# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## Сборник конкурсных задач с методическими указаниями к их решению

Минск БГТУ 2009

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## Сборник конкурсных задач с методическими указаниями к их решению

*Рекомендовано
учебно-методическим объединением высших учебных заведений
Республики Беларусь по химико-технологическому образованию
в качестве пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальностям 1-36 07 01 «Машины и аппараты
химических производств и предприятий строительных материалов»,
1-36 06 01 «Полиграфическое оборудование
и системы обработки информации»*

Минск 2009

УДК 531(079.1)
ББК 22.21я73
Т33

Составители:
*А. Н. Камлюк, Р. Н. Ласовский, С. А. Борисевич*

Рецензенты:
кафедра теоретической механики Белорусского национального технического университета (зав. кафедрой доктор физико-математических наук, профессор *А. В. Чигарев*);
доктор технических наук, профессор,
зав. кафедрой теоретической механики и теории механизмов и машин Белорусского государственного аграрного технического университета *А. Н. Орда*



Т33 **Теоретическая механика** : сборник конкурсных задач с методическими указаниями к их решению для студентов специальностей 1-36 07 01 «Машины и аппараты химических производств и предприятий строительных материалов», 1-36 06 01 «Полиграфическое оборудование и системы обработки информации» / сост. А. Н. Камлюк, Р. Н. Ласовский, С. А. Борисевич. – Минск : БГТУ, 2009. – 74 с.
ISBN 978-985-434-866-7

В пособии дано 100 задач, которые могут использоваться студентами для подготовки к олимпиаде по теоретической механике и преподавателями для компоновки олимпиадных заданий, а также студентами, интересующимися углубленным освоением курса теоретической механики. Приведены методические указания по решению всех задач.

**УДК 531(079.1)**
**ББК 22.21я73**

**ISBN 978-985-434-866-7**

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем сборнике задач рассматриваются принципы составления конкурсных заданий и методика оценки их выполнения, содержатся условия ста задач по статике, кинематике и динамике, большая часть которых использовалась для олимпиад, проводимых в течение 10 лет на кафедрах теоретической механики Белорусского национального технического университета (1999–2004 гг.) и технической физики и теоретической механики Белорусского государственного университета транспорта (2005–2008 гг.) в рамках открытых республиканских и международных олимпиад по теоретической механике среди студентов ВУЗов.

Данная работа может быть использована как преподавателями кафедр теоретической механики при составлении конкурсных заданий для теоретического внутривузовского тура олимпиады и организации кружковой работы на кафедре, так и студентами для самостоятельной подготовки к олимпиаде и углубленного изучения курса теоретической механики.

В работе приводятся краткие указания к решению задач, ответы, а также полные решения некоторых задач.

В олимпиадах могут принимать участие все желающие студенты I–IV курсов любых специальностей. Однако в связи с тем, что обычный контингент олимпиадного движения – это студенты инженерно-механических специальностей, то сборник рассчитан в первую очередь для студентов специальностей 1-36 07 01 «Машины и аппараты химических производств и предприятий строительных материалов» и 1-36 06 01 «Полиграфическое оборудование и системы обработки информации».

Сборник может быть также рекомендован студентам I–IV курсов специальностей 1-36 05 01 «Машины и оборудование лесного комплекса» и 1-36 01 08 «Конструирование и производство изделий из композиционных материалов».

# ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития научно-технического прогресса возросла потребность промышленности и науки в высококвалифицированных кадрах, что еще в конце прошлого века вызвало появление новых форм распространения научных и технических знаний. Одной из таких форм являются олимпиады по фундаментальным и общетехническим дисциплинам.

Цели олимпиад по теоретической механике:

- пробуждение более глубокого интереса к задачам и методам теоретической механики как одной из основных общетехнических дисциплин для студентов, в первую очередь, механических специальностей;
- развитие творческого подхода к овладению знаниями и решению нестандартных задач;
- улучшение качества усвоения учебного материала и формирование навыков самостоятельной работы.

Республиканские олимпиады по теоретической механике проводились с 1982 г. на базе Белорусского национального технического университета, всесоюзные – с 1981 г., с начала 90-х гг. они приобрели статус открытых республиканских олимпиад. В 2004 г. Открытая республиканская олимпиада «переехала» в Белорусский государственный университет транспорта (БелГУТ) в Гомель, где получила статус Международной олимпиады по теоретической механике среди студентов ВУЗов. Данная олимпиада проводится в БелГУТе и в настоящее время. В ней принимают участие победители I тура олимпиад, которые проводятся в ВУЗах, где непосредственно обучаются студенты. Международная олимпиада является популярной не только в Беларуси, но и за ее пределами. Так, можно отметить, что, к примеру, в 2007 г. в ней приняли участие более 100 студентов из 24 ВУЗов как Республики Беларусь, так и ближнего зарубежья.

Внутривузовская олимпиада (I тур) в Белорусском государственном технологическом университете (БГТУ) проводится ежегодно преимущественно для студентов, изучающих трехсеместровый курс теоретической механики.

# 1. АНАЛИЗ ОЛИМПИАДНОГО ДВИЖЕНИЯ НА КАФЕДРЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ БГТУ ЗА ПОСЛЕДНИЕ 6 ЛЕТ

Внутривузовская олимпиада (I тур) в Белорусском государственном технологическом университете (БГТУ) проводится ежегодно преимущественно в конце февраля для студентов I–IV курсов, изучающих трехсеместровый курс теоретической механики. Для решения олимпиадных задач (их количество всегда равно восьми: 2 – по статике, 2 – по кинематике и 4 – по динамике) предлагается не более 4 астрономических часов. Столько же времени и такое же количество задач имеют студенты, участвующие в открытых республиканских и международных олимпиадах.

Количество студентов, желающих принять участие в олимпиаде по теоретической механике БГТУ, относительно невысокое (рис. 1), что объясняется немногочисленностью подготавливаемых ВУЗом инженеров-механиков.

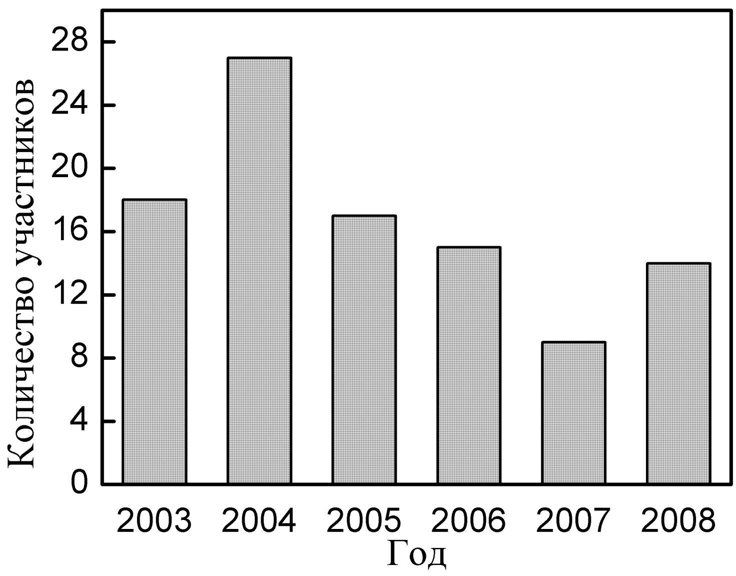



Рис. 1. Количество участников олимпиад по годам

Тем не менее, регулярно удавалось собирать команду из победителей I тура (4–5 человек) для участия ее в открытых республиканских и международных олимпиадах.

Стоит отметить, что в 2000 г. команда нашего университета заняла III место, в 2002 г. – III место, в 2003 г. – III место, в 2004 г. – II место, в 2005 г. – III место (Международная олимпиада), в 2008 г. – III место (Республиканская олимпиада).

В 2006–2007 гг. команда Белорусского государственного технологического университета не вошла в список лидеров международного олимпиадного движения. Это объясняется постоянным спадом успеваемости студентов, которая связана с недостаточной фундаментальной подготовкой их в школах (анализировались результаты студентов, полученные на вступительном тестировании по математике и физике). Об этом также свидетельствуют снижение количества участников олимпиад и резкое ухудшение их результатов на I туре (рис. 2 и 3).

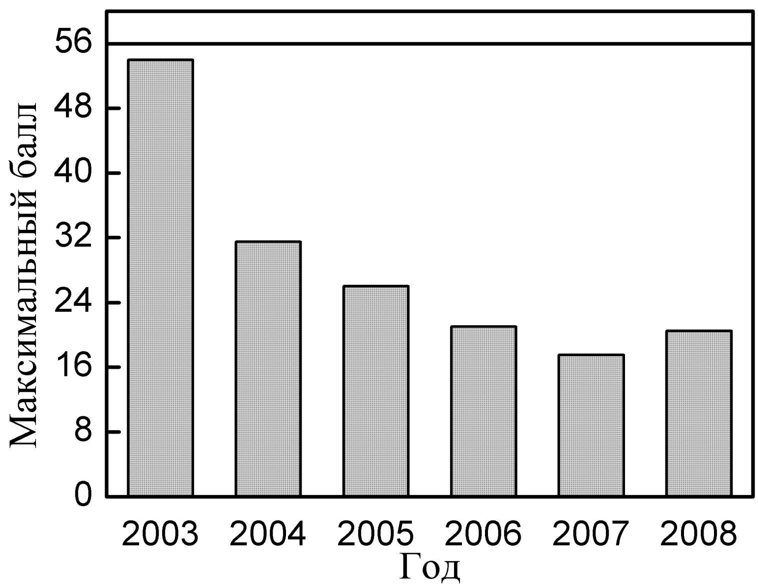



Рис. 2. Максимальный балл участников олимпиады

Максимальное количество баллов, которое может получить студент на внутривузовской олимпиаде, равно 56 (сплошная горизонтальная линия на рис. 2), а уровень сложности задач одинаковый, что позволяет сравнивать результаты, полученные в разный период времени.

Максимальный балл среди участников за период 2003–2008 гг. был получен в 2003 г., после чего ежегодно его значение постепенно падало, за исключением 2008 г.

