ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.935.2+519.71

И. М. Борковская, О. Н. Пыжкова
Белорусский государственный технологический университет

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Исследование гибридных систем, имеющих многочисленные приложения в автомобилестроении, авиастроении, робототехнике и других областях, и решение различных задач управления для них позволяет значительно расширить область применения математической теории управления. В работе приводятся результаты по задачам управления для некоторых классов гибридных систем, в частности по задачам относительной управляемости и достижимости для дискретно-непрерывных систем. Также выделяются результаты по исследованию возможности стабилизации дискретно-непрерывных систем и систем с многомерным (2D-мерным) временем. Анализируются и другие задачи качественной теории управления для гибридных динамических систем.

Ключевые слова: относительная управляемость, стабилизация, гибридные дискретно-непрерывные системы, системы с многомерным временем.

I. M. Borkovskaya, O. N. Pyzhkova
Belarusian State Technological University

THE PROBLEMS OF CONTROL AND STABILIZATION FOR HYBRID DYNAMIC SYSTEMS

The study of hybrid systems that have numerous applications in the automobile industry, aircraft building, robotics and other areas and the solution of various control problems for them makes it possible to expand the scope of the mathematical control theory significantly. The paper provides the results on control problems classes of hybrid systems, for example, on problems of relative controllability and reachability for discrete-continuous systems. The results on the investigation of the possibility of stabilization of discrete-continuous systems and systems with multidimensional (2D-dimensional) time are also highlighted. Other problems of the qualitative control theory for hybrid dynamical systems are analyzed.

Key words: relative controllability, stabilization, hybrid discrete-continuous systems, systems with multidimensional time.

Введение. Изучение поведения и конструирование систем управления, обладающих требуемыми в приложениях свойствами, является ключевой задачей теории управления движением. Исследование гибридных систем, имеющих многочисленные приложения в автомобилестроении, авиастроении, робототехнике и других областях и решение различных задач управления для них позволяет значительно расширить область применения математической теории управления. Для гибридных систем могут быть сформулированы различные известные задачи оптимального управления, достижимости и верификации, исследования на устойчивость, задачи стабилизации, идентификации и др. Важнейшими являются вопросы представления решений гибридных систем, относительной управляемости, модального управления.

Задача достижимости во многих случаях рассматривается как задача построения множества достижимости гибридной системы, содержащего всевозможные состояния, в которые можно перейти при помощи допустимых управляющих воздействий из фиксированного в заданный начальный момент времени состояния. К задачам достижимости примыкают задачи верификации, в которых требуется выяснить, может ли система попасть в одно из «нежелательных» состояний либо, наоборот, в «желательное» состояние. Это, например, может потребоваться с целью обеспечения безопасного функционирования системы. Свойствам гибридных систем посвящены многие работы [1–4].

Виды гибридных систем многообразны. Среди них выделяют ГДР-системы (дифференциально-разностные системы), которые описывают процессы, где наряду с динамическими встречаются и алгебраические зависимости, и ГДН-системы (дискретно-непрерывные системы), содержащие как непрерывные, так и дискретные переменные. Важным классом гибридных систем является класс систем с многомерным (2D-мерным) временем.

В работе приводятся результаты по задачам управления для некоторых классов гибридных систем, выделяются результаты по исследованию возможности стабилизации систем, т. е. получению условий на параметры системы, при которых существует регулятор, обеспечивающий важнейшее свойство – устойчивость замкнутой системы управления.

Основная часть. Управляемость – одно из важнейших свойств системы управления, описывающее возможность перевести систему из одного состояния в другое. Исследование системы на управляемость является одним из важных шагов в синтезе управляющих воздействий. Рассмотрим дискретно-непрерывную систему:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh),\ t \in [kh,(k+1)h); \quad (1)$$

$$y(kh+h) = A_{21}x(kh) + A_{22}y(kh) + Bu(kh); \quad (2)$$

$$k = 0, 1, 2, ...$$

с точки зрения ее относительной управляемости и достижимости [5, 6]. В формулах (1), (2) $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(kh) \in \mathbb{R}^m$, $u(kh) \in \mathbb{R}^r$, $h > 0$, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B – постоянные матрицы соответствующих размеров с начальными условиями

$$x(0) = x(+0) = x_0,\ y(0) = y_0. \quad (3)$$

При заданном моменте времени $t_1 = qh,\ q \in \mathbb{N}$ систему (1), (2) назовем t_1-относительно управляемой, если для любых начальных данных $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ в условиях (3) найдется управление $u(kh) \in \mathbb{R}^r$, $k = 0, 1, ..., q-1$ такое, что соответствующее решение $x(t), t \ge 0$, $y(kh)$, $k = 0, 1, ...$ системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $x(t_1) = 0$, $y(t_1) = 0$. Если соответствующее решение $x(t), t \ge 0$, $y(kh), k = 0, 1, ...$ системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $x(t_1) = 0$, назовем систему t_1-относительно управляемой по x. При выполнении свойства $y(t_1) = 0$ назовем систему t_1-относительно управляемой по y.

