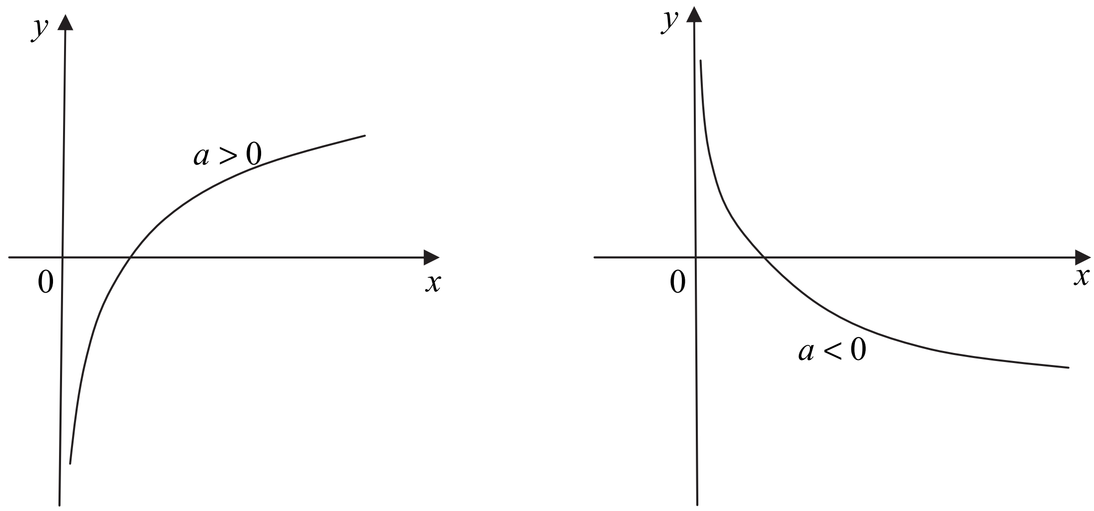


Рис. 2.4. Зависимость $y = b + a\ln x$

4. **Обратная модель.** Модель вида $y = \dfrac{1}{ax+b}$ (рис. 2.5) заменой $Y = \dfrac{1}{y}$, $X = x$ приводится к линейной модели $Y = aX + b$. Модель вида $y = \dfrac{x}{ax+b}$ (рис. 2.6) заменой $Y = \dfrac{x}{y}$, $X = x$ – к линейной модели $Y = aX + b$.

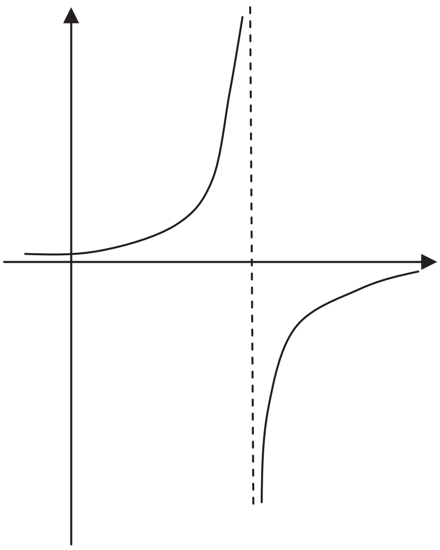


Рис. 2.5. Зависимость $y = \dfrac{1}{ax+b}$

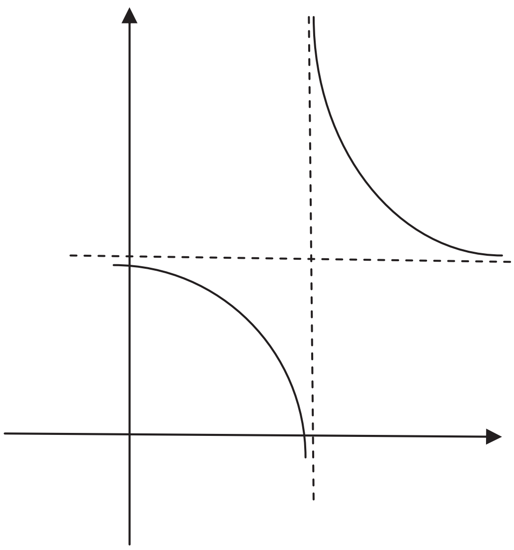


Рис. 2.6. Зависимость $y = \dfrac{x}{ax+b}$

2.8. Примеры решения задач

Пример 1. По условным данным, приведенным ниже,

x_i	2	2,1	2,3	2,4	2,9	3,3	3,8	4,6
y_i	14,3	18,6	18,7	20,9	22,3	24,2	25,7	27

требуется:

1) построить корреляционное поле;

2) построить выборочное уравнение линейной парной регрессии, описывающее зависимость среднесуточной производительности труда (Y, т) от стоимости основных производственных фондов (X, тыс. руб.), пояснить экономический смысл коэффициента регрессии;

3) оценить степень тесноты и направление связи между переменными с помощью коэффициента корреляции;

4) оценить значимость полученного коэффициента корреляции по критерию Стьюдента (уровень значимости 0,05);

5) вычислить коэффициент эластичности Y по X и указать его смысл;

6) найти коэффициент детерминации и указать его смысл;

7) проанализировать адекватность полученного линейного уравнения регрессии с помощью критерия Фишера (уровень значимости 0,05).

Решение. Построим корреляционное поле (рис. 2.7).

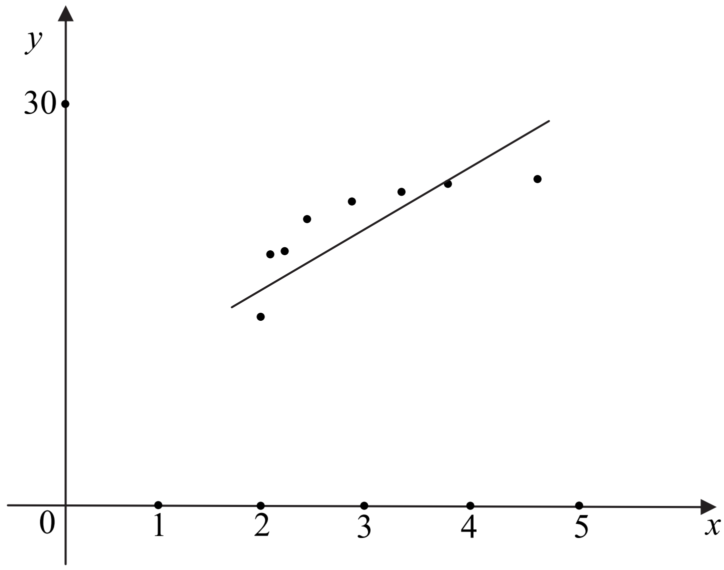


Рис. 2.7. Корреляционное поле

По расположению точек на корреляционном поле полагаем, что зависимость между X и Y близка к линейной.

Будем искать уравнение регрессии Y по X в виде $\hat{y} = b_0 + b_1 x$.

$$n = 8, \sum_{i=1}^{8} x_i = 2 + \ldots + 4,6 = 23,4;$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 2^2 + \ldots + 4,6^2 = 74,36;$$

$$\sum_{i=1}^{8} y_i = 14,3 + \ldots + 27 = 171,7;$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 2 \cdot 14,3 + \ldots + 4,6 \cdot 27 = 527,22.$$

Согласно МНК, имеем

$$\begin{cases} 8b_0 + 23,4b_1 = 171,7, \\ 23,4b_0 + 74,36b_1 = 527,22, \end{cases}$$

откуда $b_0 = 9,101, b_1 = 4,226$.

Таким образом, эмпирическое уравнение парной линейной регрессии имеет вид

$$\hat{y} = 9,101 + 4,226x.$$

Изобразим найденную прямую на корреляционном поле. Коэффициент $b_1 = 4,226$ показывает, что среднесуточная производительность труда возрастет на 4,226 т на при увеличении ОПФ на 1 млн. руб.

Оценим тесноту и направление связи между переменными с помощью коэффициента корреляции (предварительно найдем $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 =$ $= 14,3^2 + \ldots + 27^2 = 3809,37$):

$$r_{xy} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}} =$$

$$= \frac{8 \cdot 527,22 - 23,4 \cdot 171,7}{\sqrt{8 \cdot 74,36 - 23,4^2} \cdot \sqrt{8 \cdot 3809,37 - 171,7^2}} = 0,922.$$

Поскольку коэффициент корреляции положительный, связь прямая. Коэффициент корреляции близок к единице, связь сильная.

Для проверки значимости коэффициента корреляции используем t-критерий Стьюдента

$$t_{\text{расч}} = \frac{|\, r \,|}{\sqrt{1 - r^2}}\sqrt{n-2} = \frac{0,922}{\sqrt{1 - 0,85}} \cdot \sqrt{6} \approx 5,9.$$

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ и, учитывая, что в нашем примере количество степеней свободы равно $n - 2 = 8 - 2 = 6$. Так как $t_{\alpha,n-2} = 2,447$, $t_{\text{расч}} > t_{\alpha,n-2}$, то коэффициент корреляции признается значимым. Парный коэффициент детерминации $D = r_{xy}^2 = 0,85$. Это значит, что изменение y на 85% зависит от изменения исследуемых факторов, а на долю других факторов приходится 15% изменения результативного показателя.

Коэффициент эластичности

$$Э_{yx} = b_1 \frac{\overline{x}}{\overline{y}} = 4,26 \cdot \frac{2,925}{21,4625} \approx 0,576.$$

Таким образом, производительность труда возрастает в среднем на 0,576% при увеличении стоимости ОПФ на 1%.

Для проверки адекватности модели используем F-статистику (критерий Фишера):

$$F_{\text{расч}} = \frac{r_{yx}^2}{1 - r_{yx}^2}(n-2) = \frac{0{,}85}{1-0{,}85} \cdot 6 \approx 34.$$

При заданном уровне значимости расчетное значение критерия с $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = n - 2 = 6$ степенями свободы больше табличного, равного 5,99, поэтому модель можно считать значимой, гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется, признается их статистическая значимость.

Пример 2. По десяти наблюдениям получено уравнение регрессии $y = 2015 - 71{,}5x_1 + 44{,}5x_2$, коэффициент детерминации равен 0,8. Проверить адекватность уравнения регрессии с помощью критерия Фишера при уровне значимости 0,05.

Проверим адекватность модели в целом по критерию Фишера. Найдем фактическую величину критерия:

$$F_{\text{расч}} = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{(n-k-1)}{k} = \frac{0{,}8}{1-0{,}8} \cdot \frac{10-2-1}{2} = 14.$$

Здесь $k = 2$ – количество независимых переменных в уравнении. Так как $F_{\text{расч}} \geq F_{\text{табл}(\alpha;\,\nu_1;\,\nu_2)}$ ($F_{\text{табл}(\alpha;\,\nu_1;\,\nu_2)} = 4{,}74$ со степенями свободы $\nu_1 = k = 2,\ \nu_2 = n - k - 1 = 10 - 2 - 1 = 7$ при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$), то линейную модель можно считать адекватной.

Пример 3. Найти коэффициент эластичности для степенной модели $Y = bX^a$.

Воспользуемся формулой

$$Э_{yx} = f'(x)\frac{x}{y}.$$

$$Э_{yx} = \left(bX^a\right)' \frac{X}{y} = baX^{a-1}\frac{X}{y} = \frac{baX^a}{bX^a} = a.$$

Коэффициент a определяет эластичность переменной Y по переменной X и является константой. Поэтому степенную модель называют еще моделью постоянной эластичности.

2.9. Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите основные классы моделей в эконометрике.
2. Какие типы данных используются в эконометрическом моделировании?

3. Какова цель корреляционного анализа? Что изучает регрессионный анализ?

4. Как оценивается значимость парного линейного коэффициента корреляции?

5. Какой коэффициент определяет среднее изменение результативного признака при изменении факторного признака на 1%?

6. Как оценить значимость уравнения регрессии в целом?

7. Запишите уравнение линейной множественной регрессии. Как определить коэффициенты эластичности по каждому фактору? По какой формуле находится фактическая величина критерия Фишера для проверки адекватности модели в целом?

8. Каков смысл коэффициента детерминации? В каких пределах изменяется его величина?

9. Перечислите основные виды нелинейных моделей в корреляционно-регрессионном анализе. Какова общая формула для нахождения коэффициента эластичности?

2.10. Задачи для аудиторной работы

1. Анализируется прибыль предприятия в Y (млн. ден. ед.) в зависимости от расходов на рекламу X (млн. ден. ед.). По наблюдениям за 10 лет получены следующие данные:

X	0,8	1,8	2	2,5	4	5,7	7,5	8,2	8,7	8,8
Y	6	8	12	15	17	20	22	24	23	25

Построить корреляционное поле. Предполагая зависимость линейной, оценить по МНК коэффициенты уравнения регрессии.

2. По следующим данным:

X	1	2	3	4	5
Y	5,5	6,5	5	3	3,5

построить корреляционное поле, оценить по МНК коэффициенты линейного уравнения регрессии. Построить прямую на корреляционном поле.

3. По следующим данным:

X	1	2	3	4	5
Y	8,5	6,5	4	2	2,1

вычислить коэффициент корреляции и проверить его значимость на уровне значимости 0,05.

4. По восьми наблюдениям получено уравнение регрессии $y = 30,5 - 8,3x_1 + 4,6x_2$, коэффициент детерминации 0,82. Какой процент вариации результативного признака учтен в модели и обусловлен влиянием факторов? Проверить адекватность уравнения регрессии с помощью критерия Фишера при уровне значимости 0,05.

5. Зависимость прибыли предприятия y от расходов на рекламу x_1 и объема производства x_2 описывается моделью $y = 3,5 + 0,2x_1 + 0,8x_2$. По десяти предприятиям получено $\bar{y} = 5$, $\bar{x}_1 = 2$, $\bar{x}_2 = 4$. Найти коэффициенты эластичности по каждому фактору, пояснить их экономический смысл.

6. Вычислить коэффициент эластичности для модели вида $Y = be^{aX}$, указать его смысл.

2.11. Задачи для тренировочной работы

По условным данным, приведенным в таблице Вашего варианта:

1) построить корреляционное поле;

2) построить уравнение регрессии, описывающее зависимость среднесуточной производительности труда Y, т, от стоимости основных производственных фондов X, млн. руб. Пояснить экономический смысл коэффициента регрессии;

3) оценить степень тесноты связи и направление связи между переменными с помощью коэффициента корреляции;

4) проверить значимость коэффициента корреляции с помощью критерия Стьюдента на уровне значимости 0,05;

5) найти коэффициент эластичности и указать его экономический смысл;

6) вычислить коэффициент детерминации и указать его смысл;

7) проверить адекватность модели в целом с помощью критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,01$.

Вариант 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2	2,1	2,3	2,4	2,9	3,3	3,8	4,6
Y	30,78	31,71	32,7	30,19	34,69	37,17	40,38	44,33

Вариант 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2	2,1	2,3	2,4	2,9	3,3	3,8	4,6
Y	25,64	26,72	26,54	29,29	28,9	30,54	33,97	38

Вариант 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2	2,1	2,3	2,4	2,9	3,3	3,8	4,6
Y	31,87	31,69	31,22	31,52	36,22	37,18	40,47	46,11

Вариант 4

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2	2,1	2,3	2,4	2,9	3,3	3,8	4,6
Y	31,21	32,77	34,09	31,42	37,36	39,19	41,91	46,21

Вариант 5

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2	2,1	2,3	2,4	2,9	3,3	3,8	4,6
Y	32,2	31,97	33,45	32,71	34,85	35	36,15	39,09

Вариант 6

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2	2,1	2,3	2,4	2,9	3,3	3,8	4,6
Y	30,87	31,69	32,47	29,85	33,81	35,86	38,52	41

Вариант 7

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2	2,1	2,3	2,4	2,9	3,3	3,8	4,6
Y	42,19	43,36	43,37	46,22	46,29	48,29	52,19	57

Вариант 8

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2	2,1	2,3	2,4	2,9	3,3	3,8	4,6
Y	29,22	29,15	28,91	29,32	34,6	36	39,87	46,43

Вариант 9

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2	2,1	2,3	2,4	2,9	3,3	3,8	4,6
Y	33,75	35,41	37	34,39	40,87	43,12	46,38	51,54

Вариант 10

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2	2,1	2,3	2,4	2,9	3,3	3,8	4,6
Y	36,96	37,07	39,22	38,82	42,65	44,14	47	52,64

Тема 3

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ВРЕМЕННЫХ РЯДАХ

3.1. Понятие временного ряда, составляющие временного ряда

Под **временным рядом** в экономике подразумевается последовательность наблюдений некоторого признака (СВ) y в последовательные моменты времени. Отдельные наблюдения называются **уровнями** ряда, которые будем обозначать y_t, $(t=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, где n – число уровней. Принципиальным отличием членов временного ряда y_t, $t=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ от последовательности наблюдений $y_1, y_2,\ \ldots, y_n$, образующих случайную выборку, является то, что члены временного ряда, как правило, не являются статистически независимыми и одинаково распределенными.

В общем виде при исследовании экономического временного ряда y_t выделяются несколько составляющих:

$$y_t = u_t + v_t + c_t + \varepsilon_t \ (t=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где u_t – **тренд**, плавно меняющаяся компонента, описывающая чистое влияние долговременных факторов (длительную тенденцию изменения признака, например, рост населения, экономическое развитие и т. п.); v_t – **сезонная компонента**, отражающая повторяемость экономических процессов в течение не очень длительного периода (например, объем продаж товаров или перевозок пассажиров в различные времена года); c_t – **циклическая компонента**, отражающая повторяемость экономических процессов в течение длительных периодов; ε_t – **случайная компонента**, отражающая влияние не поддающихся учету и регистрации случайных факторов.

В отличие от ε_t первые три составляющие (компоненты) u_t, v_t, c_t являются закономерными, неслучайными.

Важнейшей классической задачей при исследовании экономических временных рядов является выявление и статистическая оценка основной тенденции развития изучаемого процесса и отклонений от нее.

Основные этапы анализа временных рядов:

- графическое представление и описание поведения временного ряда;
- выделение и удаление закономерных составляющих временного ряда (тренда, сезонных и циклических составляющих);
- сглаживание и фильтрация (удаление низко- или высокочастотных составляющих временного ряда);
- исследование случайной составляющей временного ряда, построение и проверка адекватности математической модели для ее описания;
- прогнозирование развития изучаемого процесса на основе имеющегося временного ряда;
- исследование взаимосвязи между различными временными рядами.

Наиболее распространенными методами анализа временных рядов являются корреляционный анализ, модели авторегрессии и скользящей средней.

Важное значение в анализе временных рядов имеют **стационарные временные ряды**, вероятностные свойства которых не изменяются во времени. Стационарные временные ряды применяются, в частности при описании случайных составляющих анализируемых рядов.

Временной ряд y_t, $(t=1, 2, \ldots, n)$ называется **строго стационарным**, если совместное распределение вероятностей n наблюдений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ такое же, как и n наблюдений $y_{1+\tau}, y_{2+\tau}, \ldots, y_{n+\tau}$ при любых n, t и τ. Свойства строго стационарных рядов y_t не зависят от момента t, т. е. закон распределения и его числовые характеристики не зависят от t. Следовательно, математическое ожидание $a_y(t)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma_y(t)=\sigma$ могут быть оценены по наблюдениям y_t, $(t=1, 2, \ldots, n)$, по формулам:

$$\overline{y}_t = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t;$$

$$s_t^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \overline{y}_t\right)^2.$$

Степень тесноты связи между последовательностями наблюдений временного ряда $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и $y_{1+\tau}, y_{2+\tau}, \ldots, y_{n+\tau}$ (сдвинутых относительно друг друга на τ единиц, или, как говорят, с лагом τ) может быть определена с помощью коэффициента корреляции

$$\rho(\tau) = \frac{M\left[\left(y_t - M\left(y_t\right)\right)\left(y_{t+\tau} - M\left(y_{t+\tau}\right)\right)\right]}{\sigma_y(t)\sigma_y(t+\tau)} = \frac{M\left[\left(y_t - a\right)\left(y_{t+\tau} - a\right)\right]}{\sigma^2},$$

ибо $M\left(y_t\right) = M\left(y_{t+\tau}\right) = a$, $\sigma_y(t) = \sigma_y(t+\tau) = \sigma$.

Так как коэффициент $\rho(\tau)$ измеряет корреляцию между членами одного и того же ряда, его называют **коэффициентом автокорреляции**, а зависимость $\rho(\tau)$ – **автокорреляционной функцией**. В силу стационарности временного ряда y_t, $(t = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ автокорреляционная функция $\rho(\tau)$ зависит только от лага τ, причем $\rho(-\tau) = \rho(\tau)$.

Статистической оценкой $\rho(\tau)$ является **выборочный коэффициент автокорреляции** $r(\tau)$, определяемый по формуле коэффициента корреляции:

$$r(\tau) = \frac{(n-\tau)\sum_{t=1}^{n-\tau} y_t y_{t+\tau} - \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t \sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}}{\sqrt{(n-\tau)\sum_{t=1}^{n-\tau} {y_t}^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} y_t\right)^2}\sqrt{(n-\tau)\sum_{t=1}^{n-\tau} {y_{t+\tau}}^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}\right)^2}}.$$

Функцию $r(\tau)$ называют **выборочной автокорреляционной функцией**, а ее график – **коррелограммой**. При расчете $r(\tau)$ следует помнить, что с увеличением τ число $n-\tau$ пар наблюдений y_t, $y_{t+\tau}$ уменьшается, поэтому лаг τ должен быть таким, чтобы число $n-\tau$ было достаточным для определения $r(\tau)$. Обычно ориентируются на соотношение $\tau \le n/4$.

3.2. Типы трендов временных рядов

Одной из важнейших задач исследования экономического временного ряда является выявление основной тенденции изучаемого процесса, выраженной неслучайной составляющей $f(t)$ (тренда либо тренда с циклической и (или) сезонной компонентой). **Тренд** – это устойчивая тенденция во временном ряду более или менее свободная от случайных колебаний. На практике чаще всего используют следующие типы временных рядов: линейный, параболический, экспоненциальный и др.

Для определения параметров функции тренда $f(t)$ чаще всего используется метод наименьших квадратов. Значения временного ряда y_t рассматриваются как зависимая переменная, а время t – как объясняющая:

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t,$$

где ε_t – возмущения, удовлетворяющие основным предпосылкам регрессионного анализа.

Согласно МНК, параметры прямой $f(t) = a + bt$ находят из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na + b\sum\limits_{t=1}^{n} t = \sum\limits_{i=1}^{n} y_t, \\ a\sum\limits_{t=1}^{n} t + b\sum\limits_{t=1}^{n} t^2 = \sum\limits_{t=1}^{n} y_t t. \end{cases}$$

Линейный тип тренда подходит для отображения тенденции примерно равномерного изменения уровней: равных в среднем величин абсолютного прироста или абсолютного сокращения уровней за равные промежутки времени.