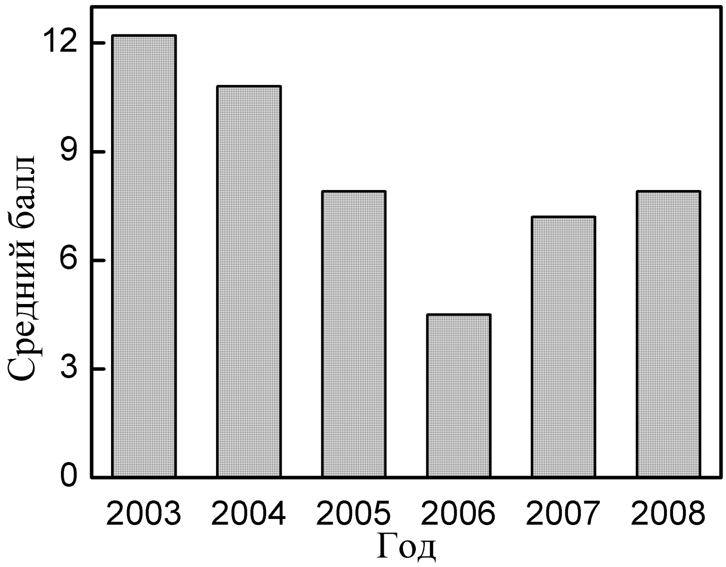



Рис. 3. Средний балл участников олимпиады

Максимальные значения средний балл (рис. 3) принимает в те годы, когда команда университета показывает хорошие результаты на открытых республиканских и международных олимпиадах.

# 2. КРИТЕТИИ РАЗРАБОТКИ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ И ИХ ОЦЕНКА

В основу разработки конкурсных задач заложены следующие критерии:

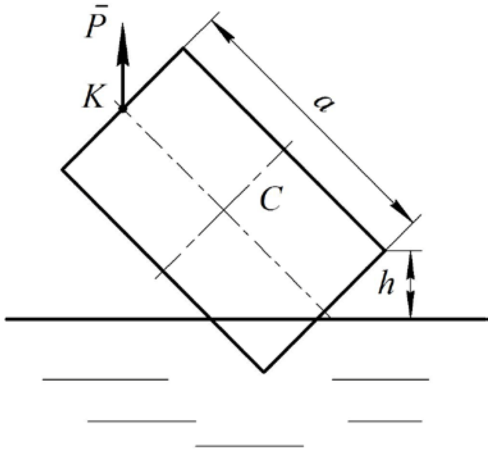
- Нельзя, чтобы условия задач были объемными, слишком длинными и вычурными. Они должны быть легко доступны для восприятия.
- Нужно, чтобы задачи допускали сравнительно краткие, негромоздкие решения.
- Задачи должны быть оригинальными (не заимствованными из сборников задач).
- Необходимо, чтобы в задаче был элемент нестандартности, позволяющий участнику олимпиады показать не только знания, но и сообразительность. В некоторых задачах анализ решения – рассмотрение различных случаев.
- В условии задачи не должен указываться метод решения. Поэтому задачи, например, типа «Записать дифференциальные уравнение движения …» не могут являться олимпиадными.
- Нужно, чтобы задача была проста для проверки, т. е. без большого количества вычислений.
- Задачи должны быть различной трудности. В конкурсное задание необходимо включать и сравнительно простые для решения задачи.
- Решения могут требовать применение понятий математики или физики, редко используемых в теоретической механике.

Оценка правильности решения конкурсных задач проводится комиссией и зависит от сложности задачи, наличия правильного ответа, расчетной схемы и метода решения. В случае, когда ответ не получен или получен неверно, комиссия оценивает ход решения задачи и в зависимости от того, на каком этапе находится решение и какие допущены ошибки, выставляет заслуженный балл.

# 3. УСЛОВИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

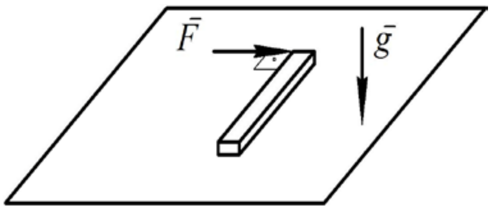
## 3.1. СТАТИКА

### Задача 1 (1997)



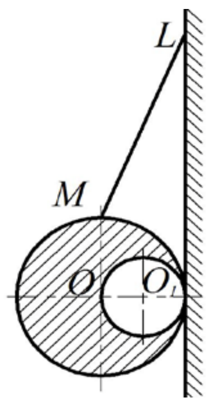

Для осмотра носовой части понтон, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда ($a \times b = 20 \times 10$ м), поднимают краном грузоподъемностью $P = 750$ кН. Центр тяжести понтона лежит на середине его длины. Точка $K$ крепления троса и центр тяжести понтона находятся на одном расстоянии от днища. Определить высоту части судна, выступающей над водой, если при подъеме носа понтона его корма оказалась на высоте $h = 1$ м над уровнем моря. Водоизмещение понтона Д = 2000 кН равно его весу. Плотность воды $\rho = 10$ кН/м$^3$.

### Задача 2 (1997)




Какой наименьшей силой, приложенной перпендикулярно к концу однородного бруска, лежащего на горизонтальной плоскости, можно его сдвинуть, если коэффициент трения между бруском и плоскостью равен $f$?

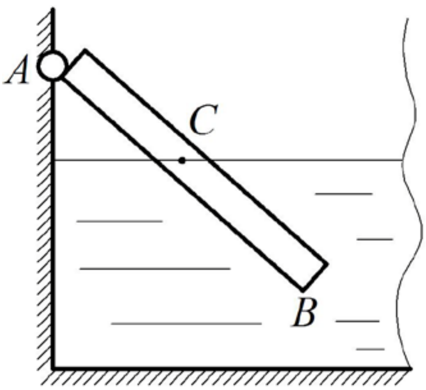
### Задача 3 (1998)




Однородный шар радиусом $R$ и весом $P$ имеет шаровую полость радиусом $r = R / 2$ с центром в точке $O_1$, отстоящей от его центра $O$ на расстоянии $OO_1 = R / 2$. Нить длиной $l = 2R$ крепится к шару в точке $M$, лежащей на вертикальном диаметре.

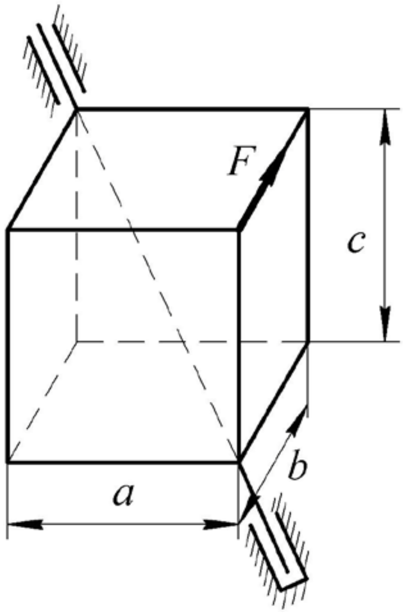
Найти давление шара на гладкую вертикальную стену и натяжение нити.

**Задача 4 (1998)**



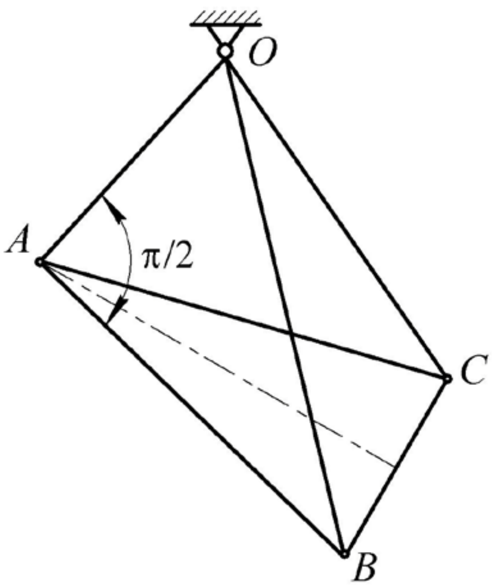

Однородный тяжелый стержень объемом $V$, шарнирно закрепленный на стенке сосуда с жидкостью плотности $\rho$, плавает в жидкости. Определить реакцию в шарнире $A$, если стержень погружен в жидкость до середины и находится в равновесии, образуя с вертикалью некоторый угол.

**Задача 5 (1999)**




Однородный параллелепипед может вращаться вокруг одной из диагональных осей под действием силы $F$. Положение оси и размеры параллелепипеда указаны на рисунке. Определить момент $M$ пары сил, расположенной в плоскости, перпендикулярной оси вращения, при условии равновесия параллелепипеда.

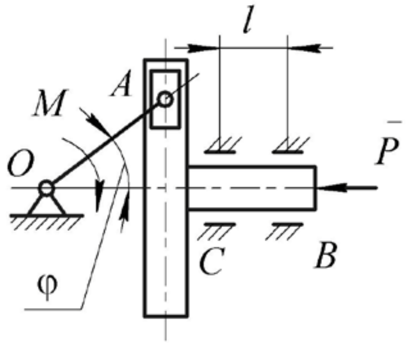
**Задача 6 (1999)**




Однородная равносторонняя треугольная пластина $ABC$ весом $Q$ подвешена на трех невесомых стержнях. Стержни прикреплены в углах пластины шарнирно и соединены между собой шарниром $O$. Стержень $OA$ перпендикулярен плоскости пластины, а его длина равна стороне пластины. Определить усилие в стержнях, если $OB = OC$.

