

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

# **ДИНАМИКА МАШИН И ВИБРОЗАЩИТА**

**Лекции для студентов специальности  
1-36 07 01 «Машины и аппараты  
химических производств  
и предприятий строительных материалов»**

Минск 2009

УДК 621.03(042.4)

ББК 34.5я73

Д46

Рассмотрены и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета.

**С о с т а в и т е л и :**

*В. В. Белов, Г. М. Хвесько*

**Р е ц е н з е н т ы :**

доцент кафедры физики БГУИР,  
кандидат физико-математических наук *В. В. Аксенов*;  
доцент кафедры теоретической механики БНТУ,  
кандидат технических наук *Н. И. Горбач*

**Динамика машин и виброзащита** : лекции для студентов  
Д46 специальности 1-36 07 01 «Машины и аппараты химических производств и предприятий строительных материалов» / сост. В. В. Белов, Г. М. Хвесько. – Минск : БГТУ, 2009. – 129 с.  
ISBN 978-985-434-916-9.

Рассмотрено динамическое поведение моделей жестких и упругих механических систем с одной и несколькими степенями свободы. Основное внимание при этом уделено изложению подходов и методов, лежащих за рамками стандартных курсов теоретической механики и теории машин и механизмов. Значительный объем занимает исследование колебательного движения как при малых отклонениях системы от положения устойчивого равновесия, так и в случаях, когда отклонения малыми не являются и необходим учет нелинейных эффектов. Рассмотрены также способы защиты от колебаний.

Предназначено для студентов специальности 1-36 07 01 «Машины и аппараты химических производств и предприятий строительных материалов».

**УДК 621.03(042.4)**

**ББК 34.5я73**

**ISBN 978-985-434-916-9**

© УО «Белорусский государственный технологический университет», 2009

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью изучения данной дисциплины является продолжение фундаментальной подготовки будущих инженеров-механиков в области механических явлений для успешного перехода к усвоению специальных предметов и для использования полученных знаний в дальнейшей деятельности. Современные требования к анализу и синтезу быстроходных машин диктуют необходимость существенного выхода за рамки стандартных курсов теоретической механики и теории машин и механизмов, в которых по понятным причинам рассматриваются, как правило, точно решаемые модели.

Более реалистические модели оказываются слишком сложными для теоретического исследования объектами. В этих условиях необходимо иметь в распоряжении методы получения хотя бы приближенных аналитических решений, дающих возможность сделать качественные и количественные оценки изучаемого явления, что особенно актуально при рассмотрении различного рода колебаний механических устройств. Основной задачей данного курса как раз и является ознакомление студентов с некоторыми из таких методов. Для понимания и усвоения применяемого при этом математического аппарата студенты должны знать дифференциальное и интегральное исчисления функций одной и многих переменных, теорию степенных рядов и рядов Фурье, а также общие теоремы динамики и уравнения Лагранжа второго рода.

В результате изучения курса и решения задач студенты должны получить навыки в построении динамических моделей, отражающих основные свойства реальных машин, в проведении соответствующих расчетов и анализе полученных результатов.

# 1. ДИНАМИКА ЖЕСТКИХ СИСТЕМ

Описание реальных механизмов с учетом всех их особенностей представляет собой очень сложную проблему, поэтому при теоретическом исследовании используются идеализированные модели, дающие возможность учесть основные детали конструкции в приближенной (упрощенной) форме. С этой точки зрения механические системы можно разделить на две категории: жесткие и упругие.

В первом случае элементы (звенья), составляющие систему, считаются абсолютно твердыми, т. е. недеформирующимися под действием сил или моментов. Поскольку деформации звеньев, как правило, малы по сравнению с размерами машин, решение многих задач динамики будет при этом мало отличаться от точного. Но даже считая все звенья абсолютно твердыми, не удастся избавиться от всех трудностей, поскольку только системы с круглыми дисками описываются достаточно простыми линейными уравнениями, а системы, в состав которых входят массивные стержни, описываются уже нелинейными дифференциальными уравнениями, теория которых далека от завершения.

С еще большими трудностями приходится сталкиваться при описании упругих систем, когда все элементы машин, передающие движение, а также несущие части считаются упругими (деформируемыми). Даже с учетом того, что деформации являются не слишком большими и не проявляются гистерезисные эффекты, число степеней свободы в таких системах оказывается бесконечным и их динамическое поведение определяется уравнениями, находящимися далеко за рамками нашего курса. К вопросу о том, как поступать в данном случае, мы вернемся позже, а сначала сосредоточимся на рассмотрении жестких систем.

## ***1.1. Уравнения движения механизмов с жесткими звеньями***

Динамическое поведение систем, состоящих из абсолютно твердых тел, описывается двумя группами уравнений, одна из которых имеет векторный характер (теоремы о движении центра масс и изменении момента импульса, принцип Даламбера), а вторая – скалярный (теорема об изменении кинетической энергии, общее уравнение динамики, уравнения Лагранжа второго рода). В уравнения первой группы так или иначе входят реакции связей, наложенных на систе-

му, уравнения второй группы реакций связей (идеальных) не содержат, так что они непосредственно и определяют уравнения движения – связь между действующими активными силами и соответствующими ускорениями.

Задачи динамики жестких систем заключаются в том, чтобы по заданным силам или моментам определить закон движения системы или по заданному закону движения определить силы, под действием которых оно происходит. Поэтому применение тех или иных уравнений и диктуется стоящими перед исследователем вопросами. В данном курсе мы будем использовать уравнения Лагранжа, имея в виду их наибольшую общность в получении уравнений движения для систем с произвольным числом степеней свободы.

Начнем с простейшего случая системы с одной степенью свободы, для которой необходимо только одно уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad (1.1.1)$$

где  $q$  и  $\dot{q}$  – обобщенная координата и обобщенная скорость соответственно,  $T$  – кинетическая энергия системы:

$$T = \sum_k \frac{m_k v_k^2}{2}, \quad (1.1.2)$$

$Q$  – обобщенная сила, определяемая соотношением

$$Q = \sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q}. \quad (1.1.3)$$

Здесь  $\vec{F}_k$  – сила, действующая на систему в точке, радиус-вектор которой равен  $\vec{r}_k$ . В практических приложениях, однако, определением (1.1.3) пользуются редко, обобщенную силу проще найти, сообщив системе возможное перемещение и вычислив работу всех сил на этом перемещении. Выразив затем все перемещения через изменение обобщенной координаты, получим обобщенную силу как коэффициент при этом изменении:

$$\delta A = \sum_k \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = Q \delta q. \quad (1.1.4)$$

Кинетическую энергию при этом необходимо выразить через обобщенные переменные. Положение каждой точки определяется, с одной стороны, радиусом-вектором  $\vec{r}_k$ , а с другой – обобщенной координатой, следовательно, радиус-вектор должен быть функцией этой

обобщенной координаты. Считая, что на систему наложены стационарные связи, эту зависимость можно записать в виде

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q), \quad (1.1.5)$$

тогда скорость точки, равная производной от радиуса-вектора по времени, выразится через обобщенную скорость с помощью соотношения

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q} \dot{q}. \quad (1.1.6)$$

Подставим это выражение в определение кинетической энергии (1.1.2)

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q} \dot{q}^2 = \frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2. \quad (1.1.7)$$

Здесь введено обозначение

$$m(q) = \sum_k m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q} \quad (1.1.8)$$

для так называемого инерционного коэффициента, который характеризует распределение масс в системе и зависит от обобщенной координаты, если связь (1.1.5) не является линейной. Имея в распоряжении кинетическую энергию (1.1.7), выраженную через обобщенные координаты и скорости, вычислим производные, входящие в уравнение Лагранжа (1.1.1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m(q) \dot{q}, \quad (1.1.9)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{dm(q)}{dq} \dot{q}^2 + m(q) \ddot{q}, \quad (1.1.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{dm(q)}{dq} \dot{q}^2. \quad (1.1.11)$$

Подставив (1.1.9)–(1.1.11) в (1.1.1), получим

$$m(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{dm(q)}{dq} \dot{q}^2 = Q. \quad (1.1.12)$$

Таким образом, уравнение Лагранжа (1.1.1) после выполнения предусмотренных операций превратилось в дифференциальное уравнение второго порядка, что вполне естественно, поскольку все динамические уравнения в конечном счете являются именно таковыми. В общем случае уравнение (1.1.12) нелинейно.

В качестве примера составления уравнения движения рассмотрим один из самых распространенных механизмов, использующийся, например, в поршневых компрессорах, механических прессах, – кривошипно-ползунный, представленный на рисунке.

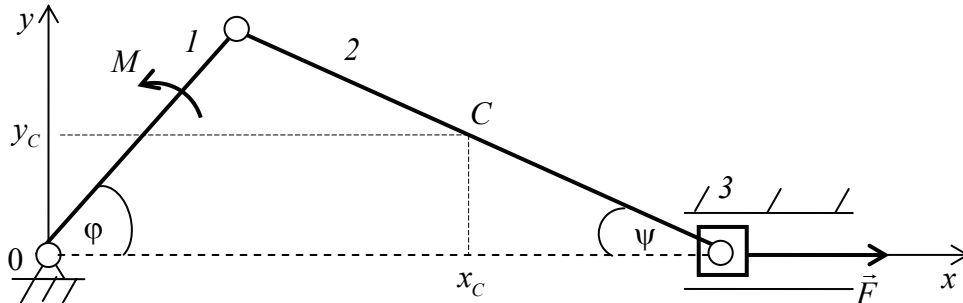


Рисунок. Кривошипно-ползунный механизм

Он состоит из двух однородных стержней 1 и 2, длины которых  $l_1$  и  $l_2$ , и ползуна 3, массы их равны  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  соответственно. На кривошип 1, который может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через точку 0, действует пара сил, момент которых равен  $M$ , на ползун 3, движущийся поступательно внутри цилиндра, действует сила  $\vec{F}$ , шатун 2 при этом совершает плоское движение. Кинетическая энергия такой системы равна сумме кинетических энергий этих трех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad (1.1.13)$$

причем

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2, \quad (1.1.14)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_2^2, \quad (1.1.15)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2. \quad (1.1.16)$$

Механизм имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол поворота кривошипа 1, т. е. положим  $q = \varphi$ . Все скорости, фигурирующие в (1.1.14)–(1.1.16), нужно выразить через обобщенную скорость, которой в данном случае будет угловая скорость кривошипа:  $\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega_1$ . Проще всего это можно сделать в координатной форме. Из рисунка видно, что

$$x_C = l_1 \cos \varphi + \frac{1}{2} l_2 \cos \psi, \quad (1.1.17)$$

$$y_C = \frac{1}{2}l_2 \sin \psi, \quad (1.1.18)$$

$$x_3 = l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \psi, \quad (1.1.19)$$

поэтому проекции скорости центра масс звена 2 на оси равны

$$\dot{x}_C = -l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - \frac{1}{2}l_2 \dot{\psi} \sin \psi, \quad (1.1.20)$$

$$\dot{y}_C = \frac{1}{2}l_2 \dot{\psi} \cos \psi, \quad (1.1.21)$$

а скорость ползуна определяется выражением

$$\dot{x}_3 = -l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - l_2 \dot{\psi} \sin \psi, \quad (1.1.22)$$

что дает возможность написать

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = l_1^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + l_1 l_2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \varphi \sin \psi + \frac{1}{4}l_2^2 \dot{\psi}^2, \quad (1.1.23)$$

$$v_3^2 = \dot{x}_3^2 = l_1^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + l_2^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \psi + 2l_1 l_2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \varphi \sin \psi. \quad (1.1.24)$$

Угловая скорость шатуна определяется производной по времени от угла  $\psi$ :

$$\omega_2 = \dot{\psi}. \quad (1.1.25)$$

Теперь остается только выразить угол  $\psi$  через  $\varphi$ . Это можно сделать с помощью теоремы синусов, в соответствии с которой

$$\frac{l_1}{\sin \psi} = \frac{l_2}{\sin \varphi},$$

откуда следует

$$\sin \psi = \frac{l_1}{l_2} \sin \varphi \quad (1.1.26)$$

и, следовательно,

$$\dot{\psi} \cos \psi = \frac{l_1}{l_2} \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad (1.1.27)$$

или при учете (1.1.26)

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} \frac{l_1 \cos \varphi}{l_2 \sqrt{1 - \sin^2 \psi}} = \dot{\varphi} \frac{l_1 \cos \varphi}{l_2 \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} \sin^2 \varphi}} = \dot{\varphi} \frac{l_1 \cos \varphi}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (1.1.28)$$



Подставив (1.1.23)–(1.1.25) с учетом (1.1.26), (1.1.28) в (1.1.14)–(1.1.16) и затем в (1.1.13), получим выражение для кинетической энергии

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\omega_1^2}{2} \left[ I_1 + m_2 l_1^2 \left( \sin^2 \varphi + \frac{l_1 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{l_2^2 \cos^2 \varphi}{4(l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi)} \right) + \right. \\
 &+ I_C \frac{l_1^2 \cos^2 \varphi}{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi} + m_3 l_1^2 \left( \sin^2 \varphi + \frac{l_1^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi} + \frac{2l_1 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi}} \right) \left. \right] = \\
 &= \frac{\omega_1^2}{2} \left[ I_1 + (m_2 + m_3) l_1^2 \sin^2 \varphi + \frac{l_1^2 \cos^2 \varphi (m_2 l_2^2 + 3m_3 l_1^2 \sin^2 \varphi)}{3(l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(m_2 + 2m_3) l_1^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi}} \right]. \tag{1.1.29}
 \end{aligned}$$

Здесь было использовано выражение для момента инерции стержня 2 относительно оси, проходящей через его центр масс, т. е.

$$I_C = \frac{m_2 l_2^2}{12}.$$

Сравнение выражения (1.1.29) с (1.1.7) показывает, что инерционный коэффициент  $m(\varphi)$  в данном случае равен множителю в последних квадратных скобках и имеет размерность момента инерции (его еще называют приведенным моментом инерции). Производная от него по обобщенной координате будет иметь весьма громоздкий вид, поэтому упростим задачу, считая кривошип и шатун одинаковыми стержнями, т. е. положим  $m_1 = m_2 = m$ ,  $l_1 = l_2 = l$ . Тогда

$$m(\varphi) = \frac{2}{3} m l^2 + 2(m + 2m_3) l^2 \sin^2 \varphi \tag{1.1.30}$$

и

$$m'(\varphi) = 2(m + 2m_3) l^2 \sin 2\varphi. \tag{1.1.31}$$

Теперь определим обобщенную силу. Для этого нужно сообщить системе возможное перемещение и найти работу всех активных сил на этом перемещении. Для простоты будем считать, что механизм расположен в горизонтальной плоскости – это снимет вопрос о работе сил тяжести. При этом необходимо придерживаться правила: выбор

направления возможного перемещения должен быть таким, чтобы работа движущих сил была положительной. Будем считать таковым вращающий момент  $M$ , тогда возможным перемещением кривошипа будет поворот на угол  $\delta\varphi$  против хода часовой стрелки. Работа активных сил будет равна

$$\delta A = M\delta\varphi + \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_3 = M\delta\varphi + F_x\delta x_3. \quad (1.1.32)$$

Воспользовавшись формулой (1.1.19), которая в рассматриваемом упрощенном случае принимает вид

$$x_3 = 2l \cos \varphi,$$

получим

$$\delta x_3 = -2l \sin \varphi \delta\varphi,$$

что после подстановки в (1.1.32) дает

$$\delta A = (M - 2Fl \sin \varphi)\delta\varphi.$$

Коэффициент при  $\delta\varphi$  в последнем выражении и есть обобщенная сила:

$$Q = M - 2Fl \sin \varphi. \quad (1.1.33)$$

Подставив (1.1.30), (1.1.31) и (1.1.33) в (1.1.12), получим уравнение движения кривошипно-ползунного механизма:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{2}{3}ml^2 + 2(m + 2m_3)l^2 \sin^2 \varphi \right] \ddot{\varphi} + (m + 2m_3)l^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = \\ = M - 2Fl \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.1.34)$$

Как видим, даже в простейшем случае уравнение, описывающее динамическое поведение механизма, является нелинейным независимо от того, что представляют собой силовые факторы  $M$  и  $\vec{F}$ , а они, вообще говоря, могут быть функциями  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$ .

## **1.2. Характеристики приводов**

Приводом машин и механизмов называется система взаимосвязанных устройств для приведения в движение звеньев, входящих в состав машины или механизма.

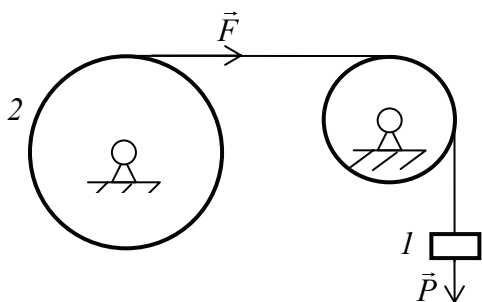
Для приведения в движение современных машин используются в основном электрические, гидравлические, паровые, газовые (пневматические) двигатели, и другие.

Наибольшее распространение получили электродвигатели, поскольку они имеют следующие преимущества перед остальными:

- 1) возможность пуска двигателя под нагрузкой;
- 2) удобство реверсирования, т. е. изменения направления движения на противоположное;
- 3) возможность регулировки скорости;
- 4) удобство управления и возможность автоматизации управления пусковыми и тормозными устройствами;
- 5) высокий коэффициент полезного действия.

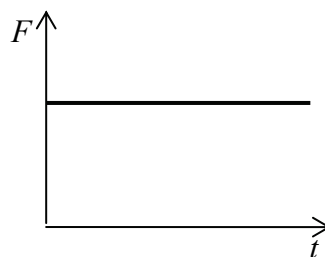
Каждый двигатель имеет свою механическую характеристику, под которой понимается зависимость его силового параметра от кинематических величин – времени, координат и скоростей. Механические характеристики чаще всего определяются экспериментально.

Примеры некоторых приводов и их характеристик представлены на рис 1.2.1–1.2.6.



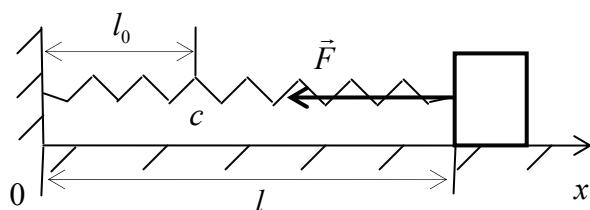
1 – ведущее звено; 2 – ведомое звено;  
 $\vec{P}$  – сила тяжести;  $\vec{F}$  – сила, действующая на ведомое звено

Рис. 1.2.1. Гиревой привод



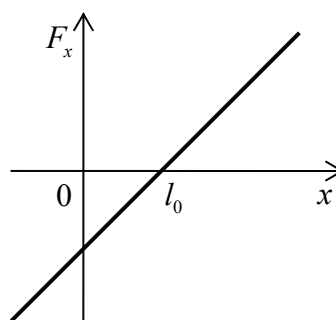
$F$  – модуль силы;  $t$  – время

Рис. 1.2.2. Характеристика гиревого привода



$c$  – жесткость пружины;  
 $l_0$  – ее естественная длина;  $l$  – длина пружины в произвольном состоянии;  
 $\vec{F}$  – упругая сила

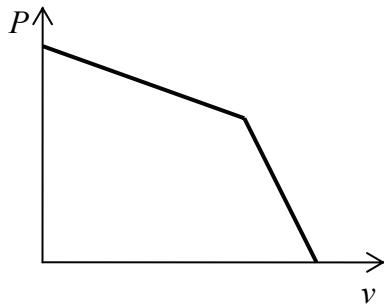
Рис. 1.2.3. Пружинный привод



Закон Гука:

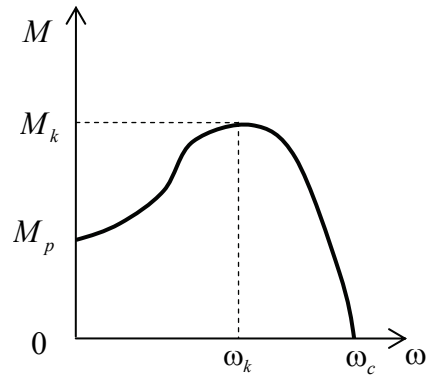
$$F = c|l - l_0| = c(x - l_0).$$

Рис. 1.2.4. Характеристика пружинного привода



$P$  – давление на выходе;  
 $v$  – скорость поршня

Рис. 1.2.5. Характеристика насосной установки



$M$  – вращающий момент на валу двигателя;  $\omega$  – угловая скорость вращения вала

Рис. 1.2.6. Характеристика асинхронного двигателя

Принцип действия асинхронных двигателей основан на наличии вращающегося магнитного поля, создаваемого в обмотках статора, подключенных к разным фазам электрического тока. Вследствие этого в обмотке ротора возникает индукционный ток, взаимодействие которого с магнитным полем статора приводит к силам, поворачивающим ротор. Ротор в своем вращении отстает от вращения магнитного поля, поэтому такой двигатель и называется асинхронным. Смысл величин на рис. 1.2.6 следующий:  $M_p$  – пусковой момент,  $M_k$  – максимальный,  $\omega_c$  – скорость вращения магнитного поля. При  $\omega < \omega_c$  реализуется режим двигателя, при  $\omega > \omega_c$  – режим генератора. Участок характеристики  $0 < \omega < \omega_k$  соответствует неустойчивому пусковому, интервал  $\omega_k < \omega < \omega_c$  – устойчивому рабочему режиму. При аналитических расчетах вращающий момент на валу двигателя в рабочем режиме аппроксимируется линейной функцией от угловой скорости ротора вида

$$M = \frac{M_k}{s_k} \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_c} \right), \quad (1.2.1)$$

где

$$s_k = \frac{\omega_c - \omega_k}{\omega_c}.$$

Асинхронный двигатель трехфазного тока отличается большой простотой устройства, обладает хорошими механическими характеристиками, в силу чего получил широкое распространение.

### **1.3. Решение уравнений динамики жестких систем в простейших случаях**

Ранее было установлено, что уравнение движения системы с одной степенью свободы имеет вид

$$m(q)\ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{dm(q)}{dq} \dot{q}^2 = Q. \quad (1.3.1)$$

При наличии в системе стержней (а это – скорее правило, чем исключение) оно является нелинейным и его аналитическое решение возможно только в исключительных случаях. При невозможности отыскания аналитического решения, даже приближенного, следует обращаться к численным методам, реализуемым с помощью вычислительной техники, которые позволяют решать уравнения произвольной сложности. Имея все-таки в виду аналитические возможности, рассмотрим простейшие варианты, так называемые интегрируемые случаи, считая инерционный коэффициент постоянной величиной, которую в дальнейшем будем обозначать  $m$ . Тогда второе слагаемое в (1.3.1) выпадает и уравнение приобретает более простой вид:

$$m\ddot{q} = Q. \quad (1.3.2)$$

Обобщенная сила при этом может зависеть от  $t$ ,  $q$ ,  $\dot{q}$  или их комбинаций.

1. Простейшим является случай постоянной силы:  $Q = \text{const}$  (гиревой привод, например). Для сокращения записи обозначим

$$a = \frac{Q}{m}. \quad (1.3.3)$$

Тогда уравнение (1.3.2) примет вид

$$\ddot{q} = a. \quad (1.3.4)$$

Решением дифференциального уравнения, как известно, является функция, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество. Процесс нахождения такой функции называется интегрированием дифференциального уравнения и для каждого типа дифференциального уравнения этот процесс реализуется по-своему. Есть, однако, способ, применимый к весьма широкому кругу задач динамики, который называется методом разделения переменных. Его идея очень проста. Интеграл представляет собой выражение вида

$$\int f(x)dx, \quad (1.3.5)$$

поэтому нужно представить обе части дифференциального уравнения в виде функции какой-то переменной, умноженной на дифференциал этой же переменной, что и позволит выполнить интегрирование. Но для этого уравнение второго порядка сначала нужно свести к системе двух уравнений первого порядка. Введем новую переменную

$$\frac{dq}{dt} = v, \quad (1.3.6)$$

тогда уравнение (1.3.4) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = a. \quad (1.3.7)$$

Система двух уравнений первого порядка (1.3.6), (1.3.7) эквивалентна уравнению второго порядка (1.3.4) и в них возможно разделение переменных. Умножим обе части уравнения (1.3.7) на  $dt$ :

$$dv = a dt. \quad (1.3.8)$$

Обе части полученного уравнения имеют вид подынтегрального выражения (1.3.5), поэтому

$$\int dv = \int a dt = a \int dt$$

и, следовательно,

$$v = at + C_1, \quad (1.3.9)$$

где  $C_1$  – произвольная постоянная. Подставим теперь (1.3.9) в (1.3.6):

$$\frac{dq}{dt} = at + C_1. \quad (1.3.10)$$

Переменные опять разделяются путем умножения обеих частей на  $dt$

$$dq = (at + C_1) dt \quad (1.3.11)$$

и в результате интегрирования

$$\int dq = \int (at + C_1)$$

получаем закон движения

$$q = \frac{at^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (1.3.12)$$

Это хорошо известный закон равноускоренного движения. В таком виде, однако, он не представляет какого-либо интереса, поскольку содержит две произвольные постоянные. Физический смысл имеют решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям. Для уравнений второго порядка, каковыми являются все динамические уравнения, необходимо задать положение и скорость в начальный момент времени (его всегда можно считать нулевым), т. е. задать состояние системы в начальный момент времени

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = v_0 \quad (1.3.13)$$

и потребовать, чтобы в этот момент выражения (1.3.9) и (1.3.12) принимали значения (1.3.13). Тогда задача имеет единственное решение. Нетрудно видеть, что это требование приводит к тому, что

$$C_1 = v_0, \quad C_2 = q_0,$$

поэтому частное решение уравнения (1.3.4), удовлетворяющее начальным условиям (1.3.13), приобретает вид

$$q = \frac{at^2}{2} + v_0 t + q_0. \quad (1.3.14)$$

Следует отметить, что только в случае равноускоренного движения произвольные постоянные имеют такой простой физический смысл.

2. Движение под действием сил, зависящих от времени:  $Q = Q(t)$ . Обозначим  $a(t) = Q(t) / m$ , опять введем новую переменную

$$\frac{dq}{dt} = v, \quad (1.3.15)$$

в результате чего уравнение (1.3.4) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = a(t). \quad (1.3.16)$$

Разделив в нем переменные и выполнив интегрирование, получим

$$v = \int a(t) dt + C_1 = f_1(t) + C_1, \quad (1.3.17)$$

где вид функции  $f_1(t)$  может быть определен после задания конкретного вида  $Q(t)$ . Подстановка выражения для скорости в (1.3.15), разделение переменных и интегрирование приводит к следующему:

$$q = \int f_1(t) dt + C_1 t + C_2. \quad (1.3.18)$$

Постоянные интегрирования, разумеется, должны быть определены по начальным условиям.

3. Движение под действием сил, зависящих от положения:  $Q = Q(q)$ . Обозначив через  $a(q) = Q(q)/m$ , получим тем же способом, что и выше

$$\frac{dq}{dt} = v, \quad (1.3.19)$$

$$\frac{dv}{dt} = a(q). \quad (1.3.20)$$

В этом случае ускорение не зависит от времени явно, а только через  $q$ , такая же зависимость должна быть и у скорости, т. е. она должна рассматриваться как сложная функция времени и поэтому

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dq} \frac{dq}{dt} = \frac{dv}{dq} v, \quad (1.3.21)$$

в результате чего уравнение (1.3.20) принимает вид

$$v \frac{dv}{dq} = a(q), \quad (1.3.22)$$

переменные в котором разделяются, а интегрирование тогда дает

$$\frac{v^2}{2} = \int a(q) dq + C_1 = f(q) + C_1, \quad (1.3.23)$$

где через  $f$  обозначен фигурирующий слева интеграл. Из последнего соотношения следует

$$v = \pm \sqrt{2(f(q) + C_1)}, \quad (1.3.24)$$

т. е.

$$\frac{dq}{dt} = \pm \sqrt{2(f(q) + C_1)}, \quad (1.3.25)$$

переменные опять разделяются и поэтому

$$\pm \int \frac{dq}{\sqrt{2(f(q) + C_1)}} = t + C_2. \quad (1.3.26)$$

Неоднозначность, обусловленная извлечением квадратного корня в (1.3.24), снимается в каждом конкретном случае определенными физическими соображениями. Обратив соотношение (1.3.26), получим зависимость координаты от времени:



$$q = f_1(t, C_1, C_2). \quad (1.3.27)$$

4. Движение под действием сил, зависящих от скорости:  $Q = Q(\dot{q})$ .  
Уравнение (1.3.4) в этом случае эквивалентно системе

$$\frac{dq}{dt} = v, \quad (1.3.28)$$

$$\frac{dv}{dt} = a(v), \quad (1.3.29)$$

где обозначено  $a(v) = Q(v)/m$ . Переменные разделяются в уравнении (1.3.29) путем деления обеих частей на  $a$  и умножения на  $dt$ . Интегрирование полученного выражения дает

$$t = \int \frac{dv}{a(v)} + C_1 = f(v, C_1), \quad (1.3.30)$$

откуда следует

$$v = f^{-1}(t, C_1), \quad (1.3.31)$$

где  $f^{-1}$  – функция, обратная  $f$ . Подстановка (1.3.31) в (1.3.28) приводит к уравнению с разделяющимися переменными, решение которого определяет закон движения

$$q = \int f^{-1}(t, C_1) dt + C_2. \quad (1.3.32)$$

Некоторые примеры применения рассмотренных способов решения дифференциальных уравнений приведены ниже.

#### **1.4. Вибротранспортировка при постоянном давлении**

Вибрационной называется машина, исполнительному органу которой сообщают вибрацию для осуществления выполняемого процесса или повышения качества выполняемой работы.

Примером такой машины может служить виброгрохот с горизонтальным расположением просеивающей поверхности. При работе виброгрохота часть сыпучего материала просеивается через отверстия сита, а остальная часть перемещается по горизонтальной поверхности к разгрузочному концу грохота.

Вибрационная транспортировка в грохоте основана на том, что рабочий орган машины в начале и в конце каждого цикла колебаний

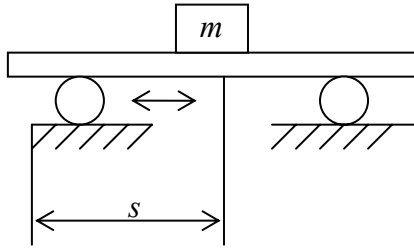


Рис. 1.4.1. Схема безударной транспортировки груза

занимает одно и то же положение, а транспортируемый груз в каждом цикле продвигается вперед относительно рабочего органа. При безударной вибро-транспортировке это продвижение происходит без удара о рабочий орган. Давление на поверхность сита не меняется. В простейшем случае этот процесс можно смоделировать в виде груза массой  $m$ , лежащего на плоскости рабочего органа машины, который совершает горизонтальные колебания с размахом  $s$  (рис. 1.4.1). Груз прижат к плоскости силой тяжести  $mg$ , которая вызывает силу трения, препятствующую перемещению груза относительно рабочего органа. Максимальное значение силы трения равно  $\mu mg$ , где  $\mu$  – коэффициент трения покоя. Если принять  $\mu$  постоянным при покое и движении, то при относительном перемещении груза по плоскости сила трения сохранит значение, равное  $\mu mg$ .

Уравнение движения груза при его перемещении вперед (вправо на рис. 1.4.1) имеет вид

$$ma = -\mu mg, \quad (1.4.1)$$

где  $a$  – ускорение груза.

Отсюда следует, что отрицательное ускорение груза не может быть по модулю больше  $\mu g$ , и если на участке замедления (выбега) рабочий орган будет иметь модуль ускорения  $a_2 > \mu g$ , то груз в своем движении будет опережать рабочий орган (скольжение).