Систему (1), (2) назовем t_1-относительно достижимой, если для любых векторов $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$; $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^m$ в условиях (3) найдется управление $u(kh) \in \mathbb{R}^r, k = 0, 1, ..., q-1$, такое, что соответствующее решение $x(t), t \ge 0$, $y(kh), k = 0, 1, ...$ системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$. Систему назовем t_1-относительно достижимой по x, если для любых векторов $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$; $y_0 \in \mathbb{R}^m$ в условиях (3) найдется управление $u(kh) \in \mathbb{R}^r$, $k = 0, 1, ..., q-1$ такое, что соответствующее решение $x(t), t \ge 0$, $y(kh)$, $k = 0, 1, ...$ системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $x(t_1) = x_1$. Система t_1-относительно достижима по y, если для любых векторов $x_0 \in \mathbb{R}^n$; $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^m$ в условиях (3) найдется управление $u(kh) \in \mathbb{R}^r$, $k = 0, 1, ..., q-1$ такое, что соответствующее решение $x(t), t \ge 0$, $y(kh), k = 0, 1, ...$ системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $y(t_1) = y_1$.

Применяя формулу Коши, получим:

$$x(kh+h) = e^{A_{11}(kh+h-kh)}x(kh) + \int_{kh}^{kh+h} e^{A_{11}(kh+h-\tau)}A_{12}y(kh)d\tau = e^{A_{11}h}x(kh) + \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}d\tau A_{12}y(kh).$$

Введем обозначения:

$$z[k] = \begin{bmatrix} x(kh) \\ y(kh) \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} = \Delta,$$

$$\sum\nolimits_h = \begin{bmatrix} e^{A_{11}h} & \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}d\tau\, A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Для описания $z[k]$ получаем дискретную систему:

$$z[k+1] = \sum\nolimits_h z[k] + \Delta u(kh),\ k = 0,1,... .$$

Рассматриваемые задачи управляемости и достижимости приводят к соответствующим проблемам для дискретных систем. Задача относительной управляемости дискретно-непрерывной системы (1), (2) сводится к задаче полной управляемости (в смысле Калмана) указанной выше дискретной системы.

Теорема 1. Условие

$$rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta, (\Sigma_h)^q] = \\ = rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta]$$

является необходимым и достаточным для qh-относительной управляемости системы (1), (2).

Теорема 2. Условие

$$rank(H[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta, (\Sigma_h)^q]) = \\ = rank(H[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta])$$

является необходимым и достаточным для qh-относительной управляемости по x системы (1), (2) при $H = [I_n \quad 0]$, для qh-относительной управляемости по y системы (1), (2) при $H = [0 \quad I_m]$, где символ I_k обозначает единичную $k \times k$ матрицу.

Отметим, что если система (1), (2) не является qh-относительно управляемой при $q = n + m$, то она не будет qh-относительно управляемой и при $q > n + m$.

Систему (1), (2) считают относительно управляемой, если она qh-относительно управляема хотя бы при одном натуральном числе q. Тогда из теоремы 1 вытекает критерий относительной управляемости системы (1), (2), заключающийся в требовании

$$rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{m+n-1}\Delta, (\Sigma_h)^{m+n}] = \\ = rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{m+n-1}\Delta].$$

Условие

$$rank(H[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{m+n-1}\Delta, (\Sigma_h)^{m+n}]) = \\ = rank(H[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{m+n-1}\Delta])$$

является необходимым и достаточным для относительной управляемости по x системы (1), (2) при $H = [I_n \quad 0]$ и для относительной управляемости по y при $H = [0 \quad I_m]$.

Имеют место следующие (теоремы 3, 4) условия t_1-относительной достижимости системы (1), (2):

Теорема 3. Условие

$$rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta] = n + m$$

является необходимым и достаточным для qh-относительной достижимости системы (1), (2).

Теорема 4. Условие

$$rank(H[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta, (\Sigma_h)^q]) = rank\, H$$

является необходимым и достаточным для qh-относительной достижимости по x системы (1), (2) при $H = [I_n \quad 0]$, для qh-относительной достижимости по y системы (1), (2) при $H = [0 \quad I_m]$.