### Задача 7 (2000)

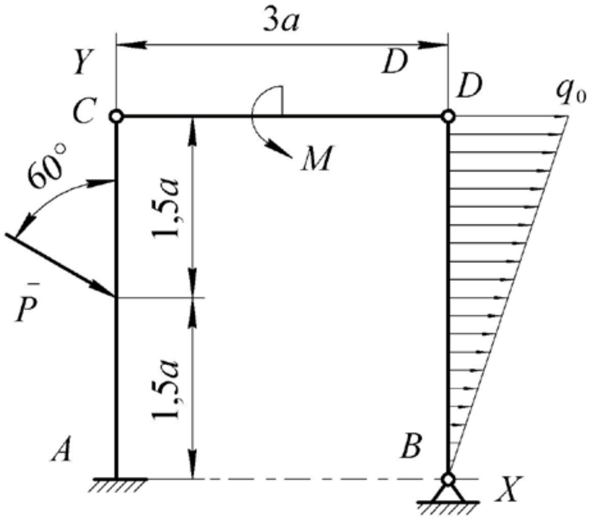
Кривошип $OA$ длиной $l$ соединен шарниром с камнем, помещенным в прорезь кулисы. Шток кулисы может двигаться в горизонтальных направляющих, расстояние между которыми равно $l$. К штоку приложена сила $P$. Коэффициент трения скольжения штока по направляющим равен $f$.




Пренебрегая трением в прорези кулисы, определить, при каком моменте $M$ пары сил, приложенных к кривошипу, механизм будет находится в равновесии. Весом механизма пренебречь.

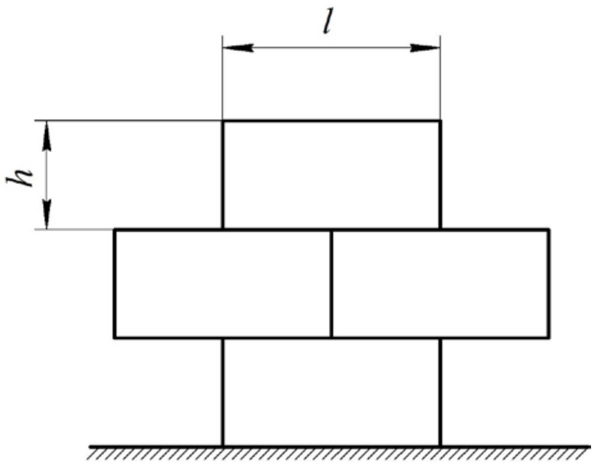
### Задача 8 (2000)

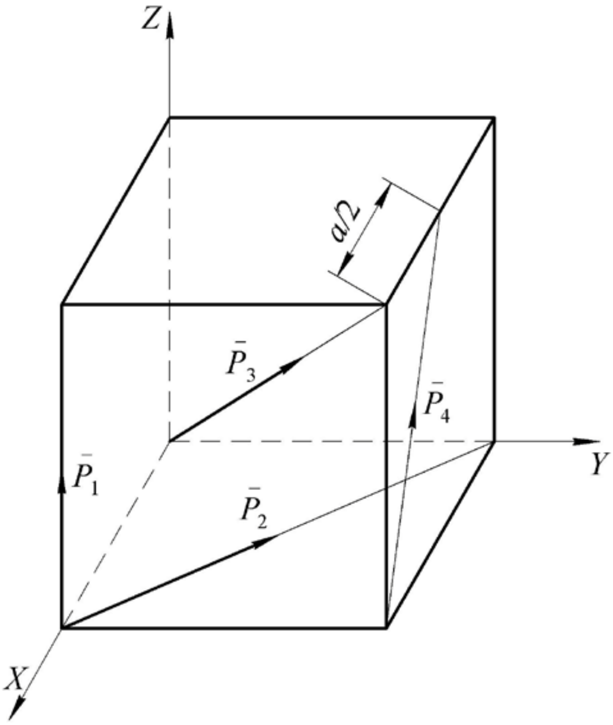
Для стержневой конструкции, изображенной на рисунке, определить реакцию в шарнире $C$ и момент в заделке $A$, если дано: $P$, $M$ = $= 6Pa$; $q_0 = 2P / a$.




### Задача 9 (2001)

На какое наибольшее расстояние можно выдвинуть средние кирпичи, сохранив равновесие? Длина кирпича $l$, высота $h$, коэффициент трения между кирпичами $f$.

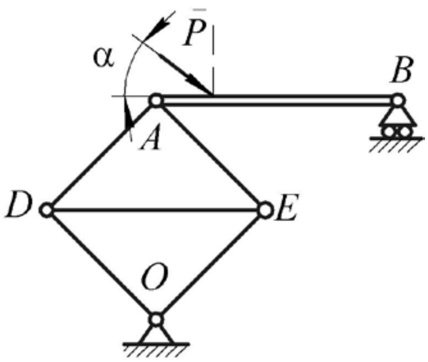





**Задача 10 (2001)**

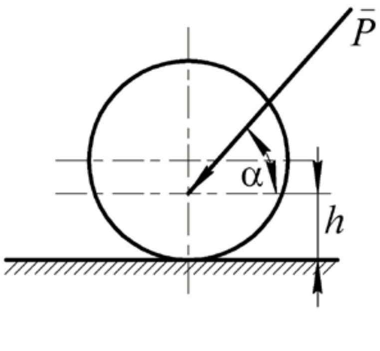
Доказать что система сил $P_1 = P$, $P_2 = P\sqrt{2}$, $P_3 = P\sqrt{3}$, $P_4 = P\sqrt{5}$, действующая на куб со стороной $a$, как указано на рисунке, приводится к одной равнодействующей силе. Найти точки пересечения линии действия равнодействующей с координатными плоскостями $Z = 0$ и $Y = 0$.

**Задача 11 (2002)**



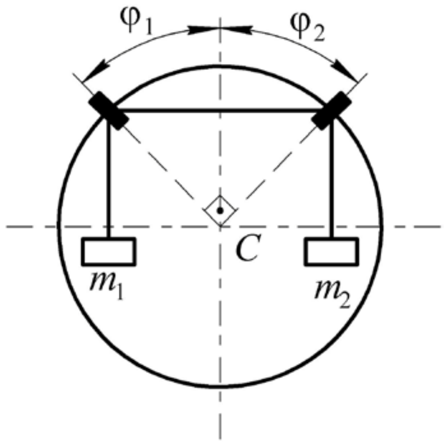

Горизонтальная балка $AB$ левым концом $A$ шарнирно соединена со стержневым квадратом $ADOE$, установленным так, что $AO \perp AB$; правый конец $B$ балки закреплен на шарнирно-подвижной опоре. К середине балки приложена сила $P$ под некоторым углом α. Пренебрегая весом стержней квадрата, соединенных между собой и с опорой $O$ шарнирно, а так же весом балки по сравнению с силой $P$, определить, при каком угле α усилие в диагональном стержне $DE$ квадрата будет минимальным.

**Задача 12 (2002)**




При каких значениях угла α, высоты $h$ и коэффициента трения скольжения $f$ под действием силы $P$ каток весом $Q$ будет скользить по горизонтальной плоскости без качения? Коэффициент трения качения равен $k$.

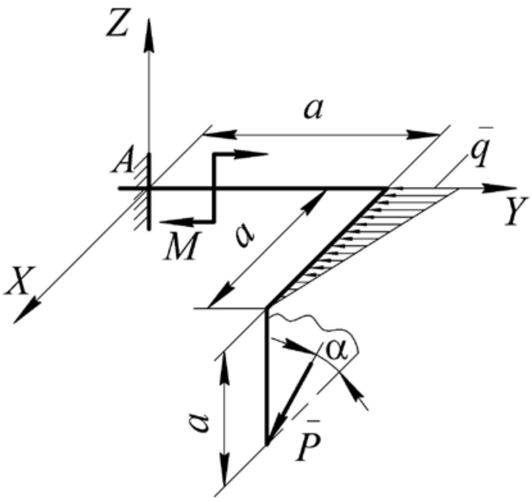
**Задача 13 (2003)**



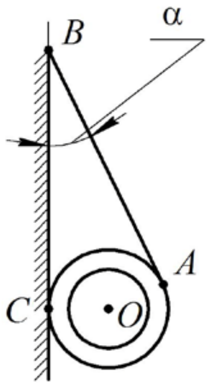

По гладкому обручу, расположенному в вертикальной плоскости, скользят без трения два невесомых кольца, связанных нитью. К кольцам с помощью крючков подвешены грузы массой $m_1$ и $m_2$, причем $m_1 = m_2\sqrt{3}$.

Определить при равновесии грузов углы $\varphi_1$ и $\varphi_2$, образованные радиусами, проведенными из центра обруча к кольцам, и вертикальным диаметром, если угол между радиусами – $\pi / 2$.

**Задача 14 (2003)**

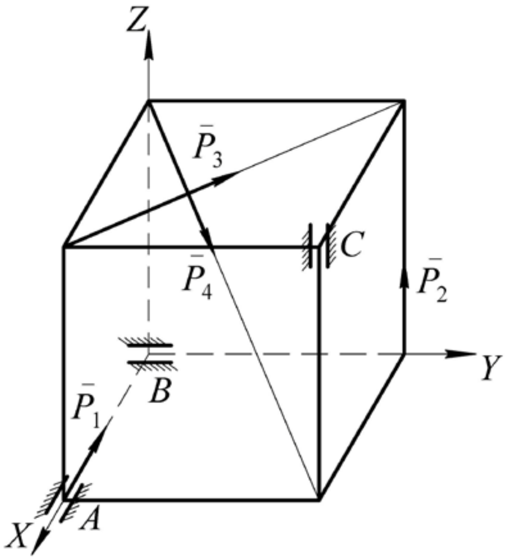



Ломаный стержень, состоящий из трех участков одинаковой длины, каждый из которых параллелен соответствующей координатной оси, концом *A* жестко заделан в стенку. На первый участок действует пара сил с моментом *M*, расположенная в плоскости *YAZ*, на второй – распределенная по линейному закону треугольника нагрузка интенсивности *q*, расположенная в плоскости *XAY*, на третий участок – сосредоточенная сила *P*, расположенная в плоскости, параллельной *ZAX*, и составляющая с горизонтальной осью угол α. Пренебрегая весом стержня, определить значение момента *M* указанной пары сил, при котором силы реакции в жесткой заделке могут быть заменены одной силой.