Пусть, например, рабочий орган совершает движение, в котором скорость изменяется по закону, показанному на рис. 1.4.2, *a* (сплошная линия). Здесь рабочий орган движется с постоянным ускорением  $a_1 < \mu g$  в течение времени  $t_1$  и с замедлением  $a_2 > \mu g$  в течение времени  $t_2$ . Из условия периодичности движения следует

$$a_1 t_1 = a_2 t_2, \quad v_0 = \frac{1}{2} a_1 t_1. \quad (1.4.2)$$

Соответствующий закон изменения ускорения рабочего органа показан на рис. 1.4.2, *б*. Так как  $a_2 > \mu g$ , то в течение времени  $t_2$  имеет место проскальзывание и груз движется с замедлением  $\mu g$ , что показано штриховой линией *AB* на рис. 1.4.2, *a*. В точке *B* скорость груза оказывается больше, чем скорость рабочего органа, скольжение продолжается и груз движется с тем же замедлением, пока в точке *C*

скорости груза и рабочего органа не выравниваются. Далее (линия  $CD$ ) груз движется вместе с рабочим органом с ускорением  $a_1$ . В точке  $D$  снова начинается скольжение, и процесс повторяется. График изменения ускорения груза показан на рис. 1.4.2, б штриховой линией. Вне этого участка он совпадает с графиком ускорений рабочего органа.

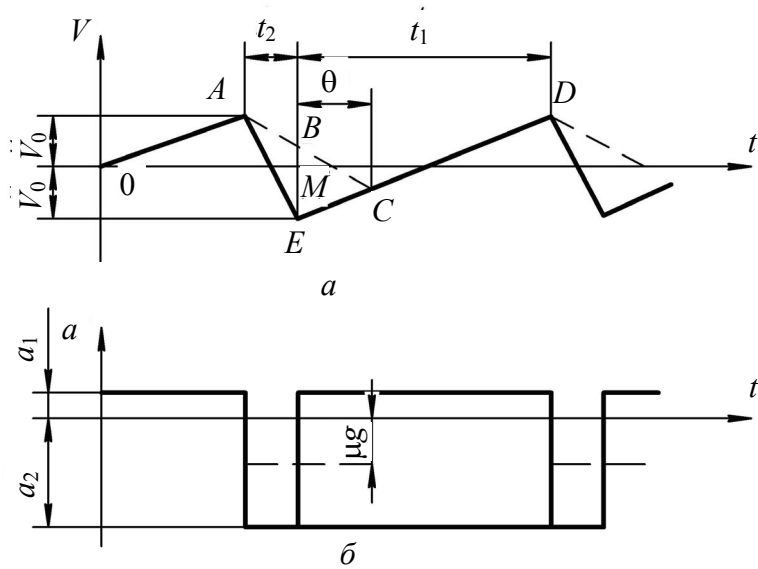


Рис. 1.4.2. Законы изменения скорости (а) и ускорения (б) рабочего органа машины

Перемещение груза за цикл определяется интегрированием скорости. Так как перемещение рабочего органа за цикл равно нулю, то существенно лишь относительное перемещение, которое выражается площадью  $S$  треугольника  $ACE$ .

$$S_{ACE} = S_{ABE} + S_{BCE} = \frac{1}{2} BE \cdot t_2 + \frac{1}{2} BE \cdot \theta. \quad (1.4.3)$$

$$BE = BM + ME, \quad BM = v_0 - \mu g t_2 = \frac{1}{2} a_1 t_1 - \mu g t_2, \quad ME = \frac{1}{2} a_1 t_1,$$

$$BE = a_1 t_1 - \mu g t_2, \quad v_C = v_A - \mu g (\theta + t_2), \quad v_C = v_E + a_1 \theta,$$

$$\frac{1}{2} a_1 t_1 - \mu g \theta - \mu g t_2 = -\frac{1}{2} a_1 t_1 + a_1 \theta,$$

$$a_1 t_1 - \mu g t_2 = \theta (a_1 + \mu g),$$

$$\theta = \frac{a_1 t_1 - \mu g t_2}{a_1 + \mu g}. \quad (1.4.4)$$

$$\begin{aligned}
S_{ACE} &= \frac{1}{2} BE(t_2 + \theta) = \frac{1}{2} (a_1 t_1 - \mu g t_2) \left( t_2 + \frac{a_1 t_1 - \mu g t_2}{a_1 + \mu g} \right) = \\
&= \frac{1}{2} (a_1 t_1 - \mu g t_2) \left( \frac{a_1 t_1 + a_1 t_2 - \mu g t_2 + \mu g t_2}{a_1 + \mu g} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{(a_1 t_1 - \mu g t_2)(a_1 t_1 + a_1 t_2)}{(a_1 + \mu g)} = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) t_2^2 \frac{(a_2 - \mu g)}{(a_1 + \mu g)}. \quad (1.4.5)
\end{aligned}$$

Учитывая, что период колебания рабочего органа  $\tau = t_1 + t_2$ , найдем  $t_2$  из (1.4.2):

$$\begin{aligned}
a_1 t_1 &= a_2 t_2, \quad t_1 = \tau - t_2, \quad a_1 \tau - a_1 t_2 = a_2 t_2, \\
t_2 &= \frac{a_1 \tau}{a_1 + a_2}. \quad (1.4.6)
\end{aligned}$$

Запишем (1.4.5) с учетом (1.4.6):

$$S = \frac{1}{2} a_1 \tau^2 \frac{a_1}{(a_1 + \mu g)} \frac{(a_2 - \mu g)}{(a_1 + a_2)}. \quad (1.4.7)$$

Чтобы установить предельно возможное перемещение груза за цикл, заметим, что предельное значение  $a_1$  составляет  $\mu g$  (иначе будет проскальзывание). Поэтому

$$S_{\max} = \frac{1}{4} \mu g \tau^2 \quad (\text{при } a_1 = \mu g \text{ и } \frac{a_2}{a_1} \rightarrow \infty). \quad (1.4.8)$$

Среднюю скорость перемещения груза  $v$  найдем, разделив  $s$  на  $\tau$ :

$$v = \frac{1}{2} a_1 \tau \frac{a_1}{a_1 + \mu g} \frac{(a_2 - \mu g)}{(a_1 + a_2)}, \quad v_{\max} = \frac{1}{4} \mu g \tau, \quad (a_1 = \mu g, \quad a_2 \rightarrow \infty) \quad (1.4.9)$$

Из полученных зависимостей видно, что скорость перемещения груза возрастает с увеличением периода качаний рабочего органа (то есть со снижением его частоты). При этом ход рабочего органа

$$s = \frac{a_1 t_1^2}{8} + \frac{a_2 t_2^2}{8} \approx \mu g \frac{\tau^2}{8} \quad (1.4.10)$$

быстро возрастает.

Заметим, что условие  $a_1 \leq \mu g$ , использованное нами выше, не является обязательным. При наличии несимметричного закона движения ( $a_1 \neq a_2$ ) транспортировка будет осуществляться и в случае  $a_1 > \mu g$ , од-

нако при этом расход энергии на транспортировку увеличится, так как груз будет проскальзывать по рабочему органу не только вперед, но и назад. В этом случае скорость транспортировки не увеличивается.

### 1.5. Вибрационные грохоты с подбрасыванием груза

Если перемещаемый материал (груз) допускает подбрасывание с последующим ударом о поверхность рабочего органа, то можно получить большую скорость перемещения груза по сравнению с безударной вибротранспортировкой. Увеличение скорости перемещения материала в виброгрохоте с подбрасыванием груза объясняется тем, что горизонтальное перемещение груза в нем происходит при свободном полете в отличие от его скольжения по рабочему органу.

На рис. 1.5.1 показана схема вибрационного грохота, в котором рабочий орган совершает колебания, направленные под углом  $\alpha$  к горизонтали, по гармоническому закону

$$s = A \sin \omega t,$$

где  $A$  – амплитуда,  $\omega$  – круговая частота,  $t$  – время.

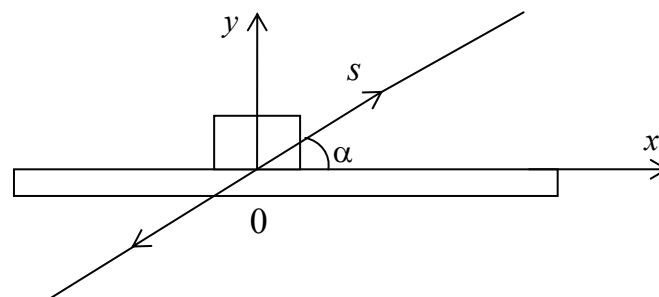


Рис. 1.5.1. Схема вибрационного грохота с подбрасыванием груза

Вертикальная и горизонтальная составляющие движения рабочего органа определяются соотношениями

$$\begin{aligned} y &= A \sin \alpha \cdot \sin \omega t, \\ x &= A \cos \alpha \cdot \sin \omega t. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Дифференцирование по времени дает:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A \omega \sin \alpha \cdot \cos \omega t, & \ddot{y} &= -A \omega^2 \sin \alpha \cdot \sin \omega t, \\ \dot{x} &= A \omega \cos \alpha \cdot \cos \omega t, & \ddot{x} &= -A \omega^2 \cos \alpha \cdot \sin \omega t. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Рассмотрим сначала вертикальное движение груза после отрыва его от рабочего органа, которое происходит в момент  $t_1$ , когда вертикальное ускорение  $\ddot{y}$  по абсолютной величине становится равным ускорению силы тяжести  $g$ :

$$A\omega^2 \sin \alpha \cdot \sin \omega t_1 = g.$$

Основным параметром вибрационной транспортировки указанного типа является безразмерный коэффициент режима вибрации:

$$k_B = \frac{A\omega^2 \sin \alpha}{g}. \quad (1.5.3)$$

Этот коэффициент показывает, во сколько раз максимум вертикальной составляющей ускорения рабочего органа  $\ddot{y}_{\max}$  больше ускорения силы тяжести. Момент времени  $t_1$ , при котором происходит отрыв груза, связан с коэффициентом режима вибрации соотношением

$$\sin \omega t_1 = \frac{1}{k_B}. \quad (1.5.4)$$

Свободный полет груза в вертикальном направлении описывается уравнением

$$Y = y_0 + \dot{y}_0(t - t_1) - g \frac{(t - t_1)^2}{2}, \quad (1.5.5)$$

где  $Y$  – вертикальное перемещение груза;  $y_0$  – начальное положение груза в момент отрыва от рабочего органа;  $\dot{y}_0$  – начальная скорость груза в этот же момент.

Из соотношений (1.5.1) и (1.5.2) получаем:

$$y_0 = A \sin \alpha \cdot \sin \omega t_1, \quad \dot{y}_0 = A \omega \sin \alpha \cdot \cos \omega t_1. \quad (1.5.6)$$

Подставляя значения  $y_0$  и  $\dot{y}_0$  в уравнение (1.5.5) и принимая во внимание (1.5.3) и (1.5.4), имеем

$$Y = \frac{gk_B \sin \omega t_1}{\omega^2} + \frac{gk_B \cos \omega t_1}{\omega} (t - t_1) - \frac{g}{2} (t - t_1)^2. \quad (1.5.7)$$

Момент времени падения груза на рабочий орган находим из условия  $y = Y$ :

$$A \sin \alpha \cdot \sin \omega t_2 = \frac{gk_B \sin \omega t_1}{\omega^2} + \frac{gk_B \cos \omega t_1}{\omega} (t_2 - t_1) - \frac{g}{2} (t_2 - t_1)^2. \quad (1.5.8)$$

Введем обозначение

$$w = \frac{\omega}{2}(t_2 - t_1). \quad (1.5.9)$$

Тогда уравнение (1.5.8) принимает вид

$$A \sin \alpha \cdot \sin(2w + \omega t_1) = \frac{gk_B \sin \omega t_1}{\omega^2} + \frac{2wgk_B \cos \omega t_1}{\omega^2} - \frac{2gw^2}{\omega^2},$$

или с учетом (1.5.3) и (1.5.4)

$$\sin(2w + \omega t_1) = \sin \omega t_1 + 2w \cos \omega t_1 - 2w^2 \sin \omega t_1. \quad (1.5.10)$$

Из квадратного уравнения (1.5.10) при известном значении  $\omega t_1$  находим  $w$  и затем  $t_2$  из (1.5.9). В момент времени  $t_2$  происходит удар, и если нет отскока, груз движется в контакте с рабочим органом до нового отрыва при  $t = t_1 + 2\pi/\omega$ . На рис. 1.5.2 штриховой линией показан график  $Y(t)$  при  $t_2 < t_1 + 2\pi/\omega$ . При  $t_2 = t_1 + 2\pi/\omega$  наблюдается режим непрерывного подбрасывания. Для этого режима  $w = \pi$ . Подставляя  $w = \pi$  в уравнение (1.5.10), находим значение  $\omega t_1^*$ , при котором будет режим непрерывного подбрасывания:

$$\sin \omega t_1^* = \sin \omega t_1^* + 2\pi \cos \omega t_1^* - 2\pi^2 \sin \omega t_1^*,$$

или

$$\operatorname{tg} \omega t_1^* = \frac{1}{\pi}. \quad (1.5.11)$$

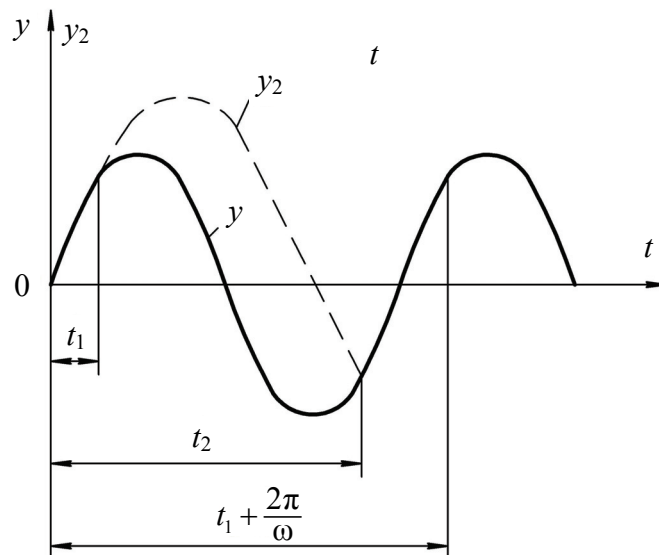


Рис. 1.5.2. Графики движения рабочего органа виброгрохота (сплошная линия) и груза (пунктирная)

Горизонтальная скорость груза при свободном полете сохраняется постоянной и равной горизонтальной составляющей скорости рабочего органа в момент отрыва груза

$$v = A\omega \cos \alpha \cdot \cos \omega t_1,$$

или

$$v = A\omega \cos \alpha \frac{\sqrt{k_B^2 - 1}}{k_B}. \quad (1.5.12)$$

После удара груз некоторое время находится в контакте с рабочим органом, то есть горизонтальная составляющая скорости груза  $v = \dot{x}$  определяется по соотношениям (1.5.2). Вследствие относительной кратковременности контакта груза с рабочим органом считают, что горизонтальную скорость груза можно принять постоянной и равной скорости  $v$  с поправочным коэффициентом  $b$ , зависящим от вида перемещаемого материала:

$$v = bA\omega \cos \alpha \frac{\sqrt{k_B^2 - 1}}{k_B}. \quad (1.5.13)$$



## 2. ДИНАМИКА УПРУГИХ СИСТЕМ

На предыдущих лекциях были рассмотрены жесткие системы, которые, как уже отмечалось, являются определенной идеализацией реальных, т. е. деформируемых систем. В некоторых случаях приближения абсолютно твердых систем вполне достаточно для выяснения качественных и даже количественных характеристик. Но существует множество ситуаций, когда с помощью такого приближения нельзя объяснить динамическое поведение устройства, и поэтому необходимо учитывать упругие свойства системы. При этом возникают серьезные проблемы, связанные с бесконечным числом степеней свободы таких систем, рассмотрение которых выходит далеко за рамки нашего курса. Однако в зависимости от характера изучаемого явления и требуемого уровня строгости можно ограничить число учитываемых степеней свободы, выбирая в качестве расчетной схемы реальной конструкции систему с конечным числом степеней свободы и даже одной.

Ограничение числа учитываемых в расчете степеней свободы может быть выполнено различными способами. Часто в реальной конструкции можно выделить массивные элементы, деформацией которых можно пренебречь, и упругие элементы с малыми массами. Пренебрежение этими массами снимает необходимость рассмотрения проблем динамики упругих тел. В этом случае расчетная схема представляет собой ряд жестких массивных тел, соединенных невесомыми упругими связями.

При этом только в простейших случаях потенциальная энергия упругих сил (даже в случае справедливости закона Гука) оказывается квадратичной по параметрам, определяющим положение системы, в общем же случае зависимость оказывается иной, что приводит к нелинейным уравнениям. Наиболее удобным средством для получения уравнений движения таких систем являются уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s), \quad (2.1)$$

где  $T$  и  $U$  – кинетическая и потенциальная энергии системы;  $Q_\alpha$  – непотенциальные обобщенные силы;  $q_\alpha$  – обобщенные координаты;  $\dot{q}_\alpha$  – обобщенные скорости;  $s$  – число степеней свободы.

## **2.1. Малые колебания консервативной системы около положения устойчивого равновесия**

Консервативная система, т. е. система, на которую действуют только потенциальные силы, описывается уравнениями вида (2.1) без последнего слагаемого:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}. \quad (2.1.1)$$

Напомним, что если есть такие значения обобщенных координат  $q_\alpha^0$ , при которых все производные от потенциальной энергии равны нулю

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right|_{q_\alpha=q_\alpha^0} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s), \quad (2.1.2)$$

то такое положение системы называется равновесным. Если это положение равновесия является устойчивым, то при малых отклонениях  $q_\alpha$  от  $q_\alpha^0$  и малых скоростях  $\dot{q}_\alpha$  система будет совершать колебательное движение вблизи этого устойчивого положения равновесия. Достаточное условие устойчивости положения равновесия определяется теоремой Лагранжа – Дирихле: если в положении равновесия консервативной системы с идеальными и стационарными связями потенциальная энергия имеет изолированный минимум, то такое положение равновесия является устойчивым.

В случае системы с одной степенью свободы это означает

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=q^0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=q^0} > 0, \quad (2.1.3)$$

для систем с несколькими степенями свободы критерий устойчивости имеет более сложный вид. Без ограничения общности будем считать, что  $q_\alpha^0 = 0$  и  $U(0) = 0$  (выбор нулевой точки потенциальной энергии всегда позволяет это сделать).

Разложим потенциальную энергию в ряд по отклонениям обобщенных координат от равновесных (нулевых) значений:

$$\begin{aligned} U(q_1, q_2, \dots, q_s) = \\ = U(0, 0, \dots, 0) + \sum_\alpha \left. \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right|_{q_\alpha=0} q_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right|_{q_\alpha, q_\beta=0} q_\alpha q_\beta + \dots \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Первое слагаемое в правой части обращается в нуль в силу выбора нулевой точки потенциальной энергии, второе – из условия равновесия, так что первым неисчезающим членом оказывается третий. Введем обозначения

$$c_{\alpha\beta} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right|_{q_\alpha, q_\beta=0} \quad (2.1.5)$$

и назовем эти величины квазиупругими коэффициентами, или обобщенными коэффициентами жесткости. Из определения (2.1.5) видно, что

$$c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}, \quad (2.1.6)$$

т. е. матрица этих коэффициентов является симметричной.

Считая отклонения значений обобщенных координат от равновесных малыми, в разложении (2.1.4) можно пренебречь всеми членами, кроме первого неисчезающего. Тогда потенциальная энергия примет вид

$$U(q_1, \dots, q_s) \approx \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta. \quad (2.1.7)$$

Если квадратичная форма (2.1.7) положительно определена, т. е.  $U > 0$ , то значение  $U(0) = 0$  является минимальным и, следовательно, рассматриваемое положение равновесия устойчиво.

Положительная определенность квадратичной формы устанавливается теоремой Сильвестра: для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы этой формы были положительны (доказательство этой теоремы можно найти в соответствующем разделе курса высшей математики).

Матрица квадратичной формы (2.1.7) имеет вид

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{pmatrix}, \quad (2.1.8)$$

поэтому диагональные миноры равны:

$$\Delta_1 = c_{11}, \quad (2.1.9)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad (2.1.10)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \dots, \quad (2.1.11)$$

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{vmatrix}. \quad (2.1.12)$$

Таким образом, критерий Сильвестра имеет вид

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_s > 0. \quad (2.1.13)$$

Будем считать, что для рассматриваемой системы условие (2.1.13) выполняется.

Кинетическая энергия системы определяется выражением

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (2.1.14)$$

Предположим, что на систему наложены стационарные голономные связи. Так как положение системы однозначно определяется обобщенными координатами, а положение каждой точки определяется ее радиусом-вектором, то последние должны быть функциями обобщенных координат, то есть

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s) \quad (2.1.15)$$

для всех значений  $i$ . Условимся номера точек системы обозначать латинскими индексами, а номера степеней свободы – греческими.

Тогда

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha}, \quad (2.1.16)$$

и поэтому

$$v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \cdot \sum_{\beta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\beta}} \dot{q}_{\beta} = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\beta}} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta}. \quad (2.1.17)$$

Подставим последнее выражение в определение кинетической энергии (2.1.14)

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \quad (2.1.18)$$

и поменяем местами суммирование по номерам степеней свободы и частиц:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left( \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \right) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta. \quad (2.1.19)$$

Выражение в круглых скобках представляет собой симметричную квадратную матрицу, элементы которой зависят от обобщенных координат. Введем обозначение

$$m_{\alpha\beta}(q) = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \quad (2.1.20)$$

и назовем эти величины инерционными коэффициентами. Тогда кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} m_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad (2.1.21)$$

т. е. она является положительно определенной квадратичной формой по обобщенным скоростям. Имея это в виду, разложим инерционные коэффициенты в ряд по отклонениям от положения устойчивого равновесия

$$m_{\alpha\beta}(q) = m_{\alpha\beta}(0) + \sum_\gamma \left. \frac{\partial m_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma} \right|_{q_\gamma=0} q_\gamma + \dots, \quad (2.1.22)$$

в котором нужно ограничиться учетом только первого члена, чтобы получить выражение с той же точностью, что и при разложении потенциальной энергии, т. е. положить

$$m_{\alpha\beta}(q) \approx m_{\alpha\beta}(0) \equiv m_{\alpha\beta}. \quad (2.1.23)$$

Кинетическая энергия системы в этом приближении будет иметь вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} m_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta. \quad (2.1.24)$$

Подставим (2.1.24) и (2.1.7) в (2.1.1). Будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma} m_{\beta\gamma} \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma = \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma} m_{\beta\gamma} \left( \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\gamma + \dot{q}_\beta \frac{\partial \dot{q}_\gamma}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma} m_{\beta\gamma} (\delta_{\beta\alpha} \dot{q}_\gamma + \dot{q}_\beta \delta_{\gamma\alpha}),\end{aligned}\quad (2.1.25)$$

где  $\delta_{\beta\alpha}$  – символ Кронекера, обладающий тем свойством, что

$$\delta_{\beta\alpha} = \begin{cases} 1, & \beta = \alpha \\ 0, & \beta \neq \alpha \end{cases}, \quad (2.1.26)$$

т. е. он играет роль фильтра, вырезающего из суммы все члены, кроме одного. Поэтому

$$\sum_{\beta, \gamma} m_{\beta\gamma} \delta_{\beta\alpha} \dot{q}_\gamma = \sum_{\gamma} \dot{q}_\gamma \sum_{\beta} m_{\beta\gamma} \delta_{\beta\alpha} = \sum_{\gamma} \dot{q}_\gamma m_{\alpha\gamma}. \quad (2.1.27)$$

Таким же образом получается

$$\sum_{\beta, \gamma} m_{\beta\gamma} \delta_{\gamma\alpha} \dot{q}_\beta = \sum_{\beta} \dot{q}_\beta \sum_{\gamma} m_{\beta\gamma} \delta_{\gamma\alpha} = \sum_{\beta} \dot{q}_\beta m_{\beta\alpha} = \sum_{\gamma} \dot{q}_\gamma m_{\gamma\alpha}. \quad (2.1.28)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma} (m_{\alpha\gamma} + m_{\gamma\alpha}) \dot{q}_\gamma = \sum_{\gamma} m_{\alpha\gamma} \dot{q}_\gamma \quad (2.1.29)$$

в силу симметрии инерционных коэффициентов. Далее

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \sum_{\gamma} m_{\alpha\gamma} \ddot{q}_\gamma, \quad (2.1.30)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = 0, \quad (2.1.31)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma} c_{\beta\gamma} q_\beta q_\gamma = \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma} c_{\beta\gamma} (\delta_{\beta\alpha} q_\gamma + q_\beta \delta_{\gamma\alpha}) = \sum_{\gamma} c_{\alpha\gamma} q_\gamma. \quad (2.1.32)$$

Окончательно получаем уравнения следующего вида:

$$\sum_{\gamma} m_{\alpha\gamma} \ddot{q}_\gamma = - \sum_{\gamma} c_{\alpha\gamma} q_\gamma,$$

или после переноса всех слагаемых в левую часть –

$$\sum_{\gamma} (m_{\alpha\gamma} \ddot{q}_\gamma + c_{\alpha\gamma} q_\gamma) = 0. \quad (2.1.33)$$

Система уравнений (2.1.33) описывает движение вблизи положения устойчивого равновесия, и это движение является колебательным. В случае системы с одной степенью свободы ( $\alpha = \gamma = 1$ ) из (2.1.33) следует

$$m_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 = 0 \quad (m_{11} > 0, c_{11} > 0), \quad (2.1.34)$$

известное уравнение одномерных свободных колебаний.

## **2.2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы**

Рассмотрим сначала наиболее простой случай свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы, который описывается уравнением, полученным в конце предыдущей лекции:

$$m\ddot{q} + cq = 0. \quad (2.2.1)$$

В данном случае индексы у инерционного и квазиупругого коэффициентов опущены.

Уравнение (2.2.1) можно использовать для описания, например, поведения машинного агрегата на упругом фундаменте, представленном на рис. 2.2.1, части формовочной машины и т. д.

Запишем это уравнение в стандартной форме, разделив обе части на  $m$  и введя обозначение

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad (2.2.2)$$

что можно сделать, поскольку коэффициенты  $m$  и  $c$  положительны:

$$\ddot{q} + k^2q = 0. \quad (2.2.3)$$

Это однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его решение будем искать в виде

$$q = Ce^{\lambda t}, \quad (2.2.4)$$

где  $C$  и  $\lambda$  – постоянные величины, подлежащие определению. Решением уравнения является то, что обращает его в тождество, поэтому подставим (2.2.4) в (2.2.3), учтя при этом, что

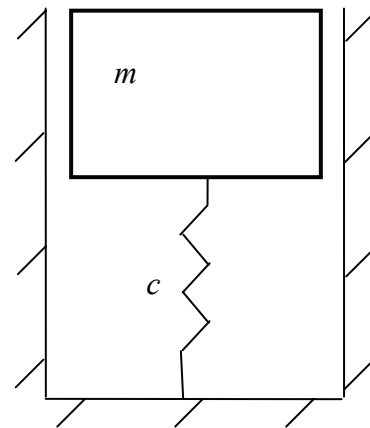


Рис. 2.2.1. Машина на упругом основании

$$\dot{q} = C\lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{q} = C\lambda^2 e^{\lambda t},$$

в результате чего получим

$$C(\lambda^2 + k^2)e^{\lambda t} = 0. \quad (2.2.5)$$

Последнее равенство выполняется тождественно, т. е. для любого значения  $t$ , если

$$\lambda^2 + k^2 = 0. \quad (2.2.6)$$

Коэффициент  $C$  не может равняться нулю, поскольку тривиальные (нулевые) решения однородного уравнения нас не интересуют.

Алгебраическое уравнение (2.2.6) называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения (2.2.3) и имеет мнимые корни

$$\lambda_1 = ik, \quad \lambda_2 = -ik, \quad (2.2.7)$$

которым соответствуют два решения

$$q_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} = C_1 e^{ikt}, \quad (2.2.8)$$

$$q_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} = C_2 e^{-ikt}. \quad (2.2.9)$$

Эти решения линейно независимы, так как их отношение не является константой, и, как известно, общим решением уравнения (2.2.3) в этом случае должна быть их линейная комбинация:

$$q = C_1 e^{ikt} + C_2 e^{-ikt}. \quad (2.2.10)$$

Только на первый взгляд правая часть этого выражения выглядит как комплексная и содержит четыре произвольные постоянные, на самом деле, поскольку  $q$  – величина действительная, она должна удовлетворять условию вещественности  $q = q^*$ , откуда следует, что

$$C_2 = C_1^*, \quad (2.2.11)$$

т. е. решение (2.2.10) содержит только две произвольные постоянные, как и должно быть в случае дифференциального уравнения второго порядка. Запишем это в явном виде, воспользовавшись известными формулами Эйлера

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha. \quad (2.2.12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} q &= C_1 (\cos kt + i \sin kt) + C_2 (\cos kt - i \sin kt) = \\ &= (C_1 + C_2) \cos kt + i(C_1 - C_2) \sin kt = A \cos kt + B \sin kt, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$



где введены новые произвольные постоянные

$$A = C_1 + C_2, \quad B = i(C_1 - C_2), \quad (2.2.14)$$

которые являются вещественными в силу (2.2.11). Решение уравнения (2.2.3) можно представить еще в одной форме, введя две новые произвольные постоянные  $l$  и  $\delta$  с помощью соотношений

$$A = l \sin \delta, \quad (2.2.15)$$

$$B = l \cos \delta. \quad (2.2.16)$$

Подставив последние равенства в (2.2.13), получим

$$q = l \sin \delta \cos kt + l \cos \delta \sin kt = l \sin(kt + \delta). \quad (2.2.17)$$

Таким образом, закон движения системы с одной степенью свободы при малых отклонениях от положения равновесия описывается периодической функцией и, следовательно, движение имеет колебательный характер. Аргумент тригонометрической функции  $kt + \delta$  называется фазой колебаний, величина  $\delta$  – начальной фазой,  $k$  – циклическая частота, определяющая число колебаний за  $2\pi$  секунд, а  $l$  – амплитуда колебаний – наибольшее отклонение от положения равновесия. Величины  $l$  и  $\delta$  определяются начальными условиями

$$q(0) = q_0, \quad (2.2.18)$$

$$\dot{q}(0) = v_0. \quad (2.2.19)$$

Продифференцировав (2.2.17) по времени, получим

$$\dot{q} = lk \cos(kt + \delta), \quad (2.2.20)$$

поэтому

$$q_0 = l \sin \delta, \quad (2.2.21)$$

$$v_0 = lk \cos \delta. \quad (2.2.22)$$

Отсюда следует, что начальная фаза и амплитуда определяются как свойствами системы через параметр  $k$ , так и начальными данными

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{q_0 k}{v_0}, \quad (2.2.23)$$

$$l = \sqrt{q_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}. \quad (2.2.24)$$

## Период колебаний

$$\Theta = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \quad (2.2.25)$$

определяется только свойствами системы. График таких колебаний представлен на рис. 2.2.2.

Вычислим механическую энергию  $E$  при свободных колебаниях. Она, как известно, определяется суммой кинетической и потенциальной энергий, т. е.

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}cq^2. \quad (2.2.26)$$

Подставив сюда (2.2.17) и (2.2.20), будем иметь

$$E = \frac{1}{2}ml^2k^2 \cos^2(kt + \delta) + \frac{1}{2}cl^2 \sin^2(kt + \delta) = \frac{1}{2}cl^2, \quad (2.2.27)$$

поскольку  $mk^2 = c$  в силу определения (2.2.2). Как и должно быть, полная механическая энергия в консервативной системе сохраняется, и она оказывается пропорциональной квадрату амплитуды колебаний.

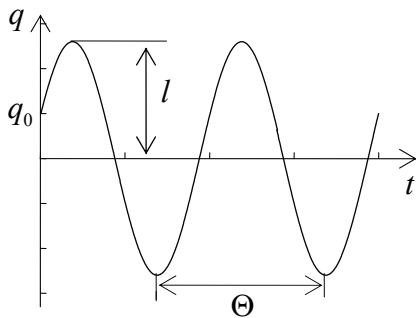


Рис. 2.2.2. График гармонических колебаний

Для качественного изучения общей картины движения системы очень полезным является введение в рассмотрение так называемой фазовой плоскости  $(q, \dot{q})$ , в которой строятся кривые — фазовые траектории, графически отражающие зависимость между обобщенными координатой и скоростью системы для всего многообразия интегральных кривых.

