УДК 519.624

И. Ф. Соловьева
Белорусский государственный технологический университет

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО ИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНСЛОЕМ

В данной работе рассматривается механизм возникновения двухточечных граничных задач с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными либо внутренними переходными слоями. Задачи такого рода представлены в виде обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Пограничные слои образуются на концах заданного отрезка, т. е. вблизи граничных точек. В этих зонах наблюдается рост решений и особенно градиентов решений. Для решения подобных задач предлагается модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки, сводящая граничную задачу к совокупности трех задач Коши. Для нейтрализации роста решений в работе предусматривается введение регулирующих множителей, стабилизирующих в зонах пограничных слоев рост решения и его градиента. В работе предложено доказательство устойчивости данного метода.

Ключевые слова: малый параметр, пограничный слой, двухточечные граничные задачи, сходимость, изолированность решения, устойчивость метода.

I. F. Solov'yeva
Belarusian State Technological University

ON THE STABILITY OF ONE METHOD OF SOLVING BOUNDARY TASKS WITH THE PORTRAIT

In this paper we consider the mechanism for the appearance of two-point boundary value problems with a small parameter at the highest derivative and with the resulting boundary or internal transition layers. Problems of this kind are represented in the form of ordinary differential equations with a small parameter with the highest derivative. Boundary layers are formed at the ends of a given segment, i.e. near the boundary points. In these zones, growth of solutions and, especially, gradients of solutions is observed. To solve such problems, we propose a modification of the differential orthogonal drift method, reducing the boundary value problem to the collection of three Cauchy problems. To neutralize the growth of solutions, the work provides for the introduction of regulating factors that stabilize the growth of the solution and its gradient in the zones of the boundary layers. In this paper, we propose a proof of the stability of this method.

Key words: small parameter, boundary layer, two-point boundary problems, convergence, solution isolation, stability of the method.

Введение. Любая математическая модель, адекватно описывающая процессы в терминах дифференциальных уравнений, обязательно включает в себя различные приближенные параметры с заданной точностью. Поэтому вопрос о характере поведения решений дифференциального уравнения при малом изменении величины одного из этих параметров представляет значительный интерес. Математическая теория дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной не потеряла своей актуальности и в наши дни. Впервые на ее прикладную сторону обратил внимание Л. Прандль в связи с развитой им в начале XX в. теорией пограничного слоя в гидродинамике. В настоящее время большой круг задач, с которым сталкиваются физики, механики и специалисты по прикладной математике, описывается математическими моделями, в основе которых лежат обыкновенные дифференциальные уравнения (о. д. у.) с малым параметром при старшей производной [1]. Их природа объясняется сущностью процессов и явлений, характеризующих данные уравнения. Они требуют более детальной информации о поведении решения вблизи граничных точек.

Проследим механизм возникновения задач подобного рода.

Рассмотрим движение частицы m, закрепленной на пружине с коэффициентом жесткости k и испытывающей сопротивление среды, коэффициент вязкости которой равен μ. На основании второго закона Ньютона придем к о. д. у. вида

$$mu'' + \mu u' + ku = 0,$$

где $u(t)$ – смещение частицы; t – время. Если частица начинает движение без начальной скорости из состояния покоя, описываемого координатой u_0, то начальные значения будут следующими: $u(0) = u_0$, $u'(0) = 0$. Представим, что смещение $u(t)$ – безразмерная величина. В качестве характерной длины возьмем начальное смещение u_0, а в качестве характерного масштаба времени примем величину, обратную собственной частоте системы, т. е. $w_0 = \sqrt{k/m}$. Тогда уравнение с начальными условиями примет вид

$$mw_0 y'' + \mu y' + mw_0 y = 0;$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ x > 0.$$

Здесь $mw_0 \ll 1$. Следовательно, данная задача – задача с малым параметром при старшей производной.

Если упругая сила описывается нелинейной функцией вида $f = k_1 u + k_2 u^2$, тогда мы получим уравнение с малым параметром при старшей производной вида

$$mu_0 w_0^2 y'' + \mu u_0 w_0 y' + k_1 u_0 y + k_2 u_0^2 y^2 = 0.$$

Нелинейность уравнения характеризуется величиной $\varepsilon = \dfrac{k_2}{k_1} u_0$.

Основная часть. Граничные задачи очень многочисленны и их постановка весьма разнообразна. В данной работе рассматриваются линейные граничные задачи с разделенными граничными условиями.