**Задача 15 (2004)**

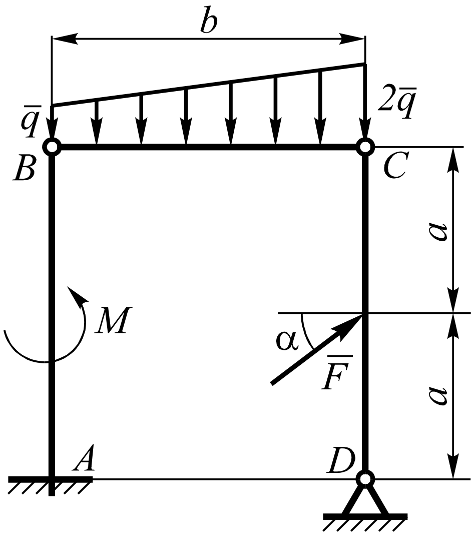
Тяжелое кольцо удерживается в равновесии нитью $AB$, направленной вдоль касательной к наружной окружности кольца, и силой трения, возникающей в точке $C$ контакта его с вертикальной стеной. При каком соотношении между коэффициентом трения сцепления $f$ и углом $\alpha$ это возможно?




**Задача 16 (2004)**

Найти реакции опор куба с ребром, равным $a$, нагруженного и закрепленного, как указано на рисунке (куб имеет три цилиндрических шарнира), если $P_1 = P_2 = P$, $P_3 = P\sqrt{2}$, $P_4 = P\sqrt{3}$.

**Задача 17 (2005)**

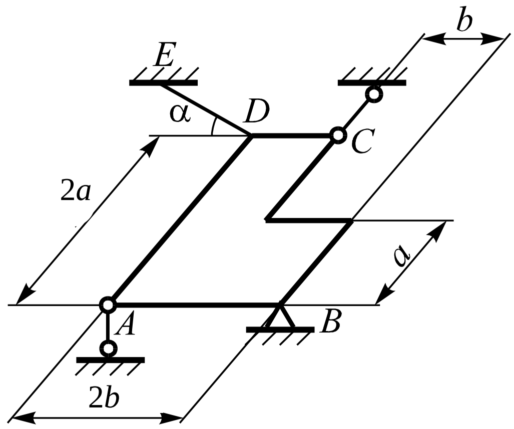



Конструкция, состоящая из трех невесомых стержней, нагружена сосредоточенной силой, парой сил и распределенной нагрузкой, изменяющейся по линейному закону. Интенсивности нагрузки в точках $B$ и $C$ равны $q$ и $2q$ соответственно. Известны размеры конструкции $a$ и $b$, а также угол $\alpha$.

Определить, при каких значениях силы $F$ значения сил реакций связей в точках $A$ и $D$ будут одинаковыми. Каким при этом должен быть момент пары сил $M$, чтобы момент заделки был равен нулю?

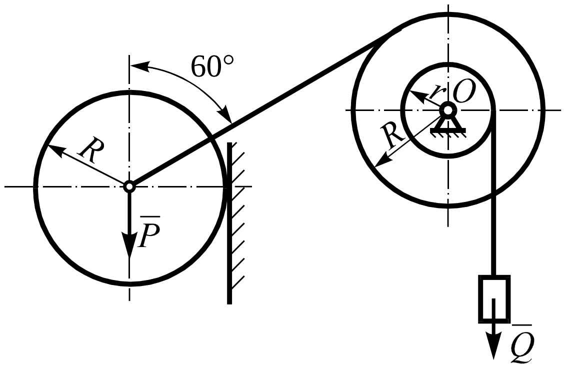
**Задача 18 (2005)**

Однородная пластина, сила тяжести которой $G$, закреплена в точках $A$ и $C$ с помощью невесомых стержней, гибкой нити $DE$, составляющей с горизонталью угол $\alpha$, а также опирается на острие в точке $B$. Точки $C$, $D$ и $E$ лежат в одной вертикальной плоскости. Известны размеры пластины $a$ и $b$. Определить, при каком минимальном значении коэффициента трения между острием и пластиной возможно ее равновесие в изображенном на рисунке положении.



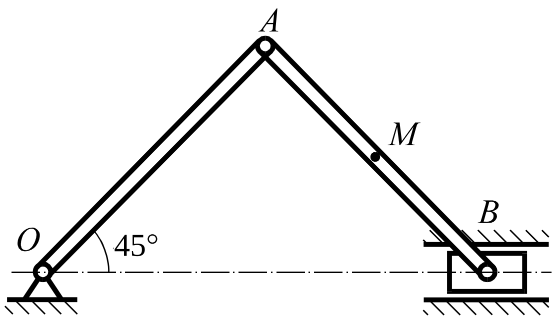

**Задача 19 (2006)**

На блок, радиусы ступеней которого $R$ и $r$, намотаны две нити. Одна из них прикреплена к цилиндру, сила тяжести которого $P$, другая – к грузу весом $Q$. Определить, при каких значениях силы $Q$ система будет находиться в равновесии, если коэффициент трения сцепления цилиндра со стеной равен $f$, а коэффициент трения качения $\delta$.

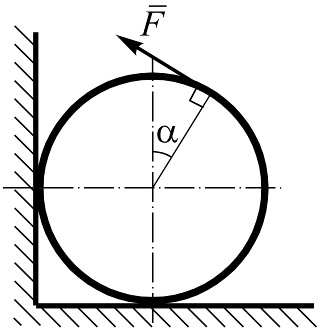



**Задача 20 (2006)**

Кривошипно-ползунный механизм, в котором длины кривошипа $OA$ и шатуна $AB$ одинаковы, расположен в вертикальной плоскости. Точка $M$ делит отрезок $AB$ пополам. Силы тяжести кривошипа, шатуна и ползуна одинаковы и равны $G$. Пренебрегая

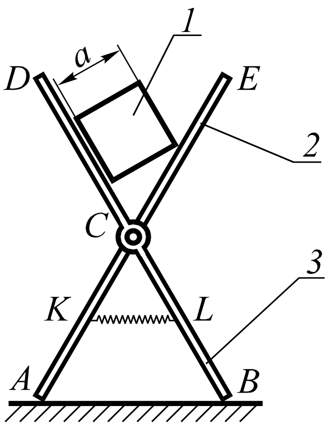


трением, определить, какую минимальную силу надо приложить к точке $M$, для того чтобы механизм оставался в равновесии в изображенном на рисунке положении.




**Задача 21 (2007)**

Цилиндр весом $G$ и радиусом $R$ лежит на шероховатой горизонтальной плоскости и соприкасается с шероховатой вертикальной стенкой. При каких значениях силы $F$, приложенной к цилиндру, он будет находиться в равновесии, если коэффициенты трения сцепления цилиндра с плоскостью и стенкой одинаковы и равны $f$ ?

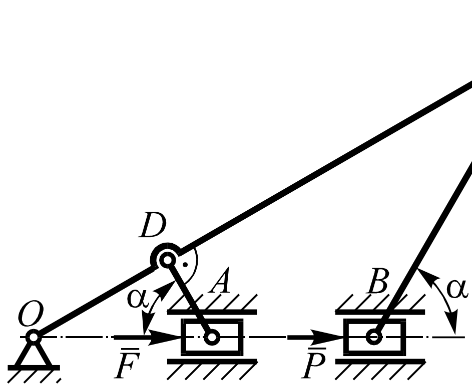



**Задача 22 (2007)**

Куб *1* весом $G_1$, имеющий длину ребра $a$, положен на соединенные шарниром $C$ однородные стержни *2* и *3*, как это показано на рисунке. Стержни, вес каждого из которых $G_2$, установлены на гладкий горизонтальный пол. $AC =$ $= CE = BC = CD = AB = l$. Система удерживается в равновесии с помощью пружины $KL$, соединяющей середины отрезков $AC$ и $BC$. Определить силу натяжения пружины.

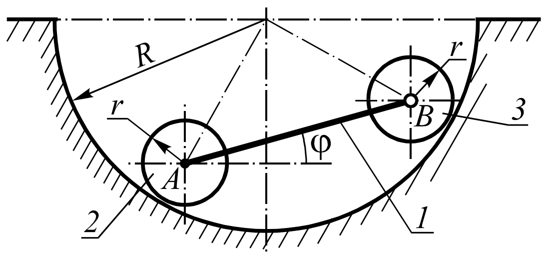
**Задача 23 (2008)**

Механизм инверсора расположен в горизонтальной плоскости. Ползуны $A$ и $B$ могут перемещаться вдоль оси, проходящей через точку $O$.



Доказать, что в изображенном на рисунке положении ($AD \perp OC$, углы, которые стержни $AD$ и $BC$ составляют с осью $OB$, одинаковы) механизм будет находится в равновесии при соблюдении условия $\frac{P}{F} = \frac{OA}{OB}$.

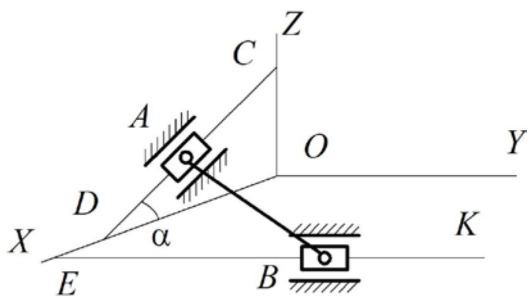
**Задача 24 (2008)**




Однородный стержень *1* жестко соединен с диском *2* и скреплен шарниром *B* с диском *3*. Радиусы дисков одинаковы и равны $r$, а их массы пренебрежимо малы. Диски опираются на шероховатую поверхность, имеющую форму полукруга радиусом $R = 5r$. Коэффициент трения сцепления между дисками и опорной поверхностью равен $f$. Коэффициент трения качения между диском *3* и той же поверхностью – $\delta$. Длина стержня $AB = 4r\sqrt{2}$. Найти наибольшее значение угла $\alpha$ между стержнем *1* и горизонталью, при котором стержень будет находиться в равновесии.