Одна из важнейших задач анализа временного ряда состоит в прогнозировании на его основе развития изучаемого процесса. При этом исходят из того, что тенденция развития, установленная в прошлом, может быть распространена (экстраполирована) на будущий период.

Если для временного ряда y_t ($t = 1, 2, \ldots, n$) требуется дать прогноз уровня этого ряда на момент $n + \tau$, при этом возмущения ε_t ($t = 1, 2, \ldots, n$) удовлетворяют предпосылкам регрессионного анализа, то временной ряд можно рассматривать как регрессионную модель изучаемого признака по переменной «время». К нему можно применить методы нахождения точечных и интервальных оценок зависимой переменной y, полученных для парной и множественной регрессий, если значения объясняющих переменных x расположены вне пределов обследованного диапазона значений x.

Прогноз развития изучаемого процесса на основе экстраполяции временных рядов может оказаться эффективным, как правило, в рамках краткосрочного, в крайнем случае, среднесрочного периода прогнозирования.

Для данного временного ряда не всегда удается подобрать адекватную модель, для которой ряд возмущений ε_t будет удовлетворять основным предпосылкам регрессионного анализа. Мы рассматривали модели, в которых в качестве регрессора выступала переменная t – «время». В эконометрике достаточно широкое распространение получили и другие регрессионные модели, в которых регрессорами выступают лаговые переменные. **Лаговая переменная** – это переменная, влияние которой в эконометрической модели характеризуется некоторым запаздыванием.

Авторегрессионная модель p-го порядка имеет следующий вид:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \ldots + \beta_p y_{t-p} + \varepsilon_t,\ (t = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $\beta_0,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_p$ – некоторые константы. Она описывает изучаемый процесс в момент t в зависимости от его значений в предыдущие моменты $t-1,\ t-2,\ ...,\ t-p$. Если исследуемый процесс y_t в момент t определяется его значениями только в предшествующий период $t-1$, то рассматривают авторегрессионную модель 1-го порядка (или марковский случайный процесс):

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \varepsilon_t,\ (t = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

3.3. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется временным рядом?
2. Какие составляющие временного ряда Вы знаете?
3. Какой временной ряд называется стационарным?
4. Как находится выборочный коэффициент автокорреляции?
5. Какие основные типы трендов временных рядов Вы знаете?

Тема 4

СИСТЕМЫ ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Понятие систем одновременных уравнений

Для изучения комплексных экономических явлений средствами эконометрики, как правило, применяют не отдельные уравнения регрессии, а системы уравнений.

Виды систем эконометрических уравнений:

1. *Система независимых уравнений.* Каждый результативный признак (объясняемая переменная) y_j, где $j = \overline{1,\ n}$, является функцией одной и той же совокупности факторов (объясняющих переменных) x_i, где $i = \overline{1,\ m}$. Набор факторов в каждом уравнении системы может варьировать в зависимости от изучаемого явления.

2. *Система рекурсивных уравнений.* Результативный признак y_j, где $j = \overline{1,\ n}$, одного уравнения системы в каждом последующем уравнении является фактором наряду с одной и той же совокупностью факторов x_i, где $i = \overline{1,\ m}$.

3. *Система одновременных уравнений.* Результативный признак y_j, где $j = \overline{1,\ n}$ одного уравнения системы входит во все другие уравнения системы в качестве фактора наряду с одной и той же совокупностью факторов x_i, где $i = \overline{1,\ m}$. Такие системы эффективны в эконометрических исследованиях и наиболее широко применяются в макроэкономике.

Систему независимых или рекурсивных уравнений решают с помощью МНК. Для исследования систем одновременных уравнений требуются другие, отличные от МНК методы. Их применение обусловливается тем, что результативный признак одного уравнения системы в другом уравнении этой системы используется в качестве фактора и коррелирует с соответствующей ошибкой.

При рассмотрении систем одновременных уравнений переменные делятся на два больших класса – эндогенные и экзогенные переменные. *Эндогенные переменные* (y) определяются внутри модели и являются зависимыми переменными. *Экзогенные переменные* (x) определяются вне модели и являются независимыми переменными. Под *предопределенными переменными* (т. е. заранее определенными) понимают экзогенные и лаговые (за предыдущие моменты времени) эндогенные переменные этой системы.

С математической точки зрения, главное отличие между эндогенными и экзогенными переменными заключается в том, что экзогенные переменные не коррелируют с ошибками регрессии. А эндогенные переменные, как правило, коррелируют со случайными членами, в силу причинной зависимости между ними.

Классическим примером системы одновременных уравнений является модель спроса и предложения кейнсианского типа:

$$\begin{cases} y_{1t} = c_1 + b_{13}y_{3t} + a_{11}x_{1t} + \varepsilon_1, \\ y_{2t} = c_2 + b_{23}y_{3t} + a_{23}y_{3t-1} + \varepsilon_2, \\ y_{1t} = y_{2t}, \end{cases} \tag{4.1}$$

где y_{1t} – спрос на товар в момент времени t; y_{2t} – предложение количества товара в момент t; y_{3t} – цена, по которой заключаются сделки в момент t; x_{1t} – доход на душу населения в момент времени t; y_{3t-1} – цена товара в момент времени $t-1$.

В модели три эндогенные переменные (y_{1t}, y_{2t}, y_{3t}) и две предопределенные переменные (x_{1t}, y_{3t-1}).

4.2. Структурная и приведенная формы модели

Система одновременных уравнений может быть представлена в виде:
- структурной формы модели;
- приведенной формы модели.

Структурная форма модели (СФМ) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} y_1 = c_{10} + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + \ldots + b_{1n}y_n + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = c_{20} + b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + \ldots + b_{2n}y_n + a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\ \vdots \\ y_n = c_{n0} + b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{n\,n-1}y_{n-1} + a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m + \varepsilon_m, \end{cases} \qquad (4.2)$$

где c_{i0} – свободный член уравнения модели; b_{ik} – коэффициент при эндогенной переменой модели; a_{ij} – коэффициент при экзогенной переменной; ε_i – случайная составляющая (ошибка) i-го уравнения СФМ ($i = \overline{1,\ n}$, $j = \overline{1,\ m}$, $k = \overline{1,\ n}$). Коэффициенты a_{ij}, b_{ik} называются *структурными коэффициентами* модели.

Структурная форма модели раскрывает реальный экономический объект или явление и показывает экономический механизм формирования значений эндогенных переменных.

Структурные уравнения модели подразделяются на два класса:

1) *поведенческие уравнения* описывают взаимодействие между экзогенными и эндогенными переменными;

2) *тождества* устанавливают алгебраические соотношения между эндогенными переменными. Они не содержат случайных составляющих и структурных коэффициентов модели.

Например, для модели (4.1) имеем два поведенческих уравнения и одно тождество $y_{1t} = y_{2t}$. Тождества, вообще говоря, позволяют исключить некоторые эндогенные переменные и рассматривать систему регрессионных уравнений меньшей размерности.

Использование МНК для оценивания структурных коэффициентов модели дает, как правило, смещенные и несостоятельные оценки, в силу отмеченного свойства коррелированности случайных остатков с переменными. Поэтому обычно для определения структурных коэффициентов модели СФМ преобразуется в *приведенную форму модели (ПФМ)*:

$$\begin{cases} y_1 = \alpha_{10} + \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1m}x_m + \eta_1, \\ y_2 = \alpha_{20} + \alpha_{21}x_1 + \ldots + \alpha_{2m}x_m + \eta_2, \\ \vdots \\ y_n = \alpha_{n0} + \alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nm}x_m + \eta_n, \end{cases} \qquad (4.3)$$

где α_{i0} – свободный член уравнения модели; α_{ij} – коэффициент при предопределенной переменной является функцией коэффициентов

СФМ; η_i – случайная составляющая (ошибка) i-го уравнения ПФМ ($i = \overline{1,\ n}$, $j = \overline{1,\ m}$).

Приведенная форма модели имеет вид системы независимых уравнений. Ее параметры оцениваются МНК.

4.3. Проблема идентификации

Идентификация – это установление соответствия между приведенной и структурной формами модели. Проблема связана с тем, что структурная модель (4.2) в полном виде содержит $n(n+m)$ параметров, а приведенная форма (4.3) – $n(1+m)$ параметров, т. е. в полном виде СФМ содержит большее число параметров, чем ПФМ. Поэтому единственность соответствия между приведенной и структурной формами модели составляет задачу идентификации.

Классы структурных моделей с позиции идентификации:

– идентифицируемые;

– неидентифицируемые;

– сверхидентифицируемые.

Модель идентифицируема, если все структурные коэффициенты однозначно определяются через коэффициенты приведенной формы модели.

Модель неидентифицируема, если структурные коэффициенты невозможно найти по приведенным коэффициентам. Это означает, что существует бесконечное число структурных моделей, имеющих одну и ту же приведенную форму.

Модель сверхидентифицируема, если структурные коэффициенты, которые выражены через приведенные коэффициенты, имеют два и более числовых значений. Сверхидентифицируемая модель практически решаема, но для этого требуются специальные методы оценок.

Модель идентифицируема тогда и только тогда, когда идентифицировано каждое ее уравнение. Идентификация не применяется для тождеств системы. Если хотя бы одно из уравнений системы неидентифицируемо, то и вся модель считается неидентифицируемой. Сверхидентифицируемая модель содержит хотя бы одно сверхидентифицируемое уравнение. Таким образом, каждое из поведенческих уравнений системы требует проверки на идентификацию.

Необходимое условие идентифицируемости уравнений системы: если уравнение модели идентифицируемо, то количество эндогенных переменных (n) этого уравнения на единицу больше количества (p) предопределенных переменных системы, не входящих в данное уравнение $n = p + 1$. Если $n > p + 1$, то уравнение неидентифицируемо; если $n < p + 1$, то уравнение сверхидентифицируемо.

Достаточное условие идентифицируемости уравнений системы: если определитель (Δ^*) матрицы коэффициентов (A) при переменных системы, не входящих в данное уравнение, не равен нулю $(\Delta^* \neq 0)$ и количество эндогенных переменных системы без единицы равно рангу этой матрицы $(\operatorname{rank} A = n - 1)$, то уравнение модели идентифицируемо.

4.4. Методы решения систем одновременных уравнений

Для получения качественных оценок параметров системы одновременных уравнений пользуются специальными методами. Классическими для решения систем одновременных уравнений являются *косвенный МНК* и *двухшаговый МНК.* Выбор метода определяется условиями системы. Для решения идентифицируемых уравнений применяется косвенный МНК, а для решения идентифицируемых и сверхидентифицируемых уравнений – двухшаговый МНК.

Алгоритм косвенного МНК включает следующие шаги:

1. Структурная форма модели преобразуется в приведенную форму.
2. С помощью МНК определяют численные значения параметров для каждого уравнения приведенной формы.
3. Путем алгебраических преобразований приведенная форма преобразуется в структурную форму, получая тем самым численные оценки структурных параметров.

Алгоритм двухшагового МНК:

1. Составляют приведенную форму модели и определяют численные значения параметров каждого ее уравнения МНК.
2. В правой части сверхидентифицируемого уравнения структурной формы модели выбирают эндогенные переменные и рассчитывают их теоретические значения по соответствующим уравнениям приведенной формы модели.

3. С помощью МНК на основе фактических значений предопределенных и теоретических значений эндогенных переменных оценивают параметры сверхидентифицируемого уравнения структурной модели.

4.5. Примеры решения задач

Пример 1. Проверим, идентифицируема ли модель предложения и спроса кейнсианского типа (4.1). Запишем эту систему в следующем виде:

$$\begin{cases} 1.\ 0=-y_{1t}+b_{13}y_{3t}+a_{11}x_{1t}+c_{10}+\varepsilon_1, \\ 2.\ 0=-y_{2t}+b_{23}y_{31t}+a_{23}y_{3,t-1}+c_{20}+\varepsilon_2, \\ 3.\ 0=-y_{1t}+y_{2t}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Запишем коэффициенты последней системы в виде следующей табл. 4.1.

Таблица 4.1

Матрица коэффициентов

Уравнения	Переменные				
	эндогенные			предопределенные	
	y_{1t}	y_{2t}	y_{3t}	$y_{3,t-1}$	x_{1t}
1	−1	0	b_{13}	0	a_{11}
2	0	−1	b_{23}	a_{23}	0
3	−1	1	0	0	0

Уравнение (1) из системы (4.4):

а) необходимое условие: эндогенных переменных две (y_{1t}, y_{3t}), отсутствующих экзогенных – одна ($y_{3,\,t-1}$). Таким образом, n = 2, p = 1 и выполняется необходимое условие идентификации ($n = p+1$): 2 = 1 + 1;

б) достаточное условие. В первом уравнении отсутствуют переменные y_{2t} и $y_{3,\,t-1}$. Запишем матрицу из коэффициентов при этих переменных в других уравнениях системы (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Матрица коэффициентов при отсутствующих переменных

Уравнения	Переменные	
	эндогенные	предопределенные
	y_{2t}	$y_{3,t-1}$
2	-1	a_{23}
3	1	0

Матрица коэффициентов при переменных системы, не входящих в уравнение, $A = \begin{bmatrix} -1 & a_{23} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Ранг этой матрицы $\operatorname{rank} A = 2$ (равен количеству эндогенных переменных модели минус один). Причем $\Delta^* = |A| = -1 \cdot 0 - 1 \cdot a_{23} = -a_{23} \neq 0$. Достаточное условие идентифицируемости также выполняется. Можно сделать вывод о том, что уравнение (1) идентифицируемо.

Уравнение (2) из системы (4.4):

а) $n = 2$, $p = 1$. Выполняется необходимое условие идентификации ($n = p + 1$): 2 = 1 + 1;

б) матрица коэффициентов при переменных системы, не входящих в уравнение, $A = \begin{bmatrix} -1 & a_{11} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Ранг этой матрицы $\operatorname{rank} A = 2$ (равен количеству эндогенных переменных модели минус один). Причем $\Delta^* = |A| = a_{11} \neq 0$. Достаточное условие идентифицируемости также выполняется. Можно сделать вывод о том, что уравнение (2) идентифицируемое.

Таким образом, модель (4.1) идентифицируема. Для оценки параметров идентифицируемой модели предложения и спроса кейнсианского типа (4.1) можно применять как косвенный МНК, так и двухшаговый МНК.

Приведенная форма модели (4.1) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} y_{1t} = \alpha_{10} + \alpha_{11} x_{1t} + \alpha_{12} y_{3,t-1} + \eta_1, \\ y_{2t} = \alpha_{20} + \alpha_{21} x_{1t} + \alpha_{22} y_{3,t-1} + \eta_2, \\ y_{3t} = \alpha_{30} + \alpha_{31} x_{1t} + \alpha_{32} y_{3,t-1} + \eta_3. \end{cases}$$

Используя соответствующие статистические данные, можно с помощью косвенного МНК найти несмещенные и состоятельные оценки структурной формы, тем самым смоделировав реальную экономическую ситуацию изучения спроса (предложения) с учетом дохода в текущий период и цены товара в предыдущий период.

Пример 2. Предложение денег и спрос на деньги представлены в виде модели

$$\begin{cases} y_{1t} = c_{10} + b_{12} y_{2t} + a_{11} x_{1t} + \varepsilon_1, \\ y_{2t} = c_{20} + b_{21} y_{1t} + \varepsilon_2, \end{cases}$$

где y_{1t} – процентные ставки в период t; y_{2t} – ВВП в период t; x_{1t} – денежная масса в период t.

Проверить, идентифицируемы ли уравнения.

Решение. Запишем коэффициенты системы в виде табл. 4.3.

Таблица 4.3

Матрица коэффициентов

Уравнения	Переменные		
	эндогенные		предопределенные
	y_{1t}	y_{2t}	x_{1t}
1	−1	b_{12}	a_{11}
2	b_{21}	−1	0

Первое уравнение:

Необходимое условие: $n = 2$ (y_{1t}, y_{2t}), $p = 0$ (так как x_{1t} является единственной предопределенной переменной, которая входит в первое уравнение системы), следовательно, $n > p + 1$.

Уравнение неидентифицируемо, поэтому неидентифицируема вся система.

В этом случае изменяют модель так, чтобы она, с одной стороны, содержала основные эндогенные и экзогенные переменные, которые определяют спрос и предложение на деньги, с другой – была эконометрически разрешима.

Пример 3. На основе исходных данных оценить параметры идентифицируемой структурной модели

$$\begin{cases} y_1 = c_{10} + b_{12} y_2 + a_{11} x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = c_{20} + b_{21} y_1 + a_{22} x_2 + \varepsilon_2, \end{cases}$$

где y_1 и y_2 – эндогенные переменные системы; x_1 и x_2 – экзогенные переменные этой системы.

Исходные данные приведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Исходные данные

y_1	y_2	x_1	x_2
5	2	7	2
4	3	8	2
3	1	6	4
2	5	4	6
7	4	2	4
8	3	7	8
9	6	4	9
10	8	5	7

Решение:

1. От структурной формы перейдем к приведенной форме модели

$$\begin{cases} y_1 = \alpha_{10} + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \eta_1, \\ y_2 = \alpha_{20} + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \eta_2. \end{cases}$$

2. Применим МНК для оценки коэффициентов уравнений модели.

Оценки коэффициентов можно найти, составив систему нормальных уравнений и решив ее. Можно также использовать электронные таблицы Excel (функция ЛИНЕЙН или вкладка «Данные – Анализ данных – Регрессия»).

Рассмотрим сначала первое уравнение системы. Нам нужно определить коэффициенты α_{10}, α_{11}, α_{12}. Для этого используем данные табл. 4.4 (столбцы y_1, x_1, x_2).

Получаем уравнение: $y_1 = 2{,}64 - 0{,}02x_1 + 0{,}66x_2 + \eta_1$.

Аналогичным образом определяются коэффициенты второго уравнения (используются данные столбцов y_2, x_1, x_2).

Получаем уравнение: $y_2 = 3{,}51 - 0{,}34x_1 + 0{,}44x_2 + \eta_2$.

Запишем приведенную форму модели

$$\begin{cases} 1.\ y_1 = 2{,}64 - 0{,}02x_1 + 0{,}66x_2 + \eta_1, \\ 2.\ y_2 = 3{,}51 - 0{,}34x_1 + 0{,}44x_2 + \eta_2. \end{cases} \quad (4.5)$$

3. От приведенной формы переходим к структурной форме модели. Из уравнения (1) системы (4.5) выражаем $x_1 = (2{,}64 - y_1 + 0{,}66x_2)\,/\,0{,}02$ и подставляем правую часть этого равенства в (2) из системы (4.5):

$$y_2 = 3,51 - 0,34 \cdot \frac{2,64 - y_1 + 0,66x_2}{0,02} + 0,44x_2$$

или

$$y_2 = -41,37 - 17x_1 + 11,66x_2 + \varepsilon_2 .$$

Из уравнения (2) системы (4.5) выражаем $x_2 = (y_2 - 3,51 + + 0,34x_1) / 0,44$ и подставляем в правую часть уравнения (2) системы (4.5). После преобразований получаем:

$$y_1 = -2,63 + 1,5y_2 + 0,49x_1 + \varepsilon_1 .$$

Таким образом, структурная форма модели имеет следующий вид:

$$\begin{cases} y_1 = -2,63 + 1,5y_1 + 0,49x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = -41,37 - 17y_1 + 11,66x_2 + \varepsilon_2 . \end{cases}$$

4.6. Вопросы для самоконтроля

1. Какие виды систем эконометрических уравнений Вы знаете?
2. Какие переменные называются экзогенными? Эндогенными?
3. Чем отличается структурная форма модели от приведенной?
5. В чем заключается проблема идентификации?
6. Какие классы структурных моделей с позиции идентификации Вы знаете?
7. Сформулируйте необходимое и достаточное условия идентифицируемости уравнения системы.
8. Какие методы решения систем одновременных уравнений Вы знаете?

Тема 5

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

5.1. Основные понятия

Во многих сферах человеческой деятельности возникают ситуации, в которых сталкиваются две или более стороны, преследующие различные цели. Такие ситуации называются *конфликтными*. Эффективность решений, принимаемых в ходе конфликта каждой из сторон, зависит от действий другой стороны. При этом ни одна из сторон не может полностью контролировать положение, так как и той и другой стороне решения приходится принимать в условиях неопределенности.

Примерами конфликтных ситуаций являются спортивные игры, арбитражные споры, военные операции и т. д.

Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций, разрабатывающая рекомендации по наиболее рациональному образу действий каждого из участников в ходе конфликтной ситуации.

Игровую схему можно придать многим ситуациям в экономике. Здесь выигрышем могут быть эффективность использования ресурсов, производственных фондов, величина прибыли, себестоимость и т. д.

Игра – это совокупность правил, определяющих возможные действия участников игры (игроков). Суть игры в том, что каждый из участников принимает такие решения, которые, как он полагает, обеспечивают ему наилучший результат (исход) игры. Игра – это математическая модель конфликтной ситуации.

Стратегия – это совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации, складывающейся в процессе игры.

Исход (цена) игры – это значение некоторой функции, которая называется *функцией выигрыша* (*платежной функцией*). Величина выигрыша зависит от стратегии, применяемой игроками.

Оптимальной стратегией называется стратегия, которая обеспечивает игроку наилучший исход игры, при предположении, что противник использует наилучшую для себя стратегию.

Партией называют каждый вариант реализации игры. В партии игроки совершают конкретные ходы.

Ход – это выбор и реализация игроком одного из допустимых вариантов поведения.

Игры можно классифицировать по числу игроков (парные и множественные), по характеру взаимодействия (коалиционные и бескоалиционные), в зависимости от числа стратегий (конечные и бесконечные), по характеру выигрыша (с нулевой суммой, где выигрыш одной стороны равен проигрышу другой, и ненулевой суммой), игры с полной информацией, когда перед каждым ходом каждый игрок знает все возможные стратегии и выигрыши, и неполной.

5.2. Матричные игры с нулевой суммой

Матричная игра с нулевой суммой – это игра двух игроков, в которой первый игрок A использует возможные стратегии A_1, A_2, …, A_m, а его противник (игрок B) – стратегии B_1, B_2, …, B_n. Если игрок A применит стратегию A_i, а игрок B – стратегию B_j, то цена a_{ij} игры будет выигрышем игрока A (проигрышем B). Таким образом, игра с нулевой суммой полностью описывается так называемой *платежной матрицей* игры (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Платежная матрица

Игроки	Стратегии игрока B					
Стратегии игрока A		B_1	…	B_j	…	B_n
	A_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
	…	…………………………….				
	A_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}
	…	…………………………….				
	A_m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Платежная матрица является табличной записью функции выигрыша. В теории матричных игр всегда предполагается, что в платежной матрице записаны выигрыши игрока A (если $a_{ij} < 0$, то в выигрыше игрок B).