Постановка задачи. Пусть заданы двухточечные граничные задачи для о. д. у. второго порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной вида

$$\begin{cases} \varepsilon y''(x) + a(x) y'(x) - b(x) y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1 \end{cases} \qquad (1)$$

и

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x) y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Предположим, что задача (1) имеет один, а задача (2) – два пограничных слоя.

Задачи вида (1), (2) являются математическими моделями диффузионно-конвективных процессов или родственных им физических явлений. Диффузионным является член, включающий производную второго порядка, а конвективный член включает производную первого порядка. Задачи такого вида называются сингулярно возмущенными задачами. Они неоднократно возникали в механике, физике, технике, например, при изучении релаксационных колебаний в радиотехнических приборах. В конечном итоге эти задачи превратились в самостоятельную математическую теорию изучения дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Их решение может быстро изменяться вблизи граничных точек, т. е. мы имеем пограничный слой. Причина трудностей решения задач с пограничным слоем заключается в неустойчивости численного процесса.

Для численного решения граничных задач вида (1), (2) с пограничным слоем предлагается метод дифференциальной ортогональной прогонки [2]. Этот метод дает возможность применить единый подход к решению граничных задач с одним и с двумя пограничными слоями.

Алгоритм метода дифференциальной ортогональной прогонки. Он включает следующие пункты.

1. Рассмотрим, например, граничную задачу вида (2). Представим ее в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\dfrac{f(x)}{\varepsilon} + \dfrac{b(x)}{\varepsilon} y_1,\ 0 < x < 1,\ \varepsilon > 0 \end{cases} \qquad (3)$$

с граничными условиями вида

$$y_1(0) = A, \quad y_2(0) = B. \qquad (4).$$

2. При решении системы о. д. у. (3), (4) используем процедуру введения множителей, $m_2(x, \varepsilon) > 0$, $m_1(x, \varepsilon) > 0$, регулирующих поведение функций $y(x)$ и $y'(x)$ вблизи пограничных слоев, где, как правило, решение и особенно градиент решения неограниченно возрастают [1], что еще больше усложняет вычислительный процесс.

3. Исходную граничную задачу представляем в виде совокупности соответствующих задач Коши для функций $\theta(x)$, $u(x)$, $v(x)$.

В прямом направлении решается задача Коши для функции $\theta(x)$ вида

$$\theta' = \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2'}{2m_2}\sin 2\theta - \left(\frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} + \frac{m_1}{m_2}\right)\cos^2\theta \qquad (5)$$

с начальным условием вида

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2}$$

и задача Коши для функции $u(x)$ вида:

$$u' = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon}\right)\sin 2\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{m_2'}{m_2}\cos^2\theta\right] u - m_2 \frac{f}{\varepsilon}\cos\theta; \qquad (6)$$

$$u(0) = Am_1(0, \varepsilon).$$

Вычислив значения функций $u(x)$ и $v(x)$ как решение задач Коши в прямом ходе метода дифференциальной ортогональной прогонки, будем находить функцию $v(x)$ как решение задачи Коши, но уже для обратной прогонки. Начальное значение для осуществления обратной прогонки уже получено из предыдущих задач Коши, решаемых прямой прогонкой.

Для функции $v(x)$ задача Коши решается в обратном направлении в виде:

$$v' = \left[-\frac{m_2'}{m_2}\sin 2\theta + \frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon}\cos 2\theta + {} \right.$$
$$\left. + \, 2\frac{m_1}{m_2}\times\cos^2\theta - \frac{m_1}{m_2}\right]u + \tag{7}$$
$$\left[\left[\frac{m_2'}{m_2}\sin^2\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon}\right)\times\sin 2\theta\right]v + \right.$$
$$+ \, m_2\frac{f}{\varepsilon}\sin\theta$$

с начальным условием

$$v(1) = \frac{1}{\cos\theta(1)}\left[B - \sin\theta(1)\right]u(1),$$
$$\cos\theta(1) \neq 0.$$

В проблеме построения, исследования и реализации численного метода любых граничных задач одним из главных вопросов является устойчивость применяемого метода.

Теорема. Если граничная задача вида (2) с двумя пограничными слоями устойчива относительно малых изменений величин, определяющих ее, то устойчива и рассматриваемая модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки для ее решения.

Докажем это утверждение.