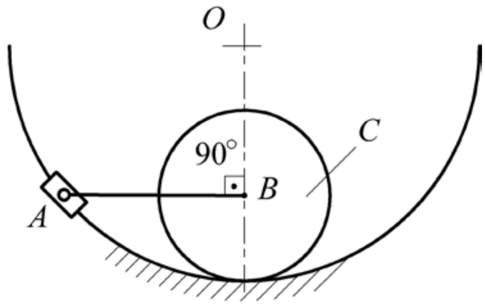
## 3.2. КИНЕМАТИКА

**Задача 25 (1997)**



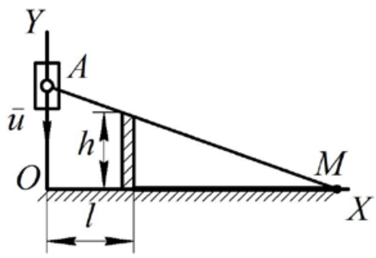

Ползун $A$ начинает движение из точки $C$ с постоянной скоростью $u$ по направляющей $CD$, лежащей в плоскости $ZOX$. Определить скорость ползуна $B$, который движется по направляющей $EK$, параллельной оси $Y$, в момент времени, когда ползун $A$ находится на высоте $l/2$, причем $AB = 2l$, $OC = OD = l$; $OE = 1{,}5l$.

**Задача 26 (1997)**



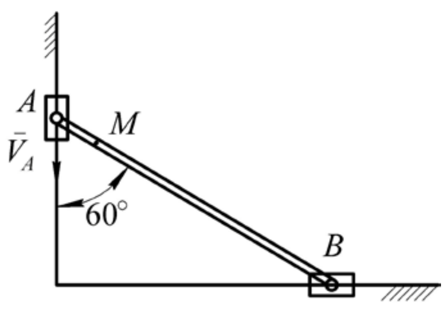

По криволинейной направляющей, выполненной в виде дуги окружности с центром в точке *O*, с постоянной скоростью движется ползун *A*, который стержнем *AB* приводит в движение по той же поверхности колесо *C*. В положении, изображенном на рисунке (стержень *AB* горизонтален), определить угловые ускорения стержня *AB* и колеса *C*, а также положение мгновенного центра ускорений стержня *AB*. Колесо *C* катится без проскальзывания, соединения в точках *A* и *B* шарнирные.

**Задача 27 (1998)**




Источник света *A* опускается по вертикали с постоянной скоростью $\bar{u}$. Определить величины скорости и ускорения конца тени стойки при ее движении (точка *M*) по столу в зависимости от высоты расположения источника *Y*, если стойка высотой *h* находится на расстоянии *l*.

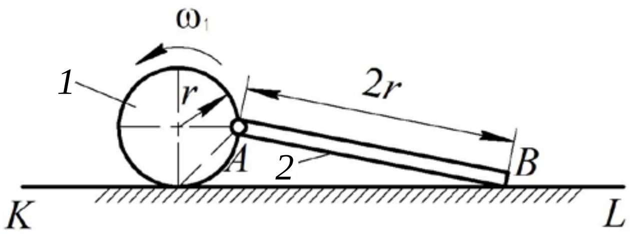
**Задача 28 (1998)**




Ползун *A* стержня *AB* длиной 4*l* движется в вертикальных направляющих с постоянной скоростью $V_A = \sqrt{3}u$. Вдоль стержня от *A* к *B* движется точка *M* с постоянным ускорением $3u^2/(4l)$. Определить абсолютное ускорение точки *M*, когда она переместится в ту точку стержня *AB*, скорость которой будет наименьшей в данном положении. Точка *M* в этот момент имеет относительную скорость $V_r = \sqrt{3}u/4$.

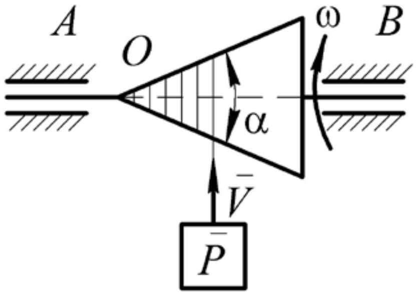
**Задача 29 (1999)**

Диск *1* радиусом $r$ катится по направляющей $KL$ без скольжения с постоянной угловой скоростью $\omega_1$. В точке $A$ к диску шарнирно прикреплен стержень *2* длиной $2r$, конец которого скользит вдоль $KL$. Определить угловую скорость $\omega_2$ стержня $AB$, когда точка $A$ займет наивысшее положение.



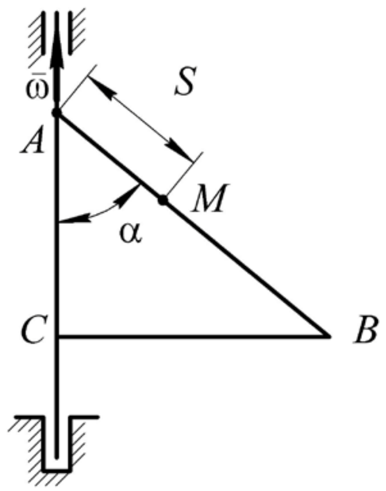

**Задача 30 (1999)**

На конической поверхности с углом при вершине $\alpha$ нарезана неглубокая винтовая канавка с шагом $h$, на которой намотан канат. Конус вращается вокруг горизонтальной оси $AB$ с постоянной угловой скоростью $\omega$. Определить абсолютную скорость груза $P$, прикрепленного к канату.

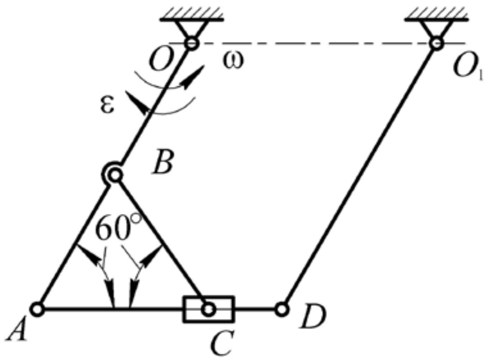



**Задача 31 (2000)**

Прямоугольный треугольник $ABC$ вращается вокруг катета $AC$. По гипотенузе $AB$ скользит точка $M$ с постоянной скоростью. При этом вектор абсолютного ускорения точки $M$ все время находится в плоскости прямоугольника и параллелен катету $BC$. В начальный момент угловая скорость вращения треугольника равна $\omega_0$, а точка $M$ находилась на расстоянии $S_0$. Какое расстояние пройдет точка $M$, если угловая скорость треугольника увеличится в два раза?



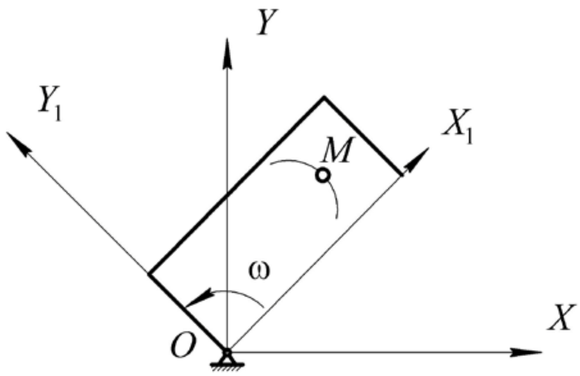
## Задача 32 (2000)




Два кривошипа $OA$ и $O_1D$ соединены спарником $AD$, по которому скользит ползун $C$, связанный стержнем $BC$ с кривошипом $OA$. В положении механизма, указанном на рисунке, кривошипы имеют угловую скорость $\omega = 2$ рад/с и угловое ускорение $\varepsilon = 1$ рад/с$^2$. Определить скорость и ускорение ползуна $C$, если $OB = AB =$ $= 0{,}1$ м.

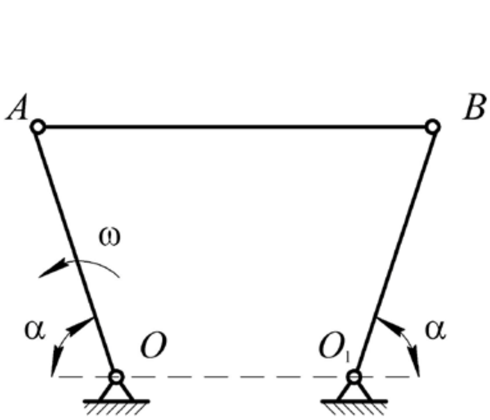
*Указание.* Рассмотреть движение ползуна $C$ как сложное.

## Задача 33 (2001)




Плоскость $X_1OY_1$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси $O$, перпендикулярной к этой плоскости. По плоскости движется точка $M$ с постоянной по величине относительной скоростью $U$. Определить уравнение траектории относительного движения точки $M$, если ее абсолютная скорость параллельна неподвижной оси $Y$, а в момент времени $t = 0$ точка находилась в начале координат.

## Задача 34 (2001)

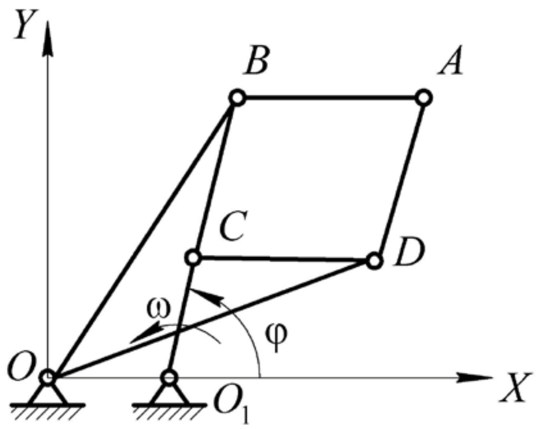



В плоском механизме $OA =$ $= O_1B = l$, $AB = 2l$. В положении, указанном на рисунке, определить ускорение середины стержня $AB$, если $\omega_{OA} = \omega = \mathrm{const}$, $\alpha < 90°$.