Стратегии A_i $(i=\overline{1,\ m})$ первого игрока и стратегии B_j $\left(j=\overline{1,\ n}\right)$ второго игрока (возможные их ходы) принято называть *чистыми* стратегиями. Выбор пары чистых стратегий (A_i; B_j) единственным образом определяет исход (результат) игры.

Пример: «камень – ножницы – бумага». Каждый игрок независимо от другого выбирает одну из трех стратегий: «камень», «ножницы» или «бумага». Если выбор совпадает, то игра заканчивается ничьей, и выигрыш первого игрока равен нулю, в противном случае побеждает игрок с более сильной стратегией. «Камень» сильнее «ножниц», «ножницы» сильнее «бумаги», «бумага» сильнее «камня». Выигрыш победившего игрока составляет 1, проигравшего –1. Составим платежную матрицу (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Платежная матрица

Игроки	Стратегии игрока B		
Стратегии игрока A	«камень»	«ножницы»	«бумага»
«камень»	0	1	–1
«ножницы»	–1	0	1
«бумага»	1	–1	0

При поиске оптимальных стратегий игроки опираются на основной принцип теории игр – *принцип гарантированного результата – принцип максимина*, в соответствии с которым каждый игрок, считая партнера по игре разумным противником, выбирает свои действия в предположении, что соперник не упустит возможности использовать в своих интересах любую его ошибку.

Выбирая свой ход игрок A анализирует платежную матрицу, определяя в каждой строке (т. е. для своей каждой чистой стратегии A_i, $i=\overline{1,\ m}$) минимальное значение α_i ожидаемого выигрыша: $\alpha_i=\min\limits_j \alpha_{ij}$, $i=\overline{1,\ m}$ (считая, что противник играет наилучшим образом). А затем из всех значений α_i игрок A выберет наибольшее $\alpha=\max\limits_i \alpha_i$, и таким образом, выберет соответствующую ему чистую – максиминную стратегию A_i. Игрок A гарантирует себе выигрыш не хуже α при любых стратегиях игрока B.

Число $\alpha=\max\limits_i \min\limits_j \alpha_{ij}=\max\limits_i \alpha_i$ называется *нижней ценой игры (максимином)*. Она выражает выигрыш игрока A, при использовании максиминной стратегии независимо от действий игрока B.

Аналогично поступает игрок *B*, определяя сначала в каждом столбце платежной матрицы максимальный элемент $\beta_j = \max_i \alpha_{ij}$, $j = \overline{1,\ n}$, а затем из всех β_j выбирая минимальное значение β. Число β, определяемое по формуле $\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j\ b_j$, называется *верхней ценой игры (минимаксом)*. Она показывает, какой максимальный проигрыш (гарантированный результат) может быть у игрока *B* при подходящем выборе им своей чистой стратегии (независимо от действий игрока *A*). Соответствующая стратегия игрока *B* называется *минимаксной.*

Теорема. В матричной игре нижняя цена игры не превосходит верхней цены игры, т. е. $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij} = \beta$.

Если $\alpha = \beta$, то игра имеет седловую точку. Пару чистых стратегий (A_i, B_j), соответствующих α и β, называют *седловой точкой матричной игры*, элемент a_{ij}, стоящий на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца, – *седловым элементом платежной матрицы*, а число $v = \alpha = \beta$ – *чистой ценой игры.*

В этом случае игра имеет решение *в чистых стратегиях*, и в платежной матрице присутствует элемент a_{ij}, который является одновременно минимальным в строке и максимальным в столбце. При этом стратегии игроков A_i и B_j, соответствующие седловой точке, будут *оптимальными чистыми стратегиями*, так как эти стратегии являются наиболее выгодными сразу для обоих игроков, обеспечивая игроку *A* гарантированный выигрыш не менее *v*, а игроку *B* – гарантированный проигрыш не более (–*v*). Решение игры записывается тройкой объектов $\{A_i, B_j, v\}$.

Платежная матрица может иметь несколько седловых точек.

Если седловая точка в платежной матрице отсутствует, то решения в чистых стратегиях не существует. В таких случаях ищут решение игры в смешанных стратегиях.

Смешанной стратегией игрока *A* называется вектор

$$\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m),$$

где $p_i \ge 0$, $(i = \overline{1,m})$ и $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. При этом p_i – вероятность, с которой первый игрок выбирает свою *i*-ю стратегию.

Аналогично *смешанная стратегия* игрока *B* вектор

$$\vec{q} = (q_1, q_2, ..., q_n),$$

где $q_j \geq 0$, $(j = \overline{1, n})$, $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$ и q_j – вероятность, с которой игрок *B* выбирают свою чистую стратегию B_j в ходе игры.

Чистые стратегии игрока, входящие в его оптимальную смешанную стратегию с вероятностями, отличными от нуля, называются *активными стратегиями* игрока.

Если игра имеет решение в чистых стратегиях, то оптимальная чистая стратегия A_i игрока *A* может рассматриваться как частный случай смешанной стратегии, *i*-я компонента которой равна 1, а остальные равны 0. Аналогично для игрока *B*.

Применяя смешанные стратегии игроки выбирают свои чистые стратегии случайно и независимо друг от друга и, таким образом, случайной становится величина выигрыша (проигрыша):

$$f(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$ – *плата – платежная функция* игры.

Смешанные стратегии $p^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$, $q^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$ называются *оптимальными,* если использование в игре этих стратегий обеспечивает первому игроку выигрыш, не меньший, чем при использовании им любой другой стратегии *p*, второму игроку – проигрыш, не больший, чем при использовании им любой другой стратегии *q*.

Значение платежной функции при оптимальных стратегиях определяет цену игры *v*, т. е. $f(p^*; q^*) = v$, где $\alpha \leq v \leq \beta$. При этом применение оптимальной смешанной стратегии обеспечивает игроку выигрыш (или проигрыш), равный цене игры, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий.

Совокупность оптимальных стратегий и цены игры составляет *решение игр.* В смешанных стратегиях любая конечная матричная игра всегда имеет решение.

Будем считать, что все элементы платежной матрицы неотрицательны (в противном случае можно ко всем элементам прибавить одно и то же положительное число *M*, при этом цена игры увеличится на *M*, но оптимальные смешанные стратегии не изменятся).

Тогда оптимальные смешанные стратегии для игрока A и B можно найти, решив пару двойственных задач линейного программирования:

Исходная задача (для игрока A)

$$z(x)=\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i=\overline{1,m}.$$

Двойственная задача (для игрока B)

$$f(y)=\sum_{j=1}^{n} y_j \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \leq 1, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \leq 1; \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, j=\overline{1,n}.$$

При этом цену игры v и компоненты оптимальных смешанных стратегий p^* и q^* находят по формулам:

$$v=\frac{1}{z_{\text{опт}}(x)}=\frac{1}{f_{\text{опт}}(y)};\; p_i^*=vx_i;\; i=\overline{1,m};\; q_j^*=vy_j;\; j=\overline{1,n}.$$

Решение игры можно существенно упростить, если выявить имеющееся в платежной матрице доминирование одних стратегий над другими, ибо это позволит сократить размеры матрицы. Поясним подробнее.

Игрок A заинтересован в максимизации выигрыша. Поэтому он никогда не выберет стратегию (строку), элементы которой не больше соответствующих элементов другой строки. Такая стратегия называется доминируемой (заведомо невыгодной).

Аналогично для игрока B: поскольку игрок B заинтересован в минимизации проигрыша, доминируемым будет столбец, элементы которого не меньше соответствующих элементов другого столбца.

Если в матричной игре есть строки (столбцы) элементы которых равны соответствующим элементам другой строки (столбца), то такие строки (столбцы), а соответственно и стратегии игроков A и B называются *дублирующими.*

В матричной игре доминируемые и дублирующие строки (столбцы) можно вычеркивать, что не влияет на решение игры, но позволяет уменьшить размерность платежной матрицы.

Поскольку оптимальные смешанные стратегии игроков в результате рассмотренных упрощений платежной матрицы не меняются, то все получаемые в процессе преобразований матрицы называют эквивалентными.

5.3. Решение матричных игр 2×2

Игра 2×2 является наиболее простым случаем конечных матричных игр с нулевой суммой. В этой игре каждый из игроков обладает только двумя стратегиями.

Рассмотрим матричную игру 2×2 (табл. 5.3).

Таблица 5.3

Матричная игра 2×2

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Если игра 2×2 имеет седловую точку, то ее решение очевидно.

Предположим, что игра не имеет седловой точки, т. е. $\alpha \neq \beta$. Требуется найти оптимальные смешанные стратегии игроков $p^* = (p_1^*; p_2^*)$ и $q^* = (q_1^*; q_2^*)$, а также цену игры v.

Очевидно, что в игре 2×2, не имеющей седловой точки, обе стратегии игроков являются активными. Поэтому если игрок A будет применять свою оптимальную смешанную стратегию, то, независимо от действий игрока B, выигрыш его будет равен цене игры v.

Игрок A будет применять стратегию A_1 с вероятностью p_1 и стратегию A_2 с вероятностью p_2. Если игрок B отвечает своей стратегией B_1, то выигрыш игрока A определяется из уравнения

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v.$$

Если же игрок B будет применять стратегию B_2, то выигрыш игрока A не изменится и определяется равенством

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v.$$

Учитывая условие $p_1 + p_2 = 1$, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем оптимальное решение для игрока A:

$$p^* = (p_1^*; p_2^*)$$

и цену игры.

Аналогично определяется оптимальная стратегия игрока B из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, матричная игра сведена к системе линейных уравнений.

5.4. Статистические игры

Под *статистической игрой* (*игрой с природой*) будем понимать парную матричную игру, в которой один игрок заинтересован в наиболее выгодном для него исходе игры, а второй игрок («природа») безразличен к результату игры, и его возможные состояния реализуются случайным образом.

Под термином «природа» понимают всю совокупность внешних обстоятельств, в которых сознательному игроку (его называют иногда «статистиком») приходится принимать решение.

Например, определение объема выпуска сезонной продукции в ожидании наиболее выгодного для ее реализации уровня спроса; формирование пакета ценных бумаг в расчете на высокие дивиденды и т. д. Здесь в качестве природы выступает: в первом примере – уровень спроса; во втором – размеры ожидаемой прибыли.

Предположим, что в игре с природой сознательный игрок A может использовать m чистых стратегий A_1, A_2, …, A_m, а природа П может реализовать n различных состояний $П_1$, $П_2$, …, $П_n$. Игроку A могут быть известны вероятности q_1, q_2, …, q_n, с которыми природа реализует свои состояния, но он может и не знать их.

Если игрок A в состоянии оценить (величиной a_{ij}) последствия применения каждой своей чистой стратегии A_i при каждом состоянии $П_j$ природы, то игру можно задать матрицей

$$A_{m \times n} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} П_1 & \dots & П_n \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ \dots \\ A_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array},$$

которая называется *платежной*, как и в игре двух игроков.

Игры с природой, хотя и являются частным случаем парных матричных игр, обладают и некоторыми особенностями. Например, при упрощении платежной матрицы отбрасывать те или иные состояния природы нельзя, так как она может реализовать любое состояние независимо от того, выгодно оно игроку A или нет. Однако решение достаточно найти только для игрока A, поскольку природа в рекомендациях «не нуждается».

Таким образом, цель при решении статистической игры заключается в определении такой стратегии игрока A, которая при ее применении обеспечила бы наибольший выигрыш.

При выборе оптимальной стратегии для игрока A опираются не только на платежную матрицу, но и на матрицу рисков. *Риск* r_{ij} игрока A (когда он пользуется чистой стратегией A_i при состоянии природы $П_j$) – разность между максимальным выигрышем, который он мог бы получить, если бы точно знал, что природой будет реализовано именно состояние $П_j$, и тем выигрышем, который он получит, используя стратегию A_i:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \geq 0,$$

где $\beta_j = \max_i a_{ij}$ – максимальный элемент j-го столбца платежной матрицы. Элементы матрицы рисков (табл. 5.4), соответствующие стратегиям A_i и $П_j$, характеризуют общую благоприятность или неблагоприятность для игрока A отдельных состояний природы.

Таблица 5.4

Матрица рисков

	$П_1$	$П_2$	...	$П_n$
A_1	$r_{11} = \beta_1 - a_{11}$	$r_{12} = \beta_2 - a_{12}$		$r_{1n} = \beta_n - a_{1n}$
A_2	$r_{21} = \beta_1 - a_{21}$	$r_{22} = \beta_2 - a_{22}$		$r_{2n} = \beta_n - a_{2n}$
…				
A_m	$r_{m1} = \beta_1 - a_{m1}$	$r_{m2} = \beta_2 - a_{m2}$		$r_{mn} = \beta_n - a_{mn}$

Для принятия решений в статистических играх используются следующие критерии:

1. Критерий, основанный на известных вероятностях состояний природы, *критерий Байеса*. Пусть известны вероятности q_j состояний $П_j$ природы, тогда для каждой стратегии A_i можно найти среднее значение выигрыша $\overline{a}_i = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \ldots + a_{in}q_n, i = \overline{1, m}$. В соответствии с *критерием Байеса* оптимальной считается чистая стратегия A_i, при которой максимизируется средний выигрыш:

$$\overline{a} = \max_i \overline{a}_i = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j .$$

2. *Принцип недостаточного основания Лапласа*. Если объективные оценки состояний природы получить невозможно, то вероятности состояний природы могут быть оценены субъективно на основе *принципа недостаточного основания Лапласа*, согласно которому все состояния природы полагаются равновероятными, т. е. $q_1 = ... = q_n = 1/n$, и оптимальной считают чистую стратегию A_i, обеспечивающую максимальное среднее значение выигрыша:

$$\overline{a} = \max_i \overline{a}_i = \frac{1}{n} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} .$$

3. *Максиминный критерий Вальда.* По этому критерию рекомендуется применять максиминную стратегию. Она достигается из условия $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, и совпадает с нижней ценой игры. Критерий является пессимистическим, считается, что природа будет действовать наихудшим для сознательного игрока образом.

4. *Критерий максимума.* Оптимальная стратегия выбирается из условия $m = \max_i \max_j a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Считается, что природа будет играть наиболее благоприятно для сознательного игрока. Это критерий безоглядного оптимизма, иногда на него делают ставку в безвыходном положении.

5. *Критерий Гурвица.* Критерий рекомендует стратегию, определяемую по формуле $s = \max_i \left\{ \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij} \right\}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, где λ (степень оптимизма) изменяется в диапазоне [0, 1]. Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей

возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При $\lambda = 1$ критерий превращается в критерий Вальда; при $\lambda = 0$ – в критерий максимума. На λ оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем хуже последствия ошибочных решений, больше желания застраховаться, тем λ ближе к единице. В общем случае число λ выбирают из опыта или субъективных соображений.

6. *Критерий Сэвиджа.* Суть критерия состоит в выборе такой стратегии, чтобы не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. Согласно этому критерию, рекомендуется выбирать ту стратегию, при которой в наихудших условиях величина риска принимает наименьшее значение: $r = \min_i \max_j r_{ij}$ – оптимальная стратегия, где r_{ij} – элементы матрицы рисков.

Решение статистической игры состоит из следующих этапов:

1. Выявление и отбрасывание дублирующих и доминируемых стратегий игрока A, играющего с природой; стратегии природы отбрасывать нельзя.

2. Построение матрицы рисков.

3. Оценивание выигрыша при различных игровых ситуациях: критерии Байеса, Лапласа, Вальда, максимума, Сэвиджа и Гурвица.

4. Принятие решения о выборе наилучшей стратегии.

Отметим, что каждый из критериев не может быть признан вполне удовлетворительным для окончательного выбора решений, однако их совместный анализ позволяет более наглядно представить последствия принятия тех или иных управленческих решений.

5.5. Примеры решения задач

Пример 1. Найти, если это возможно, решения в чистых стратегиях для игр со следующими платежными матрицами:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 3 \end{bmatrix}; \text{ б) } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение: а) для определения нижней цены игры следует установить, какой выигрыш гарантирует игроку A каждая из стратегий при самых неблагоприятных действиях игрока B. Это означает, что в каждой строке нужно найти минимальное значение a_i. Для определения верхней цены игры проведем аналогичный анализ для игрока B. В каждом столбце найдем максимальное значение выигрыша b_j игрока A. Дополним платежную матрицу этими значениями (табл. 5.5).

Таблица 5.5

Платежная матрица

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	2	1	1	6	3	1
A_2	2	0	–1	4	–1	–1
A_3	4	3	2	7	3	**2**
b_j	4	3	**2**	7	3	

Из табл. 5.5 видно, что выбор стратегии A_3 гарантирует игроку A выигрыш не менее двух единиц при любой стратегии оппонента. Таким образом, A_3 – максиминная стратегия и нижняя цена игры $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2$.

Для игрока B стратегия B_3 минимизирует максимально возможный проигрыш и называется минимаксной. Используя ее, игрок B не может проиграть больше верхней цены игры $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2$.

Так как $\alpha = \beta = 2$, то игра имеет седловую точку, стратегии сторон A_3, B_3, соответствующие этой точке, являются оптимальными чистыми стратегиями. Чистая цена игры $v = 2$. Решение игры – $\{A_3, B_3, 2\}$;

б) аналогично предыдущему примеру в платежной матрице найдем нижнюю и верхнюю цены игры (табл. 5.6).

Таблица 5.6

Платежная матрица

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	–1	2	4	–1
A_2	4	3	–3	5	–3
A_3	3	0	1	2	**0**
b_j	4	3	**2**	5	

Из табл. 5.6 видно, что нижняя цена игры $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \alpha_i = 0$, верхняя цена игры – $\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j b_j = 2$. Эта игра не имеет седловой точки, так как $\alpha \neq \beta$, а значит, не имеет решения в чистых стратегиях.

Пример 2. Упростить матричную игру, заданную платежной матрицей

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. По платежной матрице составим таблицу (табл. 5.7).

Таблица 5.7

Платежная матрица

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	3	1	2	2	4	1
A_2	1	3	3	–1	6	3
A_3	3	1	2	2	7	1
A_4	0	2	4	–1	5	2

Напомним, что доминируемой называется строка, элементы которой не больше соответствующих элементов другой строки, и столбец, элементы которого не меньше соответствующих элементов другого столбца, а дублирующими называются строки (столбцы), элементы которых равны соответствующим элементам другой строки (столбца). В матричной игре доминируемые и дублирующие строки (столбцы) можно вычеркивать.

Легко заметить, что стратегии B_2 и B_6 полностью совпадают, поэтому можно исключить одну из них, например B_6. Сравнивая между собой стратегии B_2 и B_5, видно, что все элементы столбца B_5 больше соответствующих элементов столбца B_2, поэтому стратегия B_5 доминируемая и ее можно исключить. Такой же вывод можно сделать, сравнив B_2 и B_3: элементы столбца B_3 не меньше соответствующих элементов столбца B_2, а значит, B_3 доминируемая, и ее тоже исключаем. Далее, сравнивая стратегии B_1 и B_4, исключаем стратегию B_1.

В итоге в матрице остались только две стратегии B_2 и B_4, ни одна из которых не является доминируемой.

Таким образом, получили новую платежную матрицу (табл. 5.8).

Таблица 5.8

Платежная матрица

	B_2	B_4
A_1	1	2
A_2	3	–1
A_3	1	2
A_4	2	–1

В получившейся матрице совпадают стратегии A_1 и A_3, поэтому исключаем одну из них, к примеру A_3. Кроме того, сравнив стратегии A_2 и A_4, видно, что все элементы строки A_4 не больше соответствующих элементов строки A_2, поэтому стратегия A_4 доминируемая и ее исключаем. В итоге получили эквивалентную платежную матрицу (табл. 5.9), работать с которой проще, чем с исходной.

Таблица 5.9

Платежная матрица

	B_2	B_4
A_1	1	2
A_2	3	–1

Найдем нижнюю и верхнюю цены игры (табл. 5.10).

Таблица 5.10

Платежная матрица

	B_2	B_4	a_i
A_1	1	2	1
A_2	3	–1	–1
b_j	3	2	

Из табл. 5.10 видно, что нижняя цена игры $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \alpha_i = 1$, верхняя цены игры – $\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j b_j = 2$. Эта игра не имеет седловой точки, так как $\alpha \neq \beta$, а значит, не имеет решения в чистых стратегиях. При этом активными стратегиями игрока A будут стратегии A_1 и A_2, игрока B – B_2 и B_4. Это значит, что в оптимальных смешанных стратегиях p^* и q^* соответствующие компоненты будут ненулевыми, остальные – нули.

Пример 3. Найти решение матричной игры, заданной платежной матрицей

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Найдем нижнюю и верхнюю цены игры (табл. 5.11).

Таблица 5.11

Платежная матрица

	B_1	B_2	a_i
A_1	4	1	1
A_2	–3	2	–3
b_j	4	2	

Игра не имеет седловой точки, так как $\alpha = 1 \neq \beta = 2$. Найдем решение в смешанных стратегиях. Так как это матричная игра 2×2, то составим системы уравнений для нахождения оптимальных смешанных стратегий $p^* = (p_1^*;\, p_2^*)$ и $q^* = (q_1^*;\, q_2^*)$, и цены игры v.

$$\begin{cases} 4p_1 - 3p_2 = v, \\ p_1 + 2p_2 = v, \\ p_1 + p_2 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4q_1 + q_2 = v, \\ -3q_1 + 2q_2 = v, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

Решив системы (например, методом Крамера или Гаусса), получим

$$p^* = \left(\frac{5}{8}; \frac{3}{8}\right),\ q^* = \left(\frac{1}{8}; \frac{7}{8}\right),\ v = \frac{11}{8}.$$

Пример 4. Матричная игра задана платежной матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 13 & 6 \\ 1 & 5 & 8 & 11 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 15 & 7 \\ 3 & 1 & 8 & 12 & 9 \\ 1 & 2 & 6 & 14 & 6 \end{bmatrix}.$$

Рассматривая матричную игру как игру с природой, выяснить, какое решение целесообразно принять при следующих предположениях:

а) о вероятностях ничего определенного сказать нельзя (воспользоваться критериями Вальда, максимума, Гурвица (параметр критерия Гурвица равен 0,6) и Сэвиджа);

б) накопленный опыт показывает, что вероятности состояний природы равны соответственно 0,3; 0,1; 0,2; 0,1; 0,3 (воспользоваться критерием Байеса);

в) имеющийся опыт свидетельствует, что все четыре возможных состояния равновероятны (критерий Лапласа).

