УДК 531

Студ. Ковалевский А. С.
Науч. рук. проф. Вихренко В. С.
(кафедра механики и конструирования, БГТУ)

КИНЕМАТИКА ПРИВОДА КАТЯЩЕГОСЯ КОЛЕСА

Задача о приводе катящегося без проскальзывания колеса (рис. 1) легко решается, когда нить АВ параллельна плоскости, по которой перемещается колесо 2. В этом случае передаточное отношение от колеса 1 к колесу 2 постоянно и равно $r/2R$, где r и R – радиусы колес 1 и 2, соответственно. Задача существенно усложняется, если нить не параллельна плоскости, как изображено на рис. 1.

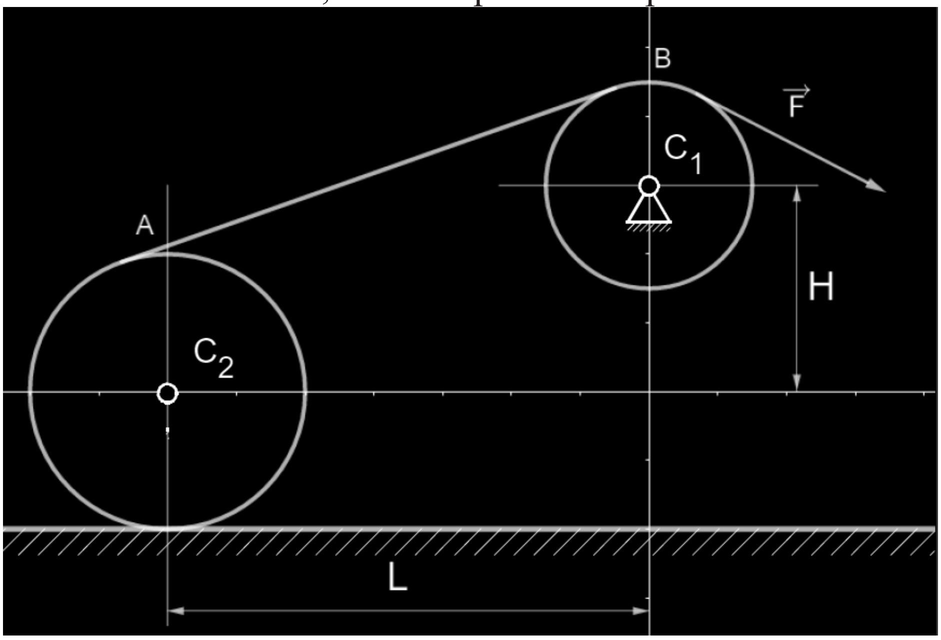

Рисунок 1 – Схема привода катящегося колеса

Пусть начальная геометрия системы определяется расстояниями L и H между проекциями центров колес на горизонтальную плоскость и вертикаль, соответственно. Для упрощения решения задачи нить в исходной схеме заменим достаточно длинной рейкой (рис. 2), что при условии отсутствия проскальзывания между дисками и рейкой не изменит кинематику качения колеса 2.

Первоначально используем метод замкнутых контуров [1]. Пусть рейка наклонена под углом β к горизонту. Проведем радиусы в точки касания рейки с окружностями. Данные радиусы составляют с горизонтом угол φ. Тогда $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Пусть отрезок АВ на рейке, отсекаемый точками касания, имеет длину l. Спроецировав контур C_1OC_2AB на горизонтальную и вертикальную оси, получим систему уравнений (1), исключив из которой тригонометрические функции, получим выражение (2)

