

УДК 517.2

А. М. Волк¹, А. И. Вилькоцкий¹, И. И. Скорб²¹Белорусский государственный технологический университет²Белорусский государственный аграрный технический университет**СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ
ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ**

При исследовании процессов разделения жидкостей или их перемешивания, удаления осадка возникает задача моделирования совместного движения несмешивающихся жидкостей в технических конструкциях.

В данной работе рассмотрено стационарное совместное движение двух вязких несмешивающихся жидкостей в горизонтальном канале. Приведены дифференциальные уравнения течения жидкостей, определены граничные условия и найдены точные решения, позволяющие получить необходимые характеристики исследуемых процессов. Приведен пример расчета средних скоростей движения.

Полученная математическая модель может быть использована для исследования процесса перемешивания жидкостей или разделения фаз и удаления осадка в отстойниках технического назначения.

Ключевые слова: горизонтальный канал, вязкие жидкости, стационарное течение, уравнения движения, граничные условия, точные решения, перемешивание, расчет.

A. M. Volk¹, A. I. Wilkocki¹, I. I. Skorb²

Belarusian State Technological University

Belarusian State Agrarian Technical University

**STATIONARY MOVEMENT OF TWO IMMISCIBLE VISCOUS LIQUIDS
IN THE RECTANGULAR CHANNEL**

When studying the processes of liquid separation or mixing, sludge removal, there is a problem of modeling the joint motion of immiscible liquids in engineering structures.

In this paper we consider the stationary joint motion of two viscous immiscible liquids in a horizontal channel. Differential equations of fluid flow are given, boundary conditions are defined and exact solutions are found, which allow to obtain the necessary characteristics of the studied processes. An example of calculation of average speeds is given.

The resulting mathematical model can be used to study the process of mixing liquids or phase separation and sediment removal in tins for technical purposes.

Key words: horizontal channel, viscous liquids, stationary flow, equations of motion, boundary conditions, exact solutions, mixing, calculation.

Введение. Актуальность теоретического исследования механики многофазных сред обусловлена их широким применением к решению практических задач: движение газожидкостных систем, течение суспензий с образованием осадка, фильтрация жидкостей в пористых средах и др.

Моделирование движения вязких жидкостей часто возникает в ситуациях, когда имеется совместное движение двух жидких сред (или жидкости и газа), контактирующих по некоторой поверхности. Пример такой ситуации – система вода – нефть [1, 2].

Гидравлический способ удаления осадка в ирригационных, водопроводных горизонтальных отстойниках и отстойниках животноводческих комплексов осуществляется в результате движения двух вязких жидкостей в каналах различной формы.

Систематическому исследованию механики многофазных сред посвящены монографии Р. И. Нигматуллина и С. Л. Соу [3, 4]. Система уравнений межфазного течения выводится на основании законов сохранения массы, импульса и энергии сплошной среды. Такими уравнениями являются уравнения Навье – Стокса. Данные уравнения точны в теоретическом плане, но практически не позволяют получить решение в общем виде, описывающее движение фаз.

Определенный интерес представляют математические модели движения несмешивающихся вязких жидкостей, имеющие точные решения.

Основная часть. Исследуем процесс перемешивания двух несмешивающихся жидкостей в канале прямоугольной формы. На рис. 1 и 2 представлены форма канала и его сечение соответственно.

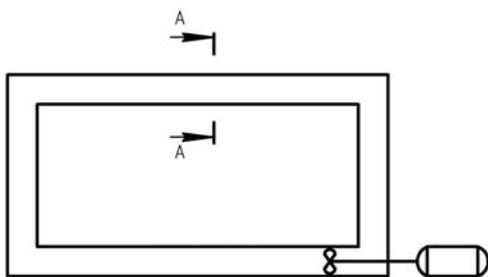


Рис. 1. Форма отстойника

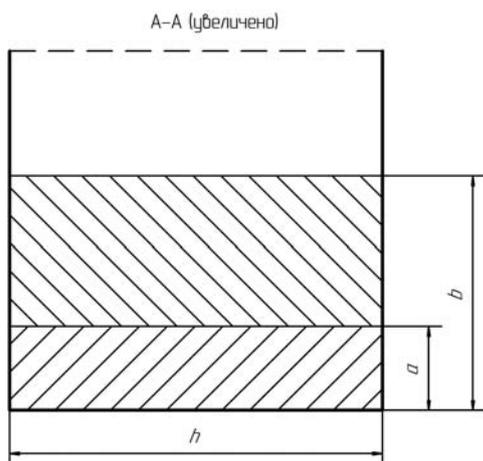


Рис. 2. Поперечное сечение канала

Рассмотрим стационарное движение двух вязких несмешивающихся жидкостей в канале прямоугольной формы (рис. 3).