Решение. Упростим платежную матрицу. Напомним, что в статистических играх можно вычеркивать только доминируемые и дублирующие строки, но не столбцы, в силу того, что природа безучастна к исходу игры. Так как элементы пятой строки не больше соответствующих элементов третьей строки, то стратегия A_5 доминируемая, и пятую строку можно вычеркнуть (табл. 5.12).

Таблица 5.12

Платежная матрица

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	2	4	7	13	6
A_2	1	5	8	11	8
A_3	2	4	6	15	7
A_4	3	1	8	12	9

1. По *критерию Вальда* найдем нижнюю цену игры $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, т. е. в каждой строке определим минимальный элемент, дополним таблицу и выберем максимальное из этих значений (табл. 5.12). Оптимальными стратегиями будут стратегии A_1 и A_3, при этом минимальный гарантированный выигрыш равен 2.

По *критерию максимума* найдем $m = \max\limits_i \max\limits_j a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, т. е. в каждой строке определим максимальный элемент, дополним таблицу и выберем максимальное из этих значений (табл. 5.12). Оптимальной стратегией будет стратегия A_3, при этом максимальный возможный выигрыш равен 15.

По *критерию Гурвица* стратегия выбирается в соответствии со значением $s = \max_i(\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda)\max_j a_{ij})$, где $\lambda = 0,6$ – коэффициент оптимизма. В первой строке получим $0,6 \cdot 2 + 0,4 \cdot 13 = 6,4$, во второй $0,6 \cdot 1 + 0,4 \cdot 11 = 5$, в третьей – $0,6 \cdot 2 + 0,4 \cdot 15 = 7,2$, в четвертой – $0,6 \cdot 1 +$ $+ 0,4 \cdot 12 = 5,4$. Из полученных значений выбираем максимальное. Оптимальной стратегией будет опять стратегия A_3, при этом возможный выигрыш равен 7,2 (табл. 5.13).

Таблица 5.13

Платежная матрица

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	По Вальду $\alpha_i = \min_j a_{ij}$	$\max_j a_{ij}$	По Гурвицу $(\lambda = 0,6)$
A_1	2	4	7	13	6	2	13	6,4
A_2	1	5	8	11	8	1	11	5
A_3	2	4	6	15	7	2	15	7,2
A_4	3	1	8	12	9	1	12	5,4
$\beta_j = \max_i a_{ij}$	3	5	8	15	9			

По *критерию Сэвиджа (минимаксного риска)* выбирается стратегия, обеспечивающая минимум риска при самых неблагоприятных условиях (минимизируем максимальный риск). Составим матрицу рисков (табл. 5.14), для чего в каждом столбце платежной матрицы (табл. 5.13) найдем максимальный элемент $\beta_j = \max_i a_{ij}$. Тогда элементы матрицы рисков определим по формуле

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}.$$

Таблица 5.14

Матрица рисков

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\max_j r_{ij}$
A_1	3 – 2 = 1	1	1	2	3	3
A_2	3 – 1 = 2	0	0	4	1	4
A_3	2 – 2 = 0	1	2	0	2	2
A_4	3 – 2 = 1	4	0	3	0	4

Оптимальная стратегия соответствует значению $r = \min_i \max_j r_{ij}$. Поэтому в каждой строке матрицы рисков найдем $\max_j r_{ij}$ и выберем из них минимальное значение (табл. 5.14). Оптимальная стратегия также A_3 (при этом максимальный возможный риск равен 2).

Вывод. Результаты различных критериев совпали, есть основания для выбора стратегии A_3.

2. Так как вероятности состояний природы q_j, $j = \overline{1, n}$ известны, занесем их в платежную матрицу и в каждой строке найдем значение $\overline{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ (табл. 5.15). Выбирая из этих значений максимальное, делаем вывод, что по *критерию Байеса* оптимальная стратегия A_1.

Таблица 5.15

Платежная матрица

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	По Байесу $\overline{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$	По Лапласу $\overline{a}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$
A_1	2	4	7	13	6	5,5	6,4
A_2	1	5	8	11	8	5,9	6,6
A_3	2	4	6	15	7	5,8	6,8
A_4	3	1	8	12	9	6,5	6,6
q_j	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3		

3. Если объективные оценки состояний природы отсутствуют, но нет оснований предпочесть одно состояние другому, то можно принять их равными, полагая $q_j = 1/n$. Такой подход называют *принципом недостаточного основания Лапласа*. Найдем в каждой строке платежной матрицы значение $\overline{a_i} = 1/n \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ и выберем максимальное (табл. 5.15). Легко убедиться, что в этом случае лучшие результаты дает именно стратегия A_3.

Пример 5. Фирма занимается приготовлением и доставкой комплексных обедов для различных предприятий. Спрос на ее продукцию может составить 100, 150 или 200 единиц в день. Прибыль от реализации одной единицы составляет 3 руб., потери от нереализованной продукции – 4 руб., при нехватке продукции ее придется закупать у сторонней организации и продавать с убытком 0,5 руб. за одну единицу. Используя игровой подход, составить платежную матрицу и дать рекомендации по количеству выпускаемой продукции, если $\lambda = 0,5$ – значение параметра в критерии Гурвица.

Решение. Одним из участников рассматриваемой ситуации является фирма, другим – спрос на ее продукцию. Если ситуации придать игровую схему, то фирма выступает в качестве сознательного игрока A, заинтересованного в максимизации прибыли и обладающего тремя стратегиями: выпуск 100 единиц (стратегия A_1), 150 единиц (A_2), 200 единиц (A_3) продукции. Спрос на продукцию в данном случае играет роль природы (игрок П) и составляет 100 единиц (состояние $П_1$), 150 единиц ($П_2$), 200 единиц ($П_3$) продукции. Таким образом, платежная матрица статистической игры будет иметь размерность 3×3.

Вычислим элементы платежной матрицы.

Ситуация (A_1, $П_1$): произвели и продали 100 единиц продукции с прибылью 3 руб. за одну единицу:

$$a_{11} = 3 \cdot 100 = 300 .$$

Ситуация (A_1, $П_2$): произвели и продали 100 единиц товара, но пришлось дополнительно купить и продать с убытком в 0,5 руб. 50 единиц:

$$a_{12} = 3 \cdot 100 - 0,5 \cdot 50 = 275 .$$

В ситуации (A_1, $П_3$) общий доход составил

$$a_{13} = 3 \cdot 100 - 0,5 \cdot 100 = 250 .$$

Рассмотрим теперь ситуацию (A_2, $П_1$): произвели 150, а продали только 100 единиц товара, поэтому пришлось выбросить 50 единиц и понести убыток 4 руб. за одну единицу:

$$a_{21} = 3 \cdot 100 - 4 \cdot 50 = 100 .$$

Рассуждая аналогично, находим остальные элементы платежной матрицы (табл. 5.16).

Найдем решение игры по критериям Вальда, Гурвица ($\lambda = 0,5$), Лапласа и Сэвиджа. Критерий Байеса мы использовать не сможем, так как неизвестны вероятности состояний природы.

Таблица 5.16

Платежная матрица

	$П_1$ (100)	$П_2$ (150)	$П_3$ (200)	По Вальду $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	По Гурвицу $(\lambda = 0,6)$	По Лапласу $\overline{a_i} = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$
A_1 (100)	300	275	250	250	300	275	275
A_2 (150)	100	450	425	100	450	275	325
A_3 (200)	–100	250	600	–100	600	250	250
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	300	450	600				

1. *Критерий Вальда*. Найдем минимальные элементы в каждой строке, запишем их в дополнительный столбец платежной матрицы (табл. 5.16), после чего выберем из них максимальный элемент $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 250$, следовательно, фирме целесообразно использовать стратегию A_1, и минимальный гарантированный доход составит 250 руб.

2. *Критерий Гурвица*. В каждой строке найдем значение $s = \max\limits_i(\lambda \min\limits_j a_{ij} + (1-\lambda)\max\limits_j a_{ij})$, $(\lambda = 0,5)$, занесем их в табл. 5.16 и выберем максимальное:

$$s_1 = 0,5 \cdot 250 + 0,5 \cdot 300 = 275;$$

$$s_2 = 0,5 \cdot 100 + 0,5 \cdot 450 = 275;$$

$$s_3 = 0,5(-100) + 0,5 \cdot 600 = 250.$$

Фирме целесообразно использовать стратегию A_1 или A_2, возможный выигрыш составит 275 руб.

3. *Принцип недостаточного основания Лапласа*. Найдем в каждой строке значение $\overline{a}_i = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$ и выберем максимальное (табл. 5.16). В этом случае наилучшей будет стратегия A_2.

4. *Критерий Сэвиджа*. Составим матрицу рисков (табл. 5.17). Для этого найдем в каждом столбце платежной матрицы максимальный элемент $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$. Элементы матрицы рисков находятся по формуле

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}.$$

Таблица 5.17

Матрица рисков

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$\max\limits_j r_{ij}$
A_1	0	175	350	350
A_2	200	0	175	200
A_3	400	200	0	400

Найдем в каждой строке матрицы рисков максимальный элемент $\max\limits_j r_{ij}$. Выберем из этих значений минимальный риск $\min\limits_i \max\limits_j r_{ij} = \min(350, 200, 400) = 200$, следовательно, целесообразно использовать стратегию A_2.

Вывод. Таким образом, в результате решения статистической игры по различным критериям фирме целесообразно применять стратегию A_2.

5.6. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется игрой, стратегией, оптимальной стратегией, ценой игры.
2. Что такое матричная игра с нулевой суммой?
3. Как найти верхнюю и нижнюю цены игры?
4. В каком случае игра имеет решения в чистых стратегиях?
5. Как можно упростить платежную матрицу?
6. В чем заключается решение матричной игры 2×2?
7. Какая матричная игра называется статистической?
8. Как составляется матрица рисков?
9. Какие критерии используются для принятия решений в статистических играх?

5.7. Задачи для аудиторной работы

1. Найдите, если это возможно, решение в чистых стратегиях для игры со следующей платежной матрицей:

а) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Определите нижнюю и верхнюю цены игры и упростите матричную игру, заданную платежной матрицей:

а) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 13 & 6 \\ 1 & 5 & 8 & 11 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 15 & 7 \\ 3 & 1 & 8 & 12 & 9 \\ 1 & 2 & 6 & 14 & 6 \end{bmatrix}$.

3. Найдите решение матричной игры, заданной платежной матрицей:

а) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

4. Матричная игра задана платежной матрицей:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & -2 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 5 & 11 & 9 & 8 \\ 7 & 12 & 6 & 6 \\ 15 & 10 & 16 & 5 \end{bmatrix}$.

Рассматривая матричную игру как игру с природой, выяснить, какое решение целесообразно принять при следующих предположениях:

а) о вероятностях ничего определенного сказать нельзя (воспользоваться критериями Вальда, максимума, Гурвица (параметр критерия Гурвица равен 0,6) и Сэвиджа);

б) накопленный опыт показывает, что вероятности состояний природы равны соответственно 0,3; 0,2; 0,4; 0,1 (воспользоваться критерием Байеса);

в) имеющийся опыт свидетельствует, что все четыре возможных состояния равновероятны (критерий Лапласа).

5. Предприятие может выпускать один из видов скоропортящейся продукции A, B и C, объем реализации которой зависит от погодных условий. В холодную погоду объем реализации составляет 10, 12 и 15 т соответственно. В теплую – 17, 14 и 13 т. Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить ее участников, указать возможные чистые стратегии сторон;

2) составить платежную матрицу;

3) выяснить, какое решение о выпуске продукции целесообразно принять, чтобы объем реализации был максимальным, при следующих предположениях:

а) известны вероятности теплой и холодной погоды: 0,64 и 0,36;

б) наступление как теплой, так и холодной погоды равновероятно;

в) о том, какая будет погода, ничего определенного сказать нельзя. (Принять $\lambda = 0{,}7$ – значение параметра в критерии Гурвица).

5.8. Задачи для тренировочной контрольной работы

1. Для следующих платежных матриц определить нижнюю и верхнюю цены игры, а также решение игры, если игра имеет седловую точку:

$$\text{а)}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix};\ \text{б)}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix};\ \text{в)}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{г)}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix};\ \text{д)}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix};\ \text{е)}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{ж)}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix};\ \text{з)}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix};\ \text{и)}\begin{bmatrix} 6 & 10 & 15 & 13 \\ 11 & 9 & 12 & 10 \\ 9 & 10 & 13 & 11 \end{bmatrix};$$

$$\text{к)}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Производственная фирма разработала несколько вариантов вложения выделенных ей инвестиций: а) расширить ассортимент

выпускаемой продукции; б) провести модернизацию производства, снижающую себестоимость продукции; в) открыть филиал в другом регионе. Ожидаемая прибыль с учетом конъюнктуры рынка и спроса покупателей для 1-го варианта составит: a_1 ден. ед. при таком же уровне спроса, a_2 ден. ед. при увеличении спроса, a_3 ден. ед. при его уменьшении; для 2-го варианта соответственно: b_1, b_2 или b_3 ден. ед.; для 3-го варианта: c_1, c_2 или c_3 ден. ед. Требуется:

– придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить ее участников, указать возможные чистые стратегии сторон;

– составить платежную матрицу;

– выяснить, какое решение целесообразно рекомендовать руководству фирмы, чтобы максимизировать прибыль, при следующих предположениях: а) накопленный на предприятии опыт показывает, что вероятности изменения спроса равны соответственно q_1, q_2 или q_3; б) имеющийся опыт свидетельствует о том, что все три возможных состояния уровня спроса равновероятны; в) о вероятностях изменения спроса ничего определенного сказать нельзя (λ – значение параметра в критерии Гурвица).

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 5.18.

Таблица 5.18

Исходные данные

Показатель	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	9	6	8	19	14	13	8	17	16	15
a_2	13	8	10	20	16	14	14	22	17	16
a_3	8	4	7	18	10	10	7	20	13	9
b_1	12	5	9	18	15	12	6	21	15	20
b_2	16	7	11	23	17	18	15	24	20	12
b_3	7	4	6	17	13	10	8	15	14	10
c_1	10	6	8	20	14	15	10	18	18	15
c_2	14	7	12	21	15	16	14	23	19	10
c_3	9	3	7	16	12	9	5	17	11	14
q_1	0,3	0,4	0,5	0,4	0,3	0,2	0,3	0,2	0,4	0,4
q_2	0,5	0,3	0,3	0,3	0,5	0,3	0,6	0,6	0,4	0,2
q_3	0,2	0,3	0,2	0,3	0,2	0,5	0,1	0,2	0,2	0,4
λ	0,6	0,7	0,5	0,7	0,6	0,8	0,4	0,5	0,7	0,8

Тема 6

МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

6.1. Основные понятия

Под *балансовой моделью* понимается система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым отдельными экономическими объектами количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции. *Балансовый метод* – это метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них. Примерами балансовых соответствий могут быть: соответствие наличия рабочей силы и количества рабочих мест; платежеспособного спроса населения и предложения товаров и услуг и т. д. При этом соответствие понимается либо как равенство, либо (менее жестко) как достаточность ресурсов для покрытия потребности (следовательно, допускается наличие некоторого резерва).

Балансовые модели строятся в виде числовых матриц, поэтому они относятся к матричным экономико-математическим моделям.

Некоторые виды балансовых моделей:

1) частные материальные, трудовые и финансовые балансы для народного хозяйства и отдельных отраслей;

2) межотраслевые балансы;

3) матричные финансовые планы предприятий и фирм.

Совокупный общественный продукт – масса произведенных или планируемых к производству материально-вещественных благ и услуг. В стоимостном выражении совокупный общественный продукт делится на перенесенную стоимость (износ средств труда и расход предметов труда) и вновь созданную стоимость, т. е. национальный доход.

В *натуральном межотраслевом балансе* отражается движение совокупного общественного продукта по его материально-вещественному составу.

Чистые (*технологические*) *отрасли* – это некоторые условные отрасли, которые объединяют все производство данного вида продукта независимо от ведомственной подчиненности субъектов хозяйствования, его производящих.

Межотраслевые балансы строятся на основе следующих предположений:

1) каждая отрасль производит только один продукт, т. е. выделение отраслей осуществляется не по принципу однородности предприятий, а по принципу однородности продукта. По этой причине межотраслевые балансы иногда еще называют *межпродуктовыми балансами*;

2) каждая отрасль имеет только одну технологию производства продукции, которая характеризуется средневзвешенными коэффициентами затрат. Эти коэффициенты отражают взаимосвязь между отраслями и являются отраслевыми нормативами затрат.

В общем виде межотраслевой баланс состоит из четырех разделов, которые называются квадрантами:

I	II
III	IV

Основным является I квадрант, так как его данные используются во всех расчетах и являются их основой. Во II квадранте характеризуется непроизводственная сфера. В I и III квадрантах характеризуются текущие затраты материального производства; во II и IV – использование продукции за пределами текущего производственного цикла. Иначе говоря, процессы накопления, непроизводственного потребления и вывода продукции за пределы региона, что в целом называется *конечным потреблением*.

При записи соотношений могут использоваться как натуральные (тонны, штуки, киловатт-часы и т. п.), так и стоимостные единицы измерения указанных величин, поэтому различают натуральный и стоимостной балансы.

6.2. Стоимостной межотраслевой баланс

Стоимостной межотраслевой баланс (*СМОБ*), или *МОБ производства и распределения в денежном выражении*, состоит из четырех квадрантов, по каждому из которых показатели баланса рассчитываются в стоимостном выражении. Основное назначение стоимостного МОБ состоит в сопоставлении затрат с доходами (по стране в целом или по тому или иному ее региону).

Различают два вида стоимостных балансов:

– *отчетный баланс*. На основе отчетного стоимостного баланса проверяется, в какой мере затраты компенсированы доходами;

– *плановый баланс*. Плановый стоимостной баланс позволяет сопоставить планируемые затраты с возможными доходами.

Основные понятия, которые используются при рассмотрении стоимостного межотраслевого баланса:

1. *Валовая продукция* – объем произведенной продукции в денежном выражении. Для отрасли это ценностный объем произведенной или планируемой к выпуску продукции. Для страны или региона это валовой внутренний продукт, который равен сумме валовых продуктов отраслей.

2. *Промежуточный продукт отрасли* – это производственные затраты продукта этой отрасли в других отраслях экономики в качестве предметов труда в стоимостном выражении, т. е. это стоимость текущих материальных затрат.

3. *Конечный продукт отрасли* – это стоимость продукции отрасли, направляемой на накопление и потребление, т. е. это совокупность фондов накопления и потребления по отрасли.

4. *Чистая продукция отрасли* – это стоимость созданной в процессе производства или планируемой к производству продукции данной отрасли. Чистая продукция отрасли состоит из оплаты труда и чистого дохода (прибыли) отрасли.

Стоимостной межотраслевой баланс состоит из четырех квадрантов, каждый из которых характеризует отдельные стороны или процессы расширенного производства.

Важнейшей частью СМОБ является I квадрант, поскольку он характеризует межотраслевые связи в сфере материального производства.

Первый квадрант – это таблица размерности $n \times n$, наименования строк и столбцов которой соответствуют чистым технологическим отраслям материального производства. В строках и столбцах в одинаковом порядке перечислены одни и те же отрасли материального производства.

Введем следующие обозначения:

• X_i – *валовой выпуск* продукции i-й отрасли за рассматриваемый промежуток времени;

• x_{ij} – *межотраслевые потоки* продукции, от i-й отрасли к j-й отрасли, т. е. объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью j (производственное потребление);

• x_{ii}, $i=\overline{1,\,n}$ – главная диагональ СМОБ; ее элементы стоят на пересечении строк и столбцов одноименных отраслей и характеризуют внутреннее потребление каждой отраслью своей же продукции;

• Y_i – объем продукции отрасли i, потребляемый в непроизводственной сфере (*конечное потребление*). В него входят личное потребление, обеспечение общественных потребностей (образование, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т. д.), поставки на экспорт.

Одноименные строки и столбцы характеризуют отрасль с различных сторон. Строки I квадранта стоимостного баланса отражают использование продукции данной отрасли другими отраслями, включая расходы и на собственные нужды отрасли, т. е. строки I квадранта отражают межотраслевые поставки сырья, материалов, топлива, энергии и т. д. отраслям материального производства в денежном выражении. Столбцы I квадранта стоимостного баланса характеризуют состав материальных затрат в денежном выражении на производство продукции отдельных отраслей.

Имеем $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} \neq \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}$, но общая величина стоимости продукции всех отраслей, которая потребляется в сфере материального производства, совпадает со стоимостью материальных затрат на всю продукцию, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}.$$

Во II квадранте межотраслевого баланса характеризуется конечное потребление каждого вида продукции, т. е. показывается, какое количество продукции отраслей материального производства поступает на цели личного и общественного потребления, на накопление основных и оборотных средств, на возмещение выбывших основных средств, а также на покрытие сальдо между ввозом и вывозом продукции. Этот квадрант можно рассматривать как распределение национального дохода на фонд накопления и фонд потребления по отраслям.

В III квадранте межотраслевого баланса характеризуются затраты живого труда и основных производственных фондов, участвующих в производстве каждого вида продукции отраслей.

Чистая продукция – это сумма оплаты труда $v_j,\ j=\overline{1,\ n},$ и чистого дохода отраслей $m_j,\ j=\overline{1,\ n}.$ Сумму амортизации $c_j,\ j=\overline{1,\ n},$ и чистой продукции некоторой j-й отрасли называют *условно чистой продукцией* и обозначают $Z_j = c_j + v_j + m_j,\ j=\overline{1,\ n}.$

Общая стоимость валовой продукции j-й отрасли:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j,\ j=\overline{1,\ n}.$$

Четвертый квадрант баланса находится на пересечении столбцов II квадранта (конечной продукции) и строк III квадранта (условно чистой продукции). Этим определяется содержание квадранта: он отражает конечное распределение и использование национального дохода. По строкам: заработная плата работников непроизводственной сферы, прибыль предприятий непроизводственной сферы, амортизация основных средств организаций непроизводственной сферы.

Данные IV квадранта важны для отражения в модели межотраслевого баланса доходов и расходов населения, источников финансирования капиталовложений, текущих затрат непроизводственной сферы; для анализа общей структуры конечных доходов по группам потребителей.

Отметим также, что валовой продукт отраслей представлен на схеме СМОБ в двух местах: в столбце и в строке. Эти строка и столбец играют важную роль для проверки правильности заполнения квадрантов (т. е. проверки баланса) и для разработки экономико-математической модели межотраслевого баланса. В табл. 6.1 представлен МОБ для двух отраслей.

Таблица 6.1

Межотраслевой баланс

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Продукция	
	1	2	конечная Y	валовая X
1	x_{11}	x_{12}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	Y_2	X_2
Z	Z_1	Z_2	$Y_1 + Y_2 = Z_1 + Z_2$	–
X	X_1	X_2	–	$X_1 + X_2$

Важнейшие соотношения МОБ отражают сущность МОБ и являются основой его экономико-математической модели.