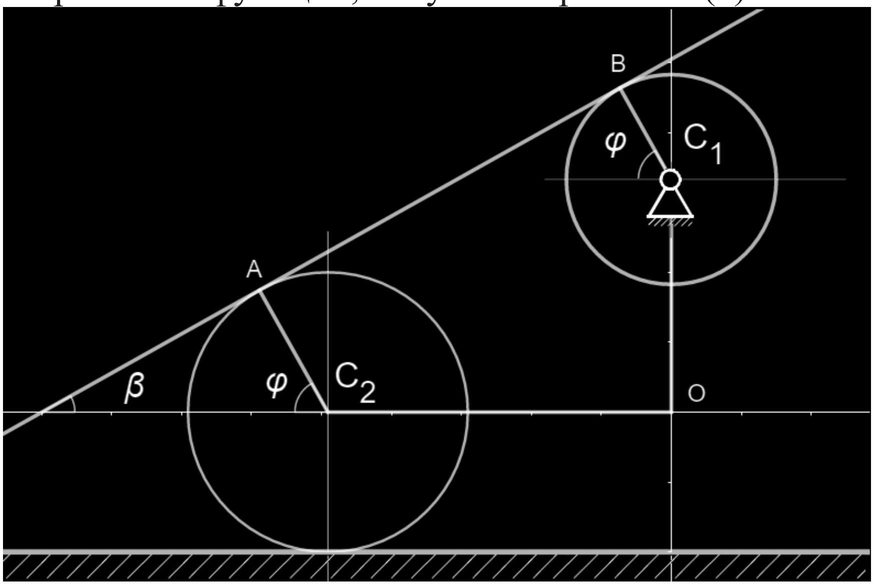

Рисунок 2 – Модифицированная схема привода катящегося колеса

$$\begin{cases} L = l\cos\beta - (R-r)\sin\beta \\ H = l\sin\beta + (R-r)\cos\beta \end{cases}, \tag{1}$$

$$l^2 = L^2 + H^2 + (R-r)^2. \tag{2}$$

Пусть через некоторое время Δt диски 1 и 2 совершат повороты на углы $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$, соответственно, по ходу часовой стрелки. При этом рейка повернется на угол $\Delta\beta$ против хода часовой стрелки, что вызовет смещение точек касания.

Длина отрезка на рейке, отсекаемого точками касания, составит

$$l_1 = l - r(\Delta\phi_1 + \Delta\beta) + R(\Delta\phi_2 + \Delta\beta). \tag{3}$$

Это основное соотношение, позволяющее связать повороты колес и рейки. Продифференцировав это уравнение по времени, учитывая, что l, r и R – заданные исходные величины (константы), получим

$$\dot{l}_1 = -r(\omega_1 + \omega_3) + R(\omega_2 + \omega_3) \tag{4}$$

где ω_1, ω_2 и ω_3 – угловые скорости колес 1, 2 и рейки, соответственно.

Обозначим изменившуюся длину L через L_1. Тогда выражение (1) принимает вид:

$$\begin{cases} L_1 = l_1\cos(\beta+\Delta\beta) - (R-r)\sin(\beta+\Delta\beta) \\ H = l_1\sin(\beta+\Delta\beta) + (R-r)\cos(\beta+\Delta\beta) \end{cases} \qquad (5)$$

Отметим, что система уравнений (3), (5) совместно с соотношением $L_1=L-R\Delta\varphi_2$ позволяют найти закон движения колеса 2 $\Delta\varphi_2=f(\Delta\varphi_1)$.

Дифференцирование этих соотношений по времени приводит к зависимостям

$$\begin{cases} \dot{L}_1 = \dot{l}_1\cos(\beta+\Delta\beta) - l_1\sin(\beta+\Delta\beta)\omega_3 - (R-r)\cos(\beta+\Delta\beta)\omega_3 \\ 0 = \dot{l}_1\sin(\beta+\Delta\beta) + l_1\cos(\beta+\Delta\beta)\omega_3 - (R-r)\sin(\beta+\Delta\beta)\omega_3 \end{cases} \qquad (6)$$

Исключая из правых частей этих уравнений тригонометрические функции, запишем

$$\dot{L}_1\cos(\beta+\Delta\beta) = \dot{l}_1 - \omega_3(R-r)\,. \qquad (7)$$

Подставим в это соотношение $\dot{l}_1$ из выражения (4), учитывая, что $\dot{L} = -R\omega_2$, и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, для исходной геометрии механизма получим искомую связь между угловыми скоростями:

$$\omega_2 = \frac{r}{R}\frac{1}{1+\cos\beta}\omega_1\,. \qquad (8)$$

Продифференцировав полученное выражение по времени, для углового ускорения диска 2 найдем.