Имея в виду (2.2.17) и (2.2.20), получим

$$\frac{q^2}{l^2} + \frac{\dot{q}^2}{(kl)^2} = 1, \quad (2.2.28)$$

что представляет собой уравнение эллипса, точнее, семейства эллипсов, отвечающих тем или иным начальным условиям, изображенным на рис. 2.2.3.

В силу (2.2.27) каждая кривая совпадает с поверхностью уровня полной механической энергии  $E$ . Семейство эллипсов возникает из-за различных начальных условий. Для всех эллипсов отношение полу-

осей одно и то же:  $kl/l = k$ , т. е. равно частоте собственных колебаний. Замкнутость фазовых траекторий свидетельствует о периодичности движения.

Покою системы в положении ее устойчивого равновесия соответствует начало координат фазовой плоскости ( $q = 0$ ,  $\dot{q} = 0$ ). При уменьшении полной энергии, т. е. при уменьшении  $q_0$  и  $v_0$ , фазовые траектории стягиваются к началу координат.

В данном простом примере для нахождения уравнения фазовой траектории использовался закон движения (2.2.17), в более сложных случаях закон движения может быть и неизвестен и, тем не менее, уравнение фазовой траектории может быть определено непосредственно с помощью закона сохранения энергии

$$E = \frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2 + U(q) = \text{const}, \quad (2.2.29)$$

который в самой общей форме устанавливает связь между обобщенными координатой и скоростью, и в рассматривавшемся случае имеет вид (2.2.26).

Неустойчивое равновесие определяется отрицательным значением квазиупругого коэффициента:  $c < 0$ . В тех же предположениях, что и выше, полная энергия системы имела бы вид

$$E = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} |c| q^2 \quad (2.2.30)$$

и, следовательно,

$$\frac{m \dot{q}^2}{2E} - \frac{|c| q^2}{2E} = 1, \quad (2.2.31)$$

т. е. уравнением фазовой траектории была бы гипербола, которая, как известно, не является замкнутой – система все в большей степени отклонялась бы от положения неустойчивого равновесия. Тот же результат вытекает и из рассмотрения уравнения движения, которое в данном случае имеет вид

$$m \ddot{q} = -c q = |c| q, \quad (2.2.32)$$

или

$$m \ddot{q} - |c| q = 0, \quad (2.2.33)$$

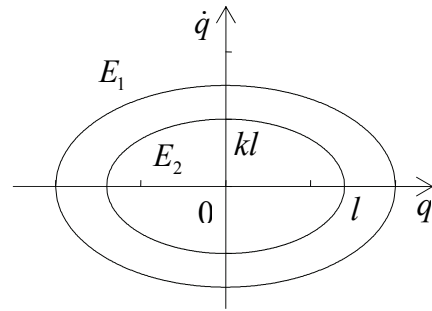


Рис. 2.2.3.  $E_1 > E_2$ .  
Фазовые траектории гармонических колебаний

откуда

$$\ddot{q} - k^2 q = 0, \quad (2.2.34)$$

где  $k^2 = \frac{|c|}{m}$ .

Уравнение (2.2.34) отличается от (2.2.3) лишь знаком при втором слагаемом, но решение его меняется радикально. Решение однородного линейного уравнения опять ищем в экспоненциальной форме (2.2.4), подстановка которой в (2.2.34) приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 - k^2 = 0, \quad (2.2.35)$$

имеющему действительные корни  $\lambda = \pm k$ , поэтому общее решение уравнения (2.2.34) должно иметь вид

$$q = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}, \quad (2.2.36)$$

т. е. обобщенная координата экспоненциально растет со временем: никакой периодичности нет.

### **2.3. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы**

Будем считать, что на систему, рассмотренную на предыдущей лекции, действует еще зависящая от времени сила  $\vec{F}(t)$  (см. рисунок).

Тогда уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{q} = -cq + F(t). \quad (2.3.1)$$

Разделим все слагаемые на коэффициент при ускорении и введем обозначения

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}. \quad (2.3.2)$$

Тогда уравнение (2.3.1) можно записать так:

$$\ddot{q} + k^2 q = f(t). \quad (2.3.3)$$

Общее решение неоднородного линейного уравнения (2.3.3) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$q = q_1 + q_2, \quad (2.3.4)$$

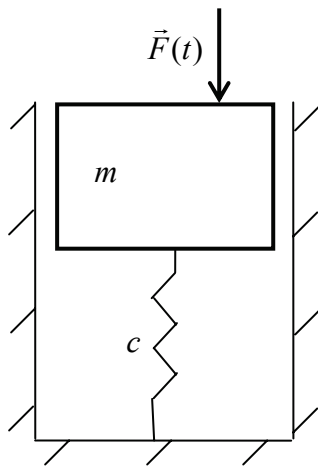


Рисунок. Машина на упругом основании под действием переменной силы

где  $q_1$  удовлетворяет уравнению

$$\ddot{q}_1 + k^2 q_1 = 0. \quad (2.3.5)$$

Общее решение однородного уравнения было найдено ранее, и оно имеет вид

$$q_1 = A \cos kt + B \sin kt. \quad (2.3.6)$$

Частное решение  $q_2$  можно найти с помощью метода вариации произвольных постоянных, т. е. в виде (2.3.6), но с коэффициентами, зависящими от времени:

$$q_2 = C(t) \cos kt + D(t) \sin kt. \quad (2.3.7)$$

Для нахождения функций  $C$  и  $D$  последнее выражение нужно подставить в (2.3.3). Вычислим сначала первую производную по времени

$$\dot{q}_2 = \dot{C} \cos kt + \dot{D} \sin kt + k(-C \sin kt + D \cos kt). \quad (2.3.8)$$

Поскольку введены две неизвестные функции, а уравнение (2.3.3) только одно, необходимо наложить на эти функции дополнительное условие. Положим

$$\dot{C} \cos kt + \dot{D} \sin kt = 0. \quad (2.3.9)$$

Тогда

$$\ddot{q}_2 = k(-\dot{C} \sin kt + \dot{D} \cos kt) - k^2(C \cos kt + D \sin kt). \quad (2.3.10)$$

Подставив (2.3.7) и (2.3.10) в (2.3.3), будем иметь

$$k(-\dot{C} \sin kt + \dot{D} \cos kt) - k^2(C \cos kt + D \sin kt) + k^2(C \cos kt + D \sin kt) = f(t). \quad (2.3.11)$$

Слагаемые, содержащие множитель  $k^2$ , взаимно уничтожаются, в результате чего

$$k(-\dot{C} \sin kt + \dot{D} \cos kt) = f(t). \quad (2.3.12)$$

Таким образом, получена система двух уравнений (2.3.9) и (2.3.12) для двух неизвестных функций  $C$  и  $D$ . Запишем ее в стандартной форме

$$\dot{C} \cos kt + \dot{D} \sin kt = 0, \quad (2.3.13)$$

$$-\dot{C} \sin kt + \dot{D} \cos kt = \frac{1}{k} f(t). \quad (2.3.14)$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos kt & \sin kt \\ -\sin kt & \cos kt \end{vmatrix} = \cos^2 kt + \sin^2 kt = 1, \quad (2.3.15)$$

поэтому

$$\dot{C} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & \sin kt \\ \frac{1}{k} f(t) & \cos kt \end{vmatrix} = -\frac{1}{k} f(t) \sin kt, \quad (2.3.16)$$

$$\dot{D} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \cos kt & 0 \\ -\sin kt & \frac{1}{k} f(t) \end{vmatrix} = \frac{1}{k} f(t) \cos kt. \quad (2.3.17)$$

В обоих дифференциальных уравнениях (2.3.16) и (2.3.17) переменные отделяются, так что их решения находятся простым интегрированием:

$$C(t) = -\frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \sin k\tau d\tau, \quad (2.3.18)$$

$$D(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \cos k\tau d\tau. \quad (2.3.19)$$

Подставив эти выражения в (2.3.7), получим частное решение неоднородного уравнения (2.3.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} q_2 &= -\frac{1}{k} \cos kt \int_0^t f(\tau) \sin k\tau d\tau + \frac{1}{k} \sin kt \int_0^t f(\tau) \cos k\tau d\tau = \\ &= \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) (\sin kt \cos k\tau - \cos kt \sin k\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Нетрудно убедиться в том, что  $q_2$  удовлетворяет нулевым начальным условиям. Действительно,  $q_2(0) = 0$  в силу равенства пределов интегрирования в (2.3.20). Для вычисления производной по времени от  $q_2$  нужно воспользоваться правилом дифференцирования интеграла с переменными пределами

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, y) dy = f(t, b) \frac{db}{dt} - f(t, a) \frac{da}{dt} + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dy. \quad (2.3.21)$$

В нашем случае  $a = 0$ , поэтому второе слагаемое в (2.3.21) обращается в нуль,  $b = t$ ,  $f(t)\sin(t-t) = 0$ , т. е. первое слагаемое тоже равно нулю, в результате чего получим

$$\dot{q}_2 = \int_0^t f(\tau) \cos k(t-\tau) d\tau$$

и, следовательно,  $\dot{q}_2(0) = 0$  опять из-за равенства пределов интегрирования.

Итак, общее решение уравнения (2.3.3) имеет вид

$$q = A \cos kt + B \sin kt + \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \sin k(t-\tau) d\tau. \quad (2.3.22)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются начальными условиями:

$$A = q_0, \quad B = \frac{\dot{q}_0}{k}.$$

## **2.4. Гармоническая возмущающая сила**

Рассмотрим случай, когда возмущающая сила зависит от времени по простому гармоническому закону, например

$$F(t) = H \sin pt. \quad (2.4.1)$$

Уравнение (2.3.3) при этом примет вид

$$\ddot{q} + k^2 q = \frac{H}{m} \sin pt. \quad (2.4.2)$$

Частное решение этого уравнения всегда можно получить с помощью формулы (2.3.20), однако в данном случае такой подход нельзя назвать наилучшим, поскольку он связан с довольно громоздкими преобразованиями подынтегрального выражения; к нему мы будем обращаться тогда, когда другие, более простые средства не позволят добиться результата.

Попытаемся сначала определить частное решение в таком же виде, как и (2.4.1), т. е. положим

$$q_2 = C \sin pt, \quad (2.4.3)$$

где  $C$  – неизвестная постоянная. Подставим это выражение в уравнение (2.4.2):

$$-Cp^2 \sin pt + k^2 C \sin pt = \frac{H}{m} \sin pt.$$

Это выражение обратится в тождество, если коэффициенты при синусах в правой и левой частях окажутся одинаковыми. Следовательно,

$$C = \frac{H}{m(k^2 - p^2)}, \quad (2.4.4)$$

и общее решение имеет вид

$$q = A \cos kt + B \sin kt + \frac{H}{m(k^2 - p^2)} \sin pt, \quad (2.4.5)$$

т. е. движение системы представляет собой наложение двух колебаний с разными частотами. Два первых слагаемых соответствуют свободным колебаниям с собственной частотой  $k$ , последнее слагаемое описывает вынужденное колебание, частота которого равна частоте возмущающей силы, а амплитуда

$$|C| = \frac{H}{m|k^2 - p^2|} \quad (2.4.6)$$

не зависит от начальных условий. При  $p < k$  вынужденные колебания совпадают по фазе с возмущающей силой, а при  $p > k$  они находятся с ней в противофазе.

Для определения произвольных постоянных  $A$  и  $B$  найдем выражение для скорости, продифференцировав (2.4.5) по времени:

$$\dot{q} = -Ak \sin kt + Bk \cos kt + Cp \cos pt. \quad (2.4.7)$$

Тогда

$$q_0 = A,$$

$$v_0 = Bk + Cp,$$

откуда следует

$$B = \frac{v_0 - Cp}{k},$$

и поэтому

$$q = q_0 \cos kt + \frac{v_0 - Cp}{k} \sin kt + C \sin pt. \quad (2.4.8)$$

Из этого выражения следует, что даже при нулевых начальных условиях  $q_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$  в колебательном движении системы будет присутствовать составляющая с собственной частотой  $k$ :



$$q = C \left( \sin pt - \frac{p}{k} \sin kt \right),$$

причем амплитуда этих колебаний никак не связана с начальными условиями.

Рассмотрим амплитуду вынужденных колебаний подробнее. Представим выражение (2.4.6) в виде

$$|C| = \frac{H}{mk^2 \left| 1 - \frac{p^2}{k^2} \right|} = \frac{H}{c \left| 1 - \frac{p^2}{k^2} \right|} = \frac{H\gamma}{c}, \quad (2.4.9)$$

где величина  $H/c$  представляет собой статическое отклонение от положения равновесия под действием постоянной силы, равной максимальному значению возмущающей силы  $H$ , а

$$\gamma = \frac{1}{\left| 1 - \frac{p^2}{k^2} \right|} \quad (2.4.10)$$

является коэффициентом динамичности, показывающим, насколько амплитуда вынужденных колебаний превосходит статическое отклонение. Зависимость этого коэффициента от частоты возмущающей силы (точнее, от безразмерной частоты  $z = p/k$ ) представлена на рис. 2.4.1.

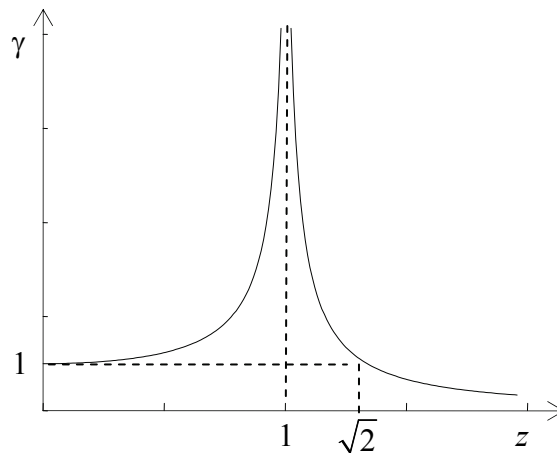


Рис. 2.4.1. Зависимость коэффициента динамичности от безразмерной частоты

Видно, что при малых  $z$  параметр  $\gamma$  близок к единице, т. е. вынуждающая сила по своему характеру близка к постоянной величине, при

больших  $z$  параметр  $\gamma$  и, следовательно, амплитуда вынужденных колебаний малы (система не успевает реагировать на высокочастотное воздействие). Коэффициент  $\gamma$  и амплитуда вынужденных колебаний становятся большими, когда частота вынуждающей силы близка к собственной частоте системы, а при их совпадении (при резонансе) обращаются в бесконечность. Разумеется, никаких бесконечностей в реальных системах быть не может – дефект содержится в виде полурешения.

Частное решение уравнения (2.4.2) в случае резонанса, т. е. при  $p = k$ , будем определять с помощью формулы (2.3.20), которая при указанном условии и учете (2.4.1) примет вид

$$q_2 = \frac{H}{mk} \int_0^t \sin k\tau \sin k(t - \tau) d\tau. \quad (2.4.11)$$

Интегралы такого вида часто встречаются при рассмотрении колебательных процессов и их можно вычислять либо интегрированием по частям, либо преобразованием подынтегрального выражения таким образом, чтобы оно содержало суммы или разности тригонометрических функций. Воспользуемся вторым способом, имея в виду, что

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Положив  $\alpha = k\tau$ ,  $\beta = k(t - \tau)$ , получим

$$\sin k\tau \sin k(t - \tau) = \frac{1}{2} [\cos(2k\tau - kt) - \cos(kt)].$$

Подставим последнее выражение в (2.4.11):

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{H}{2mk} \int_0^t [\cos(2k\tau - kt) - \cos kt] d\tau = \\ &= \frac{H}{2mk} \left[ \frac{1}{2k} \sin(2k\tau - kt) \Big|_0^t - t \cos kt \right] = \\ &= \frac{H}{2mk} \left( \frac{1}{k} \sin kt - t \cos kt \right). \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Общее решение, таким образом, примет вид

$$q = A \cos kt + B \sin kt + \frac{H}{2mk} \left( \frac{1}{k} \sin kt - t \cos kt \right), \quad (2.4.13)$$

т. е. при резонансе система колеблется с собственной частотой, размахи колебаний остаются конечными, хотя и растут пропорционально времени из-за последнего слагаемого в (2.4.13) (так называемого секулярного члена, делающего движение неперiodическим). Такое поведение представлено на рис. 2.4.2.

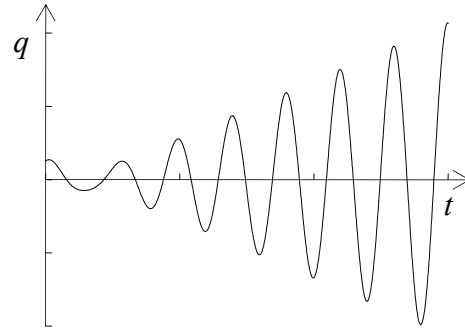


Рис. 2.4.2. Резонанс

Нагрузка на упругий элемент при этом становится очень значительной. Хотя расходимости нет, все же такое существенное нарастание колебаний возможно лишь в рассматриваемой идеализированной системе при отсутствии потерь.

### **2.5. Ротор на гибком валу. Эффект самоцентрирования**

В химических производствах и в производстве строительных материалов широко используются различные по конструктивным особенностям мешалки и центрифуги, в которых основным рабочим органом является ротор (рис. 2.5.1).

Если расстояние между опорами ротора значительно больше его диаметра, то при определении допустимых дисбалансов следует принимать во внимание деформации изгиба ротора или его вала. Для установления основных соотношений между деформациями изгиба и дисбалансом рассмотрим простейший случай вертикального вала, на котором укреплен диск массой  $m$ .

Центр масс  $s$  смещен от оси вала на величину  $e$ . Массой вала пренебрегаем. При вращении вала с угловой скоростью  $\omega$  центробежная сила инерции диска вызывает изгиб вала. Обозначим через  $y$  прогиб вала в сечении, где укреплен диск. Этот прогиб связан с модулем силы инерции  $F_e = m(e + y)\omega^2$  соотношением

$$y = \delta_1 m (e + y) \omega^2, \quad (2.5.1)$$

где  $\delta_1$  – прогиб от единичной силы в данном сечении. Отсюда

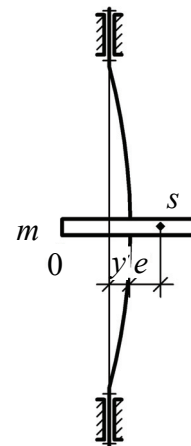


Рис. 2.5.1. Ротор на гибком валу

$$y = \frac{\omega^2 e}{\frac{1}{\delta_1 m} - \omega^2}. \quad (2.5.2)$$

Угловая скорость вала, при которой знаменатель выражения (2.5.2) обращается в нуль, а, следовательно, прогиб  $y \rightarrow \infty$ , называется критической угловой скоростью:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{1}{\delta_1 m}}. \quad (2.5.3)$$

Критическую угловую скорость вращения вала можно рассматривать так же, как собственную частоту системы «вал – диск», а состояние вала при  $\omega = \omega_k$  считать резонансным. Если учесть силы сопротивления, то при критической угловой скорости прогиб  $y$  не стремится к бесконечности, а имеет хотя и большую, но конечную величину. Из (2.5.2) имеем

$$y = \frac{e}{\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2 - 1}. \quad (2.5.4)$$

Отсюда видно, что при  $\omega < \omega_k$  (докритический или дорезонансный режим)  $y > 0$ , а при  $\omega > \omega_k$  (закритический или зарезонансный режим)  $y < 0$ , т. е. в закритическом режиме прогиб  $y$  получается отрицательным или, что то же, сдвиг фаз между колебаниями вынуждающей силы и собственными колебаниями равен  $\pi$ . В закритическом режиме прогиб  $y$  уменьшается с увеличением угловой скорости  $\omega$  и при  $\omega \rightarrow \infty$  стремится к смещению  $e$ . Центробежная сила инерции в закритическом режиме определяется соотношением

$$F_e = m(e - y)\omega^2, \quad (2.5.5)$$

т. е. дисбаланс уменьшается с увеличением угловой скорости.

Вал, работающий при угловой скорости, меньшей критической, принято называть жестким, а при угловой скорости, большей критической, – гибким. Если на валу укреплено несколько дисков, то колебательная система «вал – диски» имеет несколько степеней свободы, и тогда должно быть несколько критических (резонансных) угловых скоростей. Наименьшая из этих скоростей называется первой резонансной. С учетом того, что при балансировке роторов принимается во внимание упругость опор, к жестким относятся роторы, у которых

после балансировки в двух произвольно выбранных плоскостях коррекции на частоте вращения ниже первой резонансной системы «ротор – опоры» значения остаточных дисбалансов в плоскостях опор не превзойдут допустимых значений на эксплуатационных частотах вращения. Все остальные роторы относятся к гибким.

Особенность балансировки гибкого ротора состоит в том, что плоскости коррекции не могут быть выбраны произвольно. Расчетом можно установить оптимальные плоскости коррекции. Корректирующие массы, установленные в оптимальных плоскостях коррекции, вызывают в теле ротора минимальные изгибающие моменты и позволяют при балансировке на частоте вращения ниже первой резонансной сохранить достигнутую уравновешенность в широком диапазоне частот вращения.

Шведский инженер К. Лаваль в 1889 году построил паровую турбину, в которой наряду с другими техническими усовершенствованиями для уменьшения динамических нагрузок использовал парадоксальное на первый взгляд инженерное решение – вместо увеличения жесткости системы колесо турбины было установлено на достаточно гибком валу. В связи с широким использованием подобных устройств в технике (турбины, центрифуги, мешалки и т. д.) задача о вращении ротора имеет важное прикладное значение.

На рис. 2.5.2 изображена схема нагружения ротора, показанного на рис. 2.5.1.

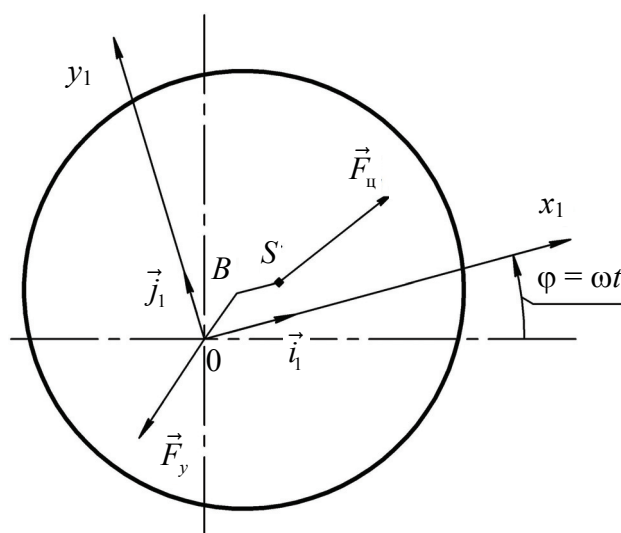


Рис. 2.5.2. Схема нагружения ротора

Предположим, что двигатель обеспечивает вращение ротора с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . В связи с погрешностями изготовления

центр масс  $S$  ротора не совпадает с точкой  $B$  пересечения осевой линии вала с плоскостью ротора. В проекции на горизонтальную плоскость геометрическая ось вращения проходит через точку  $O$ . Выберем подвижную систему координат  $Ox_1y_1$ , вращающуюся с угловой скоростью  $\omega$  так, что  $Ox_1 \parallel BS$ . В подвижной системе координат на точки диска действуют центробежные силы инерции, пропорциональные расстояниям  $r$  точек до геометрической оси вращения  $Oz$ . Такие силы аналогичны силам упругости и поэтому имеют потенциал. Введем функцию, которую будем называть потенциальной энергией центробежных сил инерции:

$$U_{F_e} = -\frac{1}{2} \int_V \omega^2 r^2 dm = -\frac{1}{2} J_{0z} \omega^2. \quad (2.5.6)$$

Интеграл взят по объему ротора. Переходя к моменту инерции ротора относительно центральной оси, запишем потенциальную энергию упругой силы изогнутого вала и центробежных сил в виде

$$U = \left\{ c \left[ (x - e)^2 + y^2 \right] - m\omega^2 (x^2 + y^2) \right\} - \frac{1}{2} J_{Sz} \omega^2, \quad (2.5.7)$$

где  $c$  – коэффициент упругости вала,  $m$  – масса ротора,  $x, y$  – координаты его центра масс  $S$  в системе  $Ox_1y_1$ .

Определим положение относительного равновесия:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = c(x - e) - m\omega^2 x; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = cy - m\omega^2 y.$$

Приравнивая к нулю первые производные, находим

$$y_1 = 0, \quad x_1 = \frac{ce}{c - m\omega^2} = \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} e, \quad k^2 = \frac{c}{m}. \quad (2.5.8)$$

Исследуем устойчивость положения равновесия. Для этого составим матрицу из вторых производных:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - m\omega^2 & 0 \\ 0 & c - m\omega^2 \end{pmatrix}. \quad (2.5.9)$$

Используя критерий Сильвестра, находим условие устойчивости  $c - m\omega^2 > 0$ , или

$$k^2 - \omega^2 > 0 \Rightarrow k^2 > \omega^2. \quad (2.5.10)$$

Отсюда следует, что при достаточно малой угловой скорости ( $\omega < k$ ) или большой жесткости вала ( $c > m\omega^2$ ) положение относительного равновесия устойчиво. При этом точка  $B$  расположена между точками  $O$  и  $S$  и суммарная динамическая реакция опор, равная силе инерции, определяется выражением

$$R_d = m\omega^2 x_1 = \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} m\omega^2 e. \quad (2.5.11)$$

Для очень жесткого вала ( $k^2 \gg \omega^2$ ) динамическая реакция пропорциональна дебалансу  $me$  ротора и квадрату угловой скорости. При больших угловых скоростях (порядка  $10^3$  рад/с) и дебалансах  $\sim 10^{-2}$  кгм ( $m \sim 10$  кг,  $e \sim 10^{-3}$  м) динамические реакции  $R_d \sim 10$  кН и требуются очень жесткие валы ( $c \gg m\omega^2 \sim 10^7$  Н/м = 10 кН/мм).

При  $\omega^2 > k^2$  из (2.5.9), (2.5.10) следует, что положение относительного равновесия неустойчиво.

Однако центробежные силы охватывают только часть инерционных сил. Поэтому анализ потенциальной энергии диска не является полным. Необходимо учесть кориолисовы силы инерции (диск имеет две степени свободы). Для более полного анализа задачи составим дифференциальные уравнения движения центра масс ротора.

Относительные скорость и ускорение точки  $S$  равны:

$$\vec{v}_r = \dot{x}\vec{i}_1 + \dot{y}\vec{j}_1, \quad \vec{a}_r = \ddot{x}\vec{i}_1 + \ddot{y}\vec{j}_1.$$

Ускорение Кориолиса

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2\omega(-\dot{y}\vec{i}_1 + \dot{x}\vec{j}_1).$$

Центробежная сила инерции

$$\vec{F}_e = m\omega^2(x\vec{i}_1 + y\vec{j}_1).$$

Сила упругости изогнутого вала

$$\vec{F}_y = -c[(x - e)\vec{i}_1 + y\vec{j}_1].$$

В результате дифференциальное уравнение движения центра масс во вращающейся системе координат

$$m\vec{a}_r = \vec{F}_y + \vec{F}_e - m\vec{a}_c$$

в проекциях на оси координат имеет вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -c(x - e) + m\omega^2 x + 2m\omega\dot{y}, \\ m\ddot{y} &= -cy + m\omega^2 y - 2m\omega\dot{x}. \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

После деления на  $m$ :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (k^2 - \omega^2)x - 2\omega\dot{y} &= k^2 e, \\ \ddot{y} + (k^2 - \omega^2)y + 2\omega\dot{x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Характеристический определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + (k^2 - \omega^2) & -2\omega\lambda \\ 2\omega\lambda & \lambda^2 + (k^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.5.14)$$

построен на основании антисимметричной матрицы. Слагаемые  $2m\omega\dot{y}$  и  $2m\omega\dot{x}$  в уравнениях (2.5.12), обусловленные кориолисовой силой инерции и приводящие к антисимметричности матрицы этих уравнений, называют гироскопическими силами.

Раскрывая определитель (2.5.14), получим характеристическое уравнение

$$\left[ \lambda^2 + (k^2 - \omega^2) \right]^2 + 4\omega^2 \lambda^2 = 0. \quad (2.5.15)$$

Его решение будем искать в виде

$$\lambda = pi, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (2.5.16)$$

так что после этой подстановки

$$\left( -p^2 + k^2 - \omega^2 \right)^2 = 4p^2\omega^2$$

и извлечения квадратного корня

$$-p^2 + k^2 - \omega^2 = \pm 2p\omega$$

запишем решение:

$$p_{1, 2, 3, 4} = \pm\omega \pm k. \quad (2.5.17)$$

С учетом (2.5.16) заключаем, что все четыре корня характеристического уравнения (2.5.15) мнимые, и решение системы уравнений (2.5.12) записывается через тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \sin p_1 t + B_1 \cos p_1 t + A_2 \sin p_2 t + B_2 \cos p_2 t + x_1, \\ y &= C_1 \sin p_1 t + D_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_2 t + D_2 \cos p_2 t, \\ p_1 &= \omega + k, \quad p_2 = \omega - k. \end{aligned} \quad (2.5.18)$$



Взаимосвязи между постоянными интегрирования  $A_j, B_j, C_j, D_j$  устанавливаются подстановкой (2.5.18) в (2.5.13):

$$C_1 = -B_1, \quad D_1 = A_1, \quad C_2 = -B_2, \quad D_2 = A_2.$$

Складывая гармоники одинаковой частоты, находим:

$$x = a \sin(p_1 t + \alpha) + b \sin(p_2 t + \delta) + x_1,$$

$$y = a \cos(p_1 t + \alpha) + b \cos(p_2 t + \delta),$$

$$a = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad b = \sqrt{A_2^2 + B_2^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = B_1 / A_1, \quad \operatorname{tg} \beta = B_2 / A_2. \quad (2.5.19)$$

Проанализируем полученные результаты. Прежде всего отметим, что решение уравнений указывает на устойчивость положения равновесия (равновесное значение  $x_1$  определено выражением (2.5.8)) как при  $\omega < k$ , так и при  $\omega > k$ . Отсюда следует, что гироскопические силы в данном случае стабилизируют положение равновесия при больших угловых скоростях ротора  $\omega > k$ . Именно явление гироскопической стабилизации было использовано Лавалем в турбине с гибким валом. Рассмотрим равновесное положение  $x_1$  центра масс в этом случае. Согласно (2.5.8) оно должно быть отрицательным, но удобнее иметь дело с положительным его значением. Поэтому в (2.5.7) перед  $e$  следует использовать знак  $\pm$ , что соответствовало бы различным взаимным расположениям точек  $B$  и  $S$  и начала координат  $O$ . Верхний знак реализуется при  $\omega < k$ , нижний – при  $\omega > k$ . В результате вместо (2.5.8) следует записать

$$x_1 = \frac{k^2}{|k^2 - \omega^2|} e \quad (2.5.20)$$

и иметь в виду, что при больших угловых скоростях  $\omega > k$  центр масс ротора  $S$  расположен между точками  $O$  и  $B$  и при увеличении  $\omega$  стремится к геометрической оси вращения, т. е. к точке  $O$ . Результирующая динамическая реакция при этом

$$R_d = \frac{k^2}{\omega^2 - k^2} m \omega^2 e \approx k^2 m e = c e \quad (2.5.21)$$

практически не зависит от угловой скорости и определяется только точностью балансировки ротора и упругой характеристикой вала. Варьируя последнюю, можно и обеспечить достаточную жесткость

конструкции, и не выйти за пределы допустимых динамических нагрузок. О стремлении положения центра масс ротора к геометрической оси вращения при увеличении угловой скорости говорят как о явлении самцентрирования или автобалансировки ротора на гибком валу.

Вторая интересная особенность системы уравнений движения (2.5.13) следует из вида их общего решения (2.5.19). Для этого решения нельзя ввести понятие о собственных формах колебаний, так как движения вдоль осей  $x$  и  $y$  одной и той же частоты смещены по фазе на  $0,5\pi$ . При прохождении критической частоты  $\omega = k$  фазовые сдвиги меняют свой характер, поскольку меняет знак  $p_2$ .