Рассматривая схему баланса по столбцам, получаем, что сумма материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равна валовому продукту данной отрасли:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j,\ j = \overline{1,\ n}.$$

Это соотношение состоит из уравнений, отражающих *стоимостной состав продукции* всех отраслей материальной сферы.

Рассматривая схему МОБ по строкам, для каждой производящей отрасли получаем, что валовой продукт отрасли равен сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i,\ i = \overline{1,\ n}.$$

Данное соотношение состоит из уравнений, которые называются *уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования*.

В МОБ соблюдается важнейший принцип единства материального и стоимостного составов национального дохода:

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Таким образом, все четыре раздела стоимостного МОБ производства и распределения продукции взаимосвязаны и дают развернутую характеристику расширенного воспроизводства экономики в целом.

6.3. Экономико-математическая модель межотраслевого баланса

Коэффициент прямых затрат (коэффициент материалоемкости):

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j},\ i = \overline{1,\ n};\ j = \overline{1,\ n}$$

показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо (с учетом только прямых затрат) для производства единицы *валового продукта* j-й отрасли. В стоимостном балансе это стоимость продукции i-й отрасли, используемой для производства единицы стоимости продукции j-й отрасли. Коэффициент прямых затрат не зависит от объема производства и является довольно стабильной величиной во времени.

Используя коэффициент прямых затрат, межотраслевые потоки продукции можно определить по формулам:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j, \; i = \overline{1,\; n}; \; j = \overline{1,\; n}.$$

Систему уравнений баланса можно записать в виде

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i, \; i = \overline{1,\; n},$$

или в матричной форме

$$X = AX + Y,$$

где X – вектор-столбец валовой продукции; Y – вектор-столбец конечной продукции; $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ – матрица коэффициентов прямых материальных затрат (технологическая матрица). С учетом экономического смысла задачи, все коэффициенты матрицы A и компоненты векторов X и Y должны быть неотрицательны

Различают следующие математические модели межотраслевого баланса:

1) *математическая модель отчетного межотраслевого баланса*. Выражается в виде соотношений, которые описываются формулами:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j, \; j = \overline{1,\; n};$$

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \; i = \overline{1,\; n};$$

2) *математическая модель прогнозного межотраслевого баланса*:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i, \; i = \overline{1,\; n},$$

или в матричной форме

$$X = AX + Y.$$

Модель прогнозного межотраслевого баланса также называется *моделью Василия Леонтьева*, *моделью «затраты – выпуск»*.

По модели межотраслевого баланса могут выполняться следующие типы расчетов:

1) если в модели известны величины валовой продукции каждой отрасли (X_i), то можно определить объем конечной продукции каждой отрасли (Y_i) по формуле $Y = (E - A)X$;

2) если в модели известны величины конечной продукции всех отраслей (Y_i), то можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i) по формуле $X = (E - A)^{-1}Y$;

3) если для ряда отраслей известны величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей – объемы конечной продукции, то можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

В вышеприведенных формулах E – единичная матрица размерности $n\times n$, а $(E - A)^{-1}$ – матрица, обратная матрице $(E - A)$.

Обозначив обратную матрицу через B ($B = (E - A)^{-1}$), модель «затраты – выпуск» можно записать в виде $X = BY$.

Матрица $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ называется *матрицей коэффициентов полных затрат*. Коэффициенты полных затрат b_{ij} показывают, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-й отрасли.

Коэффициенты полных затрат можно применять тогда, когда необходимо определить, как скажется на валовом выпуске некоторой отрасли предполагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Delta Y_j,\ i = \overline{1,\ n},$$

где ΔX_i и ΔY_j – изменения (приросты) величин валовой и конечной продукции соответственно.

6.4. Примеры решения задач

Пример 1. По условным данным двух отраслей – межотраслевым потокам и вектору конечной продукции:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 8 \end{bmatrix};\ Y = \begin{bmatrix} 14 \\ 22 \end{bmatrix}$$

необходимо:

1) определить в плановом периоде вектор конечного использования при валовом выпуске $X=\begin{bmatrix}30\\50\end{bmatrix}$;

2) привести схему МОБ на плановый период.

Решение. Вектор конечного использования можно определить по формуле $Y = (E - A)X$. Сначала найдем матрицу A – матрицу коэффициентов прямых материальных затрат:

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{X_j},\ i=\overline{1,\ n};\ \ j=\overline{1,\ n}.$$

Валовой выпуск i-й отрасли имеет вид

$$X_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}+Y_i,$$

это значит, что

$$X_1=2+4+14=20;\ \ X_2=10+8+22=40.$$

Тогда $X=\begin{bmatrix}20\\40\end{bmatrix}$.

Коэффициенты прямых затрат:

$$a_{11}=\frac{x_{11}}{X_1}=\frac{2}{20}=0{,}1;\ \ a_{12}=\frac{x_{12}}{X_2}=\frac{4}{40}=0{,}1;$$

$$a_{21}=\frac{x_{21}}{X_1}=\frac{10}{20}=0{,}5;\ \ a_{22}=\frac{x_{22}}{X_2}=\frac{8}{40}=0{,}2.$$

Следовательно, $A=\begin{bmatrix}0{,}1 & 0{,}1\\0{,}5 & 0{,}2\end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов прямых материальных затрат.

Значит,

$$E-A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0{,}1 & 0{,}1\\0{,}5 & 0{,}2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}9 & -0{,}1\\-0{,}5 & 0{,}8\end{bmatrix}.$$

Тогда вектор конечного использования имеет вид

$$Y=\begin{bmatrix}0{,}9 & -0{,}1\\-0{,}5 & 0{,}8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}30\\50\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}9\cdot 30-0{,}1\cdot 50\\-0{,}5\cdot 30+0{,}8\cdot 50\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22\\25\end{bmatrix}.$$

Для того чтобы привести схему МОБ на плановый период, нужно найти новые межотраслевые поставки по формулам:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j, \ i = \overline{1, n}; \ j = \overline{1, n}.$$

Получим

$$x_{11} = a_{11} X_1 = 0{,}1 \cdot 30 = 3; \ x_{12} = a_{12} X_2 = 0{,}1 \cdot 50 = 5;$$

$$x_{21} = a_{21} X_1 = 0{,}5 \cdot 30 = 15; \ x_{22} = a_{22} X_2 = 0{,}2 \cdot 50 = 10.$$

Тогда схема МОБ имеет вид, представленный в табл. 6.2.

Таблица 6.2

Схема МОБ

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Продукция	
	1	2	конечная Y	валовая X
1	3	5	22	30
2	15	10	25	50
Z	12	35	47	–
X	30	50	–	80

Пример 2. Народное хозяйство представлено тремя отраслями: 1) тяжелая промышленность; 2) легкая промышленность; 3) сельское хозяйство.

За отчетный период получены данные о межотраслевых поставках x_{ij} и вектор объемов конечного потребления Y_0 (табл. 6.3). Найти МОБ при валовом выпуске X, матрицу полных затрат B точным и приближенным методами, оценить погрешность.

Таблица 6.3

Исходные данные

Отрасль	Межотраслевые потоки			Y_0	X
	1	2	3		
1	80	15	25	80	300
2	10	60	5	225	400
3	10	30	30	30	400

Решение. По данным задачи находим вектор объемов валовых выпусков

$$X_0 = \begin{bmatrix} 80 + 15 + 25 + 80 \\ 10 + 60 + 5 + 225 \\ 10 + 30 + 30 + 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Получим матрицу коэффициентов прямых затрат

$$A=\begin{bmatrix}80/200 & 15/300 & 25/100\\ 10/200 & 60/300 & 5/100\\ 10/200 & 30/300 & 30/100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,4 & 0,05 & 0,25\\ 0,05 & 0,2 & 0,05\\ 0,05 & 0,1 & 0,3\end{bmatrix}.$$

Матрица «затраты – выпуск» примет вид

$$(E-A)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0,4 & 0,05 & 0,25\\ 0,05 & 0,2 & 0,05\\ 0,05 & 0,1 & 0,3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,6 & -0,05 & -0,25\\ -0,05 & 0,8 & -0,05\\ -0,05 & -0,1 & 0,7\end{bmatrix}.$$

Новый вектор конечного потребления находим по данному вектору валовых выпусков X:

$$Y=\left(E-A\right)X=\begin{bmatrix}0,6 & -0,05 & -0,25\\ -0,05 & 0,8 & -0,05\\ -0,05 & -0,1 & 0,7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}300\\ 400\\ 400\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60\\ 285\\ 225\end{bmatrix}.$$

Чтобы построить таблицу МОБ на расчетный период, нужно определить межотраслевые потоки:

$$x_{11}=0,4\cdot 300=120;\ \ x_{12}=0,05\cdot 400=20;\ \ x_{13}=0,25\cdot 400=100;$$

$$x_{21}=0,05\cdot 300=15;\ \ x_{22}=0,2\cdot 400=80;\ \ x_{23}=0,05\cdot 400=20;$$

$$x_{31}=0,05\cdot 300=15;\ \ x_{32}=0,1\cdot 400=40;\ \ x_{33}=0,3\cdot 400=120.$$

Межотраслевой баланс на расчетный период представлен в табл. 6.4.

Таблица 6.4

МОБ на расчетный период

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Продукция	
	1	2	3	конечная Y	валовая X
1	120	20	100	60	300
2	15	80	20	285	400
3	15	40	120	225	400
Z	150	260	160	**570**	–
X	300	400	400	–	**1100**

Найдем матрицу коэффициентов полных материальных затрат B путем обращения матрицы $(E - A)$:

$$B = (E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,735 & 0,187 & 0,633 \\ 0,118 & 1,273 & 0,133 \\ 0,14 & 0,196 & 1,492 \end{bmatrix}.$$

Косвенные затраты первого порядка следующие: $A^1 = A \cdot A$, второго – $A^2 = A \cdot A^1$, третьего – $A^3 = A \cdot A^2$. Найдем сумму затрат $\tilde{B} = (E + A) + (A^1 + A^2 + A^3) = \left[\tilde{b}_{ij}\right]_{n \times n}$ и сравним ее с полными затратами:

$$A^1 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0,175 & 0,056 & 0,178 \\ 0,033 & 0,048 & 0,038 \\ 0,04 & 0,053 & 0,108 \end{bmatrix};$$

$$A^2 = A \cdot A^1 = \begin{bmatrix} 0,082 & 0,038 & 0,01 \\ 0,017 & 0,015 & 0,022 \\ 0,024 & 0,023 & 0,045 \end{bmatrix};$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 0,04 & 0,022 & 0,052 \\ 0,009 & 0,006 & 0,012 \\ 0,013 & 0,01 & 0,021 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица полных материальных затрат имеет следующий вид:

$$\tilde{B} = (E + A) + (A^1 + A^2 + A^3) = \begin{bmatrix} 1,7 & 0,16 & 0,58 \\ 0,11 & 1,27 & 0,12 \\ 0,13 & 0,19 & 1,47 \end{bmatrix}.$$

Относительные погрешности составят (в процентах)

$$\frac{b_{ij} - \tilde{b}_{ij}}{b_{ij}} 100\% = \begin{bmatrix} 2,24 & 12,53 & 8,47 \\ 7,46 & 0,44 & 9,06 \\ 9,72 & 4,76 & 1,32 \end{bmatrix}.$$

Пример 3. Для развития трех отраслей в плановом году необходимо произвести 100 единиц валовой продукции II отрасли, а для I и III отраслей выпустить в сферу конечного потребления соответственно

44 и 10 единиц конечной продукции. Матрица коэффициентов прямых затрат известна:

$$A=\begin{bmatrix}0,2 & 0,2 & 0,1\\ 0,1 & 0,3 & 0\\ 0,4 & 0,1 & 0,3\end{bmatrix}.$$

Требуется рассчитать плановый межотраслевой баланс и привести числовую схему баланса.

Решение. Балансовая модель «затраты – выпуск» в развернутой форме для трех отраслей имеет следующий вид:

$$\begin{cases}X_1=a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+Y_1,\\ X_2=a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3+Y_2,\\ X_3=a_{31}X_1+a_{32}X_2+a_{33}X_3+Y_3.\end{cases}$$

Подставим в эту систему известные значения коэффициентов поямых затрат, валовых выпусков и конечного потребления в плановом году. Получим

$$\begin{cases}X_1=0,2X_1+0,2\cdot 100+0,1X_3+44,\\ 100=0,1X_1+0,3\cdot 100+Y_2,\\ X_3=0,4X_1+0,1\cdot 100+0,3X_3+10.\end{cases}$$

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases}0,8X_1-0,1X_3=64,\\ 0,1X_1+Y_2=70,\\ 0,7X_3-0,4X_1=20.\end{cases}$$

Из первого уравнения $0,1X_3=0,8X_1-64$ или $X_3=8X_1-640$. Подставим X_3 в третье уравнение: $0,7(8X_1-640)-0,4X_1=20$ или $5,6X_1-448-0,4X_1=20$, откуда $5,2X_1=468$ или $X_1=468/5,2=90$. Тогда $X_3=8X_1-640=8\cdot 90-640=80$. Второе уравнение перепишется в виде $0,1\cdot 90+Y_2=70$, откуда $Y_2=70-9=61$.

Чтобы построить таблицу МОБ на расчетный период нужно определить межотраслевые потоки:

$$x_{11}=0,2\cdot 90=18;\ x_{12}=0,2\cdot 100=20;\ x_{13}=0,1\cdot 80=8;$$

$$x_{21}=0,1\cdot 90=9;\ x_{22}=0,3\cdot 100=30;\ x_{23}=0\cdot 80=0;$$

$$x_{31}=0,4\cdot 90=36;\ x_{32}=0,1\cdot 100=10;\ x_{33}=0,3\cdot 80=24.$$

Межотраслевой баланс на расчетный период представлен в табл. 6.5.

Таблица 6.5

МОБ на расчетный период

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Продукция	
	1	2	3	конечная Y	валовая X
1	18	20	8	44	90
2	9	30	0	61	100
3	36	10	24	10	80
Z	27	40	48	**115**	–
X	90	100	80	–	**270**

6.5. Вопросы для самоконтроля

1. Приведите примеры балансовых моделей.
2. Поясните значение термина «стоимостной межотраслевой баланс». Из каких квадрантов он состоит?
3. Что называется валовым продуктом, промежуточным и конечным продуктами, чистой продукцией?
4. Приведите схему МОБ.
5. Запишите экономико-математическую модель МОБ.
6. Что называется условно чистой продукцией?
7. Какого вида расчеты можно проводить по модели МОБ?
8. Что называется матрицей прямых материальных затрат?
9. Поясните значение термина «матрица полных материальных затрат».
10. Что называется косвенными материальными затратами? Как они связаны с прямыми?
11. Сформулируйте балансовое соотношение модели МОБ.

6.6. Задачи для аудиторной работы

1. По условным данным двух отраслей – межотраслевым потокам и вектору конечной продукции:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}; \; Y = \begin{bmatrix} 55 \\ 30 \end{bmatrix}$$

необходимо:

а) определить в плановом периоде вектор конечного использования при валовом выпуске $X_{\text{пл}} = \begin{bmatrix} 120 \\ 60 \end{bmatrix}$;

б) привести схему МОБ на плановый период.

2. По условным данным – матрице коэффициентов прямых затрат A и вектору $Y_{\text{пл}}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix}; \; Y_{\text{пл}} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

требуется:

а) определить валовую продукцию каждой отрасли;

б) представить результаты в виде балансовой таблицы.

3. Для трех отраслей за отчетный период известны данные о межотраслевых потоках x_{ij} и вектор объемов конечного использования $Y_{\text{отч}}$ (табл. 6.6).

Таблица 6.6

Исходные данные

Отрасль	Межотраслевые потоки			$Y_{\text{отч}}$
	1	2	3	
1	80	15	75	80
2	10	60	55	225
3	10	80	30	30

Необходимо:

а) определить матрицу коэффициентов прямых затрат A;

б) определить матрицу «затраты – выпуск» $(E - A)$;

в) найти объемы конечного использования продукции $Y_{\text{пл}}$ при условии, что в плановом периоде задан валовой выпуск продукции

$$X_{\text{пл}} = (300;\ 400;\ 200);$$

г) представить результаты в виде балансовой таблицы.

4. Для развития трех отраслей в плановом году необходимо произвести 100 единиц валовой продукции II отрасли, а для I и III отраслей выпустить в сферу конечного потребления соответственно 44 и 10 единиц конечной продукции.

Матрица коэффициентов прямых затрат известна

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

Требуется рассчитать плановый межотраслевой баланс и привести числовую схему баланса.

6.7. Задачи для тренировочной работы

Народное хозяйство представлено тремя отраслями: а) тяжелая промышленность; б) легкая промышленность; в) сельское хозяйство.

За отчетный период получены данные о межотраслевых поставках x_{ij} и вектор объемов конечного потребления Y_0 (табл. 6.7).

Необходимо рассчитать:

1) матрицу коэффициентов прямых материальных затрат $A = \left[a_{ij} \right]$, матрицу «затраты – выпуск» ($E - A$) и вектор конечного потребления Y для заданного вектора валовых выпусков X. Результаты представить в виде балансовой таблицы;

2) матрицу коэффициентов полных материальных затрат $B = \left[b_{ij} \right]$ и валовые объемы выпуска $X_{\text{пл}}$ для заданного вектора конечного потребления $Y_{\text{пл}}$. Определить плановые объемы межотраслевых поставок $(x_{ij})_{\text{пл}}$ и пояснить, как валовые объемы выпуска продукции $(X_{\text{пл}})_i$, $i = \overline{1,\, n}$, распределились между отраслями. Результаты представить в виде балансовой таблицы;

3) приросты валовых объемов выпуска, если конечное потребление изменится на ΔY_i, %, по сравнению с $Y_{\text{пл}}$;

4) матрицы коэффициентов косвенных затрат первого A^1, второго A^2 и третьего A^3 порядков, сравнить сумму затрат $\tilde{B} = (E + A) + (A^1 + A^2 + A^3)$ с полными затратами B, найти относительные погрешности.

Таблица 6.7

Исходные данные

Вариант	Отрасль	Межотраслевые потоки			Y_0	X	$Y_{пл}$	ΔY
		1	2	3				
1	1	0	109	0	200	300	250	+20
	2	62	0	382	100	550	150	–5
	3	0	54	764	3000	4000	3020	–10
2	1	36	194	102	250	360	200	+10
	2	0	65	203	400	600	420	+10
	3	107	0	102	300	500	350	–10
3	1	24	124	0	100	250	120	+30
	2	0	33	31	300	450	320	+20
	3	98	0	93	120	350	140	+10
4	1	457	0	67	1000	1550	1000	–10
	2	305	100	0	600	1100	650	+20
	3	0	0	267	200	700	250	–5
5	1	236	249	0	300	800	340	+40
	2	158	997	136	1200	2500	1100	+10
	3	79	0	0	600	680	560	–15
6	1	0	0	120	160	300	200	–5
	2	28	57	0	200	600	220	–10
	3	112	29	160	100	500	140	+20
7	1	120	0	20	260	500	300	–5
	2	80	50	0	370	500	460	+10
	3	0	0	80	120	300	160	+30
8	1	86	177	91	500	880	550	–10
	2	173	118	0	300	600	300	+10
	3	0	236	272	400	1000	450	+40
9	1	0	0	165	120	300	200	+30
	2	28	132	0	500	800	600	–10
	3	114	66	220	150	600	150	+5
10	1	135	0	15	300	500	310	+10
	2	90	21	0	100	240	120	+15
	3	0	0	60	90	160	100	–20

Тема 7

ЭЛЕМЕНТЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

7.1. Сетевой график и правила его построения

В практике управления большими системами широко применяют методы сетевого планирования и управления (СПУ). Сетевая модель позволяет:

– четко представить структуру комплекса работ, выявить с любой степенью детализации его этапы и взаимосвязи;

– составить календарный план выполнения всего комплекса работ, более эффективно использовать ресурсы;

– проводить многовариантный анализ решений с целью улучшения плана;

– использовать информационные технологии для обработки больших объемов информации.

Основой методов СПУ является графическое представление проекта в виде сетевого графика, состоящего из стрелок и кружков. Стрелками в сети изображаются отдельные работы, а кружками – события.

Работа – это любые процессы (действия), приводящие к достижению определенных результатов (событий). Различают следующие виды работ:

а) *действительная работа* – процесс, требующий затрат времени и ресурсов (разработка проекта, изготовление изделий, подвоз материалов и др.);

б) *работа-ожидание* – процесс, требующий затрат только времени (рост растений, сушка и др.);

в) *фиктивная работа* отражает логическую связь между работами и показывает, что одна работа не может начаться раньше окончания другой. Изображается пунктирной стрелкой.

События (кроме исходного события) – результаты выполненных работ. Событие не является процессом и не имеет продолжительности. События выражают логическую связь между работами, заключающуюся в том, что работы, входящие в данное событие, непосредственно предшествуют работам, выходящим из него.

На сетевом графике различают исходное, завершающее и промежуточные события. *Исходное* событие – это начало выполнения комплекса работ. *Завершающее* событие − достижение конечной цели комплекса работ. Все прочие события являются *промежуточными*.

На сетевом графике события изображаются кругами с указанием номера события. Работу, соединяющую соседние события с номерами i и j будем обозначать $(i,\ j)$, а ее продолжительность t_{ij}.

При построении сетевых графиков необходимо соблюдать следующие правила:

- сеть изображается слева направо, и каждое событие с большим порядковым номером изображается правее предыдущего. Общее направление стрелок, изображающих работы, также в основном должно быть расположено слева направо, при этом каждая работа должна выходить из события с меньшим номером и входить в событие с большим номером;
- в сети не должно быть событий (кроме завершающего), из которых не выходит ни одна работа;
- в сети не должно быть событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа;
- любая пара событий может быть соединена не более чем одной стрелкой. Для изображения параллельных работ вводятся промежуточное событие и фиктивная работа;
- в сети не должно быть замкнутых циклов, т. е. цепей, соединяющих некоторые события с ними же;
- если какие-либо сложные работы могут быть начаты до полного окончания непосредственно предшествующей им операции, то последняя изображается как ряд последовательно выполняемых работ, каждая из которых завершается определенным событием;
- для отражения технологической и ресурсной зависимости в выполнении операций применяют фиктивные работы.

К основным *параметрам сетевой модели* относятся критический путь, резервы времени событий и работ.

7.2. Критический путь

Путь – это любая последовательность работ в сети, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы. Под длиной пути (i, j_1), (j_1, j_2), …, (j_k, j) из i в j будем понимать продолжительность выполнения всей последовательности работ, составляющих этот путь, $t_{i\,j_1} + t_{j_1 j_2} + \ldots + t_{j_k\,j}$.