**Задача 35 (2002)**

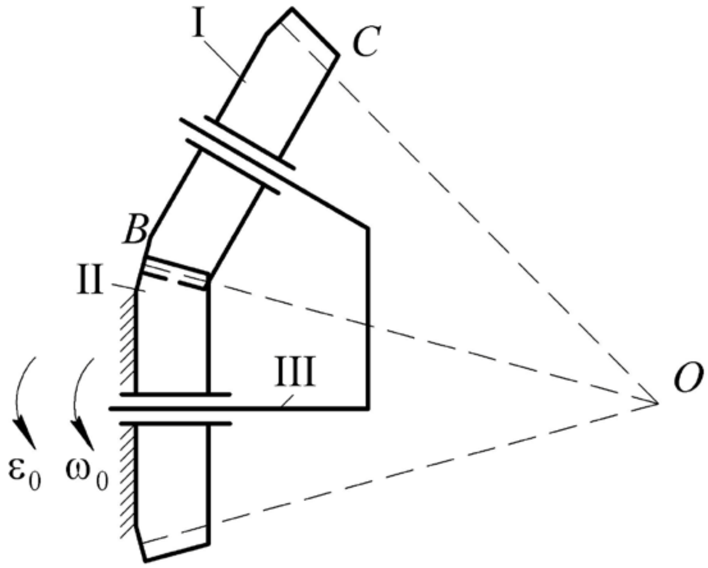
Контур $ABCD$ состоит из стержней одинаковой длины, соединенных между собой шарнирно, и в точках $B$, $C$, $D$ шарнирно связан с кривошипами $OB$, $OD$ и $O_1C$. Кривошип $O_1C$ равномерно вращается вокруг оси $O_1$ с угловой скоростью ω. Определить скорость и ускорение точки $A$, если $OO_1 = O_1C = r$, $OB = OD = l$, $AB = = BC = CD = DA = a$.

Указанные размеры звеньев механизма позволяют поворачиваться кривошипу $O_1C$ на угол $\varphi \le \pm \pi / 2$.

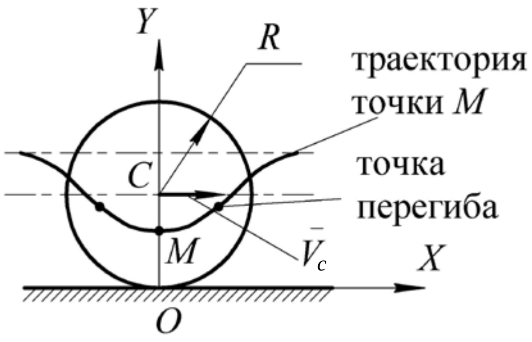



**Задача 36 (2002)**

Определить величину ускорения точки $C$ подвижной шестеренки I радиусом $r$, находящейся в зацеплении с неподвижной шестерней II, если вал III имеет в данный момент угловую скорость $\omega_0$ и угловое ускорение $\varepsilon_0 = \omega_0^2$. Углы при вершине $O$ начальных концов обеих шестерен равны по 60°.



## Задача 37 (2003)

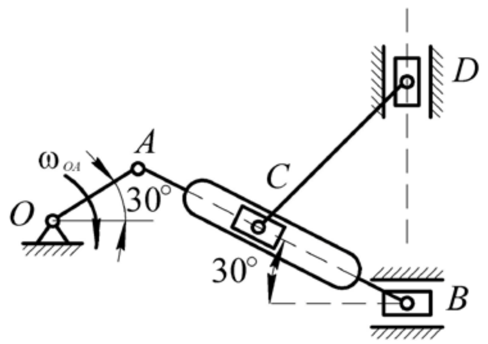



При качении без скольжения колеса радиусом $R$ по неподвижной плоскости с некоторой постоянной скоростью $V_c$ точка $M$ колеса, расположенная между его центром и плоскостью, описывает укороченную циклоиду. Характерной особенностью такой траектории является наличие точек перегиба. Определить угол φ поворота колеса из указанного положения в функции отношения $CM / R = k$, при котором на траектории появляется точка перегиба, и координаты этой точки при $k$ = 0,5.

## Задача 38 (2003)

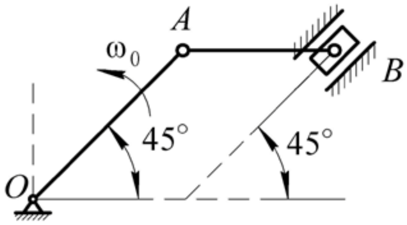
Кривошип $OA$ длиной $r = 20$ см кулисного кривошипно-шатунного механизма вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{OA} = 10$ рад/с. Шатун $AB$ длиной $l$ = 80 см выполнен в виде кулисы, в прорези которой может перемещаться ползун $C$. Этот ползун соединен стержнем $CD$ длиной $l_1$ = 40 см с ползуном $D$, который может перемещаться в вертикальных направляющих. Ползун $B$ шатуна $AB$ перемещается по горизонтальным направляющим.

Для указанного положения механизма определить скорость ползуна $D$ и абсолютное ускорение ползуна $C$, если в этот момент $AC = CB$ и ползун $C$ движется в направляющих вниз со скоростью $u = 200\sqrt{3}$ см/с и ускорением $a$ = 250 см/с$^2$.



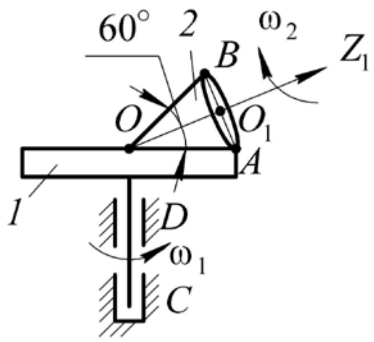
**Задача 39 (2004)**

Для заданного положения кривошипно-ползунного механизма определить угловую скорость вращения шатуна $AB$ относительно кривошипа $OA$, если кривошип вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0$, а $OA = AB = l$.



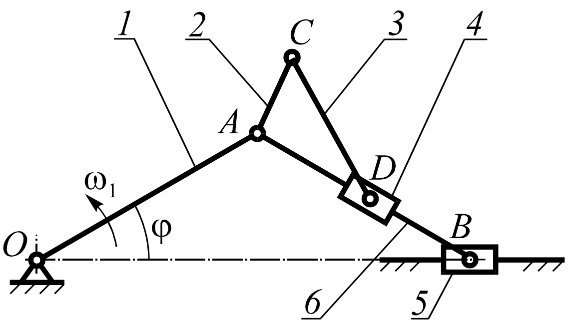

**Задача 40 (2004)**

Конус *2* с углом при неподвижной вершине $O$, равным 60°, катится без скольжения по горизонтальному диску *1*, вращающемуся вокруг неподвижной вертикальной оси $CD$ с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 3$ рад/с. Угловая скорость вращения конуса вокруг своей оси симметрии $\omega_2 = 6$ рад/с. Определить модули абсолютных скорости и ускорения точки $B$ конуса, если $OO_1 = 10$ см.




**Задача 41 (2005)**

В изображенном на рисунке механизме стержни *1* и *2* вращаются с постоянными угловыми скоростями, причем угловая скорость стержня *1* равна $\omega_1$. Длины звеньев $OA = AB = l_1$, $AC = l_2$, $CD = l_3$. В некоторый момент времени стержень *1* образует угол $\varphi$ с горизонталью, и отрезок $AC$ перпендикулярен отрезку $AB$. Определить величину и направление угловой скорости стержня *2*, если известно, что в рассматриваемый момент вектор абсолютного ускорения точки $D$ направлен вдоль стержня $AB$. Найти также абсолютное ускорение точки $D$.



**Задача 42 (2005)**

Ракета совершает взлет строго по вертикали с постоянным ускорением. Наблюдатель следит за ее полетом в подзорную трубу, причем ось трубы в течение всего времени полета проходит через ту точку на корпусе ракеты, которая до начала взлета находилась на одной горизонтали с наблюдателем.

Определить, при каком значении угла между осью подзорной трубы и горизонталью угловая скорость трубы будет наибольшей.

**Задача 43 (2006)**

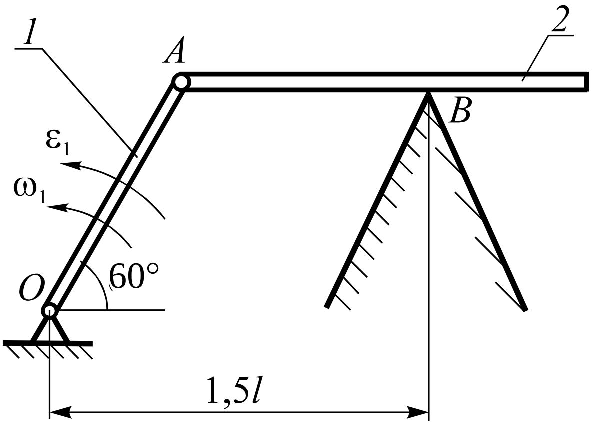
Точка движется в плоскости в соответствии с уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x. \end{cases}$$

При $t = 0$ координаты точки $x_0 = 0$; $y_0 = 4$ см.

Определить зависимости скорости и ускорения точки от времени.

**Задача 44 (2006)**



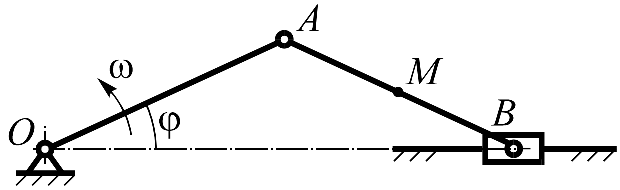

Стержень *1*, имеющий длину $l$, в точке $A$ соединен со стержнем *2*, который в течение всего процесса движения опирается на острие $B$. В изображенном на рисунке положении механизма угловые скорость и ускорение стержня *1* – $\omega_1$ и $\varepsilon_1$ соответственно.

Определить для указанного положения механизма скорость и ускорение точки стержня *2*, соприкасающейся с острием.

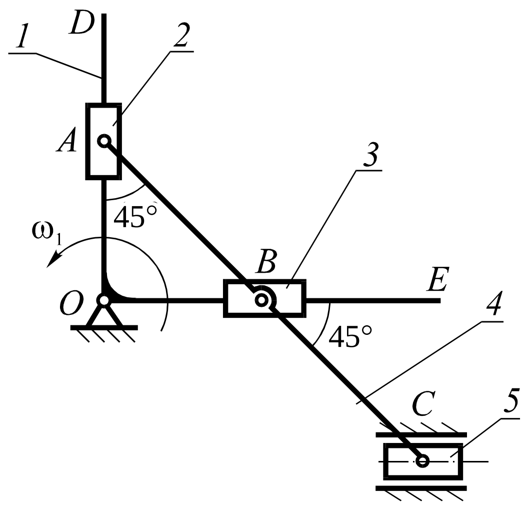
### Задача 45 (2007)

В кривошипно-ползунном механизме звенья *OA* и *AB* имеют одинаковые длины. Кривошип *OA* в изображенном на рисунке положении, определяемом углом φ, имеет угловую скорость ω.