Будем предполагать, что

$$\Delta = \alpha_2\cos\theta(1) - \beta_2\sin\theta(1) \neq 0.$$

В этом случае рассматриваемая задача имеет единственное решение, вычисляемое по схеме метода дифференциальной ортогональной прогонки (5)–(7). При этом порядок роста функций $u(x)$ и $v(x)$ по отношению к функциям $m_1(x,\,\varepsilon)\,y_1(x)$ и $m_2(x,\,\varepsilon)\,y_2(x)$ определяет тождество

$$u^2(x) + v^2(x) \equiv (m_1(x,\varepsilon)y_1(x))^2 + {}$$
$$+ \, (m_2(x,\varepsilon)y_2(x))^2,$$

указывающее на то, что порядок роста этих функций одинаков [2].

Пусть все уравнения для нахождения функций $\theta(x)$, $u(x)$, $v(x)$ решаются приближенно. Тогда приближенные значения будут иметь решение $y_1(x)$ и его градиент $y_2(x)$.

Будем получать приближенные значения вспомогательных функций $\tilde\theta(x)$, $\tilde u(x)$, $\tilde v(x)$ для следующих уравнений:

1) для функции $\tilde\theta(x)$:

$$\tilde\theta'(x) = \frac{m_1}{m_2} + \frac{1}{2}\frac{m_2'}{m_2}\sin 2\tilde\theta(x) - {}$$
$$-\left(\frac{m_2}{m_1}\frac{b(x)}{\varepsilon} + \frac{m_1}{m_2}\right)\cos^2\tilde\theta(x) + \varepsilon_1(x)$$

с начальными условиями $\sin\tilde\theta(0) = 1 + \delta_1$;

2) для функции $\tilde u(x)$:

$$\tilde u'(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}\frac{b(x)}{\varepsilon}\right)\sin 2\tilde\theta(x) + \right.$$
$$\left. + \frac{m_2'}{m_2}\cos^2\theta(x)\right]\tilde u(x) - {}$$
$$- \, m_2\frac{f(x)}{\varepsilon}\cos\tilde\theta(x) + \varepsilon_2(x)$$

с начальными условиями вида

$$\tilde u(0) = Am_1(0,\varepsilon) + \delta_3;$$

3) для функции $\tilde v(x)$:

$$\tilde v' = \left[-\frac{m_2'}{m_2}\sin 2\tilde\theta(x) + \frac{m_2}{m_1}\frac{b(x)}{\varepsilon}\cos 2\tilde\theta + 2\frac{m_1}{m_2}\times \right.$$
$$\left. \times\cos^2\tilde\theta(x) - \frac{m_1}{m_2}\right]\tilde u(x) + {}$$
$$+\left[\frac{m_2'}{m_2}\sin^2\tilde\theta(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}\frac{b(x)}{\varepsilon}\right)\times \right.$$
$$\left. \times\sin 2\tilde\theta(x)\right]v(x) + m_2\frac{f(x)}{\varepsilon}\sin\theta(x) + \varepsilon_3(x)$$

с начальными условиями вида

$$\tilde v(1) =$$
$$= \frac{1}{\cos\theta(1)}\left[B - \sin\tilde\theta(1)\right]\tilde u(1) + \delta_4.$$

Тогда искомые приближенное решение $\tilde y_1(x)$ и приближенное значение его производной $\tilde y_2(x)$ представимы в следующем виде:

$$\tilde y_1(x) = \frac{1}{m_1(x,\varepsilon)}\left[\sin\tilde\theta(x)\tilde u(x) + \cos\tilde\theta(x)\tilde v(x)\right];$$

$$\tilde y_2(x) = \frac{1}{m_2(x,\varepsilon)}\left[\cos\tilde\theta(x)\tilde u(x) - \sin\tilde\theta(x)\tilde v(x)\right].$$

Можно легко убедиться, что функции $\tilde{y}_1(x)$ и $\tilde{y}_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\tilde{y}_1'(x) = \tilde{y}_2 + \varepsilon_1(x)\tilde{y}_2 + \varepsilon_2(x)\sin\tilde{\theta}(x) + \\ + \varepsilon_3(x)\cos\tilde{\theta}(x); \tag{8}$$

$$\tilde{y}_2'(x) = \frac{\tilde{b}(x)}{\varepsilon}\tilde{y}_1 - \varepsilon_1(x)\tilde{y}_1 - \frac{\tilde{f}(x)}{\varepsilon} + \\ + \varepsilon_2(x)\cos\tilde{\theta}(x) - \varepsilon_3(x)\sin\tilde{\theta}(x). \tag{9}$$