Если система (1), (2) не является qh-относительно достижимой при $q = n + m$, то она не будет qh-относительно управляемой и при $q > n + m$. Введем понятие относительной достижимости как qh-относительной достижимости хотя бы при одном натуральном числе q, тогда критерий относительной достижимости можно сформулировать следующим образом: система (1), (2) является относительно достижимой тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{n+m-1}\Delta] = n + m.$$

В дальнейшем предстоит исследовать вопросы qh-относительной управляемости и достижимости по x в случае произвольного конечного момента времени $t_1 \neq qh, q \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь такой класс гибридных систем, как гибридные системы с многомерным (2D-мерным) временем:

$$\dot{x}_1(t, k) = A_{11}x_1(t, k) + A_{12}x_2(t, k) + B_1u(t,k), \quad (4)$$
$$t \in [0, +\infty);$$

$$x_2(t, k+1) = A_{21}x_1(t, k) + A_{22}x_2(t, k) + B_2u(t,k), \quad (5)$$
$$k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,$$

где $\dot{x}_1(t, k) = \dfrac{\partial x_1(t, k)}{\partial t}$; $x_1(t, k) \in \mathbb{R}^{n_1}$; $x_2(t, k) \in \mathbb{R}^{n_2}$; $x_1(t, k), x_2(t, k)$ – n_1- и n_2-векторы состояния системы; $u(t, k) \in \mathbb{R}^r$ – вектор управляющего воздействия, $t \geq 0, k = 0, 1, 2, \ldots$; $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ – постоянные матрицы соответствующих размеров, с граничными (начальными) условиями:

$$x_1(0, k) = x_1(k),\ \ k = 0, 1, 2, ...;\ \ x_2(t, 0) = x_2(t),$$
$$t \in [0, +\infty).$$

В работе [5] исследована (t_1, k_1)-управляемость системы (4), (5) относительно x_1 и представлен параметрический критерий управляемости с использованием решений определяющего уравнения. В дальнейшем методика может быть применена для исследования управляемости относительно x_2, а также относительно x_1, x_2.

Исследуем стабилизируемость указанных выше видов систем [7–9]. Свойство стабилизируемости является важнейшим требованием, предъявляемым к реальным системам управления. Присоединим к дискретно-непрерывной системе (1), (2) регулятор вида

$$u(kh) = Q_1\, x(kh) + Q_2\, y(kh), k = 0, 1, ..., \quad (6)$$

где Q_1 и Q_2 – постоянные матрицы размеров $r \times n$ и $r \times m$ соответственно. Замкнутая система имеет вид:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh),\ t \in [kh, (k+1)h);$$

$$y(kh+h) = (A_{21} + BQ_1)x(kh) + \\ + (A_{22} + BQ_2)y(kh).$$

Теорема 5. Система (1), (2) является стабилизируемой дискретным регулятором (6) тогда и только тогда, когда

$$rank[\lambda I_{n+m} - \Sigma_h, \Delta] = n + m$$

для всех комплексных чисел λ, таких, что $|\lambda| \geq 1$.

Рассмотрим теперь гибридную 2D-систему (4), (5). Уравнение вида

$$\det\begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \mu I_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix} = 0 \qquad (7)$$

назовем характеристическим уравнением, а его корни (в общем случае комплексные) – характеристическими числами (значениями) системы (4), (5). В работе [8] введены определения разных видов устойчивости. Необходимые условия асимптотической устойчивости сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 6. Если система (4), (5) слабо асимптотически устойчива, то для корней (λ, μ) характеристического уравнения (7) выполняется условие: $\mathrm{Re}\lambda < 0$ и $|\mu| \leq 1$ или $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$ и $|\mu| < 1$; если система (4), (5) сильно асимптотически устойчива, то для корней (λ, μ) характеристического уравнения (7) соблюдается условие: $\mathrm{Re}\lambda < 0$ и $|\mu| < 1$; если система (4), (5) (α, γ)-устойчива, то для корней (λ, μ) характеристического уравнения (7) выполняется условие $\mathrm{Re}\lambda \leq -\alpha$ и $|\mu| \leq \gamma$.

В скалярном случае, когда $A_{11} = a_{11}$, $A_{12} = a_{12}$, $A_{21} = a_{21}$, $A_{22} = a_{22}$ – действительные числа, верны теоремы 7, 8.

Теорема 7. Для того чтобы система (4), (5) скалярных уравнений была сильно асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$1)\ a_{12}a_{21} = 0;\ \ 2)\ |a_{22}| < 1,\ a_{11} < 0.$$

Теорема 8. Для того чтобы система (4), (5) скалярных уравнений была (α, γ)-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$1)\ a_{12}a_{21} = 0; \quad 2)\ a_{11} \leq -\alpha, |a_{22}| < \gamma.$$

Присоединим к системе (4), (5) регулятор, не выводящий ее за пределы заданного класса:

$$u(t,k) = Q_1 x_1(t,k) + Q_2 x_2(t,k), \qquad (8)$$

где Q_1 – матрица $r \times n_1$; Q_2 – матрица $r \times n_2$.