Определить величину и направление углового ускорения звена *OA*, при которых в указанном положении механизма векторы скорости и ускорения средней точки *M* звена *AB* взаимно перпендикулярны.

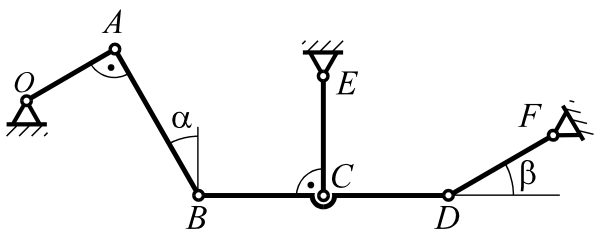



### Задача 46 (2007)




Звено *1* механизма вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1$. Точка *B* является серединой стержня *AC*. В изображенном на рисунке положении механизма $OA = l$. Определить для этого положения скорости и ускорения ползунов *2* и *3* по отношению к звену *1*.

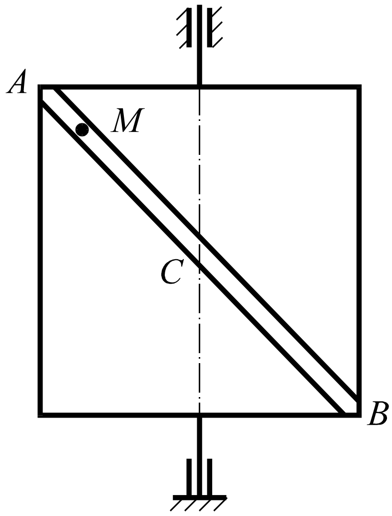
### Задача 47 (2008)




В плоском механизме кривошип *OA* вращается с постоянной угловой скоростью ω. $OA = BC = CD = CE\ DF = l$, $AB = l\sqrt{3}$. В некоторый момент времени этот механизм занимает положение, при котором $OA \perp AB$, $BD \perp EC$, $\alpha = \beta = 30°$.

Определить для этого положения значения скорости и ускорения точки *B*.

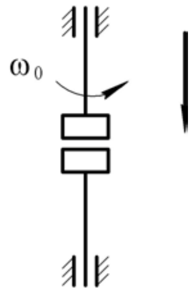
### Задача 48 (2008)




Квадратная пластина вращается равноускоренно вокруг вертикальной оси, причем ее начальная угловая скорость отлична от нуля. Точка *M* перемещается по диагонали *AB* пластины так, что вектор ее абсолютного ускорения в течение всего времени движения лежит в плоскости пластины. В начальный момент времени точка *M* находится в положении *A*. Доказать, что в рассматриваемом случае точка *M* никогда не опустится ниже средней точки *C* диагонали пластины.

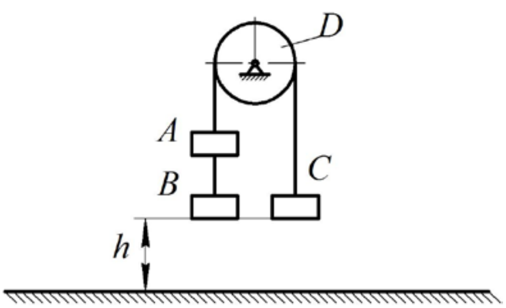
## 3.3. ДИНАМИКА

### Задача 49 (1997)




На однородный диск радиусом $r_0$, который может вращаться вокруг неподвижной оси, соосно опустили такой же диск, имеющий угловую скорость $\omega_0$. Через какое время оба диска будут вращаться с одной и той же угловой скоростью, если коэффициент трения между дисками равен $f$?

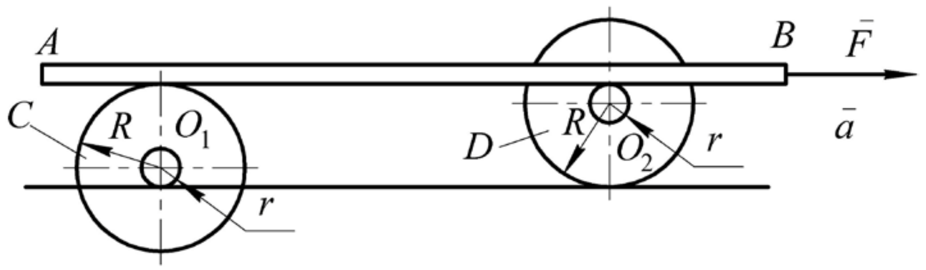
### Задача 50 (1997)




Механическая система состоит их однородного цилиндрического блока *D* и грузов *A* массой *m* и *C* массой 2*m*. Система находилась в покое, когда груз *C* был на высоте *h*. К грузу *A* при помощи нити на высоте *h* прикрепили груз *B* массой 2*m*. Найти максимальную высоту подъема груза *C*, если груз *A* достигает поверхности со скоростью в два раза меньшей скорости груза *B*, которую груз *B* имел в момент достижения той же поверхности. Трением в блоке *D* пренебречь.

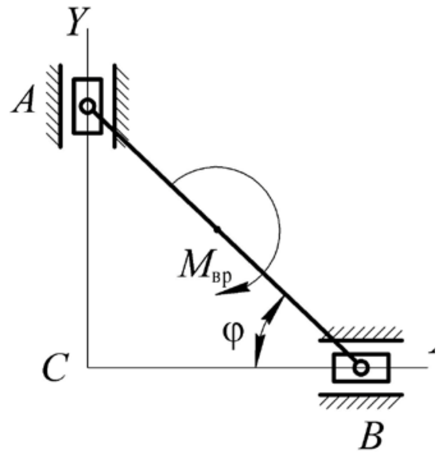
**Задача 51 (1997)**

Длинная доска $AB$ массой $m$ под действием силы $\vec{F}$ перемещается вместе с катками $C$ и $D$ с ускорением $a$. Катки $C$ и $D$ представляют собой ступенчатые блоки массой $m/4$ каждый и радиусом инерции $\rho = r$ относительно своих центров. Доска и катки движутся без проскальзывания. При каком значении $R/r$ сила $F$ будет минимальной? При каком значении $\rho$ будет выполняться соотношение $F = ma$?



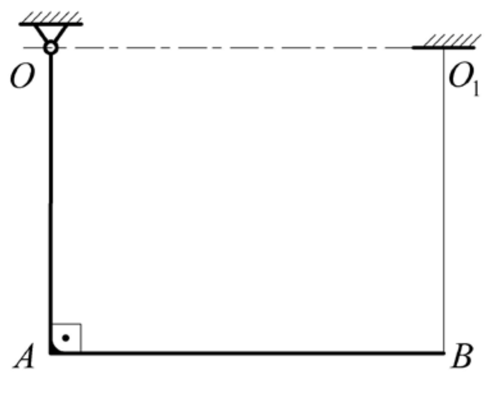

**Задача 52 (1997)**

Механизм эллипсографа, состоящий из ползунов $A$, $B$ и однородного стержня $AB$ длиной $l$, расположен в горизонтальной плоскости. Приняв массы ползунов и стержня одинаковыми и равными $m$, определить зависимость вращающего момента приложенного к стержню в функции угла $\varphi$, обеспечивающего движение ползуна $A$ с постоянной скоростью $u$. Трением ползунов о направляющие пренебречь.

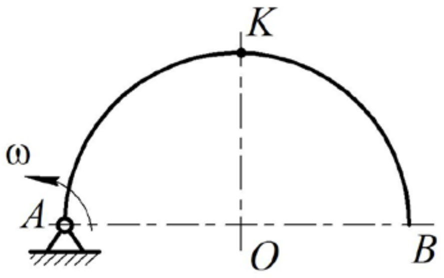



**Задача 53 (1998)**

Однородный угольник ($OA \perp AB$) прикреплен в точке $O$ шарниром, а в точке $B$ – нерастяжимой нитью таким образом, что прямая $AB$ – горизонтальна. Определить угловые скорость и ускорение угольника в функции угла поворота после обрыва нити, если $OA = l$; $AB = 2l$, а масса стержней пропорциональна их длине.



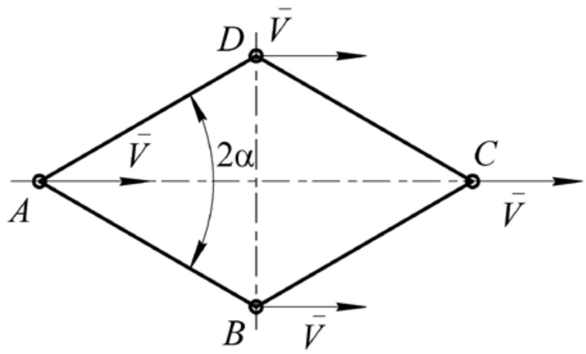
**Задача 54 (1998)**



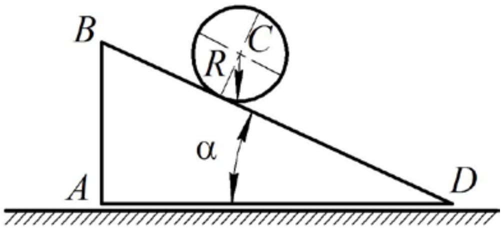

Однородная проволока плотностью $\rho$, выгнутая в форме полуокружности, вращается вокруг центра $A$ на гладкой горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью $\omega$. Определить величину изгибающего момента в точке $K$.

**Задача 55 (1998)**

Четыре материальные точки соединены нерастяжимыми невесомыми стержнями длиной $a$, образующими ромб $ABCD$ с углом $\angle DAB = 2\alpha$, перемещаются с постоянной скоростью $\overline{V}$ по горизонтальной гладкой поверхности в направлении диагонали $AC$. Определить относительную угловую скорость вращения стержней $AB$ и $AD$ после мгновенной остановки точки $A$.