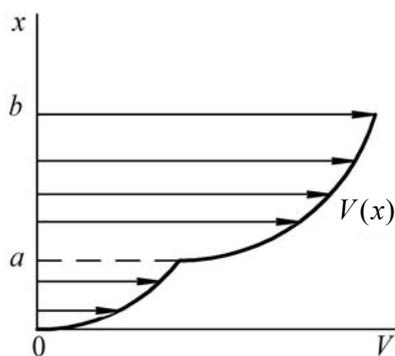


Рис. 3. Схема течения двух несмешивающихся жидкостей

Баланс количества движения для тонкого слоя вязкой жидкости в горизонтальном канале длиной L под воздействием перепада давления ΔP приводит к следующему дифференциальному уравнению [4, 5]:

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \frac{\Delta P}{L}. \quad (1)$$

Интегрируя данное уравнение, получим:

$$d\tau_{xz} = \frac{\Delta P}{L} x + c_1. \quad (2)$$

Обозначив $c_0 = \Delta P / L$, получим дифференциальное уравнение для скорости:

$$-\mu \frac{dV(x)}{dx} = c_0 x + c_1, \quad (3)$$

где μ – динамическая вязкость, Н·с/м².

Отсюда:

$$V(x) = -\frac{c_0}{2\mu} x^2 - \frac{c_1}{\mu} x + c_2. \quad (4)$$

Полученной зависимостью будем описывать движение в открытом канале нижнего и верхнего слоев жидкости соответственно, считая c_0, c_1, c_2, c_3 произвольными постоянными:

$$V_1(x) = -\frac{c_0}{2\mu_1} x^2 - \frac{c_1}{\mu_1} x + c_2; \quad (5)$$

$$V_2(x) = -\frac{c_0}{2\mu_2} x^2 - \frac{c_1}{\mu_2} x + c_3. \quad (6)$$

Произвольные постоянные находим из граничных условий [5, 6].

Из условия прилипания по дну канала получим:

$$x = 0, \quad V_1(0) = 0, \quad c_2 = 0.$$

На поверхности потока отсутствуют касательные напряжения сил трения, поэтому

$$\left. \frac{dV_2(x)}{dx} \right|_{x=b} = 0, \quad -\frac{c_0}{\mu_2} b - \frac{c_1}{\mu_2} = 0, \quad c_1 = -c_0 b,$$

где b – высота заполненного канала, м.

В результате получаем зависимости для скоростей движущихся жидкостей:

$$V_1(x) = -\frac{c_0}{2\mu_1} x^2 + \frac{c_0 b}{\mu_1} x; \quad (7)$$

$$V_2(x) = -\frac{c_0}{2\mu_2} x^2 + \frac{c_0 b}{\mu_2} x + c_3. \quad (8)$$

Приравниваем скорости на границе раздела жидкостей $V_1(a) = V_2(a)$ получим:

$$\begin{aligned} -\frac{c_0}{2\mu_1} a^2 + \frac{c_0 b}{\mu_1} a &= -\frac{c_0}{2\mu_2} a^2 + \frac{c_0 b}{\mu_2} a + c_3; \\ c_3 &= \frac{c_0 a(2b-a)}{2\mu_1} - \frac{c_0 a(2b-a)}{2\mu_2} = \\ &= \frac{c_0 a(2b-a)}{2} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

где a – высота нижнего слоя жидкости, м.

Находим средние значения скоростей в канале единичной ширины:

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 &= \frac{1}{a} \int_0^a V_1(x) dx = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \left(-\frac{c_0}{2\mu_1} x^2 + \frac{c_0 b}{\mu_1} x \right) dx = \\ &= \frac{1}{a} \left(-\frac{c_0 x^3}{6\mu_1} + \frac{c_0 b x^2}{2\mu_1} \right) \Big|_0^a = \\ &= \frac{1}{a} \left(-\frac{c_0 a^3}{6\mu_1} + \frac{c_0 b a^2}{2\mu_1} \right) = \frac{c_0 a(3b-a)}{6\mu_1}; \quad (10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{V}_2 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b V_2(x) dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(-\frac{c_0}{2\mu_2} x^2 + \frac{c_0 b}{\mu_2} x + c_3 \right) dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \left(-\frac{c_0 x^3}{6\mu_2} + \frac{c_0 b x^2}{2\mu_2} + c_3 x \right) \Big|_a^b = \\ &= \frac{1}{b-a} \left(-\frac{c_0(b^3-a^3)}{6\mu_2} + \frac{c_0 b(b^2-a^2)}{2\mu_2} + c_3(b-a) \right) = \\ &= \frac{c_0(b-a)^2}{3\mu_2} + \frac{c_0 a(2b-a)}{2\mu_1}. \quad (11)\end{aligned}$$

Составим условие материального баланса для канала прямоугольной формы:

$$\frac{\bar{V}_1 a h + \bar{V}_2 (b-a) h}{b h} = \frac{Q}{3600 b h}, \quad (12)$$

где h – ширина прямоугольного канала, м; Q – производительность насоса, м³/ч.