Легко просматриваются такие граничные условия:

$$(1+\delta_1)\tilde{y}_1(0) + \delta_2\tilde{y}_2(0) = Am_1 + \delta_3; \tag{10}$$

$$\tilde{y}_1(1) = B + \delta_4\cos\tilde{\theta}(1). \tag{11}$$

Зная, что значения $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$, $\varepsilon_3(x)$ бесконечно малы на заданном отрезке [0; 1], а $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ – малые числа, то система уравнений (8)–(9) приведется к виду:

$$\tilde{y}_1'(x) = \tilde{a}_{12}(x)\tilde{y}_2 + \tilde{w}; \tag{12}$$

$$\tilde{y}_2'(x) = \frac{\tilde{b}(x)}{\varepsilon}\tilde{y}_1 - \frac{\tilde{f}(x)}{\varepsilon}, \tag{13}$$

где $\tilde{a}_{12}(x) = 1 + \varepsilon_1(x)$; $\tilde{b}(x) = b(x) - \varepsilon_1(x)$; $\tilde{f}(x)$ практически не отличается от $f(x)$;

$$\tilde{w} = \varepsilon_2(x)\sin\tilde{\theta}(x) + \varepsilon_3(x)\cos\tilde{\theta}(x).$$

Малость величин $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$, $\varepsilon_3(x)$ обеспечивается высоким порядком точности и устойчивостью численных методов, применяемых к решению задач Коши. Каждая задача Коши вида (5)–(7) решается по формулам известных и хорошо работающих численных методов, например, Рунге – Кутты, Адамса, а также *В*-устойчивых и *Д*-устойчивых методов [3].

Граничные условия (10)–(11) приводятся к виду:

$$\tilde{y}_1(0) = \tilde{A}, \quad \tilde{y}_1(1) = \tilde{B}, \tag{14}$$

где $\tilde{A}, \tilde{B}$ мало отличаются от A, B.

Следовательно, $\tilde{y}_1(x)$ и $\tilde{y}_2(x)$ являются решением граничной задачи (12)–(14). Эта задача аппроксимирует граничную задачу (3)–(4) и, следовательно, исходную граничную задачу с пограничным слоем и малым параметром при старшей производной (2). А так как рассматриваемая граничная задача с пограничным слоем устойчива относительно малых изменений коэффициентов системы уравнений и численных коэффициентов, входящих в граничные условия, то устойчив и сам метод ее решения.

Теорема доказана.

Множители $m_1(x, \varepsilon)$ и $m_2(x, \varepsilon)$ регулируют поведение решения и его градиента вблизи граничных точек, стабилизируя тем самым вычислительный процесс.

Теорема об исследовании устойчивости в малом модификации метода дифференциальной ортогональной прогонки для задач с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными или внутренними переходными слоями показывает, что предложенная методика с введением регулирующих множителей позволяет решать широкие классы граничных задач с пограничным слоем [4] и при этом уменьшать или полностью нейтрализовывать те вычислительные трудности, которые присущи многим известным традиционным методикам.

Литература

1. Соловьева И. Ф. Влияние малого параметра при старшей производной на решение граничных задач // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 15–18.

2. Соловьева И. Ф. Численное решение граничных задач с малым параметром при старшей производной // Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов: материалы Междунар. науч.-техн. конф. Минск, 22–24 окт. 2015 г. / Белорус. гос. технол. ун-т. Минск, 2015. С. 177–180.

3. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений; пер. с англ. М.: Мир, 1988. 334 с.

4. Холл Д., Уатт Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1989. 312 с.

References

1. Solov'yeva I. F. The Influence of a Small Parameter in the Highest Derivative on the Solution of Boundary Problems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 15–18 (In Russian).

2. Solov'yeva I. F. Numerical solution of boundary value problems with a small parameter for the highest derivative. *Materialy Mezhdunarodnoy nauchnoprakticheskoy konferentsii "Avtomaticheskiy control' i avtomatizatsiya proizvodstvennykh protsessov"* [Materials of the International Scientific and Technical Conference "Automatic control and automation of production processes"]. Minsk, 2015, pp.177–180 (In Russian).

3. Dekker K., Verver Ya. *Ustoychivost' metodov Runge-Kutty dlya zhestkikh nelineynykh differentsial'-nykh uravneniy* [Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1988. 334 p.

4. Holl D., Uatt D. *Sovremennye chislennye metody resheniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Modern numerical methods for solving ordinary differential equation]. Moscow, Mir Publ., 1989. 312 p.

Информация об авторе

Соловьева Ирина Федоровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ira1234568@tut.by

Information about the author

Solov'yeva Irina Fedorovna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ira1234568@tut.by

Поступила 14.05.2018