Наиболее опасной зоной угловых скоростей вращения ротора является  $\omega \approx k$ , когда равновесные значения  $x_1$  велики. Поэтому скорость вращения  $\omega = k$  называют критической, и при проектировании подобных устройств стремятся обеспечить режим их работы либо при  $\omega \ll k$  (жесткий вал), либо при  $\omega \gg k$  (гибкий вал; обычно принимают  $\omega \approx 3k$ , или  $\omega > 3k$ ). При использовании режима гибкого вала в процессе разгона приходится «проходить» критическую угловую скорость. Для этого необходим двигатель достаточной мощности, обеспечивающий быстрое прохождение критической скорости вращения, чтобы резонансные явления не успели проявиться.

Мы рассмотрели задачу, когда  $\omega = \text{const}$ . Фактически создать такой двигатель трудно и скорость вращения ротора, в свою очередь, должна определяться уравнениями динамики. При этом задача о движении ротора становится нелинейной и рассмотренный выше анализ дает лишь необходимые условия устойчивости в первом приближении.

## **2.6. Силы вязкого сопротивления**

Рассмотрим простейший случай, когда сила вязкого сопротивления, действующая на материальную точку с номером  $k$ , пропорциональна ее скорости:

$$\vec{F}_k^S = -b_k \vec{v}_k, \quad (2.6.1)$$

причем все коэффициенты сопротивления  $b_k$  положительны. Тогда можно ввести обобщенную силу сопротивления

$$Q_\alpha^S = \sum_k \vec{F}_k^S \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_\alpha} = - \sum_k b_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_\alpha}. \quad (2.6.2)$$

Имея в виду систему со стационарными связями, будем иметь

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad (2.6.3)$$

поэтому

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha}, \quad (2.6.4)$$

т. е.

$$\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_{\alpha}}. \quad (2.6.5)$$

Следовательно,

$$Q_{\alpha}^S = - \sum_k b_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \sum_k b_k v_k^2 = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_{\alpha}}, \quad (2.6.6)$$

где введено обозначение

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_k b_k v_k^2. \quad (2.6.7)$$

Введенная величина  $\Phi$  называется функцией рассеивания Релея, или диссипативной функцией. Из определения видно, что она положительно определена. Выразим ее через обобщенные координаты и скорости с помощью (2.6.4), имея в виду, что  $v_k^2 = \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k$ :

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_k b_k \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k = \frac{1}{2} \sum_k b_k \sum_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \cdot \sum_{\beta} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_{\beta}} \dot{q}_{\beta}. \quad (2.6.8)$$

Поменяем в последнем выражении порядок суммирования:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left( \sum_k b_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_{\beta}} \right) \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} B_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta}. \quad (2.6.9)$$

Здесь введено обозначение для обобщенных коэффициентов сопротивления, или диссипативных коэффициентов:

$$B_{\alpha\beta}(q) = B_{\beta\alpha}(q) = \sum_k b_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_{\beta}}, \quad (2.6.10)$$

матрица которых симметрична по определению.

Выясним физический смысл введенной функции Релея, считая, что рассматриваемая система находится под действием потенциальных сил и сил вязкого сопротивления. Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} = Q_{\alpha} + Q_{\alpha}^S = - \frac{\partial U}{\partial q_{\alpha}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_{\alpha}}. \quad (2.6.11)$$

Умножим обе части последнего равенства на  $\dot{q}_\alpha$  :

$$\dot{q}_\alpha \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\dot{q}_\alpha \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} - \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha}. \quad (2.6.12)$$

Преобразуем первое слагаемое в левой части следующим образом:

$$\dot{q}_\alpha \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \ddot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad (2.6.13)$$

тогда уравнение (2.6.12) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \ddot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\dot{q}_\alpha \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} - \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha}. \quad (2.6.14)$$

Просуммируем теперь полученное равенство по всем значениям  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \sum_\alpha \left( \ddot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) = \\ = -\sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} - \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha}. \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

Вспомним теперь о том, что в самом общем случае кинетическая энергия является функцией обобщенных координат и скоростей, т. е.  $T = T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$ , и поэтому

$$\frac{dT}{dt} = \sum_\alpha \left( \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right), \quad (2.6.16)$$

с другой стороны,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} m_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \quad (2.6.17)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} m_{\alpha\beta}(q) (\delta_{\alpha\gamma} \dot{q}_\beta + \dot{q}_\alpha \delta_{\beta\gamma}). \quad (2.6.18)$$

Символ Кронекера в первом слагаемом правой части снимает сумму по  $\alpha$ , а во втором – по  $\beta$ , в результате чего соотношение (2.6.18) приобретает вид

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{\beta} m_{\gamma\beta}(q) \dot{q}_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha\gamma}(q) \dot{q}_\alpha = \sum_{\beta} m_{\gamma\beta}(q) \dot{q}_\beta. \quad (2.6.19)$$

Умножив обе части последнего равенства на  $\dot{q}_\gamma$  и просуммировав полученное выражение по  $\gamma$ , получим

$$\sum_{\gamma} \dot{q}_\gamma \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma} = \sum_{\gamma} \sum_{\beta} m_{\gamma\beta}(q) \dot{q}_\gamma \dot{q}_\beta = 2T, \quad (2.6.20)$$

как это следует из вида кинетической энергии (2.6.17). Последнее выражение вместе с (2.6.16) позволяют записать левую часть (2.6.15) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \sum_{\alpha} \left( \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \ddot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 2 \frac{dT}{dt} - \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dt}. \quad (2.6.21)$$

Поскольку функция рассеивания (2.6.9) имеет такую же структуру, как и кинетическая энергия (2.6.17), по аналогии с (2.6.20) можно написать

$$\sum_{\alpha} \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2\Phi. \quad (2.6.22)$$

И, наконец, из того, что потенциальная энергия зависит только от обобщенных координат, т. е.  $U = U(q_1, \dots, q_s)$ , следует

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha. \quad (2.6.23)$$

Подставив (2.6.21)–(2.6.23) в (2.6.15), получим

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt} - 2\Phi,$$

или

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = -2\Phi. \quad (2.6.24)$$

Если вспомнить, что сумма кинетической и потенциальной энергий является полной механической энергией системы  $E = T + U$ , то последнее равенство можно записать так:

$$\frac{dE}{dt} = -2\Phi < 0, \quad (2.6.25)$$

поскольку функция Релея положительно определена.

Таким образом, под действием сил сопротивления полная механическая энергия системы уменьшается со временем, т. е. рассеивается, переходя в другие формы (например, тепловую), и мерой такого рассеивания выступает функция Релея, чем и оправдывается ее название.

## **2.7. Вынужденные колебания при учете сил вязкого сопротивления**

Рассмотрим модель машины на упругом основании с подключенным демпфером, характеризуемым коэффициентом  $\mu$ , на которую действует переменная сила  $\vec{F}(t)$ , рис. 2.7.1. Как и ранее, такая система имеет одну степень свободы.

Для такого случая функция Релея приобретает вид

$$\Phi = \frac{1}{2} B_{11}(q) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \mu(q) \dot{q}^2, \quad (2.7.1)$$

где для краткости обозначено  $\mu = B_{11}$ .

При рассмотрении малых отклонений от положения равновесия диссипативную функцию нужно вычислять с той же точностью, что и потенциальную и кинетическую энергии, поэтому в разложении коэффициента сопротивления необходимо ограничиться только первым членом, т. е.

$$\mu(q) = \mu(0) + \left. \frac{d\mu}{dq} \right|_{q=0} q + \dots \approx \mu(0) \equiv \mu > 0. \quad (2.7.2)$$

Рис. 2.7.1. Машина на упругом основании при наличии демпфера

Уравнение Лагранжа (2.6.11) для случая одной степени свободы несколько упрощается

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + F(t), \quad (2.7.3)$$

поэтому в рассматриваемом приближении (2.7.2) уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{q} = -cq - \mu\dot{q} + F(t). \quad (2.7.4)$$

Приведем его к стандартной форме, перенеся члены, содержащие  $q$  и  $\dot{q}$ , в левую часть и разделив все слагаемые на  $m$ . При этом введем обозначения

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad 2b = \frac{\mu}{m}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}. \quad (2.7.5)$$

Тогда будем иметь

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + k^2q = f(t). \quad (2.7.6)$$

Общее решение этого линейного неоднородного уравнения, как обычно, представляется суммой общего решения  $q_1$  соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{q}_1 + 2b\dot{q}_1 + k^2q_1 = 0 \quad (2.7.7)$$

и частного решения уравнения (2.7.6).

Найдем сначала общее решение уравнения (2.7.7). Оно должно иметь экспоненциальную форму

$$q_1 = Ce^{\lambda t} \quad (2.7.8)$$

с неизвестными постоянными параметрами  $C$  и  $\lambda$ . Они определяются так, чтобы функция (2.7.8) обращала уравнение (2.7.7) в тождество. Подставив ее в (2.7.7), получим

$$C(\lambda^2 + 2b\lambda + k^2)e^{\lambda t} = 0,$$

откуда следует, что параметр  $\lambda$  подчиняется квадратному уравнению (характеристическому уравнению)

$$\lambda^2 + 2b\lambda + k^2 = 0, \quad (2.7.9)$$

решение которого имеет вид

$$\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}, \quad (2.7.10)$$

т. е. оно определяется соотношением между упругой силой и силой сопротивления, которые характеризуются коэффициентами  $k$  и  $b$  соответственно, как это видно из определений (2.7.5).

В случае малого сопротивления, когда  $b < k$ , корни характеристического уравнения оказываются комплексными

$$\lambda_1 = -b + i\Omega, \quad \lambda_2 = -b - i\Omega, \quad \Omega = \sqrt{k^2 - b^2}, \quad (2.7.11)$$

вследствие чего общее решение уравнения (2.7.7) является линейной комбинацией выражений (2.7.8), которую можно представить в эквивалентных формах

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{(-b+i\Omega)t} + C_2 e^{-(b+i\Omega)t} = \\ &= e^{-bt} (C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}) = e^{-bt} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) = \\ &= l e^{-bt} \sin (\Omega t + \delta), \end{aligned} \quad (2.7.12)$$

каждая из которых описывает так называемые затухающие колебания, поскольку из (2.7.12) видно, что решение однородного уравнения при учете сил сопротивления описывает колебательный процесс с экспоненциально убывающей со временем амплитудой. Общий вид затухающих колебаний представлен на рис. 2.7.2.

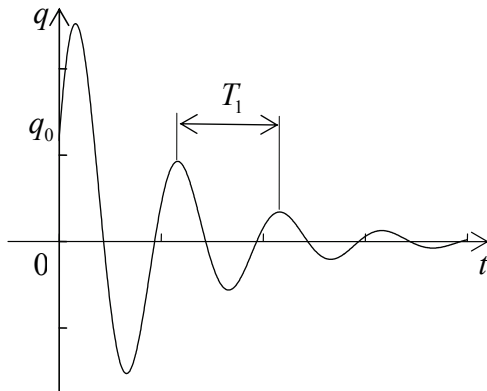


Рис. 2.7.2. Затухающие колебания

циально убывающей со временем амплитудой. Общий вид затухающих колебаний представлен на рис. 2.7.2.

Быстрота убывания размахов определяется коэффициентом  $b$ , который связан с коэффициентом сопротивления  $\mu$  вторым из соотношений (2.7.5). Величина  $T_1 = 2\pi/\Omega$  называется периодом затухающих колебаний, хотя функция, определяемая равенством (2.7.12), конечно, не является периодической.

В случае большого сопротивления  $b > k$  корни характеристического уравнения (2.7.10) действительны, причем оба отрицательны:

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - k^2} < 0, \quad \lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - k^2} < 0. \quad (2.7.13)$$

Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид

$$q_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-|\lambda_1|t} + C_2 e^{-|\lambda_2|t}, \quad (2.7.14)$$

т. е. оно не имеет вообще никаких признаков периодичности, экспоненциально убывая со временем, почему и носит название аperiодического. Характерное поведение такой функции в зависимости от разных начальных условий представлено на рис. 2.7.3.

Вполне понятно, что на процессы, длящиеся достаточно долго, рассмотренные свободные колебания сколько-нибудь существенного влияния не оказывают.

Теперь займемся поиском частного решения уравнения (2.7.6). Воспользуемся при этом опять методом вариации произвольных постоянных, т. е. решение будем искать в виде

$$q_2 = A(t)e^{\lambda_1 t} + B(t)e^{\lambda_2 t}, \quad (2.7.15)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – корни характеристического уравнения (2.7.9), а  $A$  и  $B$  – неизвестные функции. Для их опреде-

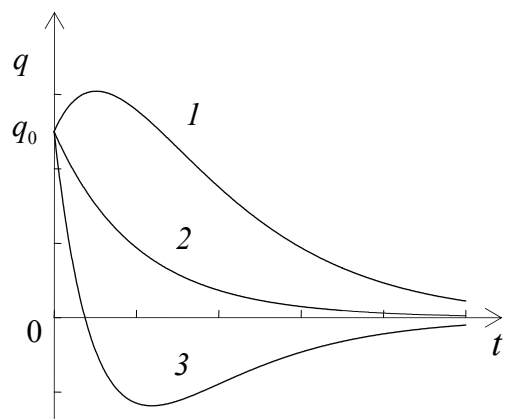


Рис. 2.7.3. Аperiодическое движение



ления подставим последнее выражение в (2.7.6). Сначала вычислим первую производную

$$\dot{q}_2 = \dot{A}e^{\lambda_1 t} + \dot{B}e^{\lambda_2 t} + A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.7.16)$$

и на искомые две функции наложим дополнительное условие

$$\dot{A}e^{\lambda_1 t} + \dot{B}e^{\lambda_2 t} = 0. \quad (2.7.17)$$

Тогда

$$\ddot{q}_2 = \dot{A}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dot{B}\lambda_2 e^{\lambda_2 t} + A\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2^2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2.7.18)$$

Подставим (2.7.16) и (2.7.18) с учетом (2.7.17) в (2.7.6):

$$\begin{aligned} \dot{A}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dot{B}\lambda_2 e^{\lambda_2 t} + A\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} + 2b(A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t}) + \\ + k^2(Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}) = f(t). \end{aligned} \quad (2.7.19)$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие множители  $A$  и  $B$ , т. е. все члены в левой части, начиная с третьего. Тогда окажется, что

$$A(\lambda_1^2 + 2b\lambda_1 + k^2)e^{\lambda_1 t} + B(\lambda_2^2 + 2b\lambda_2 + k^2)e^{\lambda_2 t} = 0$$

из-за того, что  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются корнями характеристического уравнения (2.7.9), и поэтому равенство (2.7.19) превратится в следующее:

$$\dot{A}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dot{B}\lambda_2 e^{\lambda_2 t} = f(t). \quad (2.7.20)$$

Присоединив к нему равенство (2.7.17), получим систему двух дифференциальных уравнений для двух функций  $A$  и  $B$ . Сначала разрешим эту систему относительно производных. Определитель системы (2.7.17), (2.7.19) равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} - \lambda_1 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}, \quad (2.7.21)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & e^{\lambda_2 t} \\ f(t) & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = -\frac{f(t)e^{\lambda_2 t}}{\Delta} = \\ &= -\frac{f(t)e^{\lambda_2 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}} = \frac{f(t)e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \end{aligned} \quad (2.7.22)$$

$$\dot{B} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & f(t) \end{vmatrix} = \frac{f(t)e^{\lambda_1 t}}{\Delta} = \frac{f(t)e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}} = \frac{f(t)e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (2.7.23)$$

Искомые функции найдем в виде интегралов с переменным верхним пределом:

$$A = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t f(\tau) e^{-\lambda_1 \tau} d\tau, \quad (2.7.24)$$

$$B = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t f(\tau) e^{-\lambda_2 \tau} d\tau. \quad (2.7.25)$$

Подставив эти выражения в (2.7.15), получим частное решение неоднородного уравнения в виде

$$q_2 = \frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t f(\tau) e^{-\lambda_1 \tau} d\tau + \frac{e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t f(\tau) e^{-\lambda_2 \tau} d\tau,$$

или

$$q_2 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t f(\tau) \left[ e^{\lambda_1(t-\tau)} - e^{\lambda_2(t-\tau)} \right] d\tau. \quad (2.7.26)$$

В случае малого сопротивления корни характеристического уравнения определяются равенствами (2.7.11), поэтому  $\lambda_1 - \lambda_2 = 2i\Omega$  и частное решение приобретает вид

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{1}{2i\Omega} \int_0^t f(\tau) \left[ e^{(-b+i\Omega)(t-\tau)} - e^{-(b+i\Omega)(t-\tau)} \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{2i\Omega} \int_0^t f(\tau) e^{-b(t-\tau)} \left[ e^{i\Omega(t-\tau)} - e^{-i\Omega(t-\tau)} \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{\Omega} \int_0^t f(\tau) e^{-b(t-\tau)} \sin \Omega (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.7.27)$$

В случае большого сопротивления оба корня действительные и отрицательные, так что частное решение остается в виде (2.7.26) с экспоненциально убывающим множителем под знаком интеграла.

В качестве возмущающей силы опять рассмотрим гармонически изменяющуюся величину

$$F(t) = H \sin pt. \quad (2.7.28)$$

Проведенный выше анализ показал, что свободные колебания при учете сил сопротивления быстро затухают, так что невыясненным осталось только поведение частного решения. Оно может быть получено

непосредственно с помощью формул (2.7.26) или (2.7.27). Будем пользоваться первым из этих выражений, которое годится для любого сопротивления. После подстановки в него возмущающей силы (2.7.28) решение примет вид

$$q_2 = \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t [e^{\lambda_1(t-\tau)} - e^{\lambda_2(t-\tau)}] \sin p\tau d\tau. \quad (2.7.29)$$

Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_0^t e^{-\lambda_1\tau} \sin p\tau d\tau. \quad (2.7.30)$$

Такого вида интегралы можно вычислить интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1\tau} \sin p\tau \Big|_0^t + \frac{p}{\lambda_1} \int_0^t e^{-\lambda_1\tau} \cos p\tau d\tau = -\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \sin pt - \\ &\quad - \frac{p}{\lambda_1^2} e^{-\lambda_1\tau} \cos p\tau \Big|_0^t - \frac{p^2}{\lambda_1^2} \int_0^t e^{-\lambda_1\tau} \sin p\tau d\tau = \\ &= -\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \sin pt - \frac{p}{\lambda_1^2} (e^{-\lambda_1 t} \cos pt - 1) - \frac{p^2}{\lambda_1^2} I_1. \end{aligned} \quad (2.7.31)$$

Перенесем последнее слагаемое в левую часть, после чего получим

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{1 + \frac{p^2}{\lambda_1^2}} \left[ \frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \sin pt + \frac{p}{\lambda_1^2} (e^{-\lambda_1 t} \cos pt - 1) \right] = \\ &= -\frac{1}{\lambda_1^2 + p^2} \left[ \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \sin pt + p(e^{-\lambda_1 t} \cos pt - 1) \right]. \end{aligned} \quad (2.7.32)$$

В выражении (2.7.29) фигурирует комбинация  $e^{\lambda_1 t} I_1$ , которая в соответствии с (2.7.32) равна

$$e^{\lambda_1 t} I_1 = -\frac{1}{\lambda_1^2 + p^2} \left[ \lambda_1 \sin pt + p(\cos pt - e^{\lambda_1 t}) \right]. \quad (2.7.33)$$

Второй интеграл в (2.7.29) теперь можно записать сразу, поменяв в (2.7.33) индексы с единицы на двойку:

$$e^{\lambda_2 t} I_2 = -\frac{1}{\lambda_2^2 + p^2} [\lambda_2 \sin pt + p(\cos pt - e^{\lambda_2 t})]. \quad (2.7.34)$$

Тогда

$$q_2 = \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} I_1 - e^{\lambda_2 t} I_2) = \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \frac{\lambda_2 \sin pt + p(\cos pt - e^{\lambda_2 t})}{\lambda_2^2 + p^2} - \frac{1}{\lambda_1^2 + p^2} [\lambda_1 \sin pt + p(\cos pt - e^{\lambda_1 t})] \right\}. \quad (2.7.35)$$

Далее

$$q_2 = \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[ \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 + p^2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + p^2} \right) \sin pt + p \left( \frac{1}{\lambda_2^2 + p^2} - \frac{1}{\lambda_1^2 + p^2} \right) \cos pt + p \left( \frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1^2 + p^2} - \frac{e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2^2 + p^2} \right) \right]. \quad (2.7.36)$$

В этом выражении можно пренебречь последней скобкой, поскольку она экспоненциально стремится к нулю. Тогда

$$q_2 = \frac{h}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1^2 + p^2)(\lambda_2^2 + p^2)} [(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 \lambda_2 - p^2) \sin pt + p(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos pt] = \frac{h}{(\lambda_1^2 + p^2)(\lambda_2^2 + p^2)} [(\lambda_1 \lambda_2 - p^2) \sin pt + p(\lambda_1 + \lambda_2) \cos pt]. \quad (2.7.37)$$

Хорошо известно (да это и легко получить), что корни квадратного уравнения (2.7.9) обладают следующими свойствами:

$$\lambda_1 \lambda_2 = k^2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -2b, \quad (2.7.38)$$

кроме того, из того же уравнения следует

$$\lambda_1^2 = -2b\lambda_1 - k^2, \quad \lambda_2^2 = -2b\lambda_2 - k^2,$$

поэтому

$$\begin{aligned} (\lambda_1^2 + p^2)(\lambda_2^2 + p^2) &= (p^2 - k^2 - 2b\lambda_1)(p^2 - k^2 - 2b\lambda_2) = \\ &= (p^2 - k^2)^2 - 2b(p^2 - k^2)(\lambda_1 + \lambda_2) + 4b^2\lambda_1\lambda_2 = \\ &= (p^2 - k^2)^2 + 4b^2 p^2, \end{aligned} \quad (2.7.39)$$

в результате чего частное решение приобретает вид

$$q_2 = \frac{h}{(p^2 - k^2)^2 + 4b^2 p^2} [(k^2 - p^2) \sin pt - 2bp \cos pt]. \quad (2.7.40)$$

Таким образом, показано, что при учете сил сопротивления вынужденные колебания не затухают в отличие от свободных.

## **2.8. Амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний при вязком сопротивлении**

Ранее было показано, что вынужденные колебания при любом сопротивлении не затухают и имеют вид

$$q_2 = \frac{h}{(p^2 - k^2)^2 + 4b^2 p^2} [(k^2 - p^2) \sin pt - 2bp \cos pt]. \quad (2.8.1)$$

Представим это выражение в виде, более удобном для физической интерпретации, для чего введем две новые величины

$$D \cos \varepsilon = k^2 - p^2, \quad (2.8.2)$$

$$D \sin \varepsilon = -2bp. \quad (2.8.3)$$

Тогда выражение в квадратной скобке в (2.8.1) можно будет записать так:

$$\begin{aligned} (k^2 - p^2) \sin pt - 2bp \cos pt &= D(\sin pt \cos \varepsilon + \cos pt \sin \varepsilon) = \\ &= D \sin(pt + \varepsilon), \end{aligned}$$

Следовательно, для  $q_2$  будем иметь

$$q_2 = \frac{hD}{(p^2 - k^2)^2 + 4b^2 p^2} \sin(pt + \varepsilon). \quad (2.8.4)$$

Множитель перед синусом в последнем выражении представляет собой амплитуду вынужденных колебаний. Из (2.8.2) и (2.8.3) следует, что

$$D = \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2},$$

поэтому окончательное выражение для амплитуды (обозначим ее буквой  $A$ ) будет следующим:

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}. \quad (2.8.5)$$

Введем опять коэффициент динамичности

$$\gamma = \frac{Ac}{H} \quad (2.8.6)$$

как отношение амплитуды вынужденных колебаний к статическому отклонению от положения равновесия под действием постоянной силы  $H$ . Тогда  $\gamma$  примет вид

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{hc}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4b^2 p^2}} = \frac{Hc}{m\sqrt{(k^2 - p^2) + 4b^2 p^2}} = \\ &= \frac{k^2}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4b^2 p^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4b^2 p^2}{k^4}}}. \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

Для более компактной записи введем безразмерные величины

$$z = \frac{p}{k}, \quad \beta = \frac{b}{k}, \quad (2.8.8)$$

в результате чего коэффициент динамичности запишется в безразмерной форме

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}. \quad (2.8.9)$$

Рассмотрим более подробно зависимость  $\gamma$  от  $z$  (т. е. от частоты возмущающей силы). Как видно из последнего равенства,  $\gamma = 1$  при  $z = 0$ , а при  $z \rightarrow \infty$   $\gamma \rightarrow 0$ . Рассмотрим функцию от  $z$ , которая стоит под знаком радикала,

$$y = (1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2, \quad (2.8.10)$$

и исследуем ее на наличие экстремума. Для этого вычислим производную от  $y$  по  $z$  и приравняем ее к нулю:

$$y' = -4(1 - z^2)z + 8\beta^2 z = 4z(2\beta^2 - 1 + z^2) = 0. \quad (2.8.11)$$

Корнями этого уравнения являются

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}. \quad (2.8.12)$$

При нахождении  $z_2$  взят положительный знак перед радикалом, поскольку величина  $z$  положительна по определению. Для существо-

вания этого корня необходимо, чтобы  $\beta$  удовлетворяла условию  $\beta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ : только в этом случае подкоренное выражение в (2.8.12) будет

положительным. Если это не так, то такого корня не существует.

Вычислим теперь вторую производную от  $y$ :

$$y'' = 4(2\beta^2 - 1 + z^2) + 8z^2. \quad (2.8.13)$$

Для первого корня имеем

$$y''(z_1) = 4(2\beta^2 - 1) = \begin{cases} < 0, & \beta < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ > 0, & \beta > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}. \quad (2.8.14)$$

Первый случай соответствует максимуму  $y$  и, следовательно, минимуму  $\gamma$ , второй – минимуму  $y$  и максимуму  $\gamma$ . Если корень  $z_2$  существует, то

$$y''(z_2) = 8(1 - 2\beta^2) > 0,$$

т. е.  $y$  при этом значении минимально и, следовательно,  $\gamma$  максимально. При этом

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (2.8.15)$$

т. е. высота этого максимума становится тем больше, чем меньше  $\beta$  (чем меньше сопротивление), оставаясь конечной величиной. Между прочим,  $\gamma$  остается конечным и в случае резонанса, когда  $z = 1$ . Поведение коэффициента динамичности в зависимости от частоты возмущающей силы при различном сопротивлении представлено на рисунке.

Кривые 1–3 соответствуют условию существования корня  $z_2$  ( $\beta = 0,1; 0,3; 0,5$  соответственно), при этом максимум тем выше, чем меньше коэффициент сопротивления, а кривая 4 – его отсутствию ( $\beta = 0,9$ ). Существенным является то, что при больших сопротивлениях ( $\beta > 1/\sqrt{2}$ ) и больших частотах ( $z > 1$ , или  $p > k$ ) амплитуда вынужденных колебаний меньше статического смещения.

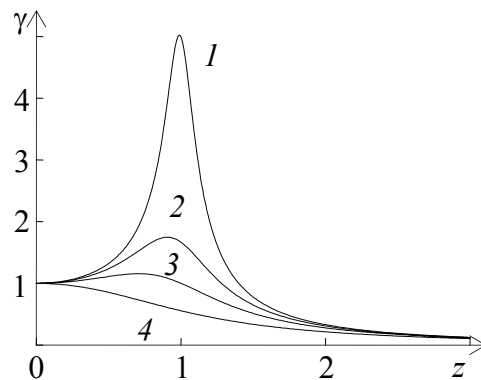


Рисунок. Амплитудно-частотные характеристики при различном сопротивлении

## **2.9. Вынужденные колебания при периодической возмущающей силе**

Периодической называется функция, удовлетворяющая условию

$$F(t) = F(t + \Theta), \quad (2.9.1)$$

где  $\Theta$  – период функции. Будем считать, что возмущающая сила как раз такой и является. Периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos npt + b_n \sin npt), \quad (2.9.2)$$

где  $p = \frac{2\pi}{\Theta}$ , а коэффициенты разложения определяются формулами

$$a_n = \frac{2}{\Theta} \int_0^{\Theta} F(t) \cos npt dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9.3)$$

$$b_n = \frac{2}{\Theta} \int_0^{\Theta} F(t) \sin npt dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9.4)$$

Вид решения соответствующего однородного уравнения, описывающего свободные затухающие колебания, остается без изменений, а частное решение неоднородного уравнения (описывающего незатухающие вынужденные колебания) может быть определено по той же схеме, что и в случае гармонической возмущающей силы, только теперь нужно почленно интегрировать ряд (2.9.2). Можно, однако, поступить проще, воспользовавшись полученным ранее результатом (2.8.1), т. е. искать решение в виде суперпозиции синусоид и косинусоид, но с различными частотами и неизвестными амплитудами, иначе говоря, частное решение можно искать в таком же виде, как и возмущающая сила:

$$q_2 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos npt + B_n \sin npt). \quad (2.9.5)$$

Вычислим производные по времени

$$\dot{q}_2 = \sum_n np(-A_n \sin npt + B_n \cos npt),$$

$$\ddot{q}_2 = -\sum_n (np)^2 (A_n \cos npt + B_n \sin npt)$$



и подставим их в уравнение

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + k^2 q = \frac{1}{m} F(t),$$

где используются те же обозначения, что и ранее, а правая часть определяется формулой (2.9.2). Будем иметь

$$\begin{aligned} & -\sum_n (np)^2 (A_n \cos npt + B_n \sin npt) + 2b \sum_n np (-A_n \sin npt + B_n \cos npt) + \\ & + k^2 \left[ \frac{A_0}{2} + \sum_n (A_n \cos npt + B_n \sin npt) \right] = \\ & = \frac{1}{m} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos npt + b_n \sin npt) \right]. \end{aligned} \quad (2.9.6)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях в обеих частях этого равенства:

$$k^2 A_0 = \frac{a_0}{m}, \quad (2.9.7)$$

$$\left[ k^2 - (np)^2 \right] A_n + 2bnp B_n = \frac{a_n}{m}, \quad (2.9.8)$$

$$\left[ k^2 - (np)^2 \right] B_n - 2bnp A_n = \frac{b_n}{m}. \quad (2.9.9)$$

Из (2.9.7) следует

$$A_0 = \frac{a_0}{mk^2}. \quad (2.9.10)$$

Определитель системы (2.9.8), (2.9.9) равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} k^2 - (np)^2 & 2bnp \\ -2bnp & k^2 - (np)^2 \end{vmatrix} = [k^2 - (np)^2]^2 + 4(bnp)^2, \quad (2.9.11)$$

поэтому

$$A_n = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{a_n}{m} & 2bnp \\ \frac{b_n}{m} & k^2 - (np)^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{m\Delta} \{ a_n [k^2 - (np)^2] - 2b_n bnp \}, \quad (2.9.12)$$

$$B_n = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} k^2 - (np)^2 & \frac{a_n}{m} \\ -2bnp & \frac{b_n}{m} \end{vmatrix} = \frac{1}{m\Delta} \{b_n[k^2 - (np)^2] + 2a_nbnp\}. \quad (2.9.13)$$

Все коэффициенты, таким образом, определены, но для физической интерпретации лучше ввести новые величины с помощью соотношений

$$A_n = C_n \sin \delta_n,$$

$$B_n = C_n \cos \delta_n,$$

откуда следует

$$\operatorname{tg} \delta_n = \frac{A_n}{B_n} = \frac{a_n[k^2 - (np)^2] - 2b_nbnp}{b_n[k^2 - (np)^2] + 2a_nbnp}, \quad (2.9.14)$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{[k^2 - (np)^2]^2 + 4(bnp)^2}}. \quad (2.9.15)$$

Выражение (2.9.5) теперь можно представить в виде

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{a_0}{mk^2} + \sum_n C_n (\cos npt \sin \delta_n + \sin npt \cos \delta_n) = \\ &= \frac{a_0}{mk^2} + \sum_n C_n \sin(npt + \delta_n) = \\ &= \frac{a_0}{mk^2} + \frac{1}{m} \sum_n \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{[k^2 - (np)^2]^2 + 4(bnp)^2}} \sin(npt + \delta_n), \end{aligned} \quad (2.9.16)$$

где  $\delta_n$  определяется формулой (2.9.14).

В реальных расчетах ограничиваются учетом некоторого небольшого числа членов ряда (2.9.16).