$$\varepsilon_2 = \frac{r}{R}\frac{1}{1+\cos\beta}\varepsilon_1 + \frac{r}{R}\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}\omega_1\omega_3\,. \qquad (9)$$

Угол β находим из системы уравнений (1), исключив из нее длину l и решив полученное квадратное уравнение относительно sinβ:

$$\sin\beta = \frac{L(R-r)}{L^2+H^2}\left[\sqrt{1+\frac{L^2+H^2}{L^2}\left(\frac{H^2}{(R-r)^2}-1\right)}-1\right]. \qquad (10)$$

Дифференцирование соотношения (2) по времени с учетом (4) и того, что $\dot{L} = -R\omega_2$, позволяет определить угловую скорость рейки

$$\omega_3 = \frac{r}{l}\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}\omega_1 = \frac{r}{l}\omega_1\,\mathrm{tg}(\beta/2). \qquad (11)$$

Соотношения между угловыми скоростями, но не закон движения колеса 2, можно получить более простым способом, используя теорию плоско-параллельного движения [2]. На рисунке 3 показано распределение скоростей точек механизма. Условие отсутствия проскальзывания состоит в том, что соприкасающиеся точки разных звеньев механизма имеют одинаковые скорости. Скорость точки А определяется из условия ее принадлежности колесу 2 по теореме сложения скоростей:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{A}} = \mathbf{v}_{\mathrm{C}_2} + \mathbf{v}_{\mathrm{AC}_2}, \quad v_{\mathrm{C}_2} = v_{\mathrm{AC}_2} = \omega_2 R. \tag{12}$$

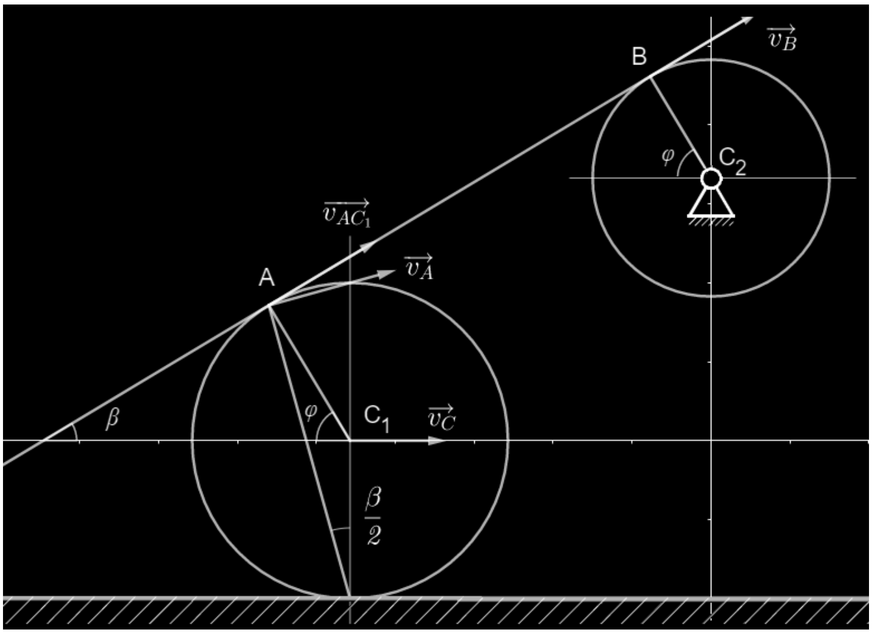

Рисунок 3 – Распределение скоростей точек механизма

Используя далее теорему о равенстве проекций скоростей точек А и В на прямую, их соединяющую, запишем

$$v_{\mathrm{C}_2}\cos\beta + v_{\mathrm{AC}_2} = v_{\mathrm{B}} = \omega_1 r, \tag{13}$$

откуда сразу же следует соотношение (8).

Для получения соотношения (11), определяющего угловую скорость рейки, следует построить ее мгновенный центр скоростей. После очевидных геометрических вычислений получим второе из соотношений (11). Для определения закона движения колеса 2 можно проинтегрировать дифференциальное уравнение (8) с учетом уравнения связи (10) или воспользоваться системой уравнений (3) и (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зиновьев В.А. Курс теории механизмов и машин. – М.: Наука, 1975. – 204 с.

2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.