Путь от исходного события до завершающего события называется *полным*. *Критический путь* – называется полный путь, имеющий наибольшую продолжительность. Таких путей в сети может быть несколько. Критический путь позволяет найти ранний срок наступления завершающего события. На сетевом графике критический путь выделяется двойной или жирной линией.

Работы и события, принадлежащие критическому пути, называются *критическими*. Все остальные работы являются некритическими (ненапряженными) и обладают резервами времени, которые позволяют передвигать сроки их выполнения, не влияя на общую продолжительность выполнения всего комплекса работ. Суммарная продолжительность работ, принадлежащих критическому пути, называется *критическим временем* $t_{\text{кр}}$ выполнения всего комплекса работ.

В процессе управления ходом комплекса работ внимание управляющих сосредотачивается на главном направлении – на работах критического пути. Это позволяет наиболее целесообразно и оперативно контролировать ограниченное число работ, влияющих на срок разработки, а также лучше использовать имеющиеся ресурсы.

7.3. Резервы времени событий и работ

Резерв времени события – это такой промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление этого события без нарушения сроков завершения комплекса работ в целом. Резерв времени события равен разности между поздним и ранним сроками его свершения:

$$R(i) = t_{\text{п}}(i) - t_{\text{р}}(i).$$

Поздним (предельным) сроком $t_{\text{п}}(i)$ свершения события i является *самый поздний момент*, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо *для завершения всех работ*, следующих *за этим событием*, без превышения критического времени $t_{\text{кр}}$.

Ранним (ожидаемым) сроком $t_р(i)$ *свершения события i* называется *самый ранний момент* времени, *к которому завершаются все предшествующие* этому событию *работы*.

Для событий критического пути ранний и поздний сроки свершения событий совпадают. Резервы времени критических событий равны 0.

При расчете временных параметров событий вручную удобно проводить вычисления непосредственно на сетевом графике, воспользовавшись четырехсекторной схемой. В этом случае каждый кружок, обозначающий событие, делим на четыре сектора, в каждом из которых записываем следующую информацию (рис. 7.1).

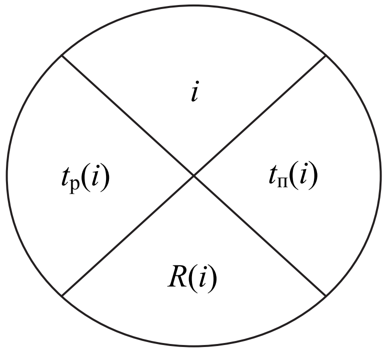


Рис. 7.1. Четырехсекторная схема

В верхнем секторе записываем номер события i, в левом по мере вычислений укажем ранний срок $t_р(i)$ свершения события i, в правом – поздние сроки $t_п(i)$, в нижнем – резерв $R(i)$ времени события.

Расчеты проводим по следующей схеме.

1 этап. Начиная с исходного события, определяем ранний срок $t_р(i)$ наступления каждого события по формулам:

$$t_р(1)=0,\ t_р(i)=\max_k\left\{t_р(k)+t_{ki}\right\},\ i=2,\ \ldots,\ n,$$

где k – номер события, из которого выходят стрелки, входящие в событие с номером i. Отметим, что $t_{кр}=t_р(n)$.

2 этап. Начиная с конечного события n, для которого $t_п(n)=t_{кр}$, определяем поздние сроки $t_п(i)$ свершения события по формулам:

$$t_п(i)=\min_j\left\{t_п(j)-t_{ij}\right\},\ i=(n-1),\ (n-2),\ \ldots,\ 1,$$

где j – номер события, к которому направлены стрелки, выходящие из события с номером i.

3 этап. Определяем резервы $R(i)$ времени события i, записывая в нижний сектор разность чисел в правом и левом секторах.

4 этап. У критических событий резерв времени равен 0. Записываем критический путь. Выделяем его жирной линией.

Ранние и поздние сроки свершения событий i и j связаны со сроками начала и окончания работы (i, j). Поэтому работы могут иметь некоторый резерв времени. Отметим, что о резервах времени можно говорить лишь применительно к некритическим работам, резервы времени критических работ равны нулю.

Полный резерв времени работы – это максимальный период времени, на который можно задержать начало работы или увеличить продолжительность ее выполнения, не изменяя при этом срока завершения всего комплекса работ. Можно показать, что

$$R_{\text{п}}(i, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}.$$

7.4. Учет потребностей в ресурсах. График Ганта

Для анализа и планирования комплекса работ используется график (диаграмма) Ганта. Он состоит из отрезков, ориентированных вдоль оси времени. Каждый отрезок на графике представляет собой отдельную задачу в составе проекта (вид работы), ее концы – моменты начала и завершения работы, ее протяженность – длительность работы. Вертикальной осью графика служит перечень задач.

При решении задач СПУ для каждой из работ иногда задается количество ресурсов, необходимых для ее реализации, так как одновременное выполнение некоторых операций из-за ограничений, связанных с рабочей силой, оборудованием и другими видами ресурсов, иногда оказывается невозможным.

Пусть r_{ij} – потребности в трудовых ресурсах для выполнения каждой работы, а R – наличие трудовых ресурсов. Выясним потребности в трудовых ресурсах.

На графике Ганта над каждой работой (i, j) проставляется потребность в ресурсах r_{ij}. Проецируем на ось времени начало и конец каждой работы. Проекцию, совпадающую с началом координат, обозначим τ_0, следующую – τ_1 и т. д. В строке $\sum r_{ij}$ записываем сумму ресурсов r_{ij} для каждого дня выполнения проекта. Полученные $\sum r_{ij}$ наносим на график интенсивности использования ресурса. Пунктирная линия на графике проводится на уровне R ограничения наличного ресурса.

Первоначально разработанная сетевая модель обычно не является лучшей по срокам выполнения работ и использования ресурсов. Поэтому исходная сетевая модель подвергается анализу и оптимизации по одному из ее параметров.

7.5. Примеры решения задач

Для организации производства и сбыта новой продукции необходимо выполнить комплекс работ, представленный в табл. 7.1. С этой целью создана группа из $R=10$ специалистов.

Таблица 7.1

Комплекс работ

Работа	Описание работы	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность, дн.	Число исполнителей
А	Разработка технических условий	–	4	6
Б	Эскизное проектирование	–	1	4
В	Техническое проектирование	Б	2	7
Г	Закупка необходимых комплектующих	А	3	5
Д	Изготовление деталей	А, В	5	6
Е	Согласование сроков поставки, заключение договоров	В	10	3
Ж	Сборка изделий	Г, Д	4	8
З	Отправка продукции потребителям	Е, Ж	2	6

1. Составьте сетевой график выполнения проекта.
2. Рассчитайте временные параметры сетевого графика. Определите критический путь.
3. Найдите полные резервы времени работ.

4. Постройте график Ганта и график интенсивности использования ресурсов.

Решение: 1. Составим сетевую модель. Исходное событие (1) означает момент начала выполнения проекта. Работам А и Б не предшествуют никакие работы, следовательно, на графике они изображены стрелками, выходящими из исходного события (1). Работе В предшествует работа Б, поэтому на графике стрелка В непосредственно следует за стрелкой Б. Событие (2) означает момент окончания работы А, и начала работ, которым она предшествует. Работе Д предшествуют работы А и В. На графике эта зависимость отражена с помощью введения фиктивной работы (2, 4). Аналогично с учетом взаимосвязей изображаются на графике (рис. 7.2) все оставшиеся работы. Завершающее событие (7) означает момент выполнения всего проекта.

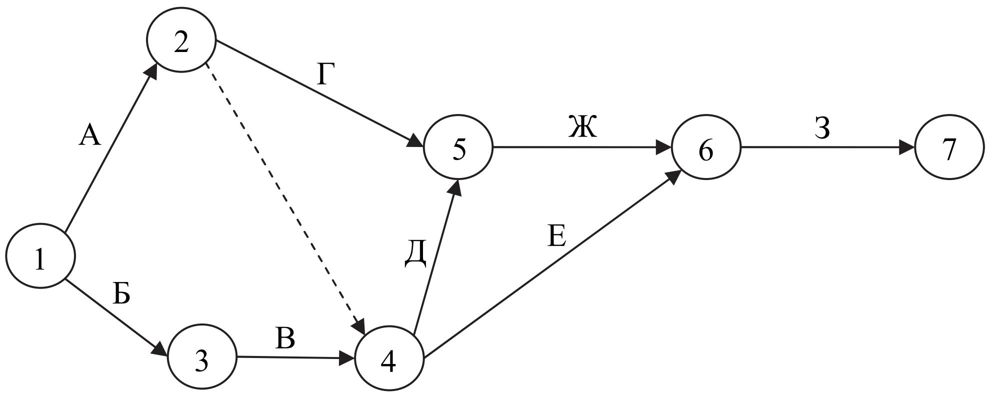


Рис. 7.2. Сетевой график

2. Запишем продолжительность работ из условия задачи над соответствующими стрелками сетевого графика и рассчитаем временные параметры событий, воспользовавшись четырехсекторной схемой (рис. 7.3).

Исходное событие означает момент начала выполнения комплекса работ, таким образом, $t_{\text{р}}(1)=0$. Далее последовательно находим ранние сроки свершения событий:

$$t_{\text{р}}(2)=t_{\text{р}}(1)+t_{12}=0+4=4;$$

$$t_{\text{р}}(3)=t_{\text{р}}(1)+t_{13}=1;$$

$$t_{\text{р}}(4)=\max\left\{t_{\text{р}}(2)+t_{24},\, t_{\text{р}}(3)+t_{34}\right\}=\max\left\{4+0,\ 1+2\right\}=4;$$

$$t_{\text{р}}(5)=\max\left\{t_{\text{р}}(2)+t_{25},\ t_{\text{р}}(4)+t_{45}\right\}=\max\left\{4+3,\ 4+5\right\}=9;$$

$$t_р(6)=\max\left\{t_р(4)+t_{46},\ t_р(5)+t_{56}\right\}=\max\left\{4+10,\ 9+4\right\}=14;$$

$$t_р(7)=t_р(6)+t_{67}=16.$$

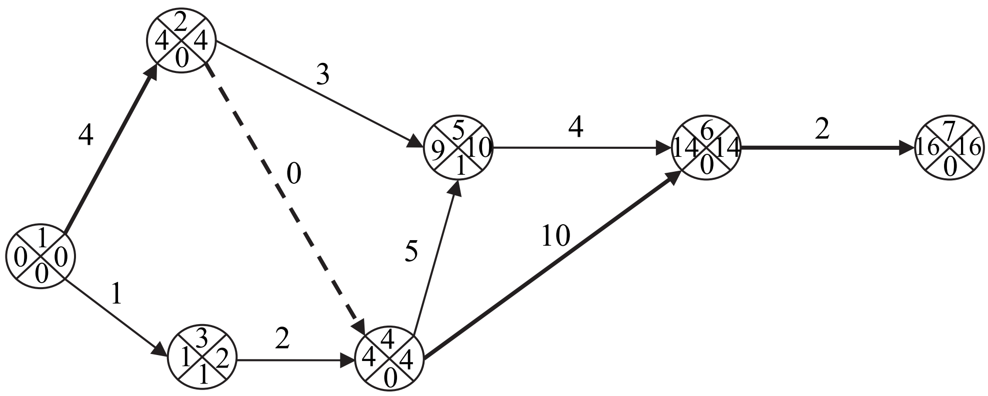


Рис. 7.3. Временные параметры событий

Итак, завершающее седьмое событие может свершиться лишь на 16-й день от начала разработки. Это минимальное время, за которое могут быть выполнены все работы проекта, оно определяется самым длинным полным путем. Ранний срок свершения события (7) совпадает с критическим временем: $t_р(7)=t_{кр}=16$.

Найдем поздние сроки свершения каждого события сетевого графика:

$$t_п(7)=t_{кр}=16;$$

$$t_п(6)=t_{кр}(7)-t_{67}=16-2=14;$$

$$t_п(5)=t_п(6)-t_{56}=10;$$

$$t_п(4)=\min\left\{t_п(5)-t_{45},t_п(6)-t_{46}\right\}=\min\left\{10-5,14-10\right\}=4;$$

$$t_п(3)=t_п(4)-t_{34}=2;$$

$$t_п(2)=\min\left\{t_п(4)-t_{24},t_п(5)-t_{25}\right\}=\min\left\{4-0,10-3\right\}=4;$$

$$t_п(1)=0.$$

Определяем резервы $R(i)$ времени каждого события, записывая в нижний сектор разность чисел в правом и левом секторах.

У критических событий резерв времени равен 0. Критический путь $L_{кр}=\left\{1-2-4-6-7\right\}$. Выделяем его жирной линией.

Увеличение времени выполнения любой работы, принадлежащей критическому пути, ведет к росту времени реализации проекта.

Увеличение времени выполнения или задержка выполнения некритических работ может не отразиться на сроке свершения завершающего события.

3. Для вычисления полного резерва времени работ составим табл. 7.2.

Таблица 7.2

Полный резерв времени работ

Работа $(i,\ j)$	Продолжительность работы t_{ij}	Ранний срок свершения события i, $t_р(i)$	Поздний срок свершения события j, $t_п(j)$	Полный резерв времени работы $R_п(i,\ j)$
(1, 2)	4	0	4	0
(1, 3)	1	0	2	1
(2, 4)	0	4	4	0
(2, 5)	3	4	10	3
(3, 4)	2	1	4	1
(4, 5)	5	4	10	1
(4, 6)	10	4	14	0
(5, 6)	4	9	14	1
(6, 7)	2	14	16	0

4. Построим график Ганта (рис. 7.4).

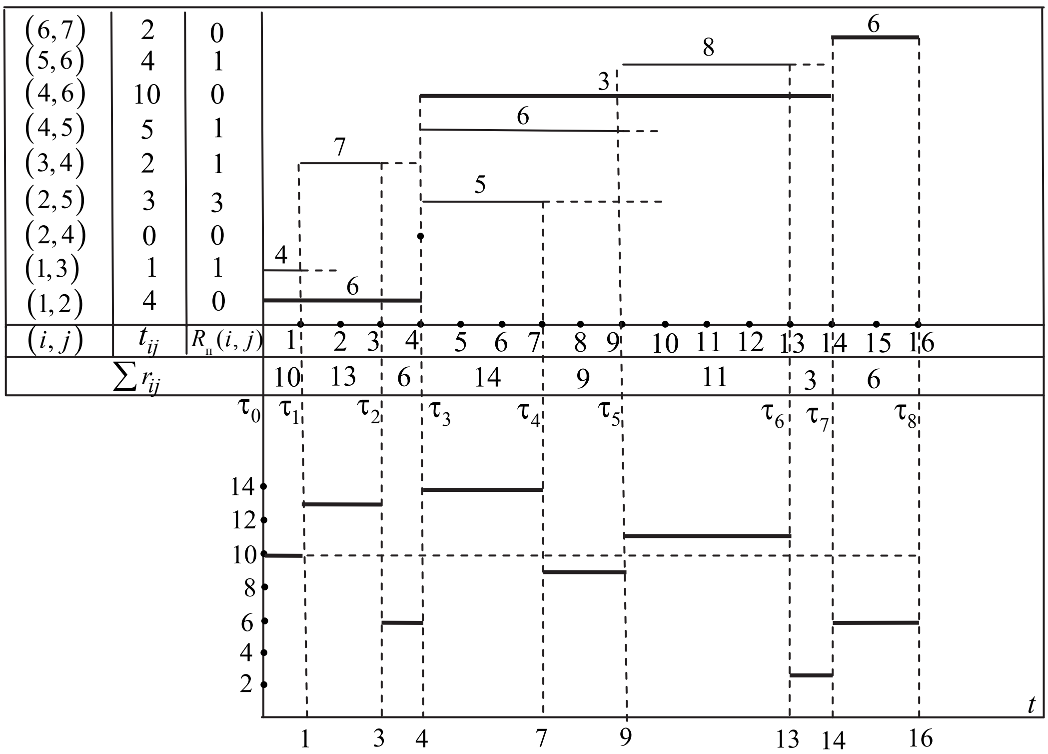


Рис. 7.4. График Ганта

На рис. 7.4 видно, что на промежутках (τ_1, τ_2), (τ_3, τ_4), (τ_5, τ_6) имеющихся ресурсов в количестве $R = 10$ человек недостаточно для удовлетворения потребности в них. Поэтому график подлежит корректировке с целью приведения сроков выполнения работ в соответствие с имеющимися трудовыми ресурсами.

7.6. Контрольные вопросы

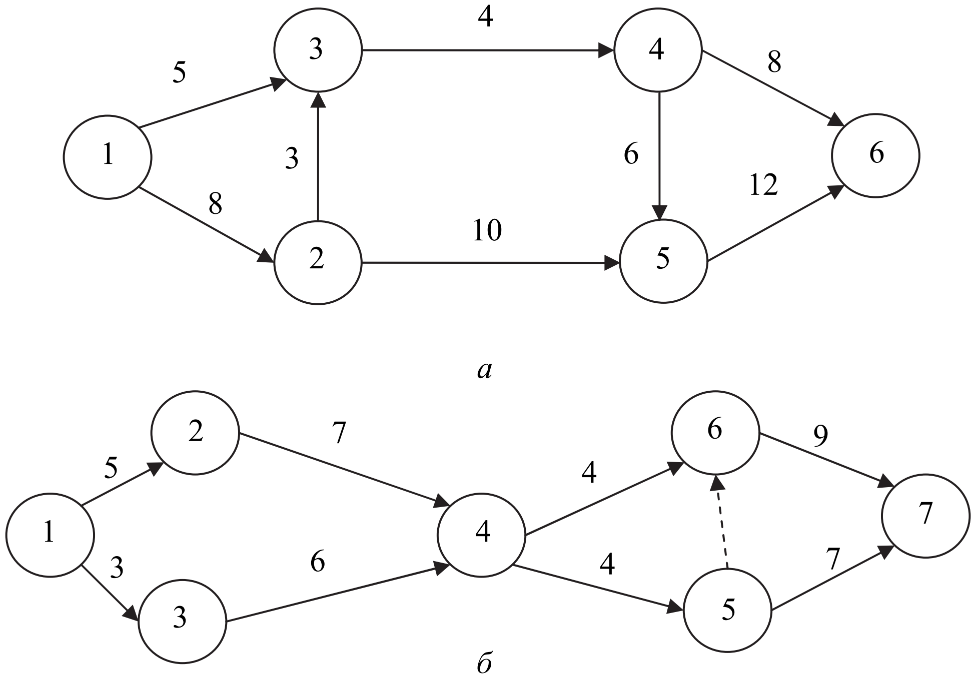
1. Какие компоненты сетевого графика Вы знаете?
2. Что называется событием, работой, фиктивной работой?
3. Какие события называются промежуточными? Исходными? Завершающими?
4. Дайте определение критического пути.
5. Какие работы называются критическими?
6. Как определить время выполнения всего комплекса работ?
7. Какие временные параметры сетевого графика Вы знаете?
8. Что называется ранним, поздним сроком свершения события, резервом времени события?
9. Что называется полным резервом времени работы?
10. Как построить график Ганта?
11. Как производится учет потребностей в ресурсах при выполнении комплекса работ?

7.7. Задания для аудиторной работы

1. Найти критический путь, его длину и резервы времени работ, приведенных на сетевых графиках (рис. 7.5, *а*, *б*). Построить линейный график Ганта.

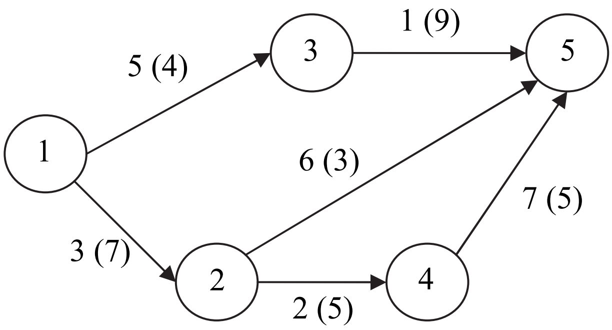
2. Комплекс работ представлен сетевым графиком (рис. 7.6).

Для каждой работы известны продолжительность t_{ij} ее выполнения и количество r_{ij} (число в скобках) ресурса, расходуемого в единицу времени при выполнении этой работы (интенсивность потребления ресурса). В процессе выполнения работ расход ресурса не должен превышать заданной величины R.



б

Рис. 7.5. Сетевые графики



$R = 10$

Рис. 7.6. Сетевой график

Требуется:

1) построить линейный график комплекса работ и определить по нему критическое время и сроки начала и окончания работ без учета ограничения на используемый ресурс;

2) построить график интенсивности применения ресурсов;

3) указать потребности в ресурсах в каждый момент времени;

4) определить, в какие моменты времени для выполнения работ проекта не хватает имеющихся ресурсов;

5) преобразовать линейный график выполнения работ так, чтобы в любой момент реализации комплекса работ расход ресурса не превышал заданного значения R, а общее время осуществления комплекса работ было возможно меньшим;

6) определить по преобразованному линейному графику новые сроки начала и окончания каждой работы.

7.8. Задачи для тренировочной работы

Для перестройки производства в порядке перевода его на более интенсивную технологию необходимо осуществить комплекс подготовительных мероприятий (работ). С этой целью создана группа из R специалистов и составлен сетевой график выполнения работ (рис. 7.7).

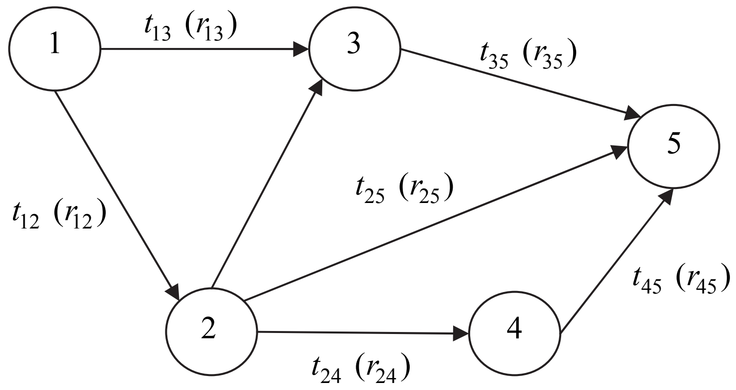


Рис. 7.7. Сетевой график

Известна продолжительность t_{ij} выполнения каждой работы (i; j) комплекса (могут быть известны и количества ресурсов, затрачиваемых при выполнении соответствующих работ r_{ij}).

1. Найти ранние и поздние сроки свершения событий и их резервы времени. Определить длину критического пути.

2. Установить ранние и поздние сроки начала и окончания работ.