## **2.10. Самосинхронизация механизмов на упругом основании**

Под синхронизацией механизмов понимается установление одинаковой (или кратной) средней угловой скорости или частоты колебаний вращающихся звеньев нескольких механизмов, установленных на общем основании. Различают принудительную синхронизацию, когда

синхронизация движения звеньев достигается с помощью дополнительных связей (например, зубчатых колес), и самосинхронизацию, когда она устанавливается на основании динамических свойств механизмов без введения дополнительных связей. Наибольшее распространение в технике имеет самосинхронизация вибровозбудителей, то есть устройств для создания направленных колебаний, при условии, что они установлены на общем основании, совершающем малые упругие колебания. В этом случае требуемая синхронность движения вибровозбудителей достигается вследствие взаимодействия их с вибрирующим основанием без каких-либо дополнительных устройств, что упрощает конструкцию многих вибрационных машин (конвейеров, питателей, грохотов, дробилок, мельниц и др.).

Самосинхронизация механизмов может быть не только полезной, но и вредной. Например, если на одном фундаменте располагаются несколько машин с неуравновешенными массами вращающихся звеньев (роторов), то при синхронном движении роторов неуравновешенности от отдельных машин складываются, и колебания общего фундамента могут превзойти допускаемые пределы. Однако при правильном выборе параметров механизмов, влияющих на условия самосинхронизации, можно обеспечить взаимную компенсацию неуравновешенных сил отдельных механизмов и тем самым снизить уровень колебаний.

На рисунке показана динамическая модель системы, состоящей из двух дебалансных вибровозбудителей (неуравновешенных роторов) 1 и 2, установленных на общей платформе 3.

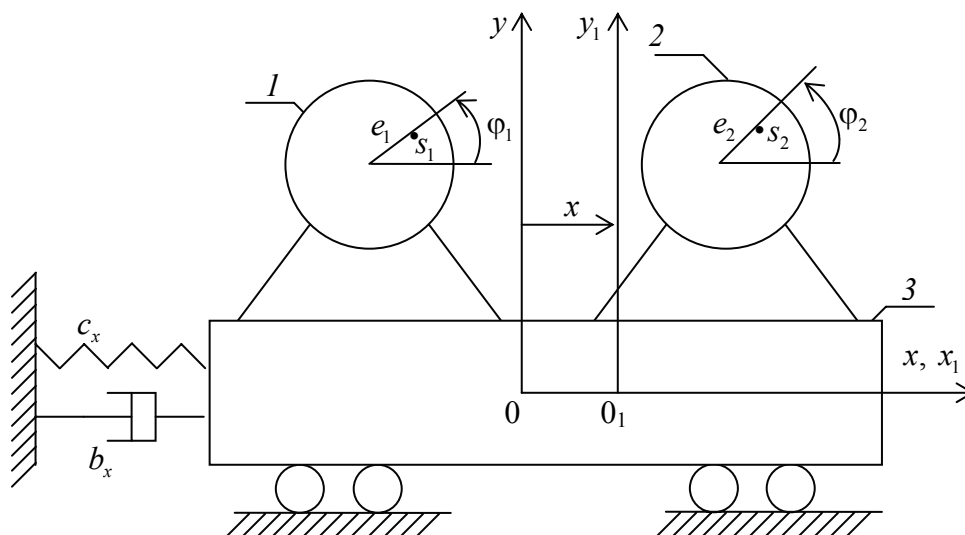


Рисунок. Модель системы двух вибровозбудителей

Платформа может совершать малые упругие колебания вдоль оси  $Ox$ , которым соответствуют коэффициент жесткости  $c_x$  и коэффициент сопротивления  $b_x$ . Вибровозбудители приводятся во вращение от асинхронных электродвигателей. Неуравновешенность ротора вибровозбудителя  $1$  характеризуется массой  $m_1$ , расположенной на расстоянии  $e_1$  от оси вращения. Соответственно для вибровозбудителя  $2$  имеем:  $m_2$  и  $e_2$ . Неподвижная система координат  $Oxy$  и система координат  $O_1x_1y_1$ , связанная с платформой, выбраны так, что они совпадают в положении, при котором сила упругости равна нулю. Примем за обобщенные координаты системы смещение платформы  $x$  и углы поворота роторов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Тогда выражение кинетической энергии системы запишется в виде

$$T = \frac{1}{2} \left[ m_3 \dot{x}^2 + \sum_{i=1}^2 (J_i \dot{\varphi}_i^2 + m_i v_{s_i}^2) \right], \quad (2.10.1)$$

где  $m_3$  – масса платформы,  $m_i$  и  $J_i$  – соответственно масса и момент инерции  $i$ -го вибровозбудителя относительно оси, проходящей через его центр масс  $s_i$ ,  $v_{s_i}$  – скорость центра масс  $s_i$ , определяемая из соотношений

$$v_{s_i}^2 = (\dot{x} - e_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i)^2 + e_i^2 \dot{\varphi}_i^2 \cos^2 \varphi_i, \quad i = 1, 2.$$

Подставляя эти соотношения в выражение кинетической энергии, получаем:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 J_{U_i} \dot{\varphi}_i^2 - \dot{x} \sum_{i=1}^2 m_i e_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i, \quad (2.10.2)$$

где  $M = m_1 + m_2 + m_3$ ,  $J_{U_1} = J_1 + m_1 e_1^2$ ,  $J_{U_2} = J_2 + m_2 e_2^2$ .

Выражение потенциальной энергии имеет вид

$$U = \frac{1}{2} c_x x^2 + \sum_{i=1}^2 m_i e_i g (1 + \sin \varphi_i), \quad (2.10.3)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести.

Уравнение Лагранжа второго рода запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = - \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} + Q_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.10.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial x} + Q_x,$$

где  $Q_1, Q_2, Q_x$  – обобщенные неконсервативные силы, соответствующие координатам  $\varphi_1, \varphi_2, x$ .

Примем, что на роторы вибровозбудителей действуют постоянные моменты сил сопротивления  $M_{C1}$  и  $M_{C2}$ , а движущие моменты определяются по статическим характеристикам электродвигателей  $M_{D1} = a_1 - b_1\dot{\varphi}_1$ ,  $M_{D2} = a_2 - b_2\dot{\varphi}_2$ . Тогда обобщенные силы находятся из соотношений

$$Q_1 = a_1 - b_1\dot{\varphi}_1 - M_{C1}, \quad Q_2 = a_2 - b_2\dot{\varphi}_2 - M_{C2}, \quad Q_x = -b_x\dot{x}, \quad (2.10.5)$$

а уравнения движения рассматриваемой системы получают вид

$$J_{Ui}\ddot{\varphi}_i = a_i - b_i\dot{\varphi}_i - M_{Ci} + m_i e_i (\ddot{x} \sin \varphi_i - g \cos \varphi_i), \quad i = 1, 2$$

$$M\ddot{x} + b_x\dot{x} + c_x x = \sum_{i=1}^2 m_i e_i (\ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i). \quad (2.10.6)$$

Для решения этой системы уравнений по методу малого параметра будем считать, что в первом приближении роторы вибровозбудителей вращаются равномерно с угловой скоростью, модуль которой равен  $\omega$ . Кроме того, примем, что член  $b_x\dot{x}$  в третьем уравнении системы (2.10.6) мал по сравнению с другими членами этого уравнения. При указанных допущениях в систему уравнений (2.10.6) можно ввести малый параметр  $\mu$ .

$$J_{Ui}\ddot{\varphi}_i + b_i(\dot{\varphi}_i - \omega) = \mu [a_i - M_{Ci} + m_i e_i (\ddot{x} \sin \varphi_i - g \cos \varphi_i)],$$

$$M\ddot{x} + c_x x = \sum_{i=1}^2 m_i e_i (\ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i) - \mu b'_x \dot{x}, \quad (2.10.7)$$

где  $\mu b'_x = b_x$ .

Порождающая система уравнений ( $\mu = 0$ ) имеет вид:

$$J_{U1}\ddot{\varphi}_1^0 + b_1(\dot{\varphi}_1^0 - \omega) = 0,$$

$$J_{U2}\ddot{\varphi}_2^0 + b_2(\dot{\varphi}_2^0 - \omega) = 0, \quad (2.10.8)$$

$$\ddot{x}^0 + \lambda^2 x^0 = \frac{m_1}{M} e_1 \left[ \ddot{\varphi}_1^0 \sin \varphi_1^0 + (\dot{\varphi}_1^0)^2 \cos \varphi_1^0 \right] +$$

$$+ \frac{m_2}{M} e_2 \left[ \ddot{\varphi}_2^0 \sin \varphi_2^0 + (\dot{\varphi}_2^0)^2 \cos \varphi_2^0 \right],$$

где  $\varphi_1^0, \varphi_2^0, x^0$  – значения переменных  $\varphi_1, \varphi_2, x$  при  $\mu = 0$ ,  $\lambda^2 = c_x / M$  – квадрат собственной частоты системы.

Из первых двух уравнений (2.10.8) после интегрирования получаем:

$$\varphi_1^0 = \omega t + \theta_1, \quad \varphi_2^0 = \omega t + \theta_2. \quad (2.10.9)$$

Поэтому третье уравнение (2.10.8) может быть записано в виде

$$\ddot{x}^0 + \lambda^2 x^0 = \omega^2 \left[ \frac{m_1}{M} e_1 \cos(\omega t + \theta_1) + \frac{m_2}{M} e_2 \cos(\omega t + \theta_2) \right]. \quad (2.10.10)$$

Решение этого уравнения с применением операционного исчисления и с учетом принципа независимости действия сил (суперпозиции), когда можем сложить решения, получаемые для сил, пропорциональных  $\cos(\omega t + \theta_1)$  и  $\cos(\omega t + \theta_2)$ :

$$x^0 = \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \left[ \frac{m_1}{M} e_1 \cos(\omega t + \theta_1) + \frac{m_2}{M} e_2 \cos(\omega t + \theta_2) \right]. \quad (2.10.11)$$

Указанные синхронные решения  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  и  $x(t)$  действительно существуют и дальнейших приближений с учетом малого параметра  $\mu$  не требуется, если соблюдены равенства:

$$M_1 + M_B = 0, \quad M_2 - M_B = 0, \quad (2.10.12)$$

где избыточные моменты  $M_1$ ,  $M_2$  и вибрационный момент  $M_B$  для указанной системы из двух вибровозбудителей определяются из соотношений

$$M_1 = a_1 - b_1 \omega - M_{C1}, \quad M_2 = a_2 - b_2 \omega - M_{C2},$$

$$M_B = -\frac{1}{2} \frac{\omega^4}{\omega^2 - \lambda^2} \frac{m_1 e_1 m_2 e_2}{M} \sin(\theta_1 - \theta_2). \quad (2.10.13)$$

Вибрационные моменты при любом числе вибровозбудителей можно рассматривать как дополнительные средние моменты, действующие на неуравновешенные роторы вследствие колебаний основания, на котором они установлены. Возникновение этих моментов является проявлением «вибрационной связи», которая, например, в уравнениях (2.10.6) выражается членами  $m_1 e_1 \ddot{x}_2 \sin \varphi_1$  и  $m_2 e_2 \ddot{x}_1 \sin \varphi_2$ . Сумма вибрационных моментов равна нулю, так как они не изменяют общего баланса энергии в системе, а лишь перераспределяют подводимую к системе энергию между отдельными вибровозбудителями таким образом, что обеспечивается их синхронное вращение независимо от значений избыточных моментов.

Угловую скорость синхронного вращения  $\omega$  и сдвиг фаз  $\theta = \theta_1 - \theta_2$  находим из уравнений (2.10.12) после подстановки в них выражений для  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_B$ :

$$\omega = \frac{a_1 - M_{c1} + a_2 - M_{c2}}{b_1 + b_2},$$

$$\sin \theta = -\frac{M_1}{A_B \operatorname{sgn}(\omega^2 - \lambda^2)} \equiv \frac{M_2}{A_B \operatorname{sgn}(\omega^2 - \lambda^2)}, \quad (2.10.14)$$

где 
$$A_B = \frac{\omega^4}{\omega^2 - \lambda^2} \frac{m_1 e_1 m_2 e_2}{2m_{II}}.$$

Из выражения для  $\sin \theta$  (2.10.14) следует условие самосинхронизации

$$|M_1| = |M_2| < A_B, \quad (2.10.15)$$

т. е. модули избыточных моментов не должны превышать максимального значения (амплитуды) вибрационного момента.

Эффект самосинхронизации может иметь место даже в случае, когда двигатель одного из вибровозбудителей выключен из сети. Например, при  $M_1 = -M_{c1}$  из условия самосинхронизации получаем

$$|M_{c1}| < A_B, \quad (2.10.16)$$

т. е. для самосинхронизации необходимо только, чтобы момент сопротивления вращению ротора выключенного вибровозбудителя не превышал максимального значения вибрационного момента. Эффект вращения вибровозбудителя при выключенном двигателе посредством колебаний его оси называется эффектом вибрационного поддержания неуравновешенного ротора.

## **2.11. Параметрические колебания**

Колебания механических систем могут вызываться не только внешними силами, непосредственно совершающими работу на основных перемещениях системы, но и внешними воздействиями, изменяющими параметры системы (жесткость, массу).

В некоторых случаях при периодически изменяющихся параметрах возникают нарастающие колебания системы, имеет место так называемый параметрический резонанс.

Примером параметрических колебаний является раскачивание на качелях. В этом случае удается увеличивать размахи колебаний только

за счет периодического изменения расстояния центра тяжести системы от точки подвеса качелей. Тот же процесс может быть воспроизведен на маятнике с переменной длиной.

Примером параметрического возбуждения колебаний является также явление динамической неустойчивости стержней, когда под действием периодически изменяющейся продольной силы стержень совершает поперечные колебания (рис. 2.11.1).

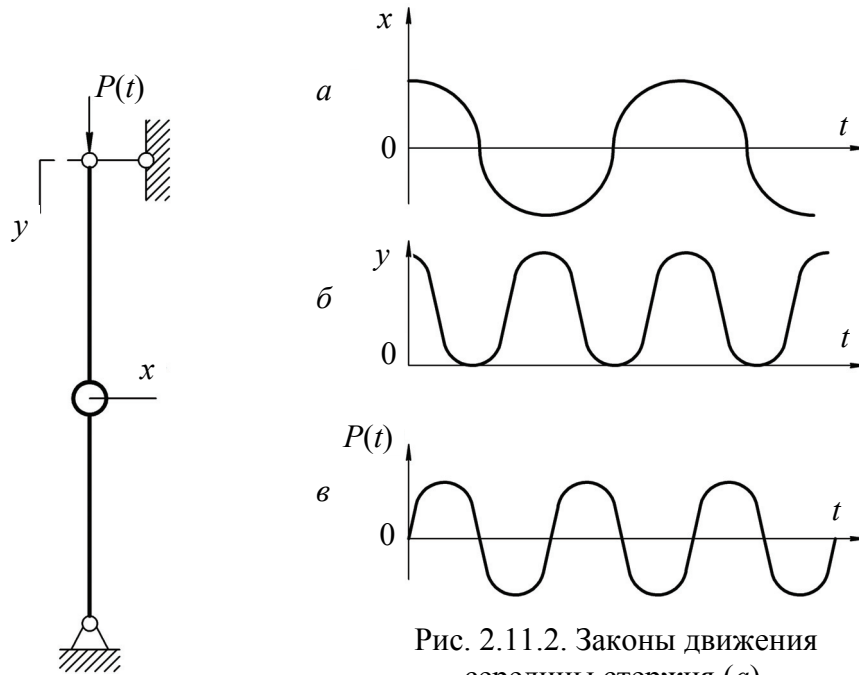


Рис. 2.11.1. Схема нагружения стержня

Рис. 2.11.2. Законы движения середины стержня ( $a$ ), верхней точки ( $б$ ) и изменения нагрузки на стержень ( $в$ )

Так же как и при обычном резонансе, при параметрическом резонансе колебания развиваются в связи с непрерывным поступлением энергии в систему. Проследим этот процесс на примере динамической неустойчивости стержня. Пусть стержень совершает собственные поперечные колебания с частотой  $p$  (рис. 2.11.2,  $a$ ) по закону

$$x = f \cos pt. \quad (2.11.1)$$

При этом верхний шарнир будет получать небольшие вертикальные перемещения  $y$  с удвоенной частотой (рис. 2.11.2,  $б$ ). Он будет опускаться вниз при отклонении груза влево и вправо и занимать наивысшее положение, когда груз проходит положение статического равновесия. Если продольная сила изменяется также с частотой вдвое большей, чем частота поперечных колебаний груза (рис. 2.11.2,  $в$ ), то



она будет при каждом цикле совершать работу и энергия системы будет непрерывно нарастать.

Составим уравнение движения груза  $m$ , закрепленного на стержне (рис. 2.11.1):

$$m\ddot{x} + c(t) \cdot x = 0. \quad (2.11.2)$$

В данном случае жесткость стержня является функцией времени, т. к. она зависит от величины продольной силы  $P(t)$ , приложенной в данный момент. В соответствии с приближенной формулой (курс сопротивления материалов)

$$c(t) = c_0 \left[ 1 - \frac{P(t)}{P_E} \right],$$

где  $c_0$  – жесткость стержня при отсутствии продольной силы,  $P_E$  – Эйлера критическая сила для стержня.

Таким образом, уравнение (2.11.2) может быть записано в виде

$$\ddot{x} + p^2 \left[ 1 - \frac{P(t)}{P_E} \right] x = 0, \quad p^2 = \frac{c_0}{m}. \quad (2.11.3)$$

Если  $P(t)$  является периодической (с периодом  $\tau$ ) функцией времени, то уравнение (2.11.3) называется уравнением Хилла.

Для того, чтобы установить, имеет ли место параметрический резонанс при данном законе изменения параметра, необходимо в общем решении уравнения (2.11.3)

$$x(t) = C_1 \cdot x_1(t) + C_2 \cdot x_2(t),$$

где  $C_1 = x(0)$ ,  $C_2 = \dot{x}(0)$ , найти  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и проверить соблюдение неравенства  $|A| > 1$ , где

$$A = \frac{1}{2} [x_1(\tau) + \dot{x}_2(\tau)],$$

$\tau$  – период изменения параметра. Если  $|A| < 1$ , движение устойчиво.

Практически более важен случай, когда параметр меняется по гармоническому закону

$$c(t) = c_0 + c_1 \cos \omega t.$$

При этом уравнение (2.11.2) получает вид

$$\ddot{x} + \left( \frac{c_0}{m} + \frac{c_1}{m} \cos \omega t \right) x = 0. \quad (2.11.4)$$

Это уравнение называется уравнением Матье. Характер его решений зависит от двух безразмерных коэффициентов. В самом деле, введя «безразмерное» время  $\nu = 0,5\omega t$ , приведем уравнение (2.11.4) к виду

$$\frac{d^2x}{d\nu^2} + (l + 2q \cos 2\nu)x = 0, \quad (2.11.5)$$

где  $l = \frac{4c_0}{m\omega^2} = 4\frac{p^2}{\omega^2}$ ,  $q = \frac{2c_1}{m\omega^2}$ .

Коэффициенты  $l$  (характеризующий отношение собственной частоты системы при среднем значении параметра  $c_0$  к частоте изменения параметра) и  $q$  (характеризующий степень изменения параметра) полностью определяют устойчивость движения.

Плоскость изменения  $l$  и  $q$  может быть разделена на области, соответствующие устойчивым и неустойчивым движениям. Такая диаграмма (диаграмма Айнса – Стретта) представлена на рис. 2.11.3. Области устойчивости на рисунке заштрихованы.

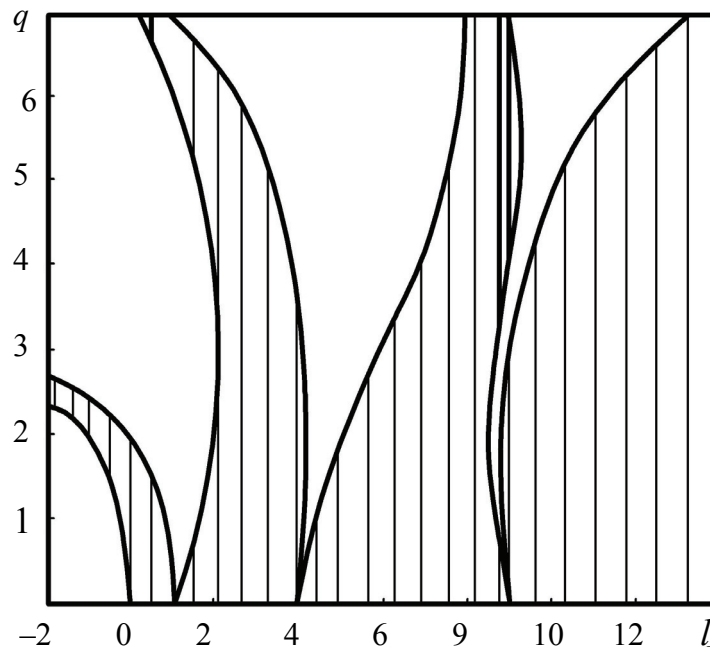


Рис. 2.11.3. Диаграмма Айнса – Стретта

Таким образом, для того чтобы определить, устойчиво или неустойчиво движение, описываемое уравнением (2.11.4), достаточно вычислить коэффициенты  $l$ ,  $q$ , нанести соответствующую точку на диаграмму и установить, попадает она в устойчивую или в неустойчивую область.

Проследим, как изменяется устойчивость системы при изменении частоты  $\omega$ . В этом случае отношение  $q/l$  сохраняет постоянное значение и соответствующая точка на диаграмме Айнса – Стретта движется по лучу, проходящему через начало координат. При этом точка последовательно попадает то в области устойчивости, то в области неустойчивости. При малом изменении параметра ( $q$  мало) неустойчивость имеет место при значениях  $l = 1, 4, 9, \dots$ , т. е. при отношениях

$$\frac{p}{\omega} = \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2} \text{ и т. д.}$$

### **2.12. Малые колебания систем с двумя степенями свободы**

Ранее было показано, что движение механической системы с  $s$  степенями свободы вблизи положения устойчивого равновесия описывается уравнениями

$$\sum_{\gamma} (m_{\alpha\gamma} \ddot{q}_{\gamma} + c_{\alpha\gamma} q_{\gamma}) = 0, \quad (2.12.1)$$

где греческими индексами обозначены номера степеней свободы, а постоянные величины  $m_{\alpha\gamma}$  и  $c_{\alpha\gamma}$  называются инерционными и квазиупругими коэффициентами соответственно. Для случая двух степеней свободы в подробной записи уравнения (2.12.1) примут вид

$$m_{11} \ddot{q}_1 + m_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 = 0, \quad (2.12.2)$$

$$m_{21} \ddot{q}_1 + m_{22} \ddot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 = 0, \quad (2.12.3)$$

причем  $m_{12} = m_{21}$ ,  $c_{12} = c_{21}$  в силу определения инерционных и квазиупругих коэффициентов. Кроме того, поскольку кинетическая энергия, имеющая в данном случае вид

$$T = \frac{1}{2} (m_{11} \dot{q}_1^2 + 2m_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_{22} \dot{q}_2^2), \quad (2.12.4)$$

всегда положительна (при отличных от нуля скоростях), то квадратичная форма (2.12.4) удовлетворяет критерию Сильвестра, и поэтому инерционные коэффициенты должны удовлетворять неравенствам

$$m_{11} > 0, \quad m_{11} m_{22} - m_{12}^2 > 0, \quad (2.12.5)$$

откуда следует, что и  $m_{22} > 0$ .

Потенциальная энергия с учетом только квадратичных членов, что обеспечивает линейность уравнений (2.12.2), (2.12.3), тоже представляется квадратичной формой

$$U = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2), \quad (2.12.6)$$

и квазиупругие коэффициенты должны удовлетворять условиям вида (2.12.5), если положение равновесия является устойчивым, т. е.

$$c_{11} > 0, c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, c_{22} > 0. \quad (2.12.7)$$

Таким образом, при малых отклонениях от положения устойчивого равновесия движение системы описывается двумя линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами (2.12.2), (2.12.3). Учитывая опыт рассмотрения системы с одной степенью свободы, решение этих уравнений будем искать в виде

$$q_1 = A \sin(kt + \delta), \quad q_2 = B \sin(kt + \delta), \quad (2.12.8)$$

где  $A, B, k, \delta$  – неизвестные постоянные.

Вычислив производные от  $q_1$  и  $q_2$  по времени

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= Ak \cos(kt + \delta), \quad \dot{q}_2 = Bk \cos(kt + \delta), \\ \ddot{q}_1 &= -Ak^2 \sin(kt + \delta), \quad \ddot{q}_2 = -Bk^2 \sin(kt + \delta), \end{aligned} \quad (2.12.9)$$

подставим (2.12.8) и (2.12.9) в (2.12.2) и (2.12.3):

$$\begin{aligned} -m_{11}Ak^2 \sin(kt + \delta) - m_{12}Bk^2 \sin(kt + \delta) + \\ + c_{11}A \sin(kt + \delta) + c_{12}B \sin(kt + \delta) &= 0, \\ -m_{21}Ak^2 \sin(kt + \delta) - m_{22}Bk^2 \sin(kt + \delta) + \\ + c_{21}A \sin(kt + \delta) + c_{22}B \sin(kt + \delta) &= 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы эти равенства выполнялись тождественно при любых значениях  $t$ , коэффициенты при тригонометрических функциях должны быть равными нулю, т. е.

$$(c_{11} - m_{11}k^2)A + (c_{12} - m_{12}k^2)B = 0, \quad (2.12.10)$$

$$(c_{21} - m_{21}k^2)A + (c_{22} - m_{22}k^2)B = 0. \quad (2.12.11)$$

Поскольку тривиальные решения этих линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $A$  и  $B$  интереса не представляют, то определитель данной системы должен равняться нулю:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} c_{11} - m_{11}k^2 & c_{12} - m_{12}k^2 \\ c_{21} - m_{21}k^2 & c_{22} - m_{22}k^2 \end{vmatrix} = \\ &= (c_{11} - m_{11}k^2)(c_{22} - m_{22}k^2) - (c_{12} - m_{12}k^2)(c_{21} - m_{12}k^2) = \\ &= (c_{11} - m_{11}k^2)(c_{22} - m_{22}k^2) - (c_{12} - m_{12}k^2)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.12.12)$$

Здесь использовано свойство симметрии коэффициентов  $c$  и  $m$ . Последнее равенство можно переписать иначе, раскрыв скобки и собрав слагаемые при одинаковых степенях  $k$ :

$$\begin{aligned}(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)k^4 - (c_{11}m_{22} - 2c_{12}m_{12} + c_{22}m_{11})k^2 + \\ + c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.12.13)$$

Это уравнение называется уравнением частот, или вековым уравнением. Если обозначить

$$\begin{aligned}a = m_{11}m_{22} - m_{12}^2, \quad b = c_{11}m_{22} - 2c_{12}m_{12} + c_{22}m_{11}, \\ c = c_{11}c_{22} - c_{12}^2, \quad x = k^2, \end{aligned} \quad (2.12.14)$$

то уравнение (2.12.13) запишется в виде

$$ax^2 - bx + c = 0, \quad (2.12.15)$$

и поэтому его корни равны

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a} \left( b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right). \quad (2.12.16)$$

Покажем, что эти корни являются действительными и положительными, имея в виду, что (2.12.12), (2.12.13) и (2.12.15) представляют собой различные формы записи одного и того же уравнения  $\Delta(k^2) = \Delta(x) = 0$ . Из (2.12.15) видно, что при  $x=0$   $\Delta(0) = c > 0$  в силу определения (2.12.14) и условия (2.12.7), а при  $x \rightarrow \infty$   $\Delta(x) \rightarrow ax^2 > 0$  в силу (2.12.5). Из (2.12.12) же следует, что при  $k^2 = c_{11}/m_{11}$

$$\Delta(c_{11}/m_{11}) = -(c_{12} - m_{12}c_{11}/m_{11})^2 < 0, \quad (2.12.17)$$

а при  $k^2 = c_{22}/m_{22}$

$$\Delta(c_{22}/m_{22}) = -(c_{12} - m_{12}c_{22}/m_{22})^2 < 0. \quad (2.12.18)$$

Это означает, что между значениями  $x=0$  и  $x=\infty$  график функции  $\Delta(x) = ax^2 - bx + c$  будет заходить в область отрицательных значений, дважды пересекая ось  $x$ . Минимальное значение достигается в точке, определяемой равенством нулю первой производной:

$$\Delta'(x) = 2ax - b = 0, \quad (2.12.19)$$

т. е. при  $x = b/2a$ , откуда следует, что коэффициент  $b$  должен быть положительным. Вторая производная при этом  $\Delta''(x) = 2a$ , естественно, положительна, а значение самой функции в этой точке должно быть отрицательным:

$$\Delta\left(\frac{b}{2a}\right) = a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - b\frac{b}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{1}{2a}(4ac - b^2) < 0,$$

откуда следует, что  $b^2 - 4ac > 0$ . Это и доказывает действительность и положительность корней уравнения (2.12.15), определяемых равенством (2.12.16).

Таким образом, характеристическое уравнение (2.12.13) определяет две частоты

$$k_1 = \left[ \frac{1}{2a} \left( b - \sqrt{b^2 - 4ac} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad k_2 = \left[ \frac{1}{2a} \left( b + \sqrt{b^2 - 4ac} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.12.20)$$

Здесь, естественно, используются только положительные знаки перед радикалами.

Каждому значению частоты соответствует частное решение системы уравнений (2.12.2), (2.12.3) со своими константами  $A$ ,  $B$  и  $\delta$  и, поскольку частные решения линейно независимы, общее решение будет их линейной комбинацией:

$$q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \delta_1) + A_2 \sin(k_2 t + \delta_2), \quad (2.12.21)$$

$$q_2 = B_1 \sin(k_1 t + \delta_1) + B_2 \sin(k_2 t + \delta_2). \quad (2.12.22)$$

Числа  $A$  и  $B$ , однако, не являются независимыми: между ними имеется связь, выражаемая системой уравнений (2.12.10) и (2.12.11), определитель которой равен нулю. То есть независимым из этой системы является только одно уравнение, любое из двух. Будем считать таковым первое, тогда, подставляя в него найденные значения частот, будем иметь

$$(c_{11} - m_{11}k_1^2)A_1 + (c_{12} - m_{12}k_1^2)B_1 = 0,$$

$$(c_{11} - m_{11}k_2^2)A_2 + (c_{12} - m_{12}k_2^2)B_2 = 0.$$

Отсюда следует, что константы  $B_n$  можно выразить через  $A_n$ :

$$B_n = -\frac{c_{11} - m_{11}k_n^2}{c_{12} - m_{12}k_n^2} A_n = f_n A_n \quad (n = 1, 2). \quad (2.12.23)$$

Общее решение тогда примет вид

$$q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \delta_1) + A_2 \sin(k_2 t + \delta_2), \quad (2.12.24)$$

$$q_2 = f_1 A_1 \sin(k_1 t + \delta_1) + f_2 A_2 \sin(k_2 t + \delta_2). \quad (2.12.25)$$

Частоты  $k_1$ ,  $k_2$  и коэффициенты  $f_1$ ,  $f_2$  являются известными величинами, определяемыми свойствами системы, а константы  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  остаются произвольными и подлежат определению из начальных условий.

Из выражений для общего решения (2.12.24), (2.12.25) видно, что движение системы с двумя степенями свободы вблизи положения устойчивого равновесия состоит из двух независимых колебаний, каждое из которых происходит со своей частотой. Эти колебания называются главными, а коэффициенты  $f_1$ ,  $f_2$  определяют формы колебаний; они имеют простой физический смысл, показывая, во сколько раз амплитуда соответствующего главного колебания одной из координат больше или меньше амплитуды другой координаты (2.12.23).

Если бы коэффициенты  $m_{12}$  и  $c_{12}$ , которые, как видно из выражений (2.12.4) и (2.12.6), отражают связи между скоростями и координатами, относящимися к разным степеням свободы, были равны нулю, то система уравнений (2.12.2), (2.12.3) распалась бы на два независимых уравнения

$$m_{11} \ddot{q}_1 + c_{11} q_1 = 0, \quad (2.12.26)$$

$$m_{22} \ddot{q}_2 + c_{22} q_2 = 0, \quad (2.12.27)$$

описывающих свободные колебания координат  $q_1$  и  $q_2$  с частотами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{m_{11}}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_{22}}{m_{22}}}, \quad (2.12.28)$$

которые называются парциальными частотами. Из выражений (2.12.20), (2.12.17) и (2.12.18) следует, что первое главное колебание происходит с частотой меньшей, чем наименьшая парциальная частота, а второе – с частотой большей, чем наибольшая парциальная.