Обозначив $q = Q / 3600$, получим

$$\bar{V}_1 a h + \bar{V}_2 (b-a) h = q. \quad (13)$$

Из последнего уравнения определяем постоянную величину c_0 , входящую в зависимости (10), (11) для средних значений скоростей несмешивающихся жидкостей, и можем рассчитать все необходимые гидродинамические характеристики исследуемого движения.

Полученные распределения скоростей верхнего и нижнего слоев вязкой жидкости дают возможность рассчитать их средние скорости, а также время, необходимое для перемешивания, при некоторой заданной производительности насоса.

Рассмотрим пример расчета. Примем следующие значения, входящие в математическую модель параметров:

$$h = 1,2 \text{ м}; a = 0,2 \text{ м}; b = 0,8 \text{ м}; Q = 200 \text{ м}^3/\text{ч};$$

$$\mu_1 = 0,030 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2; \mu_2 = 0,015 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2.$$

Для приведенных данных получаем средние скорости для нижнего и верхнего слоев жидкости:

$$\bar{V}_1 = 0,014 \text{ м}/\text{с}; \bar{V}_2 = 0,072 \text{ м}/\text{с}.$$

Заключение. Получены точные решения уравнений движения вязких несмешивающихся жидкостей в горизонтальных каналах. Данная математическая модель может быть использована для исследования процесса перемешивания или разделения фаз и удаления осадка в отстойниках технического назначения.

Литература

1. Андреев В. К. Эволюция совместного движения двух вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое под действием перепада давления // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49, № 4. С. 94–107.
2. Гельперин Н. И. Основные процессы и аппараты химической технологии: в 2 кн. М.: Химия, 1981. Кн. 1. 384 с. Кн. 2. 426 с.
3. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред: в 2 ч. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с. Ч. 2. 360 с.
4. Соу С. Л. Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971. 538 с.
5. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М.: Химия, 1974. 688 с.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.

References

1. Andreev V. K. Evolution of the joint motion of two viscous heat-conducting liquids in a flat layer under the effect of pressure drop. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2008, vol. 49, no. 4, pp. 94–107 (In Russian).
2. Gel'perin N. I. *Osnovnye protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii: v 2 knigakh* [The main processes and apparatus of chemical technology: in 2 vol.]. Moscow, Khimiya Publ., 1981. Vol. 1, 384 p. Vol. 2, 426 p.
3. Nigmatullin R. I. *Dinamika mnogofaznykh sred: v 2 chastyakh* [Dynamics of multiphase media: in 2 parts]. Moscow, Nauka Publ., 1987. Part 1, 464 p. Part 2, 360 p.
4. Sou S. L. *Gidrodinamika mnogofaznykh sistem* [Hydrodynamics of multiphase systems]. Moscow, Mir Publ., 1971. 538 p.

5. Byerd R., St'yuart W., Layftut E. *Yavleniya perenosa* [Transport phenomena]. Moscow, Khimiya Publ., 1974. 688 p.

6. Shlikhting G. *Teoriya pogramichnogo sloya* [The theory of the boundary layer]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 742 p.

Информация об авторах

Волк Анатолий Матвеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: volk@belstu.by

Вилькоцкий Андрей Иванович – кандидат технических наук, доцент кафедры процессов и аппаратов химических производств. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: andrzej.wilkocki@belstu.by

Скорб Игорь Игоревич – старший преподаватель кафедры технологий и механизации животноводства. Белорусский государственный аграрный технический университет (220023, г. Минск, пр-т Независимости, 99, Республика Беларусь). E-mail: igor.bgatu@mail.ru

Information about the authors

Volk Anatoliy Matveevich – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: volk@belstu.by

Wilkocki Andrzej Iwanowicz – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Processes and Apparatus for Chemical Production. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: andrzej.wilkocki@belstu.by

Skorb Igor' Igorevich – Senior Lecturer, the Department of Technologies and Mechanization of Livestock Breeding. Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: igor.bgatu@mail.ru

Поступила 14.05.2018