3. Найти резервы времени работ (четыре типа) и построить линейный график и график интенсивности использования ресурсов.

4. Определить, в какие моменты времени для выполнения работ проекта не хватает имеющихся ресурсов.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Исходные данные

Параметры задачи	Продолжительность работы									
	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	14	10	12	13	10	10	11	12	14	15
t_{12}	4	3	4	6	3	6	2	7	3	6
t_{13}	2	5	8	4	8	2	5	4	5	2
t_{23}	4	5	3	6	8	9	10	7	11	8
t_{24}	3	2	5	6	4	8	4	8	4	1
t_{25}	5	6	2	5	5	5	3	2	6	5
t_{35}	6	1	6	8	2	4	5	6	2	3
t_{45}	7	7	3	1	9	4	2	5	4	2
r_{12}	5	7	3	5	5	5	6	4	7	7
r_{13}	7	4	9	9	3	8	3	8	5	5
r_{23}	11	8	4	5	7	12	8	9	4	6
r_{24}	9	5	4	8	7	3	7	5	3	8
r_{25}	8	3	6	2	4	6	5	7	9	4
r_{35}	10	9	5	7	6	7	3	3	5	9
r_{45}	4	5	7	4	2	4	4	6	3	6

Тема 8

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

8.1. Основные понятия систем массового обслуживания

Системы массового обслуживания (СМО) − это модели систем, в которые в случайные моменты времени поступают заявки (требования). Они должны быть тем или иным образом обслужены с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания. Примерами систем массового обслуживания могут служить: телефонные станции; ремонтные мастерские; отделы налоговых инспекций, занимающиеся приемкой и проверкой текущей отчетности предприятий; технические устройства, обслуживающие поступающие заявки и т. д. В качестве каналов обслуживания могут фигурировать: линии связи; лица, выполняющие те или иные операции; различные приборы и т. п.

Цель изучения СМО – обеспечить качество обслуживания путем изучения зависимости между количеством обслуживаемых и обслуживающих единиц СМО и установления научно обоснованных соотношений между ними. Одна из главных з*адач теории массового обслуживания* заключается в определении вероятностных характеристик состояния системы.

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим через какие-то, случайные интервалы времени. Такой поток можно изобразить как ряд точек на оси времени. Поток событий называется *регулярным*, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени. В реальных системах встречается сравнительно редко.

На практике обычно моменты поступления заявок случайны. В связи с этим процесс работы системы протекает нерегулярно: в потоке заявок образуются местные сгущения и разрежения. Сгущения могут привести либо к отказам в обслуживании, либо к образованию очередей. Разрежения – к непроизводительным простоям отдельных каналов или системы в целом. На эти случайности, связанные с неоднородностью потока заявок, накладываются еще случайности, связанные с задержками обслуживания отдельных заявок. Таким образом, процесс функционирования системы массового обслуживания представляет собой случайный процесс.

Важной характеристикой потока является его *интенсивность* λ – среднее число событий, которые приходятся на единицу времени. Интенсивность потока может быть как постоянной, так и переменной, зависящей от времени:

$$\lambda = \lambda(t).$$

Например, поток машин днем интенсивнее, чем ночью; в часы «пик» – интенсивнее, чем в другое время.

В расчетах, связанных с потоками случайных событий, удобно пользоваться понятием «элемента вероятности». Рассмотрим на оси времени Ot простейший поток с интенсивностью λ и произвольно расположенный элементарный участок времени Δt. *Элементом вероятности* называется вероятность попадания на этот участок хотя бы одного события потока.

На практике наиболее распространенным является *простейший входящий поток* заявок (рис. 8.1).

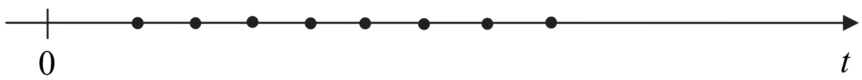


Рис. 8.1. Схема простейшего потока событий

Он обладает следующими свойствами:

– *стационарности*, т. е. вероятность поступления количества требований в течение промежутка времени зависит только от длины этого промежутка; вероятность хотя бы одной заявки за малый промежуток времени Δt пропорциональна длине промежутка $p(\Delta t) \approx \lambda \Delta t$; интенсивность λ стационарного потока постоянна;

– *ординарности*, т. е. невозможности одновременного появления двух или более заявок;

– *отсутствия последействия*, т. е. поступление заявки не зависит от того, когда и сколько заявок поступило до этого момента. Условие отсутствия последействия означает, что заявки поступают в систему независимо друг от друга.

8.2. Случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем

На практике широко используются *процессы с дискретными состояниями*, т. е. предполагается, что все возможные состояния системы S_0, S_1, …, S_n можно перечислить. Считается, что переход системы из одного состояния в другое происходит практически мгновенно и вероятности переходов известны. Будем считать, что все переходы системы из одного состояния в другое осуществляются под действием потоков событий (поток поломок механизма, поток прибывающих машин и т. д.). Процесс называется *процессом с непрерывным временем*, если моменты возможных переходов из состояния в состояние не фиксированы заранее, а случайны, т. е. переход может осуществиться в принципе в любой момент.

В качестве примера рассмотрим работу раскряжевочной установки. Для процесса раскряжевки характерны следующие состояния:

S_0 – установка осуществляет раскряжевку хлыстов;

S_1 – установка исправна и свободна (простаивает из-за отсутствия хлыстов);

S_2 – установка неисправна.

Этот процесс является дискретным (три состояния S_0, S_1, S_2) с непрерывным временем. Мы не можем заранее точно указать момент, когда установка испортится или привезут хлысты.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой – *графом состояний.* Возможные состояния обозначаются прямоугольниками (кругами), а возможные переходы – стрелками. Так, в рассматриваемом примере граф состояний будет иметь вид, представленный на рис. 8.2.

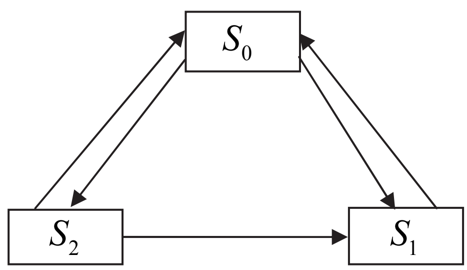


Рис. 8.2. Граф состояний раскряжевочной установки

Раскряжевочная установка из состояния S_0 может перейти в состояние S_1 или S_2 или наоборот из состояний S_1 и S_2 – в состояние S_0. В то же время мы видим, что из состояния S_2 (установка неисправна) установка может перейти в состояние S_1 (установка исправна, но не работает), а перейти из состояния S_1 в состояние S_2 она не может.

8.3. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний

Рассмотрим математическое описание случайного процесса с дискретным состоянием и непрерывным временем.

Пусть система характеризуется $n+1$ состояниями $S_0, S_1, \ldots, S_n$, а переход из состояния в состояние может осуществиться в любой момент времени. Пусть все переходы системы из состояния S_i в состояние S_j (стрелка на графе состояний направлена из S_i в S_j) происходят под действием каких-либо простейших потоков событий с интенсивностями λ_{ij}, $i, j = \overline{0, n}$, тогда вероятность перехода системы из состояния S_i в состояние S_j за малый промежуток времени Δt определяется соотношением

$$p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \Delta t .$$

Для наглядности на графе состояний у каждой стрелки проставим интенсивность потока событий, который переводит систему по данной стрелке. Такой граф состояний называется *размеченным.* Так, размеченный граф работы раскряжевочной установки показан на рис. 8.3.

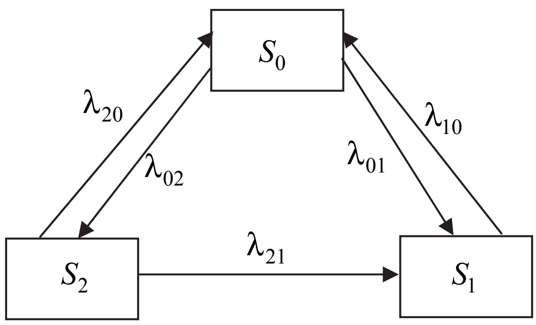


Рис. 8.3. Размеченный граф состояний раскряжевочной установки

Здесь λ_{02} – интенсивность потока отказов установки; $\lambda_{21} = \lambda_{20}$ – интенсивность потока восстановлений установки; λ_{01} – интенсивность потока расходования хлыстов; λ_{10} – интенсивность поступления хлыстов.

Обозначим через $p_i(t)$ вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии S_i. Очевидно, что

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(t) = 1.$$

Имея размеченный граф состояний, можно найти все вероятности $p_i(t)$ как функции времени. Для этого составляются дифференциальные уравнения Колмогорова, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний системы. Уравнения Колмогорова удобно составлять, пользуясь размеченным графом состояний и следующим мнемоническим правилом.

Правило. Чтобы записать уравнение Колмогорова для i-го состояния, нужно в левой части уравнения записать производную $\frac{dp_i(t)}{dt}$; в правой части уравнения – сумму произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в данное состояние, на интенсивность соответствующих потоков минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного i-го состояния.

Таким образом, каждому из состояний S_0, S_1, …, S_n соответствует линейное дифференциальное уравнение, а для всех состояний получаем систему из n линейных дифференциальных уравнений с n неизвестными (одно из них, любое, можно отбросить, пользуясь тем, что $p_0(t) + p_1(t) + \ldots + p_n(t) = 1$).

Чтобы решить систему уравнений Колмогорова, нужно задать начальные условия.

Так, если мы точно знаем, что в начальный момент $t = 0$ система находилась в состоянии S_i, то начальные условия в таком случае имеют следующий вид:

$$p_i(0) = 1; p_j(0) = 0, i \neq j.$$

Таким образом, уравнения Колмогорова в примере с раскряжевочной установкой (см. рис. 8.3) будут представлены системой

$$
\begin{cases}
\dfrac{dp_0(t)}{dt} = -(\lambda_{01} + \lambda_{02}) p_0(t) + \lambda_{10} p_1(t) + \lambda_{20} p_2(t), \\
\dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{01} p_0(t) - \lambda_{10} p_1(t) + \lambda_{21} p_2(t), \\
\dfrac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{02} p_{20}(t) - (\lambda_{20} + \lambda_{21}) p_2(t), \\
p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1.
\end{cases}
$$

Задавая начальные условия (характеризующие исходное состояние СМО) и решая соответствующую задачу Коши для системы уравнений Колмогорова, определяем соответствующие вероятности $p_i(t)$, $i = \left(\overline{1, n}\right)$ нахождения СМО в состояниях S_i в текущий момент времени.

Анализ решения задачи Коши для системы уравнений Колмогорова показывает, что для достаточно больших значений t, независимо от начальных условий, это решение стабилизируется и практически не зависит от времени. Таким образом, с течением времени функционирование СМО переходит в стационарный (установившийся) режим, т. е. существуют:

$$\lim_{t \to +\infty} p_j(t) = \text{const} = p_j, \ j = \overline{1, n}.$$

Значения p_i, $i = \left(\overline{1, n}\right)$ вероятностей состояний, соответствующих стационарному режиму работы СМО, называются *финальными вероятностями.*

Поскольку финальные вероятности p_i постоянны, то производные от них равны нулю и система уравнений Колмогорова преобразуется в систему алгебраических уравнений. Решив эту систему, получаем финальные вероятности.

Таким образом, для СМО с $n+1$ состояниями $S_0, S_1, \ldots, S_n$ получается система $n + 1$ линейных однородных алгебраических уравнений с $n+1$ неизвестными $p_0, p_1, \ldots, p_n$. Для нахождения точного значения $p_0, p_1, \ldots, p_n$ к уравнениям добавляют нормировочное условие

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(t) = 1,$$

пользуясь которым можно выразить любую из вероятностей p_i через другие и отбросить одно из уравнений.

8.4. Примеры решения задач

Техническое устройство может находиться в одном из трех состояний S_0, S_1, S_2. Интенсивности потоков, которые переводят устройство из одного состояния в другое, известны: $\lambda_{01} = 2$, $\lambda_{10} = 4$, $\lambda_{21} = 2$, $\lambda_{12} = 3$, $\lambda_{20} = 4$. Необходимо построить размеченный граф состояний, записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова, найти финальные вероятности состояний и проанализировать полученное решение.

Решение. Размеченный граф состояний представлен на рис. 8.4.

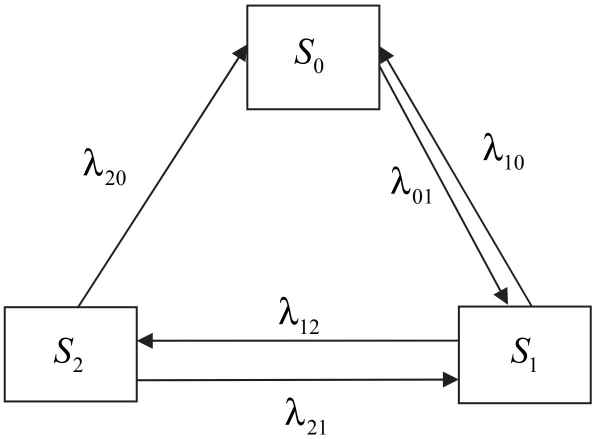


Рис. 8.4. Размеченный граф состояний

По графу запишем систему уравнений Колмогорова в общем виде

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_{01}p_0(t) + \lambda_{10}p_1(t) + \lambda_{20}p_2(t), \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{01}p_0(t) - (\lambda_{10} + \lambda_{12})p_1(t) + \lambda_{21}p_2(t), \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12}p_1(t) - (\lambda_{20} + \lambda_{21})p_2(t), \\ p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1. \end{cases}$$

Вместо интенсивностей потоков λ_{ij} подставим их конкретные значения и получим искомую систему

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -2p_0(t) + 4p_1(t) + 4p_2(t), \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = 2p_0(t) - 7p_1(t) + 2p_2(t), \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = 3p_1(t) - 6p_2(t), \\ p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1. \end{cases}$$

Чтобы найти финальные вероятности состояний, в уравнениях Колмогорова отбросим первое уравнение, а по остальным составим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2p_0 - 7p_1 + 2p_2 = 0, \\ 3p_1 - 6p_2 = 0, \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $p_0 = 0{,}67$, $p_1 = 0{,}22$, $p_2 = 0{,}11$.

Вывод. При достаточно большом времени работы техническое устройство с вероятностью $p_0 = 0{,}67$ будет находиться в состоянии S_0, с вероятностью $p_1 = 0{,}22$ – в состоянии S_1 и с вероятностью $p_2 = 0{,}11$ – в состоянии S_2.

8.5. Вопросы для самоконтроля

1. Приведите примеры систем массового обслуживания.
2. Что такое поток событий?
3. Какие потоки событий Вы знаете?
4. Что такое случайный процесс?
5. Какой процесс называется процессом с дискретными состояниями?
6. Поясните значение термина «процесс с непрерывным временем».
7. Какие геометрические представления случайного процесса с дискретными состояниями Вы знаете?
8. Как составить дифференциальные уравнения Колмогорова?
9. Что такое финальные вероятности состояний и как их найти?
10. Как можно пояснить термин «финальные вероятности»?

8.6. Задачи для тренировочной контрольной работы

Техническое устройство может находиться в одном из трех состояний S_0, S_1, S_2. Интенсивности потоков, которые переводят устройство из одного состояния в другое, записаны в таблице.

Исходные данные

Вариант	Интенсивность потоков					
	λ_{01}	λ_{02}	λ_{10}	λ_{12}	λ_{20}	λ_{21}
1	2	0	4	1	2	2
2	4	1	2	2	1	0
3	2	1	4	5	0	1
4	0	1	0	1	2	3
5	2	2	3	2	1	4
6	4	5	1	0	3	2
7	0	3	2	1	4	1
8	2	2	1	2	3	0
9	2	4	0	4	2	1
10	3	4	2	2	0	1

Выполните следующие задания:

1. Постройте размеченный граф состояний.
2. Запишите систему дифференциальных уравнений Колмогорова.
3. Найдите финальные вероятности.
4. Проанализируйте полученное решение.

Тема 9

МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

9.1. Общая постановка задачи

Управление запасами – важная часть общей политики управления оборотными активами предприятия, основная цель которой – обеспечение бесперебойного процесса производства и реализации продукции при минимизации совокупных затрат по обслуживанию запасов.

Под запасом понимается все, на что имеется спрос, и что временно выключено из производства, например: сырье, основные и вспомогательные материалы, готовая продукция, предназначенная для продажи и т. д.

Требуется определить количество заказываемой продукции и сроки размещения (периодичность) заказов.

Оптимальное количество ресурсов, которое необходимо поставлять при размещении заказа, выражается через размер заказа.

Суммарные затраты модели можно выразить в виде функции основных компонент:

1) затраты на приобретение запаса;

2) организационные затраты, связанные с оформлением и размещением заказа;

3) затраты на хранение запаса (затраты на переработку, амортизационные расходы, эксплуатационные расходы);

4) потери от дефицита, обусловленные отсутствием запаса необходимой продукции.

На практике какую-либо из компонент затрат можно не учитывать при условии, что она не составляет существенную часть общих затрат.

Итак, ***задача управления запасами*** состоит в определении размера и периодичности заказов, при которых издержки (функция суммарных затрат) принимают минимальное значение.

9.2. Основная модель управления запасами

Модель управления запасами простейшего типа характеризуется постоянным и непрерывным во времени спросом, мгновенным пополнением запаса и отсутствием дефицита, весь спрос удовлетворяется полностью.

Под Q будем понимать весь запас материальных ресурсов (товаров) одного вида, израсходованный за плановый период времени T. Интенсивность спроса (в единицу времени) равна ν, ед., причем $Q = \nu T$. В момент, когда запас достигнет нуля, поступает заказ, равный q, ед., и уровень запаса восстанавливается до максимального значения. Средний уровень запасов − $q/2$. Продолжительность цикла расходования запаса от максимального значения q до нуля составляет $\tau = q/\nu$ единиц времени. График изменения запасов данной модели представлен на рис. 9.1.

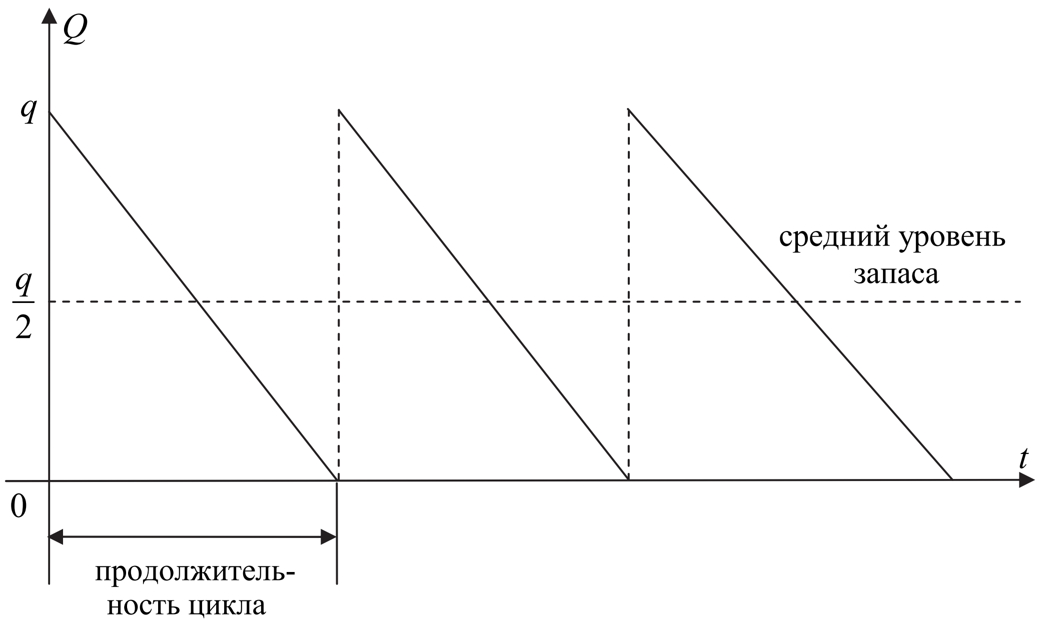


Рис. 9.1. График изменения запасов

Предполагаются известными следующие параметры модели, представленные в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Известные параметры модели управления запасами

Параметры	Обозначение	Единица измерения	Предположения
Интенсивность спроса	ν	Ед. товара в ед. времени	Спрос постоянен и непрерывен; весь спрос удовлетворен
Организационные издержки	K	Ден. ед. за одну партию товара	Издержки постоянны и не зависят от размера партии
Издержки содержания запасов	h	Ден. ед. за ед. товара в ед. времени	Стоимость хранения единицы товара в единицу времени постоянна
Стоимость товара	s	Ден. ед. за ед. товара	Цена единицы товара постоянна; рассматривается один вид товара
Размер партии	q	Ед. товара в одной партии	Размер партии постоянен; поступление товара происходит мгновенно, как только уровень запаса равен нулю

Требуется определить размер заказываемой партии $(q_{\text{опт}})$ и интервал времени между поставками $(\tau_{\text{опт}})$ таким образом, чтобы общие затраты, связанные с организацией заказов и хранением товаров, были минимальными.

Суммарные затраты в единицу времени, связанные с организацией заказов и хранением товаров, можно представить в виде

$$L = L_1 + L_2 = \frac{K}{\tau} + h\frac{q}{2} = \frac{K\nu}{q} + \frac{hq}{2},$$

где L_1 – затраты на оформление заказа в единицу времени; L_2 – затраты на хранение запасов в единицу времени. Отметим, что здесь мы не учитываем стоимость товара и потери от дефицита.

За исключением q все величины в правой части уравнения постоянны и известны. Для нахождения минимума функции $L(q)$ приравняем к нулю ее производную:

$$\frac{dL}{dq} = -\frac{K\nu}{q^2} + \frac{h}{2} = 0.$$

Тогда *оптимальный размер заказа* и *оптимальный интервал между поставками* определяются по формулам соответственно:

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2K\nu}{h}};$$

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{q_{\text{опт}}}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{h\nu}}.$$

Можно доказать, что точка $q_{\text{опт}}$ является точкой минимума функции $L = L(q)$, показав, что вторая производная в этой точке строго положительна.

Выражение $\sqrt{2K\nu / h}$ называют *формулой экономичного размера заказа Уилсона*.