Рассмотрим частные случаи.

1. Характеристическое уравнение имеет равные корни. Из (2.12.20) видно, что это имеет место при условии

$$b^2 - 4ac = 0, \quad (2.12.29)$$

которое выполняется, если

$$\frac{c_{11}}{m_{11}} = \frac{c_{12}}{m_{12}} = \frac{c_{22}}{m_{22}} = \omega^2, \quad (2.12.30)$$

в чем легко убедиться с помощью определений (2.12.14). При выполнении условий (2.12.30) уравнения движения (2.12.2), (2.12.3) приобретают вид

$$m_{11}(\ddot{q}_1 + \omega^2 q_1) + m_{12}(\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2) = 0, \quad (2.12.31)$$

$$m_{12}(\ddot{q}_1 + \omega^2 q_1) + m_{22}(\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2) = 0. \quad (2.12.32)$$

Поскольку определитель этой системы уравнений относительно выражений в круглых скобках  $m_{11}m_{22} - m_{12}^2 \neq 0$ , то система имеет только тривиальное решение

$$\ddot{q}_1 + \omega^2 q_1 = 0, \quad (2.12.33)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0, \quad (2.12.34)$$

и, следовательно,

$$q_1 = A_1 \sin(\omega t + \delta_1), \quad (2.12.35)$$

$$q_2 = A_2 \sin(\omega t + \delta_2), \quad (2.12.36)$$

т. е. обе координаты изменяются по одинаковому закону. Амплитуды и начальные фазы каждой координаты, разумеется, определяются по начальным условиям независимо друг от друга.

2. Один из корней характеристического уравнения равен нулю: это может быть только корень  $k_1$  в том случае, когда  $c = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0$ . Потенциальная энергия (2.12.6) тогда примет вид

$$U = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2\sqrt{c_{11}c_{22}}q_1q_2 + c_{22}q_2^2) = \frac{1}{2}(\sqrt{c_{11}}q_1 + \sqrt{c_{22}}q_2)^2. \quad (2.12.37)$$

Если ввести новую обобщенную координату  $\tilde{q} = \sqrt{c_{11}}q_1 + \sqrt{c_{22}}q_2$ , то окажется, что потенциальная энергия зависит только от нее, и это существенно изменит структуру уравнений движения системы. Детали рассмотрим на примере.

### **2.13. Двухмассовая модель механизма (динамические нагрузки приводных устройств)**

Рассмотрим систему, представленную на рисунке и состоящую из двух масс, соединенных упругой связью.



Как видно из рисунка, тела  $1$  и  $2$  могут двигаться только поступательно по вертикали. Будем считать, что  $1$  – это ведущее звено механизма (включая движущиеся элементы двигателя),  $2$  – ведомое звено, а  $c$  – приведенная жесткость всего механизма (валы передач, тяговые элементы и т. д.). Эту конструкцию можно рассматривать как математическую модель грузоподъемного механизма, например.

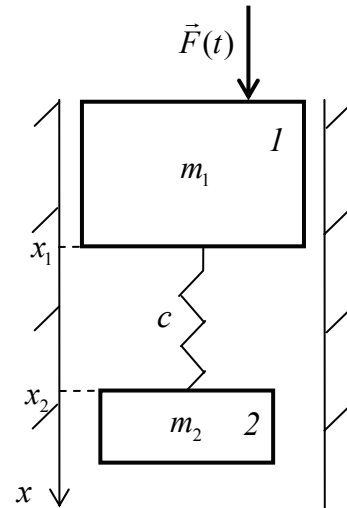


Рисунок. Двухмассовая модель механизма

Такая система имеет две степени свободы, так что в качестве обобщенных координат можно выбрать декартовы координаты центров масс тел  $1$  и  $2$  (или любых других точек). На ведущее звено действует переменная сила  $\vec{F}(t)$ . Уравнения Лагранжа для этой системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + Q_\alpha. \quad (\alpha = 1, 2) \quad (2.13.1)$$

Обобщенные силы разделены на потенциальную (силы тяжести, упругая сила) и непотенциальную (сила  $\vec{F}(t)$ ) части, причем

$$Q_1 = F(t), \quad Q_2 = 0. \quad (2.13.2)$$

Потенциальная энергия складывается из потенциальных энергий поля сил тяжести  $U_1$  и  $U_2$  и упругих сил  $U_c$ :

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2) &= U_1(x_1) + U_2(x_2) + U_c(x_1, x_2) = \\ &= -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 + \frac{c}{2} (x_1 - x_2)^2. \end{aligned} \quad (2.13.3)$$

Кинетическая энергия имеет простой вид

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2}, \quad (2.13.4)$$

поэтому имеем

$$\frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\alpha} = m_\alpha \dot{x}_\alpha, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) = m_\alpha \ddot{x}_\alpha, \quad \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha} = -m_\alpha g, \quad (\alpha = 1, 2)$$

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_1} = c(x_1 - x_2), \quad \frac{\partial U_c}{\partial x_2} = -c(x_1 - x_2),$$

в результате чего уравнения (2.13.1) принимают вид

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - c(x_1 - x_2) + F(t), \quad (2.13.5)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g + c(x_1 - x_2). \quad (2.13.6)$$

Для решения полученной системы уравнений удобно перейти к новым переменным:

$$x_C = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2), \quad x = x_1 - x_2, \quad (M = m_1 + m_2). \quad (2.13.7)$$

Первая из них определяет положение центра масс системы, а вторая является относительной координатой. Разрешив последние равенства относительно старых переменных, получим

$$x_1 = x_C + \frac{m_2}{M} x, \quad x_2 = x_C - \frac{m_1}{M} x. \quad (2.13.8)$$

Подставим эти выражения в (2.13.5):

$$m_1 \left( \ddot{x}_C + \frac{m_2}{M} \ddot{x} \right) = m_1 g - cx + F(t), \quad (2.13.9)$$

$$m_2 \left( \ddot{x}_C - \frac{m_1}{M} \ddot{x} \right) = m_2 g + cx. \quad (2.13.10)$$

Если почленно сложить обе части полученных уравнений, то получится

$$M \ddot{x}_C = Mg + F(t), \quad (2.13.11)$$

т. е. уравнение, описывающее движение центра масс системы – всего механизма как целого, на что упругие силы, естественно, никакого влияния не оказывают, поскольку они являются внутренними. Умножив, далее, обе части уравнения (2.13.9) на  $m_2$ , а уравнения (2.13.10) – на  $m_1$  и вычтя из первого полученного соотношения второе, получим

$$\frac{m_1 m_2}{M} \ddot{x} + cx = \frac{m_2}{M} F(t). \quad (2.13.12)$$

Это уравнение, как известно, описывает вынужденные колебания.

Решение уравнения (2.13.11) имеет вид

$$x_C = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 + \frac{1}{M} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 F(t_2), \quad (2.13.13)$$

решение же уравнения (2.13.12) есть

$$x = C_3 \sin kt + C_4 \cos kt + \frac{1}{m_1 k} \int_0^t F(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau, \quad (2.13.14)$$

где  $k^2 = \frac{Mc}{m_1 m_2}$ .

Таким образом, движение каждого из тел складывается, как это следует из (2.13.8), из движения центра масс системы и вынужденных колебаний около этого центра масс. Деформация упругого звена определяется в соответствии с законом Гука только относительной координатой  $x$ , зависимость от времени которой задается выражением (2.13.14). Зная режим пуска или остановки, т. е.  $F(t)$ , а также начальные условия, можно вычислить все интересующие величины.

### 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Все реальные конструкции являются нелинейными, т. е. описываются нелинейными уравнениями, однако большая часть практических расчетов выполняется на основе линейной теории (в силу ее простоты). Как правило, такие расчеты приводят к удовлетворительным результатам, но многие явления не могут быть объяснены в рамках линейного приближения. К ним относятся, например, наличие нескольких устойчивых режимов вынужденных колебаний, реализация которых зависит от начальных условий, автоколебания и так далее. Для этих случаев необходимо разрабатывать методы расчета на основе нелинейной теории. Особенно важны такие методы при рассмотрении нелинейных систем, в которых нелинейность ни при каких условиях не является малой.

#### **3.1. Свободные колебания (общее рассмотрение)**

Рассмотрим простейшую систему с одной степенью свободы и будем считать, что на нее действуют только потенциальные силы, причем зависимость потенциальной энергии от обобщенной координаты отлична от квадратичной, из-за чего система и становится нелинейной. Воспользуемся тем обстоятельством, что при движении в потенциальных силовых полях полная механическая энергия сохраняется, т. е. является интегралом движения:

$$E = T + U = \frac{1}{2} m(x) \dot{x}^2 + U(x) = \text{const.} \quad (3.1.1)$$

Эта константа определяется, разумеется, начальными условиями. Обобщенную координату в дальнейшем будем обозначать буквой  $x$ . Разрешим равенство (3.1.1) относительно скорости

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m(x)} [E - U(x)]}. \quad (3.1.2)$$

Это дифференциальное уравнение допускает разделение переменных, так что можно написать

$$t = \pm \int_{x_0}^x \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m(y)} [E - U(y)]}}, \quad (3.1.3)$$

где  $x_0$  – начальная координата. Знак перед интегралом выбирается положительным, если  $dy$  положительно, и отрицательным – в противоположном случае, поскольку время является величиной положительной. Даже не вычисляя интеграл, можно сделать далеко идущие выводы.

Совершенно ясно, что движение системы возможно только в том случае, когда квадратная скобка под знаком радикала положительна (инерционный коэффициент, напомним, всегда положителен), поскольку все фигурирующие в механике величины являются действительными. Поэтому в случае потенциальной энергии, представленной на рис. 3.1.1, движение возможно только в области, определяемой значениями  $x \geq x_1$ , где  $U < E$ , т. е. движение ограничено слева, а вправо система может двигаться неограниченно. Точка  $x_1$ , в которой  $U = E$  и, как следует из (3.1.2), скорость равна нулю, называется точкой поворота.

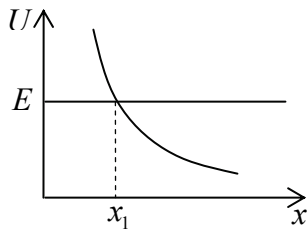


Рис. 3.1.1. Монотонное поведение потенциальной энергии

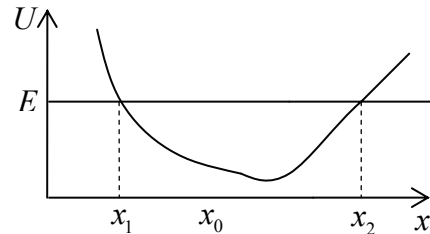


Рис. 3.1.2. Потенциальная энергия с минимумом

В случае, представленном на рис. 3.1.2, потенциальная энергия имеет минимум и по тем же соображениям движение возможно только в области, включающей этот минимум, между двумя точками поворота  $x_1 \leq x \leq x_2$ , т. е. в ограниченной области. Такое движение является колебательным, периодическим и, следовательно, фазовые траектории, определяемые выражением (3.1.1), будут замкнутыми и симметричными относительно оси  $x$  в силу квадратичной зависимости кинетической энергии от скорости. При постоянном  $m$  они будут симметричными и относительно оси  $\dot{x}$  при четной потенциальной энергии.

Воспользовавшись выражением (3.1.3), можно вычислить период таких колебаний. Движение начинается из положения  $x_0$ , для определенности будем считать, что начальная скорость направлена вправо, тогда система будет двигаться в направлении точки  $x_2$ , в которой она должна остановиться. Приращение координаты при этом положительно, поэтому время, затраченное на перемещение из  $x_0$  в  $x_2$ , равно

$$t_{02} = \int_{x_0}^{x_2} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}}. \quad (3.1.4)$$

В точке  $x_2$  система остановится и потом будет двигаться в обратном направлении (координата при этом уменьшается), пока не достигнет точки  $x_1$ . На это уйдет время

$$t_{21} = - \int_{x_2}^{x_1} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}}. \quad (3.1.5)$$

В точке  $x_1$  произойдет остановка, и система начнет движение в сторону возрастания координаты. Для достижения точки  $x_0$  потребуется время

$$t_{10} = \int_{x_1}^{x_0} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}}. \quad (3.1.6)$$

Сумма этих времен и равна периоду колебаний

$$\begin{aligned} \Theta &= t_{02} + t_{21} + t_{10} = \\ &= \int_{x_0}^{x_2} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}} - \int_{x_2}^{x_1} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}} + \int_{x_1}^{x_0} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}}. \end{aligned}$$

Первый и последний интегралы можно объединить в один с нижним пределом  $x_1$  и верхним  $x_2$ , таким же является средний интеграл, поэтому

$$\Theta = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}}. \quad (3.1.7)$$

Понимая под амплитудой колебаний наибольшее отклонение от положения равновесия (от той точки, где потенциальная энергия имеет минимум; в ней всегда можно разместить начало координат) и считая для определенности таковым  $x_2$ , приходим к выводу, что в случае нелинейных колебаний период зависит от их амплитуды, поскольку определенный интеграл является функцией своего верхнего предела.

Это является специфической особенностью нелинейных колебаний. Напомним, что период свободных колебаний в линейном случае от амплитуды не зависит, определяясь только характеристиками системы (постоянными значениями инерционного и квазиупругого коэффициентов). Этот результат следует и из выражения (3.1.7) при постоянном значении  $m$  и квадратичной зависимости потенциальной энергии от координаты.

Итак, движение системы под действием нелинейной восстанавливающей силы является периодическим и, следовательно, закон такого движения может быть представлен в виде ряда Фурье

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

где  $\omega = 2\pi/\Theta$  – основная частота колебаний, зависящая, как показано выше, от амплитуды. Среди коэффициентов разложения Фурье особое место занимает  $a_0$ , который характеризует смещение колебаний от положения статического равновесия. При постоянном  $m$  и четной потенциальной энергии он должен быть равным нулю.

Нахождение закона, связанное, в принципе, с вычислением интеграла в (3.1.3) и обращением полученного выражения (или определением коэффициентов Фурье), технически неосуществимо. Поэтому используются иные подходы, определяемые специфическими особенностями конкретной ситуации (например, наличием малого параметра) и связанные с построением приближенных решений. Рассмотрим сначала один из наиболее простых случаев.

### **3.2. Системы с кусочно-линейной характеристикой (метод припасовывания)**

Рассмотрим систему с зазором, представленную на рис. 3.2.1. Здесь груз массы  $m$  расположен на гладкой горизонтальной поверхности и зажат между двумя одинаковыми пружинами жесткости  $c_1$ .

Будем считать, что в среднем положении пружины жесткости  $c_1$  не деформированы, а между грузом и концами одинаковых пружин жесткости  $c_2$  имеются зазоры величиной  $d$ , т. е. система симметрична относительно средней точки 0. Если груз вывести из этого положения, равновесие нарушится и в системе возникнет колебательный процесс, характер которого будет существенно определяться величиной начального отклонения от равновесного положения. При нулевой начальной скорости и начальном смещении, меньшем величины зазора,

будут иметь место обычные свободные колебания с амплитудой, меньшей  $d$ , однако при смещении, большем  $d$ , тоже возникнут колебания, но уже нелинейные, поскольку в них примет участие и пружина жесткости  $c_2$ .

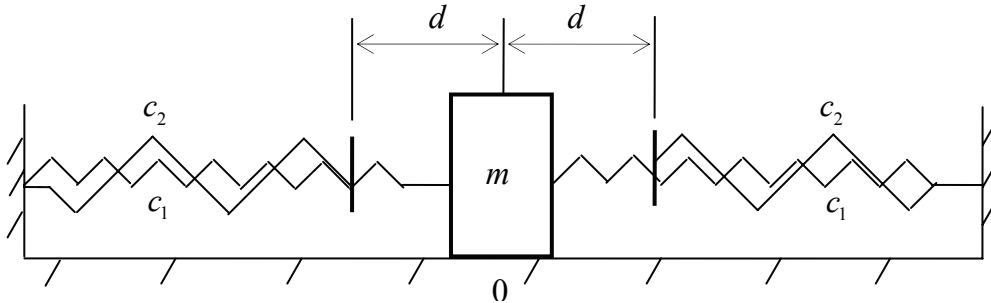


Рис. 3.2.1. Система с зазором

Выберем начало координат в положении равновесия и ось  $x$  направим вправо. Величину упругой силы будем, как обычно, определять с помощью закона Гука

$$F = c|l - l_0|, \quad (3.2.1)$$

где  $l_0$  – естественная длина пружины, а  $l$  – ее длина в произвольном (деформированном) состоянии. Две пружины, между которыми все время зажат груз, можно заменить одной пружиной, жесткость которой равна сумме жесткостей этих двух пружин (параллельное соединение), в нашем случае эффективная жесткость равна  $2c_1$ . Для определенности будем считать, что груз смещен вправо. Из определения (3.2.1) и рис. 3.2.2 видно, что упругая сила, действующая на груз со стороны эффективной пружины в произвольном положении, определяемом координатой  $x$ , по величине равна

$$F_1 = 2c_1(l_{01} - l_1) = cx, \quad (3.2.2)$$

где  $c = 2c_1$ , и направлена к положению равновесия.

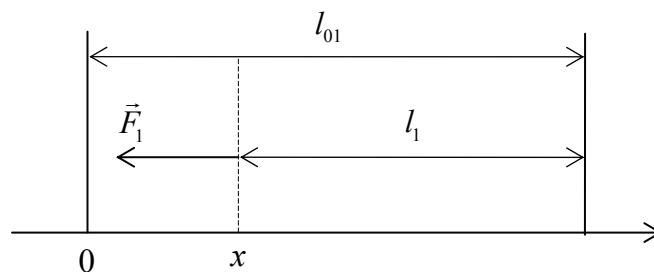


Рис. 3.2.2. Упругая сила первой пружины



При отклонении груза от положения равновесия, большем величины зазора  $d$ , например, вправо, подключается правая пружина  $c_2$  (рис. 3.2.3).

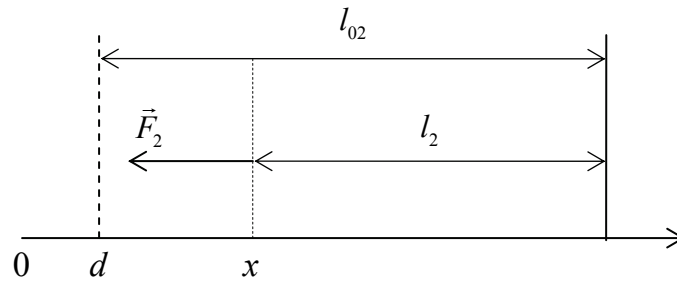


Рис. 3.2.3. Упругая сила второй пружины

Действующая с ее стороны сила по величине равна

$$F_2 = c_2 |l_2 - l_{02}| = c_2 (l_{02} - l_2) = c_2 (x - d). \quad (3.2.3)$$

Таким образом, величина действующей на груз силы  $F$  равна

$$F = \begin{cases} x < d, & F = F_1 = cx, \\ x > d, & F = F_1 + F_2 = cx + c_2(x - d). \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Графическая зависимость проекции силы на ось  $x$  от координаты, называемая характеристикой силы, представлена на рис. 3.2.4.

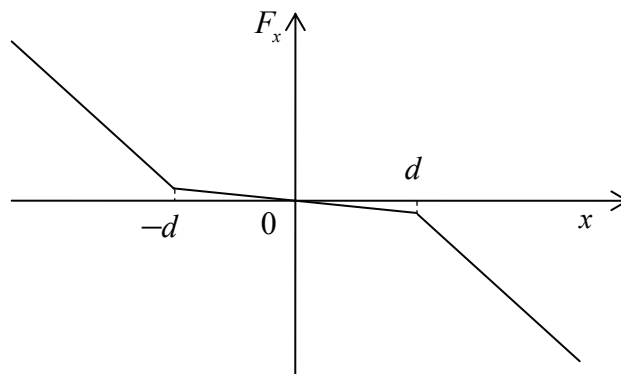


Рис. 3.2.4. Кусочно-линейная характеристика

Она представляет собой совокупность трех прямых с разными углами наклона, из-за чего и носит название кусочно-линейной характеристики.

Рассмотрим случай, когда груз начинает движение из положения  $x_0 = L > d$  без начальной скорости. Уравнение движения при этом будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -cx - c_2(x - d),$$

или

$$m\ddot{x} + (c + c_2)x = c_2d. \quad (3.2.5)$$

Приведем его к стандартному виду, разделив все члены на  $m$  и введя обозначение

$$k_2^2 = \frac{c + c_2}{m}. \quad (3.2.6)$$

Тогда

$$\ddot{x} + k_2^2x = \frac{c_2d}{m}. \quad (3.2.7)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения известно, а частное решение неоднородного будем искать в виде постоянной величины  $D$ , которая, как нетрудно видеть, равна

$$D = \frac{c_2d}{mk_2^2},$$

так что общее решение уравнения (3.2.7) получится следующим:

$$x = A \sin k_2t + B \cos k_2t + \frac{c_2d}{mk_2^2}. \quad (3.2.8)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определим по начальным условиям, но для этого нужно найти выражение для скорости, продифференцировав (3.2.8) по времени:

$$\dot{x} = k_2(A \cos k_2t - B \sin k_2t). \quad (3.2.9)$$

При  $t = 0$  получим из (3.2.8) и (3.2.9)

$$L = B + \frac{c_2d}{mk_2^2},$$

$$0 = k_2A,$$

поэтому решение (3.2.8), удовлетворяющее начальным условиям, запишется так:

$$x = \left( L - \frac{c_2d}{mk_2^2} \right) \cos k_2t + \frac{c_2d}{mk_2^2}. \quad (3.2.10)$$

Из рис. 3.2.2 и 3.2.3 видно, что под действием упругих сил груз будет двигаться влево (это видно и из (3.2.9) при  $A = 0$ ), так что в некоторый момент времени  $t_1$  он окажется в точке  $d$ , где пружина с ин-

дексом 2 отсоединится от него, и далее груз будет двигаться под действием других сил, что должно описываться иным уравнением, а состояние в точке  $d$  должно рассматриваться для этого движения в качестве начальных условий. Значит,

$$d = \left( L - \frac{c_2 d}{mk_2^2} \right) \cos k_2 t_1 + \frac{c_2 d}{mk_2^2},$$

откуда получим

$$\cos k_2 t_1 = d \frac{1 - \frac{c_2}{mk_2^2}}{L - \frac{c_2 d}{mk_2^2}} = d \frac{mk_2^2 - c_2}{mk_2^2 L - c_2 d} = \frac{cd}{(c + c_2)L - c_2 d} \quad (3.2.11)$$

с учетом (3.2.6). Для нахождения  $t_1$  нужно решить полученное тригонометрическое уравнение, выбрав только главную ветвь. Скорость  $v_1$  в этот момент времени определим с помощью (3.2.9) при  $A = 0$ :

$$\begin{aligned} v_1 &= -k_2 \left( L - \frac{c_2 d}{mk_2^2} \right) \sin k_2 t_1 = -k_2 \left( L - \frac{c_2 d}{mk_2^2} \right) \sqrt{1 - \cos^2 k_2 t_1} = \\ &= -k_2 \left( L - \frac{c_2 d}{mk_2^2} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{cd}{(c + c_2)L - c_2 d} \right)^2}. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

На участке  $-d \leq x \leq d$  груз, как уже отмечалось, движется только под действием силы  $\vec{F}_1$  (см. (3.2.4)), поэтому уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx,$$

или

$$\ddot{x} + k_1^2 x = 0, \quad (3.2.13)$$

где

$$k_1^2 = \frac{c}{m}. \quad (3.2.14)$$

Решение уравнения (3.2.13) запишем в виде

$$x = A_1 \sin k_1 t + B_1 \cos k_1 t, \quad (3.2.15)$$

тогда для скорости будем иметь выражение

$$\dot{x} = k_1 (A_1 \cos k_1 t - B_1 \sin k_1 t), \quad (3.2.16)$$

а постоянные интегрирования  $A_1$  и  $B_1$  определим по начальным условиям  $x_0 = d$ ,  $\dot{x}_0 = v_1$  при  $t = 0$ , т. е.  $B_1 = d$ ,  $A_1 = v_1 / k_1$ , в результате чего закон движения примет вид

$$x = \frac{v_1}{k_1} \sin k_1 t + d \cos k_1 t. \quad (3.2.17)$$

В момент времени  $t_2$  груз достигнет положения равновесия:

$$0 = \frac{v_1}{k_1} \sin k_1 t_2 + d \cos k_1 t_2.$$

Отсюда следует, что данный промежуток времени тоже определяется тригонометрическим уравнением

$$\operatorname{tg} k_1 t_2 = -\frac{k_1 d}{v_1}. \quad (3.2.18)$$

Время, затраченное на переход из крайнего правого положения в начало координат, составляет четверть периода колебаний, поэтому период равен

$$\Theta = 4(t_1 + t_2) = \frac{4}{k_2} \arccos \frac{cd}{(c + c_2)L - c_2 d} + \frac{4}{k_1} \operatorname{arctg} \left( -\frac{k_1 d}{v_1} \right). \quad (3.2.19)$$

Это и есть искомая зависимость периода от амплитуды колебаний, в качестве которой в данном случае выступает начальное отклонение груза от положения равновесия  $L$ . Качественное представление о виде этой зависимости можно получить, рассмотрев некоторые предельные случаи. Например, при  $L \rightarrow d$

$$\frac{cd}{(c + c_2)L - c_2 d} \rightarrow 1$$

и, следовательно,

$$\arccos \frac{cd}{(c + c_2)L - c_2 d} \rightarrow 0.$$

При этом, как видно из (3.2.12),  $v_1 \rightarrow -0$ , поэтому  $-k_1 d / v_1 \rightarrow +\infty$ ,  $\operatorname{arctg}(-k_1 d / v_1) \rightarrow \pi/2$  и  $\Theta \rightarrow 2\pi/k_1$ . С другой стороны, при  $L \rightarrow \infty$

$$\frac{cd}{(c + c_2)L - c_2 d} \rightarrow 0,$$

$$\arccos \frac{cd}{(c + c_2)L - c_2 d} \rightarrow \arccos 0 = \frac{\pi}{2},$$

$v_1 \rightarrow -k_2 L$ ,  $-k_1 d / v_1 \rightarrow k_1 d / k_2 L \rightarrow 0$ ,  $\operatorname{arctg}(-k_1 d / v_1) \rightarrow 0$  и  $\Theta \rightarrow 2\pi/k_2$ .

Таким образом, частота колебаний  $k = 2\pi/\Theta$  меняется от  $k_1$  до  $k_2$  с изменением амплитуды от  $d$  до бесконечности (конечно, эту бесконечность надо понимать условно, как величину, значительно большую, чем  $d$ ). График этой зависимости (так называемая скелетная кривая) представлен на рис. 3.2.5.

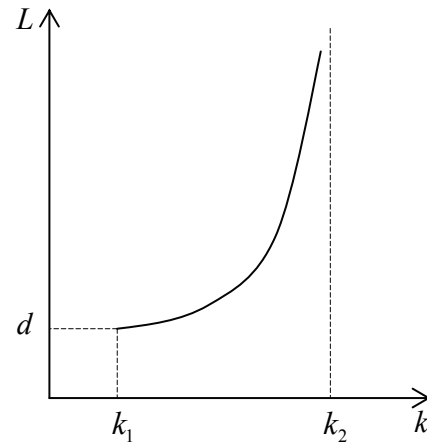


Рис. 3.2.5. Зависимость амплитуды от частоты

Метод, который использовался при решении этой задачи, состоял в том, что на каждом участке движения точно решалось соответствующее линейное дифференциальное уравнение, причем

постоянные интегрирования на следующем участке определялись из условий непрерывности изменения координаты и скорости. Такой подход и называется методом припасовывания.

### **3.3. Колебания в системах, близких к линейным. Начальные понятия о теории возмущений**

Близкими к линейным будем называть такие системы, для которых соответствующие дифференциальные уравнения хотя и являются нелинейными, но содержат некоторый параметр, при нулевом значении которого уравнения вырождаются в линейные. При этом предполагается, что этот параметр сам по себе является малым.

Тогда можно построить решение нелинейного уравнения в виде ряда по степеням этого малого параметра. Такой способ нахождения решения носит название теории возмущений. В качестве примера ее реализации рассмотрим конкретное уравнение с кубической нелинейностью

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha x^3, \tag{3.3.1}$$

которое можно интерпретировать как уравнение свободных колебаний груза массы  $m$  под действием восстанавливающей силы с нелинейной характеристикой  $F = -cx - \alpha x^3$ . Будем считать, что параметр  $\alpha$  является малым, т. е. величина  $\alpha x^3 \ll cx$ . Это неравенство следует понимать в том смысле, что понятие «намного меньше» условно означает, что одна величина, по крайней мере, в десять раз меньше другой, т. е. меньше ее на порядок. Введем обозначения

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{m}, \quad (3.3.2)$$

тогда уравнение (3.3.1) можно записать в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = -\varepsilon x^3, \quad (3.3.3)$$

с формальной точки зрения считая величину  $\varepsilon$  малой. Решение этого уравнения будем искать в виде разложения по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (3.3.4)$$

Далее, подставим (3.3.4) в (3.3.3)

$$\ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 + \varepsilon^2 \ddot{x}_2 + \dots + k^2 (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) = -\varepsilon (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^3$$

и приравняем в обеих частях члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , в результате чего получим систему уравнений

$$\ddot{x}_0 + k^2 x_0 = 0, \quad (3.3.5)$$

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = -x_0^3, \quad (3.3.6)$$

$$\ddot{x}_2 + k^2 x_2 = -3x_0^2 x_1 \quad (3.3.7)$$

и так далее. Видно, что левые части этих уравнений одинаковы по форме и линейны, а правые являются известными функциям, определяемыми решениями уравнений на предыдущем уровне по малому параметру, т. е. алгоритм нахождения решения совершенно прозрачен и, на первый взгляд, не должен быть сопряжен с какими-либо проблемами, поскольку в нулевом приближении уравнение (3.3.5) описывает свободные колебания. В данном случае это удобно представить в виде

$$x_0 = A \sin(kt + \delta). \quad (3.3.8)$$

Тогда

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = -A^3 \sin^3(kt + \delta), \quad (3.3.9)$$

т. е. это уравнение описывает вынужденные колебания под действием периодической силы, частота которой совпадает с собственной частотой системы. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид (3.3.8), а частное решение, обозначим его  $\tilde{x}$ , нужно вычислять по ранее полученной формуле

$$\tilde{x} = -\frac{A^3}{mk} \int_0^t \sin^3(k\tau + \delta) \sin k(t - \tau) d\tau. \quad (3.3.10)$$

Для вычисления интеграла преобразуем подынтегральную функцию, записав сначала (для сокращения записи обозначим  $\alpha = k\tau + \delta$ ,  $\beta = k(t - \tau)$ )

$$\begin{aligned}\sin^3 \alpha &= \sin \alpha \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha (1 - \cos 2\alpha) = \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{4} (\sin 3\alpha - \sin \alpha) = \\ &= \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha,\end{aligned}\quad (3.3.11)$$

и далее

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] = \\ &= \frac{1}{2} [\cos(2k\tau - kt + \delta) - \cos(kt + \delta)],\end{aligned}\quad (3.3.12)$$

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(3\alpha - \beta) - \cos(3\alpha + \beta)] = \\ &= \frac{1}{2} [\cos(4k\tau - kt + 3\delta) - \cos(2k\tau + kt + 3\delta)].\end{aligned}\quad (3.3.13)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sin^3(k\tau + \delta) \sin k(t - \tau) &= \frac{3}{8} [\cos(2k\tau - kt + \delta) - \cos(kt + \delta)] - \\ &\quad - \frac{1}{8} [\cos(4k\tau - kt + 3\delta) - \cos(2k\tau + kt + 3\delta)]\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\int_0^t \sin^3(k\tau + \delta) \sin k(t - \tau) d\tau &= \frac{3}{16k} [\sin(kt + \delta) + \sin(kt - \delta)] - \\ &\quad - \frac{3}{8} t \cos(kt + \delta) - \frac{1}{32k} [\sin(2kt + 3\delta) + \sin(kt - 3\delta)] + \\ &\quad + \frac{1}{16k} [\sin 3(kt + \delta) - \sin(kt + 3\delta)].\end{aligned}\quad (3.3.14)$$

Из этого выражения видно, что частное решение неоднородного уравнения уже в первом приближении содержит секулярный член  $\sim t \cos(kt + \delta)$ , который приводит к тому, что с течением времени отклонение от положения равновесия будет неограниченно возрастать.