Систему (4), (5) назовем стабилизируемой (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (8), если найдутся такие матрицы Q_1, Q_2 из (14), что замкнутая система (4), (5), (8) является сильно асимптотически устойчивой. Можно показать, что верны следующие утверждения о возможности стабилизации системы (4), (5) в скалярном случае.

Теорема 9. Для того чтобы система (4), (5) в скалярном случае была стабилизируема (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (8), достаточно выполнения хотя бы одного из условий:

$$1)\left|a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1}\right| < 1;\quad 2)\ a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0.$$

Теорема 10. Для того чтобы система (4), (5) в скалярном случае была стабилизируема (в смысле (α, γ)-устойчивости) регулятором (8), достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$1)\ \left|a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1}\right| < \gamma;\quad 2)\ a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} \leq -\alpha.$$

Заключение. В работе проведен анализ результатов по задачам теории управления для некоторых классов гибридных систем, в частности, по относительной управляемости и достижимости, а также стабилизации дискретно-непрерывных систем. Исследованы возможности стабилизации линейной гибридной 2D-системы в симметрической форме. Представлены достаточные условия стабилизируемости системы регулятором, не выводящим систему за пределы заданного класса.

Литература

1. De la Sen M. A note about total stability of a class of hybrid systems // Informatica. 2006. Vol. 17, no. 4. P. 565–576.

2. Van der Schaft A., Schumacher H. An introduction to hybrid dynamical systems. Berlin: Springer, 2000. 324 p.

3. Ахундов А. А. Управляемость линейных гибридных систем // Управляемые системы: сб. ст. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1975. Вып. 14. С. 4–10.

4. Точилин П. А., Куржанский А. Б. Задачи достижимости и синтеза управлений для гибридных систем. М.: МГУ, 2008. 176 с.

5. Марченко В. М., Пыжкова О. Н. Относительная управляемость линейных стационарных гибридных систем с многомерным временем // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. 2008. Вып. XVI. С. 3–5.

6. Марченко В. М., Пыжкова О. Н. Относительная достижимость линейных стационарных систем, управляемых дискретным регулятором // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 11–13.

7. Марченко В. М., Борковская И. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 7–10.

8. Марченко В. М., Борковская И. М., Пыжкова О. Н. Устойчивость гибридных динамических систем с многомерным временем // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 5–9.

9. Борковская И. М., Пыжкова О. Н. О стабилизации некоторых видов гибридных динамических систем // Труды БГТУ. 2017. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 5–10.

References

1. De la Sen M. A note about total stability of a class of hybrid systems. *Informatica*, 2006, vol. 17, no. 4, pp. 565–576.

2. Van der Schaft A., Schumacher H. An introduction to hybrid dynamical systems. Berlin, Springer, 2000. 324 p.

3. Akhundov A. A. Controllability of the linear hybrid systems. *Upravlyaemye sistemy: sbornik statey* [Controlled systems: digest of articles]. Novosibirsk, Institut matematiki Publ., 1975, pp. 4–10 (In Russian).

4. Tochilin P. A., Kurzhanskiy A. B. *Zadachi dostizhimosti i sinteza upravleniy dlya gibridnykh sistem* [The tasks of reachability and control synthesis for hybrid systems]. Moscow, MGU Publ., 2008. 176 p.

5. Marchenko V. M., Pyzhkova O. N. Relative controllability of the linear stationary hybrid systems with multidimensional time. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physics and Mathematics. Informatics, 2008, issue XVI, pp. 3–5 (In Russian).

6. Marchenko V. M., Pyzhkova O. N. Relative reachability of the linear stationary hybrid systems controlled by the discrete regulator. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 11–13 (In Russian).

7. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M. Stability and stabilization of the linear hybrid discrete-continues stationary systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 7–10 (In Russian).

8. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N. The stability of hybrid dynamic 2-D-systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 5–9 (In Russian).

9. Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N. On the stabilization of some kinds of hybrid dynamic systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2017, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 5–10 (In Russian).

Информация об авторах

Борковская Инна Мечиславовна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Пыжкова Ольга Николаевна − кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Information about the authors

Borkovskaya Inna Mechislavovna − PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Pyzhkova Olga Nikolaevna − PhD (Physics and Mathematics), Head of the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Поступила 10.05.2018