Таким образом, оптимальная стратегия модели предусматривает заказ $q_{\text{опт}}$ единиц продукции через каждые $\tau_{\text{опт}}$ единиц времени. При этом ***минимальные суммарные затраты в единицу времени***

$$L_{\text{опт}} = \sqrt{2Kh\nu};$$

оптимальный средний уровень текущего запаса

$$I_{\text{опт}} = \frac{q_{\text{опт}}}{2};$$

оптимальное число поставок за плановый период времени T

$$n_{\text{опт}} = \left[\frac{T}{\tau_{\text{опт}}}\right] = \left[\frac{Q}{q_{\text{опт}}}\right] \text{ или } n_{\text{опт}} + 1,$$

где $[\cdot]$ − целая часть числа;
относительное изменение суммарных затрат по сравнению с оптимальным значением при относительном изменении объема партии

$$\frac{\Delta L}{L} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta q}{q_{\text{опт}}}\right)^2.$$

9.3. Точка заказа

В реальных задачах следует учитывать время выполнения заказа θ от момента размещения заказа до его действительной поставки. Для бесперебойного снабжения заказ должен подаваться в момент, когда уровень запаса достаточен для удовлетворения потребности на время выполнения заказа. Этот уровень называется *точкой возобновления заказа (точка заказа)* и обозначается r, т. е. это нижний уровень, по которому мы должны заказывать новую партию.

На рис. 9.2 показан случай, когда точка возобновления заказа должна опережать на θ единиц времени ожидаемую поставку.

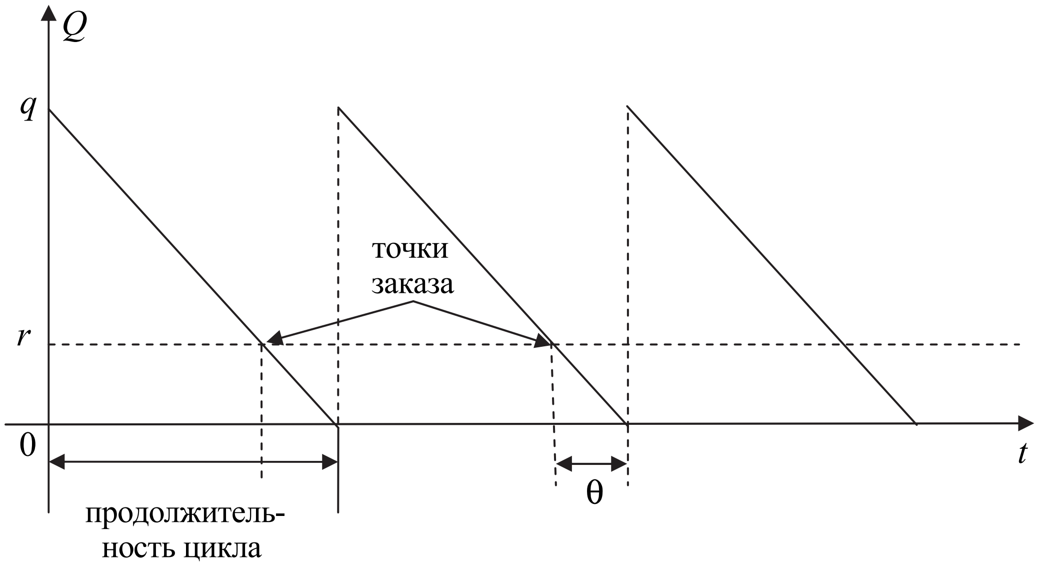


Рис. 9.2. График изменения запасов

В практических целях следует определять **точку возобновления заказа** через **уровень запаса**, соответствующий моменту возобновления. На практике это реализуется путем непрерывного контроля уровня запаса до момента достижения очередной точки возобновления заказа. Для систем, в которых дефицит не допускается, заказ должен размещаться в момент, когда величина наличного запаса имеет вид

$$r = \theta\nu - \left[\frac{\theta}{\tau_{\text{опт}}}\right] q_{\text{опт}},$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа; $\tau_{\text{опт}}$ – оптимальный интервал между поставками.

Для бездефицитной работы системы нужно иметь начальный запас $I_0 \geq \theta\nu$. Если I – фактический запас, то для непрерывной работы необходимо, чтобы $I \geq I_0$. Время потребления начального запаса – I_0 / ν. Чтобы заказанная партия прибыла ко времени полного исчерпания, ее нужно размещать в момент времени $t_0 = I_0 / \nu - \theta$, а все остальные заказы нужно размещать в моменты

$$t_k = \left(\frac{I}{\nu} - \theta \right) + k\tau_{\text{опт}}, \ k = 1, 2, \ldots .$$

9.4. Примеры решения задач

Потребность сборочного предприятия в деталях некоторого типа составляет 120 000 деталей в год, причем эти детали расходуются в процессе производства равномерно и непрерывно. Детали заказываются раз в год и поставляются партиями одинакового объема, указанного в заказе. Хранение детали на складе стоит 0,35 ден. ед. в сутки, а поставка партии – 10 000 ден. ед. Задержка производства из-за отсутствия деталей недопустима.

1. Определить:

а) оптимальный размер партии поставки;

б) оптимальный интервал между поставками;

в) средний уровень текущего запаса;

г) число поставок;

д) годовые затраты, связанные с работой данной системы.

2. Определить, на сколько процентов увеличатся затраты на создание и хранение запаса по сравнению с минимальными затратами при объеме заказываемых партий 5000 деталей.

3. В условиях задачи предположим, что заказываются не все партии сразу, а каждая отдельно, причем срок выполнения заказа равен 16 дней. Определить точки заказа, т. е. при каком уровне запаса следует заказывать следующую партию.

4. Нарисовать график изменения запасов, отметить точки заказа.

Решение. За единицу времени примем сутки. Введем условные обозначения. Общий промежуток времени $T = 1$ год = 365 дней, а потребность за этот период $Q = 120\,000$ деталей. Следовательно, в сутки интенсивность спроса в деталях равна $\nu = \frac{120\,000}{365} = 329$ ед. По условию затраты на одну партию составляют $K = 10\,000$ ден. ед., затраты хранения единицы запаса в сутки $h = 0{,}35$ ден. ед. (Отметим, что все параметры должны быть приведены к одной единице измерения!)

Так как спрос постоянен и дефицит не допускается, то имеет место основная модель управления запасами.

1. а) оптимальный размер партии поставки по формуле $\sqrt{2K\nu / h}$:

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\,000 \cdot 329}{0{,}35}} \approx 4334 \text{ деталей;}$$

б) оптимальный интервал между поставками:

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{4334}{329} = 13{,}18 \approx 13 \text{ дней;}$$

в) средний уровень текущего запаса определим по формуле

$$I_{\text{опт}} = \frac{q_{\text{опт}}}{2} = \frac{4334}{2} = 2167 \text{ деталей;}$$

г) число поставок в год

$$n_{\text{опт}} = \frac{120\,000}{4334} \approx 28;$$

д) годовые затраты, связанные с работой данной системы,

$$L_{\text{опт}} = \sqrt{2 \cdot 10\,000 \cdot 0{,}35 \cdot 329} \approx 1517 \text{ ден. ед.}$$

2. Относительное изменение объема партии по сравнению с оптимальным значением составляет

$$\frac{\Delta q}{q_{\text{опт}}} = \frac{5000 - 4334}{4334} = 0{,}154.$$

Тогда относительное изменение суммарных затрат

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{0{,}153^2}{2} \approx 0{,}0117, \text{ или лишь } 1{,}2\%.$$

3. Срок выполнения заказа $\theta = 16$. По результатам решения задачи длина интервала между поставками равна 13,2 дня. Значит, заказ в условиях налаженного производства следует возобновить, когда уровень запаса достаточен для удовлетворения потребности на $16 - 13{,}2 = 2{,}8$ дня и

$$r = \theta\nu - \left[\frac{\theta}{\tau_{\text{опт}}}\right] q_{\text{опт}} = 16 \cdot 329 - \left[\frac{16}{13{,}2}\right] \cdot 4334 = 930.$$

4. На рис. 9.3 представлен график изменения запасов.

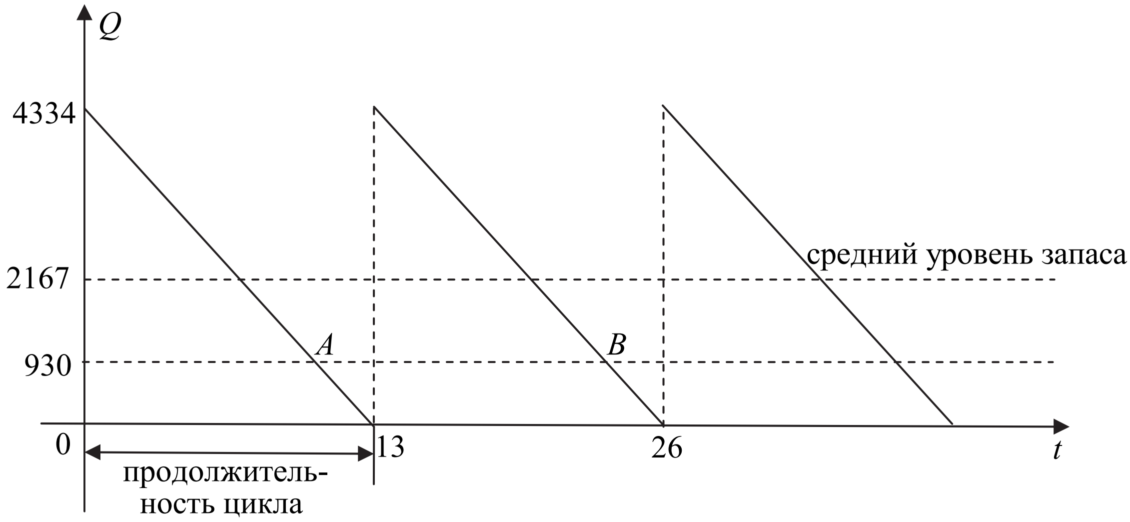


Рис. 9.3. График изменения запасов

Точки A и B – точки заказа.

9.5. Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается задача управления запасами?
2. Какие виды издержек возникают при управлении запасами?
3. Какие основные предположения в простейшей модели управления запасами?
4. Как определить оптимальный размер партии?
5. Как выглядит график изменения запасов в простейшей модели управления запасами?
6. Какие оптимальные параметры модели Вы знаете? Как их можно найти?
7. Как определить точку возобновления заказа для систем, в которых дефицит не допускается?

9.6. Задания для аудиторной работы

1. Интенсивность равномерного спроса ν составляет 2000 единиц товаров в год. Организационные издержки K для одной партии соответствуют 2 тыс. руб. Цена единицы товара s равна 0,1 тыс. руб., а

издержки содержания h составляют 0,01 тыс. руб. за 1 единицу в год. Найти оптимальный размер партии, число поставок, продолжительность цикла, суммарные годовые затраты.

2. Ежедневный спрос на некоторый товар ν составляет 100 единиц. Затраты на размещение каждого заказа K постоянны и равны 100 руб. Ежедневные затраты на хранение единицы заказа h составляют 0,02 руб. Определить экономичный размер партии и точку заказа при сроке выполнения заказа, равном 12 дням.

3. Известно, что издержки выполнения заказа – 30 ден. ед., количество товара, реализованного за год, – 10 000 шт., закупочная цена единицы товара – 5 ден. ед., издержки хранения в год – 10% от закупочной цены. Определить наиболее оптимальный размер заказа, число поставок за год, минимальные затраты, связанные с работой системы.

4. Потребность станкосборочного цеха в заготовках некоторого типа составляет 36 тыс. шт. в год. Дефицит заготовок не допускается. Издержки размещения заказа – 50 ден. ед., издержки содержания одной заготовки в год равны 5 ден. ед. Среднее время реализации заказа – 10 дней. Определить оптимальную партию поставки; периодичность возобновления поставок; точку размещения заказа; суммарные годовые затраты.

9.7. Задачи для тренировочной контрольной работы

Годовая потребность фирмы в деревоматериалах составляет A, м^3, причем материалы расходуются в процессе производства равномерно и непрерывно, затраты на хранение 1 м^3 – B, ден. ед. Затраты на подготовительно-заключительные операции, не зависящие от величины поставляемой партии и связанные с каждой поставкой, равны C, ден. ед. Задержка производства из-за отсутствия материалов недопустима.

1. Определите:

а) оптимальный размер партии поставки;

б) оптимальный интервал между поставками;

в) средний уровень текущего запаса;

г) число поставок;

д) годовые затраты, связанные с работой данной системы.

2. Найдите, на сколько процентов увеличатся затраты на создание и хранение запаса по сравнению с минимальными затратами при объеме заказываемых партий *D* деталей.

3. В условиях задачи предположим, что заказываются не все партии сразу, а каждая отдельно, причем срок выполнения заказа равен *E* дней. Определите точки заказа, т. е. при каком уровне запаса следует заказывать следующую партию.

4. Постройте график изменения запасов, отметьте точки заказа.

Числовые данные для каждого варианта приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Данные для решения задач

Номер задачи	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
1	140 000	0,4 ден. ед. в сутки	20 000	6 500	20
2	4 000	4 ден. ед. в год	80	500	40
3	110 000	0,2 ден. ед. в сутки	15 000	7 000	25
4	6 000	5 ден. ед. в год	80	500	30
5	105 000	0,3 ден. ед. в сутки	8 000	4 500	15
6	5 000	6 ден. ед. в год	90	400	30
7	8 000	0,45 ден. ед. в сутки	5 000	800	40
8	7 000	5 ден. ед. в год	85	500	30
9	118 000	0,5 ден. ед. в сутки	11 000	4 000	15
10	4 500	4 ден. ед. в год	70	400	45

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА (*t*-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ)

γ	Вероятность												
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,327	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,583
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073

Окончание прил. 1

γ	Вероятность												
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,833
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,868	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,402	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФИШЕРА – СНЕДЕКОРА (*F*-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ)

γ_2	γ_1										
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	60	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	253,3	12,71
	4 052	4 999	5 403	5 625	5 764	5 859	5 981	6 106	6 234	6 366	63,66
	406 523	500 016	536 700	562 527	576 449	585 953	598 149	610 598	623 432	636 535	636,2
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50	4,30
	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,13	99,36	99,42	99,46	99,50	9,92
	998,46	999,00	999,20	999,20	999,20	999,20	999,40	999,60	999,40	999,40	31,00
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53	3,18
	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,60	26,12	5,84
	67,47	148,51	141,10	137,10	134,60	132,90	130,60	128,30	125,90	123,50	12,94
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63	2,78
	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	13,93	13,46	4,60
	74,13	61,24	56,18	5343	51,71	50,52	49,00	47,41	45,77	44,05	8,61
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36	2,57
	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,27	9,89	9,47	9,02	4,03
	47,04	36,61	33,20	31,09	20,75	28,83	27,64	26,42	25,14	23,78	6,86

Продолжение прил. 2

γ_2	γ_1										
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	60	∞
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67	2,45
	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,31	6,88	3,71
	35,51	26,99	23,70	21,90	20,81	20,03	19,03	17,99	16,89	15,75	5,96
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23	2,36
	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,07	5,65	3,50
	29,22	21,69	18,77	17,19	16,21	15,52	14,63	13,71	12,73	11,70	5,40
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,99	2,31
	11,26	8,65	7,59	7,10	6,63	6,37	6,03	5,67	5,28	4,86	3,36
	25,42	18,49	15,83	14,39	13,49	12,86	12,04	11,19	10,30	9,35	5,04
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71	2,26
	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,73	4,31	3,25
	22,86	16,39	13,90	12,56	11,71	11,13	10,37	9,57	8,72	7,81	4,78
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54	2,23
	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,33	3,91	3,17
	21,04	14,91	12,55	11,28	10,48	9,92	9,20	8,45	7,64	6,77	4,59
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40	2,20
	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,02	3,60	3,11
	19,69	13,81	11,56	10,35	9,58	9,05	8,35	7,62	6,85	6,00	4,49
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30	2,18
	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,78	3,36	3,06
	18,64	12,98	10,81	9,63	8,89	8,38	7,71	7,00	6,25	5,42	4,32

Продолжение прил. 2

γ_2	γ_1										
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	60	∞
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21	2,16
	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,30	3,96	3,59	3,16	3,01
	17,81	12,31	10,21	9,07	8,35	7,86	7,21	6,52	5,78	4,97	4,12
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13	2,14
	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,43	3,00	2,98
	17,14	11,78	9,73	8,62	7,92	7,44	6,80	6,13	5,41	4,60	4,14
15	4,45	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07	2,13
	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,29	2,87	2,95
	16,59	11,34	9,34	8,25	7,57	7,09	6,47	5,81	5,10	4,31	4,07
16	4,41	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01	2,12
	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,18	2,75	2,92
	16,12	10,97	9,01	7,94	7,27	6,80	6,20	5,55	4,85	4,06	4,02
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96	2,11
	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,08	2,65	2,90
	15,72	10,66	8,73	7,68	7,02	6,56	5,96	5,32	4,63	3,85	3,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92	2,10
	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,01	2,57	2,88
	15,38	10,39	8,49	7,46	6,81	6,35	5,76	5,13	4,45	3,67	3,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88	2,09
	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	2,92	2,49	2,86
	15,08	10,16	8,28	7,26	6,61	6,18	5,59	4,97	4,29	3,52	3,88

Продолжение прил. 2

γ_2	γ_1										
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	60	∞
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84	2,09
	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	2,86	2,42	2,84
	14,82	9,95	8,10	7,10	6,46	6,02	5,44	4,82	4,15	3,38	3,85
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,82	2,08
	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	2,80	2,36	2,83
	14,62	9,77	7,94	6,95	6,32	5,88	5,31	4,70	4,03	3,26	3,82
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78	2,07
	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,75	3,45	3,12	2,75	2,30	2,82
	14,38	9,61	7,80	6,87	6,19	5,76	5,19	4,58	3,92	3,15	3,79
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76	2,07
	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,70	2,26	2,81
	14,19	9,46	7,67	6,70	6,08	5,56	5,09	4,48	3,82	3,05	3,77
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73	2,06
	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,66	2,21	2,80
	14,03	9,34	7,55	6,59	5,98	5,55	4,99	4,39	3,84	2,97	3,75
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71	2,06
	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,62	2,17	2,79
	13,88	9,22	7,45	6,49	5,89	5,46	4,91	4,31	3,66	2,89	3,72
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69	2,06
	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,58	2,13	2,78
	13,74	9,12	7,36	6,41	5,80	5,38	4,83	4,24	3,59	2,82	3,71

Окончание прил. 2

γ_2	γ_1										
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	60	∞
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67	2,05
	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,55	2,10	2,77
	13,61	9,02	7,27	6,33	5,73	5,31	4,76	4,17	3,52	2,76	3,69
28	4,19	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65	2,05
	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,23	2,90	2,52	2,06	2,76
	13,50	8,93	7,18	6,25	5,66	5,24	4,69	4,11	3,46	2,70	3,67
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64	2,05
	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,87	2,49	2,03	2,76
	13,39	8,85	7,12	6,19	5,59	5,18	4,65	4,05	3,41	2,64	3,66
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62	2,04
	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,47	2,01	2,75
	13,29	8,77	7,05	6,12	5,53	5,12	4,58	4,00	3,36	2,59	3,64
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39	2,00
	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,12	1,60	2,66
	11,97	7,76	6,17	5,31	4,76	4,37	3,87	3,31	2,76	1,90	3,36
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,03	1,96
	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,79	1,04	2,58
	10,83	6,91	5,42	4,62	4,10	3,74	3,27	2,74	2,13	1,05	3,29

Примечание. Первое значение соответствует вероятности 0,05, второе – вероятности 0,01, третье – вероятности 0,001; γ_1 – число степеней свободы числителя; γ_2 – знаменателя.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Айвазян, С. А. Прикладная статистика и основы эконометрики: учеб. для вузов / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.

2. Бородич, С. А. Эконометрика: учеб. пособие / С. А. Бородич. – 2-е изд., испр. – Минск: Новое знание, 2004. – 416 с.

3. Доугерти, К. Введение в эконометрику: учеб. для вузов / К. Доугерти. – М.: ИНФРА-М, 1999. – 402 с.

4. Кремер, Н. Ш. Эконометрика: учеб. для студентов вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко; под ред. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – 311 с.

5. Марченко, В. М. Методы оптимизации и статистической обработки результатов измерений: учеб. пособие / В. М. Марченко, Т. Б. Копейкина. – Минск: БГТУ, 2007. – 140 с.

6. Марченко, В. М. Эконометрика и экономико-математические методы и модели. В 2 ч. Ч. 1. Эконометрика: учеб. пособие для студентов учреждений высшего образования по экономическим специальностям / В. М. Марченко, Н. П. Можей, Е. А. Шинкевич. – Минск: БГТУ, 2011. – 157 с.

7. Марченко, В. М. Эконометрика и экономико-математические методы и модели. В 2 ч. Ч. 2. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие для студентов учреждений высшего образования по экономическим специальностям / В. М. Марченко, Н. П. Можей, Е. А. Шинкевич. – Минск: БГТУ, 2012. – 214 с.

8. Хацкевич, Г. А. Эконометрика: учеб.-метод. комплекс для студентов экономических специальностей / Г. А. Хацкевич, А. Б. Гедранович. – Минск: Изд-во МИУ, 2005. – 252 с.

Дополнительная

1. Герасимович, А. И. Математическая статистика: учеб. пособие / А. И. Герасимович. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Вышэйшая школа, 1983. – 279 с.

2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 12-е изд., перераб. – М.: Высшее образование, 2006. – 479 с.

3. Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск: Вышэйшая школа, 1984. – 223 с.

4. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. для вузов / Н. Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 543 с.

5. Мацкевич, И. П. Высшая математика: теория вероятностей и математическая статистика: учебник / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – 272 с.

6. Минюк, С. А. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие / С. А. Минюк, Е. А. Ровба, К. К. Кузьмич.– Минск: ТетраСистемс, 2002. – 432 с.

7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.

8. Харин, Ю. С. Эконометрическое моделирование: учеб. пособие / Ю. С. Харин, В. И. Малюгин, А. Ю. Харин. – Минск: БГУ, 2003. – 313 с.

9. Экономико-математические методы и модели: учеб.-метод. пособие по выполнению расчетных заданий с использованием табличного процессора Excel для студентов экономических специальностей / авт.-сост. Е. А. Шинкевич. – Минск: БГТУ, 2005. – 72 с.

10. Янович, В. И. Экономико-математические методы и модели: лабораторный практикум для студентов специальностей 1-25 01 07 «Экономика и управление на предприятии», 1-25 01 08 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», 1-26 02 02 «Маркетинг», 1-26 02 03 «Менеджмент» / В. И. Янович, Н. В. Балашевич. – Минск: БГТУ, 2002. – 66 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Борковская Инна Мечиславовна
Бочило Наталья Владимировна
Якименко Андрей Александрович
Яроцкая Людмила Дмитриевна

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Учебно-методическое пособие

Редактор *Ю. А. Юрчик*
Компьютерная верстка *Ю. А. Юрчик*
Корректор *Ю. А. Юрчик*

Издатель:
УО «Белорусский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/227 от 20.03.2014.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.