Таким образом, изложенный способ получения решения нелинейного уравнения пригоден только для малых временных интервалов, для произвольно больших интервалов следует действовать иначе.

### **3.4. Колебания в системах, близких к линейным. Метод Боголюбова – Митропольского**

Рассмотрим общий случай нелинейного уравнения, описывающего колебательный процесс и имеющего вид

$$\ddot{x} + k^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (3.4.1)$$

где  $\varepsilon$  – малый положительный параметр.

При отсутствии возмущения, т. е. при  $\varepsilon = 0$ , из (3.4.1) получается уравнение для свободных колебаний, решение которого имеет вид

$$x = a \cos(kt + \delta), \quad (3.4.2)$$

где амплитуда  $a$  постоянна, а фаза  $\psi = kt + \delta$  равномерно возрастает, что можно записать так:

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = k. \quad (3.4.3)$$

Наличие нелинейного возмущения ( $\varepsilon \neq 0$ ) приводит, как было показано ранее, к зависимости частоты от амплитуды и может вызвать систематическое увеличение или уменьшение самой амплитуды. Эти эффекты должны исчезать при выключении нелинейного возмущения, т. е. в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Поэтому решение уравнения (3.4.1) можно искать в виде

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots, \quad (3.4.4)$$

в котором  $u_1, u_2, \dots$  являются периодическими функциями  $\psi$  с периодом  $2\pi$ , а величины  $a$  и  $\psi$  определяются уравнениями

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \quad (3.4.5)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = k + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots. \quad (3.4.6)$$

Определению подлежат величины  $a, \psi, A_n, B_n$ , для чего необходимо вычислить соответствующие производные, подставить их в уравнение (3.4.1) и приравнять в левой и правой частях полученного соотношения члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$  (как и при использовании теории возмущений).



Рассмотрим простейший случай получения решения в первом приближении, т. е. положим (индексы в дальнейшем опускаем)

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u(a, \psi), \quad (3.4.7)$$

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a), \quad (3.4.8)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = k + \varepsilon B(a). \quad (3.4.9)$$

Продифференцируем по времени выражение (3.4.7):

$$\dot{x} = \dot{a} \cos \psi - a \dot{\psi} \sin \psi + \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial u}{\partial \psi} \dot{\psi} \right), \quad (3.4.10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & \ddot{a} \cos \psi - 2\dot{a}\dot{\psi} \sin \psi - a\ddot{\psi} \sin \psi - a\dot{\psi}^2 \cos \psi + \\ & + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \dot{a}^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial \psi} \dot{a} \dot{\psi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial u}{\partial a} \ddot{a} + \frac{\partial u}{\partial \psi} \ddot{\psi} \right). \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Из (3.4.8) и (3.4.9), далее, следует

$$\ddot{a} = \varepsilon \frac{\partial A}{\partial a} \dot{a} = \varepsilon^2 \frac{\partial A}{\partial a} A, \quad (3.4.12)$$

$$\ddot{\psi} = \varepsilon \frac{\partial B}{\partial a} \dot{a} = \varepsilon^2 \frac{\partial B}{\partial a} A, \quad (3.4.13)$$

т. е. вторые производные по времени от амплитуды и фазы пропорциональны квадрату малого параметра, поэтому в первом по  $\varepsilon$  приближении этими величинами можно пренебречь. По этой же причине

$$\dot{a}^2 \approx 0, \quad (3.4.14)$$

$$\dot{a}\dot{\psi} = \varepsilon A(k + \varepsilon B) \approx \varepsilon A k, \quad (3.4.15)$$

$$\dot{\psi}^2 = (k + \varepsilon B)^2 \approx k^2 + 2\varepsilon k B. \quad (3.4.16)$$

Подставив (3.4.10) и (3.4.11) в уравнение

$$\ddot{x} + k^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (3.4.17)$$

с учетом (3.4.12)–(3.4.16) получим

$$\begin{aligned} & -2\varepsilon k A \sin \psi - a(k^2 + 2\varepsilon k B) \cos \psi + \\ & + \varepsilon k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + k^2 (a \cos \psi + \varepsilon u) = \varepsilon f(x, \dot{x}). \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Видно, что члены при нулевой степени  $\varepsilon$  взаимно уничтожаются, а приравнивание членов при первой степени дает

$$k^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \Psi^2} + u \right) - 2kA \sin \psi - 2kaB \cos \psi = f_0(a, \psi), \quad (3.4.19)$$

где обозначено

$$f_0(a, \psi) = f(x, \dot{x})|_{\varepsilon=0} = f(a \cos \psi, -ak \sin \psi). \quad (3.4.20)$$

Таким образом, функция  $u$  удовлетворяет уравнению

$$k^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \Psi^2} + u \right) = 2kA \sin \psi + 2kaB \cos \psi + f_0(a, \psi). \quad (3.4.21)$$

Из (3.4.20) видно, что  $f_0$  является периодической функцией переменной  $\psi$  с периодом  $2\pi$ , поэтому ее можно разложить в ряд Фурье

$$f_0(a, \psi) = g_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi], \quad (3.4.22)$$

где коэффициенты разложения определяются по формулам

$$g_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) d\psi, \quad (3.4.23)$$

$$\left. \begin{aligned} g_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos n\psi, \\ h_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin n\psi \end{aligned} \right\} n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4.24)$$

и считаются известными.

Как следует из уравнения (3.4.21),  $u$  является периодической функцией той же переменной, следовательно, и ее можно разложить в ряд Фурье

$$u(a, \psi) = v_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [v_n(a) \cos n\psi + w_n(a) \sin n\psi] \quad (3.4.25)$$

и свести, таким образом, решение дифференциального уравнения к системе алгебраических уравнений для величин  $v$  и  $w$ . Для этого подставим разложение (3.4.25) в уравнение (3.4.21), вычислив предварительно соответствующие производные:

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} = \sum_n n(-v_n \sin n\psi + w_n \cos n\psi), \quad (3.4.26)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = -\sum_n n^2 (v_n \cos n\psi + w_n \sin n\psi). \quad (3.4.27)$$

Подставив теперь (3.4.22), (3.4.25) и (3.4.27) в (3.4.21), получим

$$\begin{aligned} k^2 \left[ -\sum_n n^2 (v_n \cos n\psi + w_n \sin n\psi) + v_0 + \sum_n (v_n \cos n\psi + w_n \sin n\psi) \right] = \\ = 2kA \sin \psi + 2kaB \cos \psi + g_0 + \sum_n (g_n \cos n\psi + h_n \sin n\psi). \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках можно записать в более компактной форме

$$\begin{aligned} k^2 \left[ v_0 - \sum_n (n^2 - 1)(v_n \cos n\psi + w_n \sin n\psi) \right] = \\ = 2kA \sin \psi + 2kaB \cos \psi + g_0 + \sum_n (g_n \cos n\psi + h_n \sin n\psi). \quad (3.4.28) \end{aligned}$$

Приравнявая теперь в этом выражении коэффициенты при одинаковых гармониках, получим

$$k^2 v_0 = g_0, \quad (3.4.29)$$

$$0 = 2kA + h_1, \quad (3.4.30)$$

$$0 = 2kaB + g_1, \quad (3.4.31)$$

$$\left. \begin{aligned} -k^2(n^2 - 1)v_n &= g_n, \\ -k^2(n^2 - 1)w_n &= h_n \end{aligned} \right\} \quad (n \geq 2), \quad (3.4.32)$$

откуда следует

$$v_0 = \frac{g_0}{k^2}, \quad (3.4.33)$$

$$A = -\frac{h_1}{2k}, \quad (3.4.34)$$

$$B = -\frac{g_1}{2ka}, \quad (3.4.35)$$

$$\left. \begin{aligned} v_n &= -\frac{g_n}{k^2(n^2-1)}, \\ w_n &= -\frac{h_n}{k^2(n^2-1)} \end{aligned} \right\} (n \geq 2). \quad (3.4.36)$$

Таким образом, найдены выражения для  $A$ ,  $B$  и всех коэффициентов разложения функции  $u$ , кроме первых двух  $v_1$  и  $w_1$ , поэтому необходимо наложить дополнительные условия  $v_1 = 0$  и  $w_1 = 0$ . Аналогичным образом можно построить решения и в следующих приближениях.

В качестве первого приложения применим развитую теорию к рассматривавшейся ранее системе с кубической нелинейностью

$$F(x) = cx + \alpha x^3. \quad (3.4.37)$$

При положительном значении  $\alpha$  характеристика называется жесткой, а при отрицательном – мягкой. Будем считать нелинейность малой, т. е. коэффициент  $\alpha$  является малым. Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha x^3.$$

Запишем его в ином виде, перенеся линейный член в левую часть, разделив затем все слагаемые на  $m$  и введя стандартное обозначение  $k^2 = c/m$ :

$$\ddot{x} + k^2 x = -\frac{\alpha}{m} x^3. \quad (3.4.38)$$

Сравнение этого уравнения с (3.4.17) показывает, что  $\varepsilon f = -\alpha x^3/m$ , т. е.  $\varepsilon = \alpha/m$ , а  $f = -x^3$ . Тогда

$$f_0(x) = f(a \cos \psi + \varepsilon u + \dots)|_{\varepsilon=0} = f(a \cos \psi) = -a^3 \cos^3 \psi. \quad (3.4.39)$$

Коэффициенты разложения этой функции, конечно, можно было бы найти по формулам (3.4.23), (3.4.24), но гораздо проще получить их непосредственно, представив куб косинуса в виде комбинации тригонометрических функций в первой степени, т. е.

$$\begin{aligned} \cos^3 \psi &= \cos \psi \cos^2 \psi = \frac{1}{2} \cos \psi (1 + \cos 2\psi) = \frac{1}{2} \cos \psi + \frac{1}{2} \cos \psi \cos 2\psi = \\ &= \frac{1}{2} \cos \psi + \frac{1}{4} (\cos \psi + \cos 3\psi) = \frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi, \end{aligned}$$

тогда

$$f_0 = -a^3 \cos^3 \psi = -\frac{3a^3}{4} \cos \psi - \frac{a^3}{4} \cos 3\psi. \quad (3.4.40)$$

Это и есть разложение Фурье данной функции, которое вырождается в многочлен, содержащий только две гармоники. Сравнение этого выражения с (3.4.22) показывает, что

$$g_0 = 0, \quad g_1 = -\frac{3a^3}{4}, \quad g_3 = -\frac{a^3}{4}, \quad (3.4.41)$$

а все остальные коэффициенты  $g$  и  $h$  равны нулю. Поэтому коэффициенты разложения искомой функции  $u$ , определяемые формулами (3.4.33), (3.4.36), равны

$$v_0 = \frac{g_0}{k^2} = 0, \quad v_3 = -\frac{g_3}{8k^2} = \frac{a^3}{32k^2}, \quad (3.4.42)$$

все остальные коэффициенты  $v$  и  $w$  равны нулю. Из (3.4.34), (3.4.35) следует, что

$$A = -\frac{h_1}{2k} = 0, \quad B = -\frac{g_1}{2ak} = \frac{3a^3}{8ak} = \frac{3a^2}{8k}. \quad (3.4.43)$$

Поэтому

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A = 0, \quad (3.4.44)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = k + \varepsilon B = k + \frac{3a^2\varepsilon}{8k}. \quad (3.4.45)$$

Из (3.4.44) следует, что амплитуда  $a = \text{const}$ , а из (3.4.45) тогда вытекает

$$\psi = \left( k + \frac{3a^2\varepsilon}{8k} \right) t + C, \quad (3.4.46)$$

и с учетом (3.4.42) закон движения теперь можно записать в виде

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u = a \cos \psi + \frac{\varepsilon a^3}{32k^2} \cos 3\psi, \quad (3.4.47)$$

т. е. решение нелинейной задачи (3.4.38) в первом приближении по малому параметру представляет собой суперпозицию двух колебаний с частотами

$$\Omega = k + \frac{3a^2\varepsilon}{8k}, \quad \Omega_1 = 3\Omega \quad (3.4.48)$$

и постоянными амплитудами; никаких секулярных членов нет. Частота, однако, зависит от амплитуды  $a$ . Разрешим первое из равенств (3.4.48) относительно  $a$ :

$$\Omega = k \left( 1 + \frac{3\varepsilon a^2}{8k^2} \right) = k(1 + \beta a^2),$$

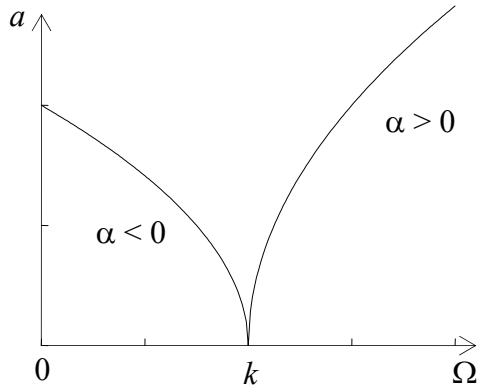


Рисунок. Скелетные кривые

$$a = \sqrt{\frac{1}{\beta} \left( \frac{\Omega}{k} - 1 \right)}. \quad (3.4.49)$$

Поскольку подкоренное выражение должно быть положительным, оно остается в том же виде при положительном  $\beta$  (т. е. при  $\alpha > 0$ ) и при  $\Omega \geq k$  и примет вид

$$a = \sqrt{\frac{1}{|\beta|} \left( 1 - \frac{\Omega}{k} \right)} \quad (3.4.50)$$

в противоположном случае, т. е. при  $\beta < 0$  и  $\Omega < k$ . Графически эта зависимость представлена на рисунке.

### **3.5. Вынужденные колебания в нелинейных системах (воздействие синусоидальной силы)**

Рассмотрим систему с одной степенью свободы с кубической упругой характеристикой и вязким трением, на которую действует возмущающая сила, изменяющаяся по простому гармоническому закону. Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx + \alpha x^3 = H \sin pt, \quad (3.5.1)$$

или

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x + \varepsilon x^3 = h \sin pt \quad (3.5.2)$$

после деления всех слагаемых на коэффициент при второй производной и введения стандартных обозначений

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad 2b = \frac{\mu}{m}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{m}, \quad h = \frac{H}{m}. \quad (3.5.3)$$

Приближенное решение нелинейного уравнения (3.5.2) будем искать в форме

$$x = A \sin(pt + \delta) \quad (3.5.4)$$

с неизвестными параметрами  $A$  и  $\delta$ . Подстановка (3.5.4) в (3.5.2) приводит к следующему:

$$-p^2 A \sin(pt + \delta) + 2bpA \cos(pt + \delta) + k^2 A \sin(pt + \delta) + \varepsilon A^3 \sin^3(pt + \delta) = h \sin pt. \quad (3.5.5)$$

Воспользовавшись известным соотношением

$$\sin^3(pt + \delta) = \frac{3}{4} \sin(pt + \delta) - \frac{1}{4} \sin 3(pt + \delta),$$

перепишем (3.5.5) в виде

$$\left[ A(k^2 - p^2) + \frac{3}{4} \varepsilon A^3 \right] \sin(pt + \delta) + 2bpA \cos(pt + \delta) - \frac{1}{4} \varepsilon A^3 \sin 3(pt + \delta) = h \sin pt$$

и далее

$$\left[ A(k^2 - p^2) + \frac{3}{4} \varepsilon A^3 \right] (\sin pt \cos \delta + \cos pt \sin \delta) + 2bpA (\cos pt \cos \delta - \sin pt \sin \delta) - \frac{1}{4} \varepsilon A^3 \sin 3(pt + \delta) = h \sin pt. \quad (3.5.6)$$

Приравняв теперь коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в обеих частях последнего уравнения, получим

$$\left[ A(k^2 - p^2) + \frac{3}{4} \varepsilon A^3 \right] \cos \delta - 2bpA \sin \delta = h, \quad (3.5.7)$$

$$\left[ A(k^2 - p^2) + \frac{3}{4} \varepsilon A^3 \right] \sin \delta + 2bpA \cos \delta = 0. \quad (3.5.8)$$

До сих пор все выкладки были точными, но, поскольку слагаемое, содержащее  $\sin 3(pt + \delta)$ , оказалось несбалансированным, решение системы (3.5.7), (3.5.8) будет носить приближенный характер. Заметим, что в отсутствие возмущающей силы и вязкого сопротивления ( $h = 0$ ,  $b = 0$ ) эта система выродилась бы в одно уравнение

$$k^2 - P^2 + \frac{3}{4}\varepsilon A^2 = 0,$$

определяющее зависимость неизвестной частоты свободных колебаний  $P$  от амплитуды

$$P^2 = k^2 + \frac{3}{4}\varepsilon A^2, \quad (3.5.9)$$

с учетом чего систему (3.5.7), (3.5.8) можно записать более компактно

$$A(P^2 - p^2)\cos\delta - 2bpA\sin\delta = h, \quad (3.5.10)$$

$$A(P^2 - p^2)\sin\delta + 2bpA\cos\delta = 0. \quad (3.5.11)$$

Из (3.5.11) можно определить  $\delta$ , а для определения амплитуды  $A$  следует возвести все выражения в квадрат и почленно сложить, в результате чего получится

$$A^2[(P^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2] = h^2. \quad (3.5.12)$$

Это выражение представляет собой полином шестой степени по величине  $A$  и четвертой – по  $p$ , поэтому проще исследовать зависимость  $p$  от  $A$ , а не наоборот, тем более, что этот полином четвертой степени является биквадратным уравнением

$$p^4 - 2p^2(P^2 - 2b^2) + P^4 - \frac{h^2}{A^2} = 0, \quad (3.5.13)$$

решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} p^2 &= P^2 - 2b^2 \pm \sqrt{(P^2 - 2b^2)^2 - P^4 + \frac{h^2}{A^2}} = \\ &= P^2 - 2b^2 \pm \sqrt{\frac{h^2}{A^2} - 4b^2 P^2 + 4b^4}. \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

Это соотношение определяет связь между амплитудой вынужденных колебаний и частотой возмущающей силы. Связь эта довольно сложная, хотя выяснение качественных особенностей амплитудно-частотной характеристики вполне доступно. Сначала несколько упростим последнее выражение, приняв сопротивление малым, что дает возможность пренебречь слагаемым вне радикала, содержащим  $b^2$ , и членом под знаком корня  $4b^4$ :

$$p^2 = P^2 \pm \sqrt{\frac{h^2}{A^2} - 4b^2 P^2}. \quad (3.5.15)$$



Отсюда видно, что амплитуда может иметь только конечное значение, определяемое положительностью подкоренного выражения. Максимального значения  $A_m$  она достигает в том случае, когда подкоренное выражение обращается в нуль

$$\frac{h^2}{A_m^2} = 4b^2 P^2(A_m) = 4b^2 \left( k^2 + \frac{3}{4} \varepsilon A_m^2 \right),$$

или

$$4b^2 A_m^2 \left( k^2 + \frac{3}{4} \varepsilon A_m^2 \right) - h^2 = 0, \quad (3.5.16)$$

что представляет собой биквадратное уравнение, решение которого есть

$$A_m^2 = -\frac{2k^2}{3\varepsilon} \pm \sqrt{\left( \frac{2k^2}{3\varepsilon} \right)^2 + \frac{h^2}{3b^2\varepsilon}}.$$

Поскольку определяется квадрат амплитуды, для получения действительной величины необходимо выбрать верхний знак перед радикалом: таким образом, действительное решение уравнения (3.5.16) всегда существует.

Если  $A \rightarrow 0$ , то  $p \rightarrow \infty$  при положительном знаке перед радикалом в (3.5.15). При отрицательном знаке перед радикалом  $p < P$  и при  $p = 0$  амплитуда должна иметь некоторое значение  $A_0$ , определяемое уравнением

$$P^2(A_0) = \sqrt{\frac{h^2}{A_0^2} - 4b^2 P^2(A_0)},$$

которое можно рассматривать как уравнение третьей степени относительно  $A_0^2$ . Можно показать, что оно всегда имеет положительное решение, причем  $A_0 < A_m$ .

Проведенные рассуждения свидетельствуют о том, что зависимость амплитуды от частоты вынуждающей силы имеет вид, представленный на рисунке.

Пунктирная линия, начинающаяся в точке  $k$ , является графиком функции (3.5.9), от которого вправо и влево откладывается величина, определяемая радикалом в (3.5.15).

Эта диаграмма позволяет проанализировать характер колебаний при изменении частоты возмущающей силы. При ее возрастании,

начиная от нулевого значения, амплитуда вынужденных колебаний сначала нарастает вдоль кривой  $A_0ea$ . В точке  $a$  достигается наибольшее значение амплитуды  $A_m$  и происходит срыв – ее значение скачком переходит в точку  $b$  и при дальнейшем увеличении частоты амплитуда уменьшается по кривой  $bc$ . Если же частота уменьшается, начиная с больших значений, то амплитуда изменяется по кривой  $cbd$ . В точке  $d$  амплитуда скачком изменяется, переходя в точку  $e$ , и далее уменьшается вдоль кривой  $eA_0$ .

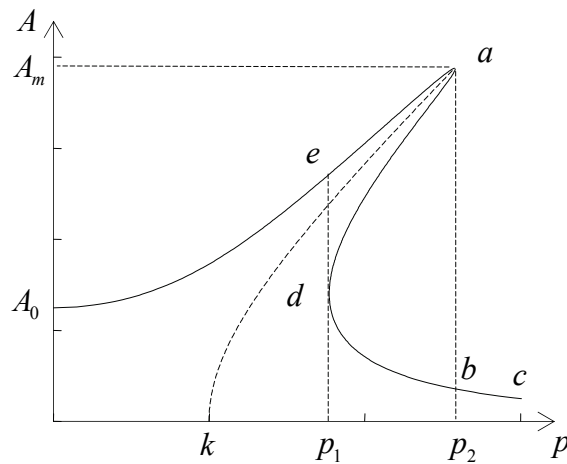


Рисунок. Амплитудно-частотная характеристика в нелинейном случае

Существенной особенностью нелинейных систем является возможность реализации нескольких периодических режимов при изменении частоты возмущающей силы в определенных пределах. Как видно из рисунка, при  $p_1 < p < p_2$  возможны три режима колебаний с различными амплитудами. Реализация того или иного режима зависит от начальных условий движения.

### **3.6. Вынужденные колебания в нелинейных системах (непериодическое внешнее возмущение). Автоколебания**

Рассмотренные ранее случаи колебательных систем свидетельствуют о том, что диссипативные силы (силы сопротивления), всегда в той или иной мере воздействующие на систему, приводят к затуханию колебаний с течением времени. Незатухающие колебания могут существовать лишь тогда, когда в системе имеется некоторый источник энергии, который может компенсировать рассеяние энергии, возни-

кающее при наличии диссипативных сил. Таким источником может являться периодическая сила, действующая на колебательную систему: рассмотренные ранее вынужденные колебания не затухают при каком угодно сопротивлении.

Однако источник энергии сам по себе может и не иметь никакой определенной периодичности, но его воздействие на колебательную систему играет роль как бы отрицательного трения, которое компенсирует обычное положительное трение, вносимое диссипативными силами.

Колебания такого типа, существенно отличающиеся от случая периодического возмущения, называются автоколебаниями.

В автоколебательных системах при определенных условиях положение равновесия теряет устойчивость и возникает движение, переводящее систему в режим стационарного периодического колебания (т. е. колебания, для которого на соответствующих временных интервалах амплитуда и фаза являются постоянными).

Для осуществления такого режима необходимо, чтобы система включала в себя три составные части:

- 1) колебательную часть,
- 2) некоторый источник энергии, управляемый колебательной системой,
- 3) некоторый ограничитель, переводящий нарастающие колебания в стационарные.

Первые две части могут быть линейными, ограничитель же колебаний всегда является нелинейным и поэтому любая автоколебательная система описывается нелинейным дифференциальным уравнением.

Рассмотрим количественную сторону этого явления на простейшем примере фрикционных автоколебаний. Пусть тело массы  $m$  находится на движущейся с постоянной скоростью ленте транспортера  $v$  и удерживается пружиной жесткости  $c$ , как показано на рис. 3.6.1. Известно, что для определенных значений  $v$  тело будет совершать колебательное движение. Это является следствием того, что сила сухого трения (обозначим ее буквой  $F$ ) между телом и лентой – не постоянная величина, она изменяется в зависимости от скорости  $u$  скольжения тела (относительной скорости) относительно ленты:

$$F = F(u) = F(v - \dot{x}), \quad (3.6.1)$$

где  $\dot{x}$  – абсолютная скорость груза.

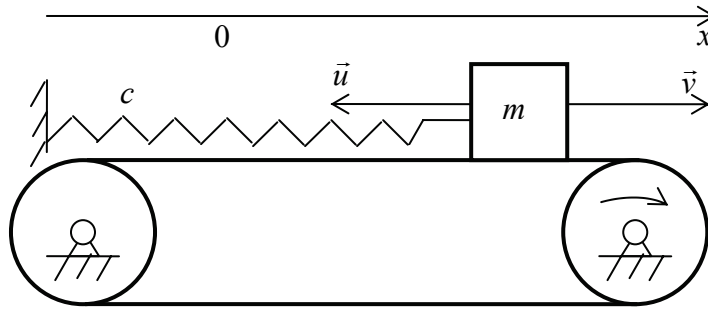


Рис. 3.6.1. Фрикционные автоколебания

Пока тело находится в покое относительно ленты ( $u = 0$ ), сила трения возрастает, оставаясь равной упругой силе пружины (рис. 3.6.2). Когда эта сила достигает критического значения  $F_0$ , начинается движение тела относительно ленты, причем сила трения сначала будет уменьшаться с ростом  $u$ , а затем начнет увеличиваться (конкретный вид характеристики неизвестен, но качественно рис. 3.6.2 его отражает).

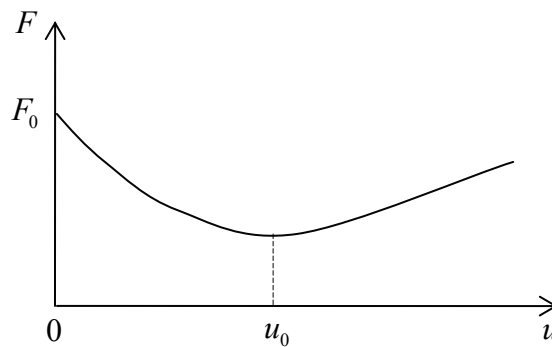


Рис. 3.6.2. Примерное поведение силы трения

Поместив начало оси  $x$  в положение, в котором пружина не деформирована, можно записать уравнение движения тела в виде

$$m\ddot{x} + cx = F(v - \dot{x}). \quad (3.6.2)$$

Груз будет находиться в равновесии ( $\dot{x} = 0$ ,  $\ddot{x} = 0$ ), если он получит статическое смещение

$$cx_{cm} = F(v). \quad (3.6.3)$$

Допустим, что груз сместился от этого положения на малую величину  $\xi$ , так что  $x = x_{cm} + \xi$ . При этом  $\dot{x} = \dot{\xi}$ ,  $\ddot{x} = \ddot{\xi}$ . Разложим силу трения по малой величине  $\dot{\xi}$ , сохранив только первые два члена разложения:

$$F(u) = F(v - \dot{\xi}) \approx F(v) - F'(v)\dot{\xi}, \quad (3.6.4)$$

тогда

$$m\ddot{\xi} + c(x_{cm} + \xi) = F(v) - F'(v)\dot{\xi}, \quad (3.6.5)$$

или при учете (3.6.3)

$$m\ddot{\xi} + F'(v)\dot{\xi} + c\xi = 0. \quad (3.6.6)$$

Если  $F' > 0$ , то решение последнего уравнения затухает, и положение статического равновесия является устойчивым по отношению к малым возмущениям, в противном случае  $\xi$  экспоненциально растет с течением времени, и положение равновесия неустойчиво. Как видно из характеристики силы трения на рис. 3.6.2, положение равновесия устойчиво при движении ленты со скоростью  $v > u_0$  и неустойчиво, если  $v < u_0$ .

Теперь построим количественное описание этого процесса. Имея в виду приведенные выше соображения, разложим силу трения по скорости до величин третьего порядка

$$F(v - \dot{x}) \approx b_0 + b_1\dot{x} + b_2\dot{x}^2 + b_3\dot{x}^3, \quad (3.6.7)$$

где

$$b_0 = F(v), \quad (3.6.8)$$

а

$$b_k = \frac{(-1)^k}{k!} \left. \frac{d^k F}{du^k} \right|_{\dot{x}=0} \quad (k=1, 2, 3). \quad (3.6.9)$$

Тогда уравнение движения (3.6.2) примет вид

$$m\ddot{x} + cx = b_0 + b_1\dot{x} + b_2\dot{x}^2 + b_3\dot{x}^3. \quad (3.6.10)$$

Введя новую переменную  $y = x - x_{cm}$ , с учетом (3.6.3) и (3.6.8) последнее уравнение можно переписать так:

$$m\ddot{y} + cy = b_1\dot{y} + b_2\dot{y}^2 + b_3\dot{y}^3 = b_1 \left( \dot{y} + \frac{b_2}{b_1}\dot{y}^2 + \frac{b_3}{b_1}\dot{y}^3 \right). \quad (3.6.11)$$

Теперь поделим все слагаемые на  $m$ , введем для краткости обозначения

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad \alpha = \frac{b_2}{b_1}, \quad \beta = \frac{b_3}{b_1}, \quad \varepsilon = \frac{b_1}{m} \quad (3.6.12)$$

и приведем, наконец, уравнение к виду

$$\ddot{y} + k^2 y = \varepsilon(\dot{y} + \alpha\dot{y}^2 + \beta\dot{y}^3). \quad (3.6.13)$$

Считая  $\varepsilon$  малой величиной и воспользовавшись полученными ранее результатами, запишем решение уравнения (3.6.13) с точностью до величин первого порядка по  $\varepsilon$ :

$$y = a \cos \psi + \varepsilon u(a, \psi), \quad (3.6.14)$$

$$\dot{a} = \varepsilon A(a), \quad (3.6.15)$$

$$\dot{\psi} = k + \varepsilon B(a), \quad (3.6.16)$$

$$v_0 = \frac{g_0}{k^2}, \quad v_1 = w_1 = 0, \quad (3.6.17)$$

$$\left. \begin{aligned} v_n &= -\frac{g_n}{(n^2 - 1)k^2}, \\ w_n &= -\frac{h_n}{(n^2 - 1)k^2} \end{aligned} \right\} (n \geq 2), \quad (3.6.18)$$

$$A = -\frac{h_1}{2k}, \quad B = -\frac{g_1}{2ak}. \quad (3.6.19)$$

Здесь, напомним,  $v$  и  $w$  – коэффициенты разложения в ряд Фурье функции  $u$ , а  $g$  и  $h$  – соответствующие коэффициенты разложения правой части уравнения  $f_0$  при нулевом значении  $\varepsilon$ , которая в данном случае имеет вид

$$f_0(a, \psi) = \dot{y} + \alpha \dot{y}^2 + \beta \dot{y}^3 \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (3.6.20)$$

Поскольку  $\dot{y} \Big|_{\varepsilon=0} = -ak \sin \psi$ , то

$$f_0 = -ak \sin \psi + \alpha (ak)^2 \sin^2 \psi - \beta (ak)^3 \sin^3 \psi. \quad (3.6.21)$$

Воспользовавшись известными тождествами

$$\sin^2 \psi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\psi),$$

$$\sin^3 \psi = \frac{3}{4} \sin \psi - \frac{1}{4} \sin 3\psi,$$

выражение (3.6.21) можно переписать иначе

$$\begin{aligned} f_0 &= -ak \sin \psi + \frac{\alpha (ak)^2}{2} (1 - \cos 2\psi) - \frac{\beta (ak)^3}{4} (3 \sin \psi - \sin 3\psi) = \\ &= \frac{\alpha (ak)^2}{2} - \frac{\alpha (ak)^2}{2} \cos 2\psi - ak \left[ 1 + \frac{3}{4} \beta (ak)^2 \right] \sin \psi + \frac{\beta (ak)^3}{4} \sin 3\psi. \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

Отсюда следует, что

$$g_0 = \frac{\alpha(ak)^2}{2}, \quad g_1 = 0, \quad g_2 = -\frac{\alpha(ak)^2}{2}, \quad g_n = 0, \quad n > 2, \quad (3.6.23)$$

$$h_1 = -ak \left[ 1 + \frac{3}{4}\beta(ak)^2 \right], \quad h_2 = 0, \quad h_3 = \frac{\beta(ak)^3}{4}, \quad h_n = 0, \quad n > 3. \quad (3.6.24)$$

По формулам (3.6.17), (3.6.18) определим отличные от нуля коэффициенты разложения функции  $u$

$$v_0 = \frac{1}{2}\alpha a^2, \quad v_2 = \frac{\alpha a^2}{6}, \quad w_3 = -\frac{\beta a^3 k}{32}. \quad (3.6.25)$$

Из вторых формул (3.6.19) и (3.6.23) следует, что  $B = 0$ , поэтому уравнение (3.6.16) дает

$$\psi = kt + C_1, \quad (3.6.26)$$

так что решение в первом по  $\varepsilon$  приближении приобретает вид

$$y = a \cos \psi + \varepsilon \left( \frac{\alpha a^2}{2} + \frac{\alpha a^2}{6} \cos 2\psi - \frac{\beta a^3 k}{32} \sin 3\psi \right), \quad (3.6.27)$$

т. е. груз совершает колебательное движение вблизи точки, несколько смещенной от положения статического равновесия, и представляющее собой суперпозицию трех колебаний с кратными частотами. Коэффициенты всех гармоник определяются параметром  $a$ , который нужно найти с помощью уравнения (3.6.15) с учетом первых формул (3.6.19) и (3.6.24). Решению подлежит, следовательно, дифференциальное уравнение

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2} \left( 1 + \frac{3}{4}\beta a^2 k^2 \right). \quad (3.6.28)$$

Переменные в этом уравнении разделяются, так что интегрирование обеих частей полученного соотношения дает

$$\int \frac{da}{a \left( 1 + \frac{3}{4}\beta a^2 k^2 \right)} = \frac{\varepsilon t}{2} + C_2. \quad (3.6.29)$$

Для сокращения записи введем обозначение

$$s = \frac{3}{4}\beta k^2, \quad (3.6.30)$$

а числитель и знаменатель подынтегральной функции умножим на  $a$ , в результате чего получим

$$\int \frac{da}{a \left( 1 + \frac{3}{4} \beta a^2 k^2 \right)} = \int \frac{ada}{a^2 (1 + sa^2)}. \quad (3.6.31)$$

Далее произведем замену переменной

$$z = a^2, \quad dz = 2ada, \quad (3.6.32)$$

в результате чего интеграл в правой части (3.6.31) примет вид

$$\int \frac{ada}{a^2 (1 + sa^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z(1 + sz)}. \quad (3.6.33)$$

Этот интеграл теперь можно вычислить путем разложения подынтегральной функции на простые дроби

$$\frac{1}{z(1 + sz)} = \frac{D}{z} + \frac{E}{1 + sz} = \frac{D(1 + sz) + Ez}{z(1 + sz)},$$

откуда следует, что должно выполняться условие

$$D(1 + sz) + Ez = 1$$

и, следовательно,  $D = 1$ ,  $E = -s$ , поскольку коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $z$  у многочленов в обеих сторонах последнего равенства должны совпадать. В результате получается следующее:

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z(1 + sz)} &= \int \left( \frac{1}{z} - \frac{s}{1 + sz} \right) dz = \ln z - \ln(1 + sz) = \\ &= \ln \frac{z}{1 + sz} = \ln \frac{a^2}{1 + sa^2}. \end{aligned} \quad (3.6.34)$$

Подставив полученный результат с учетом (3.6.33) в (3.6.29), будем иметь

$$\frac{1}{2} \ln \frac{a^2}{1 + sa^2} = \frac{\varepsilon t}{2} + C_2,$$

или

$$\ln \frac{a^2}{1 + sa^2} = \varepsilon t + C_2.$$



Отсюда найдем зависимость амплитуды  $a$  от времени

$$a = \sqrt{\frac{e^{\varepsilon t + C_2}}{1 - s e^{\varepsilon t + C_2}}}. \quad (3.6.35)$$

Из полученного выражения и определений (3.6.12), (3.6.30) следует:

1) если  $b_1 > 0$ , а  $b_3 < 0$ , а, значит,  $\varepsilon > 0$  и  $s < 0$ , то при  $t \rightarrow \infty$

$$a \rightarrow \sqrt{-\frac{1}{s}} = \sqrt{\frac{4b_1}{3|b_3|k^2}}, \text{ т. е. колебания выходят на стационарный режим}$$

с постоянной амплитудой, не зависящей от начальных условий; это и есть автоколебания;

2) если  $b_1 < 0$ , то  $\varepsilon < 0$  и  $a \rightarrow 0$  тоже независимо от начальных условий; как видно из (3.6.27) никаких колебаний при этом нет: груз все время будет находиться в покое в положении статического равновесия.

## 4. ВИБРОЗАЩИТА

Колебания, которым было уделено так много внимания, являются чрезвычайно широко распространенным типом движения различных машин и их отдельных частей. Они могут быть полезными в тех случаях, когда действие машины основано на колебательных эффектах (виброгрохоты, вибромельницы, вибрационные установки для уплотнения бетонных смесей и т. д.), но одновременно имеют отрицательную составляющую, поскольку передаются прилегающим конструкциям и могут нарушать планируемые законы движения машин и систем управления. Из-за вибрации увеличиваются динамические нагрузки в элементах конструкций, в результате чего снижается несущая способность деталей и даже возникает их разрушение. Вибрация порождает шум и оказывает вредное воздействие на человека, который всегда находится вблизи машины.

Поэтому и возникает необходимость в методах оценки и способах уменьшения виброактивности. Совокупность таких методов называют виброзащитой.

Различают два основных способа защиты от колебаний: виброизоляция и виброгашение. При этом в исследуемой механической системе выделяют две подсистемы, соединенные между собой некоторыми связями. Одна из частей, в которой происходят процессы, вызывающие колебания, называется источником колебаний, вторая, представляющая ту часть механической системы, колебания в которой требуется уменьшить, – объектом виброзащиты. Например, двигатель, установленный на фундаменте, имеет неуравновешенный ротор. Источником колебаний в данном случае является ротор, объектом виброзащиты – корпус двигателя или фундамент.

### ***4.1. Линейный виброизолятор при силовом возбуждении***

Рассмотрим простейшую систему виброзащиты с одной степенью свободы, представленную на рис. 4.1.1.

Здесь источником колебаний является объект массы  $m$ , находящийся под действием гармонической возмущающей силы

$$F(t) = H \sin pt. \quad (4.1.1)$$

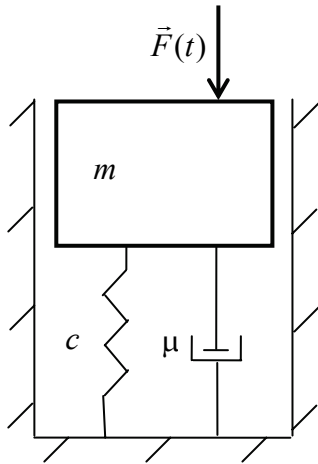


Рис. 4.1.1. Виброизолятор при силовом возбуждении

Объектом виброзащиты является фундамент, на котором расположен источник. В качестве виброизолятора между источником и основанием установлены упругий элемент (или элементы) жесткости  $c$  и демпфер вязкого трения, характеризуемый параметром  $\mu$ . Назначение виброизолятора состоит в уменьшении динамической нагрузки на основание.

Выбрав начало координат в положении статического равновесия и направив ось  $x$  по вертикали, уравнение движения машины можно записать в виде

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + H \sin pt,$$

или после приведения его к стандартной форме

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = h \sin pt, \quad (4.1.2)$$

где, как обычно,

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad 2b = \frac{\mu}{m}, \quad h = \frac{H}{m}. \quad (4.1.3)$$

Соотношение (4.1.2) – это уже рассматривавшееся ранее уравнение вынужденных колебаний. Из-за наличия сил сопротивления свободные колебания быстро затухают, поэтому интерес представляют только вынужденные колебания, т. е. частное решение этого уравнения. Было установлено, что оно имеет вид

$$x = A \sin(pt + \delta), \quad (4.1.4)$$

причем амплитуда  $A$  определяется выражением

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}, \quad (4.1.5)$$

параметр  $\delta$  сейчас интереса не представляет.

В задаче виброизоляции существенным является не столько закон движения источника, сколько динамическое усилие

$$R = cx + \mu\dot{x}, \quad (4.1.6)$$

передаваемое основанию. Подставив сюда (4.1.4), получим

$$R = cA \sin(pt + \delta) + \mu p A \cos(pt + \delta). \quad (4.1.7)$$

Положим далее

$$cA = R_0 \cos \varepsilon, \quad (4.1.8)$$

$$\mu p A = R_0 \sin \varepsilon. \quad (4.1.9)$$

Тогда выражение (4.1.7) можно привести к виду

$$R = R_0 \sin(pt + \delta + \varepsilon), \quad (4.1.10)$$

где

$$R_0 = A\sqrt{c^2 + \mu^2 p^2}. \quad (4.1.11)$$

Для количественной оценки эффективности защиты от колебаний вводится так называемый коэффициент виброизоляции как отношение амплитуды динамического воздействия на защищаемый объект к амплитуде возмущающей силы:

$$\gamma = \frac{R_0}{H}. \quad (4.1.12)$$

Защита считается эффективной, когда этот коэффициент меньше единицы. Подставив сюда выражения (4.1.11) и (4.1.5) с учетом (4.1.3), получим

$$\gamma = \frac{\sqrt{c^2 + \mu^2 p^2}}{m\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}},$$

или

$$\gamma = \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{m}\right)^2 p^2}}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} = \frac{\sqrt{k^4 + 4b^2 p^2}}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}. \quad (4.1.13)$$

Для упрощения анализа полученного выражения представим его в безразмерной форме, вынеся из-под знаков радикалов в числителе и знаменателе четвертую степень собственной частоты системы и введя безразмерные параметры

$$\lambda = \frac{b}{k}, \quad z = \frac{p}{k}. \quad (4.1.14)$$

Коэффициент виброизоляции тогда примет вид

$$\gamma = \frac{\sqrt{1 + 4\lambda^2 z^2}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2}}, \quad (4.1.15)$$

т. е. он зависит от двух безразмерных параметров, один из которых ( $\lambda$ ) связан с силами вязкого сопротивления, а второй ( $z$ ) – с частотой возмущающей силы. Из (4.1.15) видно, что при больших значениях  $\lambda$  коэффициент  $\gamma$  близок к единице, а при  $\lambda = 0$

$$\gamma = \frac{1}{|1 - z^2|}. \quad (4.1.16)$$

Рассмотрим разность числителя и знаменателя подкоренного выражения в (4.1.15) при некотором конечном значении  $\lambda$ :

$$\Delta = 1 + 4\lambda^2 z^2 - [(1 - z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2] = z^2(2 - z^2). \quad (4.1.17)$$

Эта разность, оказывается, не зависит от  $\lambda$ . При  $z = 0$  и  $z = \sqrt{2}$  она равна нулю, т. е. числитель и знаменатель одинаковы и, следовательно,  $\gamma = 1$ . При  $z < \sqrt{2}$   $\Delta > 0$ . Это означает, что числитель больше знаменателя, и поэтому  $\gamma > 1$ . Если же  $z > \sqrt{2}$ , то  $\Delta < 0$  – числитель меньше знаменателя и  $\gamma < 1$ .

Таким образом, на интервале  $0 < z < \sqrt{2}$  коэффициент  $\gamma > 1$  и достигает максимума в точке, определяемой из условия обращения в нуль производной по  $z$  от подкоренного выражения (4.1.15). Обозначим

$$f(z) = \frac{1 + 4\lambda^2 z^2}{(1 - z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2}. \quad (4.1.18)$$

Поскольку величина  $z$  положительна по определению и в последнем выражении фигурируют только ее четные степени, введем для упрощения новую величину  $u = z^2$ . Тогда (4.1.18) переписется так:

$$f(u) = \frac{1 + 4\lambda^2 u}{(1 - u)^2 + 4\lambda^2 u}. \quad (4.1.19)$$

Вычислим производную от  $f$  по  $u$  и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{4\lambda^2}{(1 - u)^2 + 4\lambda^2 u} - \frac{(1 + 4\lambda^2 u)[4\lambda^2 - 2(1 - u)]}{[(1 - u)^2 + 4\lambda^2 u]^2} = \\ &= 2 \frac{1 - u - 2\lambda^2 u^2}{[(1 - u)^2 + 4\lambda^2 u]^2} = 0, \end{aligned}$$

то есть

$$1 - u - 2\lambda^2 u^2 = 0. \quad (4.1.20)$$

Положительным решением этого квадратного уравнения является величина

$$u_1 = \frac{\sqrt{1 + 8\lambda^2} - 1}{4\lambda^2}. \quad (4.1.21)$$

Вторая производная от  $f$  по  $u$  равна

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = -2 \frac{1 + 4\lambda^2 u}{[(1-u)^2 + 4\lambda^2 u]^2} + 4 \frac{(1-u - 2\lambda^2 u^2)[4\lambda^2 - 2(1-u)]}{[(1-u)^2 + 4\lambda^2 u]^3}$$

и она отрицательна при  $u = u_1$ , что свидетельствует о максимальнойности  $f$  в этой точке. При этом

$$\begin{aligned} \gamma_{\max} &= \sqrt{f(u_1)} = \sqrt{\frac{8\lambda^4}{8\lambda^4 - 4\lambda^2 - 1 + \sqrt{1 + 8\lambda^2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 + 4\lambda^2 - 8\lambda^4 + \sqrt{1 + 8\lambda^2}}{8\lambda^2(1 - \lambda^2)}}. \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

Эта величина, как уже отмечалось, больше единицы при любых значениях  $\lambda$ , и она тем больше, чем меньше  $\lambda$ , как это представлено на рис. 4.1.2.

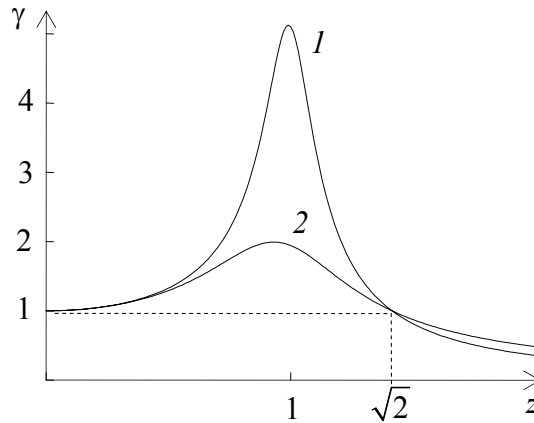


Рис. 4.1.2. Зависимость коэффициента виброизоляции от частоты и величины сопротивления

Кривая  $1$  соответствует меньшему значению  $\lambda$ , чем кривая  $2$ .

Как уже отмечалось, виброзащитная система является эффективной в том случае, когда коэффициент виброизоляции меньше единицы, поскольку при этом амплитуда силы, действующей на объект защиты, меньше амплитуды силы возмущающей. Проведенный анализ и рисунок свидетельствуют о том, что это условие выполняется при

$z > \sqrt{2}$  или при  $p > \sqrt{2}k$ . Имея в виду определение собственной частоты системы (первая формула (4.1.3)), условие эффективности виброзащиты можно представить в виде

$$p > \sqrt{\frac{2c}{m}}. \quad (4.1.23)$$

Частота возмущающей силы, вообще говоря, может быть какой угодно, и повлиять на нее для улучшения последнего неравенства практически невозможно. Но параметры системы поддаются регулировке, так что, подбирая соответствующие значения жесткости и массы, всегда можно обеспечить выполнение условия (4.1.23) и, следовательно, сделать защиту от колебаний эффективной. Параметр  $\lambda$ , связанный с коэффициентом сопротивления, при этом тоже играет определенную роль: при выполнении условия (4.1.23), как это видно из рис. 4.1.2,  $\gamma$  уменьшается с уменьшением  $\lambda$ .

#### **4.2. Линейный виброизолятор при кинематическом возбуждении**

Рассмотрим случай, представленный на рисунке, когда основание 2 движется по заданному закону, а виброизолятор выбирается так же, как и ранее.

Будем считать, что закон этого движения имеет вид

$$x_2 = H \sin pt. \quad (4.2.1)$$

Объектом защиты теперь будем считать машину 1. Выбрав начало координат в положении статического равновесия, запишем уравнение движения машины

$$m\ddot{x}_1 = -c(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad (4.2.2)$$

поскольку сила сопротивления зависит от относительной скорости. Перепишем это уравнение в стандартной форме с учетом того, что вследствие (4.2.1)

$$\dot{x}_2 = Hp \cos pt, \quad (4.2.3)$$

и поэтому

$$\ddot{x}_1 + 2b\dot{x}_1 + k^2x_1 = H(k^2 \sin pt + 2bp \cos pt), \quad (4.2.4)$$

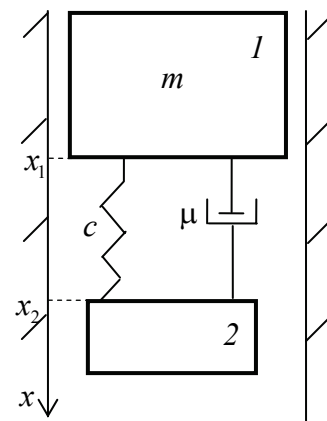


Рисунок. Виброизолятор при кинематическом возбуждении

где, как обычно,  $2b = \mu/m$ ,  $k^2 = c/m$ . По указанным ранее причинам, свободные колебания интереса не представляют, а частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$x_1 = A \sin(pt + \delta). \quad (4.2.5)$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = Ap \cos(pt + \delta), \quad (4.2.6)$$

$$\ddot{x}_1 = -Ap^2 \sin(pt + \delta), \quad (4.2.7)$$

в результате чего уравнение (4.2.4) принимает вид

$$\begin{aligned} -Ap^2 \sin(pt + \delta) + 2bAp \cos(pt + \delta) + Ak^2 \sin(pt + \delta) = \\ = H(k^2 \sin pt + 2bp \cos pt), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} A(k^2 - p^2)(\sin pt \cos \delta + \cos pt \sin \delta) + 2bAp(\cos pt \cos \delta - \sin pt \sin \delta) = \\ = H(k^2 \sin pt + 2bp \cos pt). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему уравнений

$$A(k^2 - p^2) \cos \delta - 2bAp \sin \delta = Hk^2, \quad (4.2.9)$$

$$A(k^2 - p^2) \sin \delta + 2bAp \cos \delta = 2Hbp, \quad (4.2.10)$$

из которой после возведения обеих частей в квадрат и почленного сложения следует

$$A = H \frac{\sqrt{k^4 + 4(bp)^2}}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4(bp)^2}}. \quad (4.2.11)$$

Определив коэффициент виброизоляции как отношение амплитуды колебаний объекта защиты к амплитуде колебаний основания, получим

$$\gamma = \frac{A}{H} = \frac{\sqrt{k^4 + 4(bp)^2}}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4(bp)^2}}, \quad (4.2.12)$$

т. е. в данном случае коэффициент виброизоляции имеет точно такой же вид, как и при силовом возбуждении, рассмотренном выше.

Из изложенного следует, что система виброизоляции эффективна только в том случае, когда собственная частота системы мала по срав-



нению с частотой возмущения. Для обеспечения низкой собственной частоты изолируемого объекта можно увеличить его массу, либо уменьшить жесткость упругого элемента изолятора.

### 4.3. Динамическое гашение колебаний

Наряду с виброизоляцией используются также различные способы гашения колебаний. Идея динамического гашения колебаний состоит в присоединении к объекту виброзащиты дополнительных устройств, которые изменяют его вибрационное состояние. Изменение вибрационного состояния объекта может осуществляться как путем перераспределения энергии от объекта к гасителю, так и в направлении увеличения рассеяния энергии колебаний. Первый случай относится к так называемым инерционным динамическим гасителям, которые применяются для подавления моногармонических или узкополосных колебаний. При действии вибрационных нагрузок более широкого диапазона предпочтительней оказывается иной способ, основанный на повышении диссипативных свойств системы. Динамические гасители такого типа называются поглотителями колебаний.

Рассмотрим систему, представленную на рисунке. Объектом виброзащиты в данном случае является тело  $1$ , связанное с неподвижным корпусом виброизолятором жесткости  $c_1$  и демпфером  $\mu$ ; будем считать, что силы вязкого сопротивления пропорциональны скорости. На него также действует переменная сила  $F(t) = H \sin pt$ . Присоединим к телу  $1$  с помощью пружины жесткостью  $c_2$  дополнительный груз  $2$ . Такая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем  $x_1$  и  $x_2$ , определяющие положения грузов относительно их положений статического равновесия.

Тогда поведение системы будет описываться двумя уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} + Q_1, \quad (4.3.1)$$

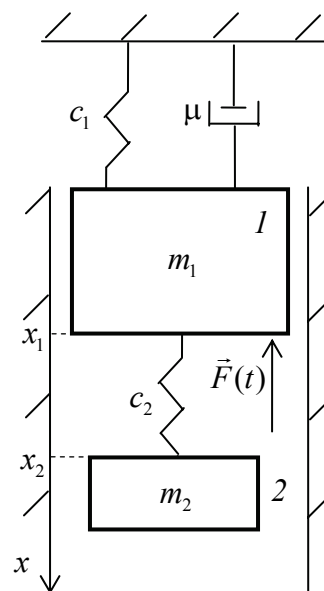


Рисунок. Динамический гаситель колебаний

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{\partial U}{\partial x_2} + Q_2, \quad (4.3.2)$$

где  $Q_1, Q_2$  – непотенциальные части обобщенных сил.

Потенциальная энергия при указанном выборе обобщенных координат будет иметь вид

$$U = -P_1 x_1 - P_2 x_2 + \frac{1}{2} c_1 [(x_1 + \lambda_1)^2 - \lambda_1^2] + \frac{1}{2} c_2 [(x_2 - x_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_2^2], \quad (4.3.3)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – статические удлинения пружин под действием сил тяжести  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$  соответственно. Тогда

$$-\frac{\partial U}{\partial x_1} = P_1 - c_1(x_1 + \lambda_1) + c_2(x_2 - x_1 + \lambda_2), \quad (4.3.4)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x_2} = P_2 - c_2(x_2 - x_1 + \lambda_2). \quad (4.3.5)$$

В положении статического равновесия, т. е. при  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$ , обобщенные силы обращаются в нуль, поэтому

$$P_1 - c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 0, \quad (4.3.6)$$

$$P_2 - c_2 \lambda_2 = 0, \quad (4.3.7)$$

в результате чего выражения (4.3.4), (4.3.5) упрощаются:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_1} = -c_1 x_1 + c_2(x_2 - x_1) = -(c_1 + c_2)x_1 + c_2 x_2, \quad (4.3.8)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x_2} = -c_2(x_2 - x_1). \quad (4.3.9)$$

Поскольку непотенциальные силы действуют только на груз  $I$ , движущийся поступательно, то

$$Q_1 = F(t) - \mu \dot{x}_1, \quad Q_2 = 0. \quad (4.3.10)$$

Кинетическая энергия системы в данном случае имеет простую форму

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2},$$

поэтому уравнения (4.3.1), (4.3.2) с учетом сказанного выше примут вид

$$m_1 \ddot{x}_1 = -(c_1 + c_2)x_1 + c_2 x_2 - \mu \dot{x}_1 + H \sin pt, \quad (4.3.11)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2(x_2 - x_1). \quad (4.3.12)$$

Из-за наличия сил сопротивления свободные колебания в системе быстро затухнут, так что интерес представляют только вынужденные колебания, определяемые частным решением этих уравнений. Будем искать его в виде

$$x_1 = A_1 \sin pt + B_1 \cos pt, \quad (4.3.13)$$

$$x_2 = A_2 \sin pt + B_2 \cos pt. \quad (4.3.14)$$

Вычислим производные от приведенных выражений

$$\dot{x}_1 = A_1 p \cos pt - B_1 p \sin pt,$$

$$\dot{x}_2 = A_2 p \cos pt - B_2 p \sin pt,$$

$$\ddot{x}_1 = -A_1 p^2 \sin pt - B_1 p^2 \cos pt,$$

$$\ddot{x}_2 = -A_2 p^2 \sin pt - B_2 p^2 \cos pt,$$

подставим их в уравнения (4.3.11), (4.3.12)

$$\begin{aligned} -m_1 p^2 (A_1 \sin pt + B_1 \cos pt) &= -(c_1 + c_2)(A_1 \sin pt + B_1 \cos pt) + \\ &+ c_2 (A_2 \sin pt + B_2 \cos pt) - \mu p (A_1 \cos pt - B_1 \sin pt) + H \sin pt, \\ -m_2 p^2 (A_2 \sin pt + B_2 \cos pt) &= -c_2 [(A_2 - A_1) \sin pt + (B_2 - B_1) \cos pt] \end{aligned}$$

и приравняем в обеих частях полученных равенств коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях (все слагаемые, содержащие неизвестные величины, перенесем в левую часть):

$$(c_1 + c_2 - m_1 p^2) A_1 - c_2 A_2 - \mu p B_1 = H, \quad (4.3.15)$$

$$\mu p A_1 + (c_1 + c_2 - m_1 p^2) B_1 - c_2 B_2 = 0, \quad (4.3.16)$$

$$-c_2 A_1 + (c_2 - m_2 p^2) A_2 = 0, \quad (4.3.17)$$

$$-c_2 B_1 + (c_2 - m_2 p^2) B_2 = 0. \quad (4.3.18)$$

Из (4.3.17) и (4.3.18) следует

$$A_1 = \frac{c_2 - m_2 p^2}{c_2} A_2, \quad (4.3.19)$$

$$B_1 = \frac{c_2 - m_2 p^2}{c_2} B_2. \quad (4.3.20)$$

Для сокращения записи введем обозначения

$$\alpha = \frac{c_2 - m_2 p^2}{c_2}, \quad \beta = c_1 + c_2 - m_1 p^2. \quad (4.3.21)$$

Подставив (4.3.18), (4.3.19) с учетом (4.3.21) в (4.3.15) и (4.3.16), получим

$$(\beta\alpha - c_2)A_2 - \mu\alpha B_2 = H, \quad (4.3.22)$$

$$\mu\alpha A_2 + (\beta\alpha - c_2)B_2 = 0. \quad (4.3.23)$$

Из (4.3.23) тогда следует

$$A_2 = -\frac{\beta\alpha - c_2}{\mu\alpha} B_2, \quad (4.3.24)$$

что после подстановки в (4.3.22) дает

$$-\frac{(\beta\alpha - c_2)^2}{\mu\alpha} B_2 - \mu\alpha B_2 = H$$

и поэтому

$$B_2 = -\frac{\mu\alpha H}{(\beta\alpha - c_2)^2 + (\mu\alpha)^2}. \quad (4.3.25)$$

Из (4.3.24) тогда следует

$$A_2 = \frac{\beta\alpha - c_2}{(\beta\alpha - c_2)^2 + (\mu\alpha)^2} H, \quad (4.3.26)$$

а из (4.3.19) и (4.3.20) –

$$A_1 = \frac{\alpha(\beta\alpha - c_2)}{(\beta\alpha - c_2)^2 + (\mu\alpha)^2} H, \quad (4.3.27)$$

$$B_1 = -\frac{\mu\alpha^2}{(\beta\alpha - c_2)^2 + (\mu\alpha)^2} H. \quad (4.3.28)$$

Таким образом, определены все коэффициенты, относящиеся к вынужденным колебаниям тел 1 и 2. При этом оказывается, что коэффициенты, определяющие движение защищаемого объекта, пропорциональны, как это видно из (4.3.27) и (4.3.28), параметру

$\alpha = c_2 - m_2 p^2$ . Если подобрать такие значения  $c_2$  и  $m_2$ , что  $\alpha = 0$ , то  $A_1$  и  $B_1$  обратятся в нули, и, стало быть, объект защиты не будет совершать никаких колебаний, т. е. добавочный груз погасит колебания объекта и будет двигаться при этом по закону

$$x_2 = -\frac{H}{c_2} \sin pt.$$

Как следует из сказанного выше, виброгашение такого типа эффективно только для одной фиксированной частоты. При произвольном изменении возмущающей силы используются поглотители колебаний вязкого типа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Комаров, М. С. Динамика механизмов и машин / М. С. Комаров. – М.: Машиностроение, 1969. – 296 с.
2. Бидерман, В. Л. Теория механических колебаний: учебник / В. Л. Бидерман. – М.: Высш. шк., 1980. – 408 с.
3. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: учебник: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М.: Наука, 1979. – Т. 2. – 544 с.
4. Лойцянский, Л. Г. Курс теоретической механики: учеб. пособие: в 2 т. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М.: Наука, 1983. – Т. 2. – 640 с.
5. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний: монография / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
6. Теория механизмов и машин: учеб. для вузов / К. В. Фролов [и др.]; под ред. К. В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1987. – 496 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
1. ДИНАМИКА ЖЕСТКИХ СИСТЕМ.....	4
1.1. Уравнения движения механизмов с жесткими звеньями...	4
1.2. Характеристики приводов .....	10
1.3. Решение уравнений динамики жестких систем в простейших случаях .....	13
1.4. Вибротранспортировка при постоянном давлении .....	17
1.5. Вибрационные грохоты с подбрасыванием груза .....	21
2. ДИНАМИКА УПРУГИХ СИСТЕМ.....	25
2.1. Малые колебания консервативной системы около положения устойчивого равновесия .....	26
2.2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы	31
2.3. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы.....	36
2.4. Гармоническая возмущающая сила .....	39
2.5. Ротор на гибком валу. Эффект самоцентрирования.....	43
2.6. Силы вязкого сопротивления .....	50
2.7. Вынужденные колебания при учете сил вязкого сопротивления .....	54
2.8. Амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний при вязком сопротивлении .....	61
2.9. Вынужденные колебания при периодической возмущающей силе.....	64
2.10. Самосинхронизация механизмов на упругом основании	66
2.11. Параметрические колебания.....	71
2.12. Малые колебания систем с двумя степенями свободы....	75
2.13. Двухмассовая модель механизма (динамические нагрузки приводных устройств).....	80
3. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ .....	84
3.1. Свободные колебания (общее рассмотрение).....	84
3.2. Системы с кусочно-линейной характеристикой (метод припасовывания).....	87
3.3. Колебания в системах, близких к линейным. Начальные понятия о теории возмущений .....	93

3.4. Колебания в системах, близких к линейным. Метод Боголюбова – Митропольского .....	96
3.5. Вынужденные колебания в нелинейных системах (воздействие синусоидальной силы) .....	102
3.6. Вынужденные колебания в нелинейных системах (непериодическое внешнее возмущение). Автоколебания .....	106
4. ВИБРОЗАЩИТА .....	114
4.1. Линейный виброизолятор при силовом возбуждении .....	114
4.2. Линейный виброизолятор при кинематическом возбуждении .....	119
4.3. Динамическое гашение колебаний .....	121
ЛИТЕРАТУРА .....	126



Учебное издание

# **ДИНАМИКА МАШИН И ВИБРОЗАЩИТА**

Лекции

Составители: **Белов** Владлен Васильевич  
**Хвесько** Геннадий Михайлович

Редактор *М. В. Гайдукова*  
Компьютерная верстка *О. Ю. Шантарович*

Подписано в печать 24.11.2009. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 7,4. Уч.-изд. л. 7,7.  
Тираж 150 экз. Заказ .

Учреждение образования  
«Белорусский государственный технологический университет».  
220006. Минск, Свердлова, 13а.  
ЛИ № 02330/0549423 от 08.04.2009.

Отпечатано в лаборатории полиграфии учреждения образования  
«Белорусский государственный технологический университет».  
220006. Минск, Свердлова, 13.  
ЛП № 02330/0150477 от 16.01.2009.