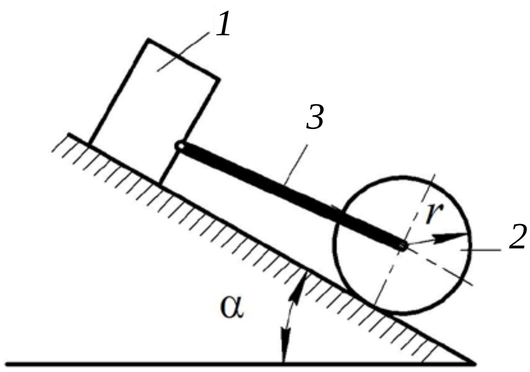

**Задача 56 (1998)**




Однородный цилиндр радиусом $R$ катится по прямоугольной призме ($\alpha = 30°$) из состояния покоя без скольжения. Коэффициент трения качения $\delta = 0{,}05\sqrt{3}R$. Масса цилиндра равна массе призмы. Определить величину коэффициента трения между призмой и горизонтальной шероховатой поверхностью, при котором призма остается в покое.

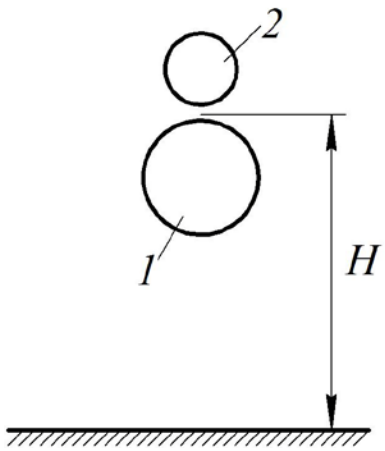
**Задача 57 (1999)**

По шероховатой наклонной плоскости движутся тяжелый брусок *1* и однородный каток *2* радиусом $r$, связанные между собой невесомым стержнем *3*. Коэффициент трения скольжения бруска равен $f$, а коэффициент трения качения катка – $\delta$. Определить, при каком значении угла наклона плоскости $\alpha$ стержень будет не нагружен.



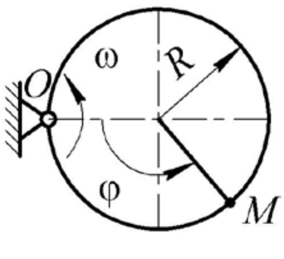

**Задача 58 (1999)**

Два шара, размерами которых пренебрегаем, падают из состояния покоя с высоты $H$, сохраняя между собой небольшой зазор, как показано на рисунке. Определить отношение масс шаров ($m_1 > m_2$), если после удара о неподвижную поверхность нижний шар ударяется с верхним шаром, который после этого поднимается на высоту $2H$. Удары считать абсолютно упругими.

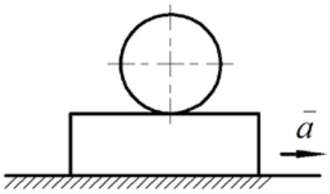



**Задача 59 (1999)**

По гладкому кольцу радиусом $R$ движется материальная точка массой $m$. Кольцо вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через точку $O$, с постоянной угловой скоростью $\omega$. Определить максимальную величину радиального давления точки на кольцо, если в начальный момент точка находилась в состоянии относительного покоя в положении $\varphi_0 = \pi / 2$.



**Задача 60 (1999)**

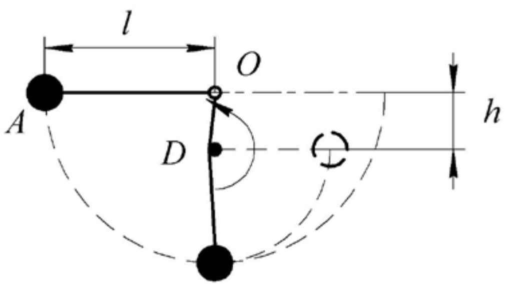



Однородный цилиндр находится на горизонтальном бруске. Коэффициент трения скольжения между ними $f$. Бруску сообщили ускорение $a = \text{const}$. Найти ускорение оси цилиндра при отсутствии скольжения между цилиндром и бруском, а также предельное значение ускорения бруска, при котором скольжение отсутствует. Брусок движется по гладкой поверхности.

**Задача 61 (2000)**

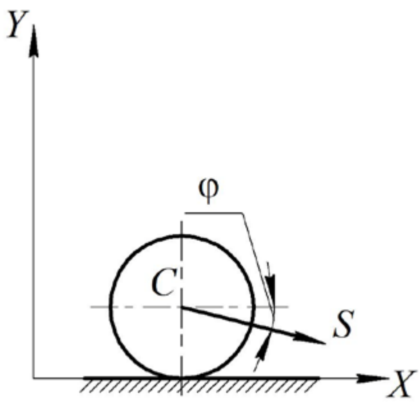
Ракета движется прямолинейно вне поля тяготения и при отсутствии сопротивления. Найти работу силы тяги к моменту, когда сгорит все топливо. Начальная масса ракеты $m_0$, конечная $m_1$. Эффективная скорость истечения $V_c$ постоянна.

**Задача 62 (2000)**



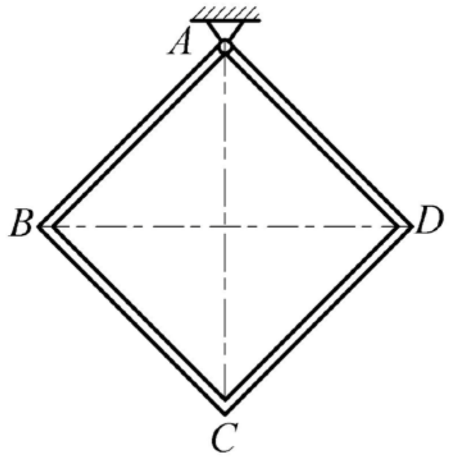

Груз массой $m$, подвешенный на нити длины $l$, отпускают из горизонтального положения без начальной скорости. При движении нить встречает в точке $D$ тонкий стержень, вокруг которого она навивается. Определить натяжение нити, когда она займет горизонтальное положение, если $h = 2l / 3$.

**Задача 63 (2000)**




В плоскости симметрии однородного катка массой $m$ и радиусом $r$ к горизонтальной оси, проходящей через центр масс $C$ и перпендикулярной этой плоскости, приложен ударный импульс $S$ под углом $\varphi$ к горизонту. До удара каток находился в покое на шероховатой горизонтальной плоскости, при ударе каток от плоскости не отскакивает. Коэффициент трения скольжения при ударе равен $f$. Определить, при каких значениях угла φ каток при ударе не проскальзывает, а также найти угловую скорость катка ω после удара при отсутствии проскальзывания

**Задача 64 (2000)**

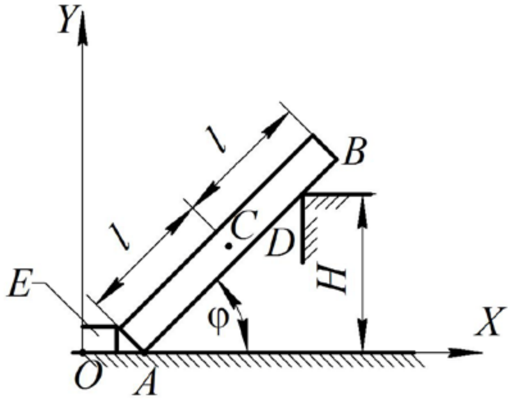



Квадратная рамка *ABCD*, сваренная из тонких однородных стержней, может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку *A*. Рамку отклонили от положения равновесия на малый угол $\varphi_0$ и отпустили без начальной скорости. Определить закон движения рамки, если ее диагональ $d$ равна 0,96 м.

**Задача 65 (2001)**

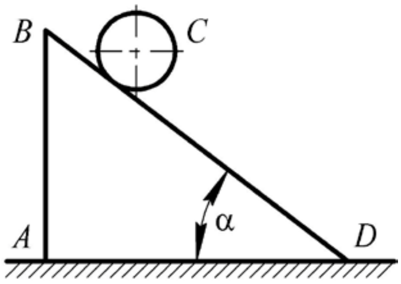
Маятник на очень длинной нити получает небольшую скорость в плоскости запад – восток. Считая отклонения маятника малыми по сравнению с длиной нити и принимая во внимание вращение Земли вокруг оси, найти время, по истечении которого плоскость качаний маятника совпадет с плоскостью север – юг. Маятник расположен на 60° северной широты.

**Задача 66 (2001)**



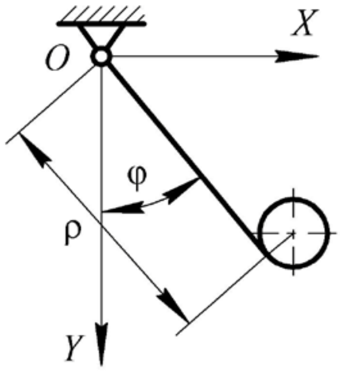

Конец *A* однородного тонкого стержня *AB* длиной $2l$ и массой $m$ перемещается по горизонтальной направляющей с помощью упора *E* с постоянной скоростью *V*, причем стержень все время опирается на угол *D*. Определить давление стержня на угол *D* в функции угла φ.

### Задача 67 (2001)



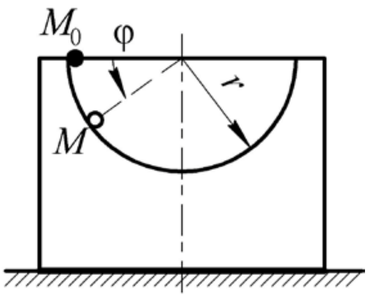

Однородный цилиндр радиусом $r$ катится по прямоугольной призме ($\alpha < 90°$). Коэффициент трения качения $\delta$. Масса цилиндра равна $m$, а масса призмы $M$. Определить ускорение призмы, если коэффициент трения призмы на горизонтальной плоскости равен $f$. Выяснить условие, при котором призма будет находится в покое.

### Задача 68 (2001)



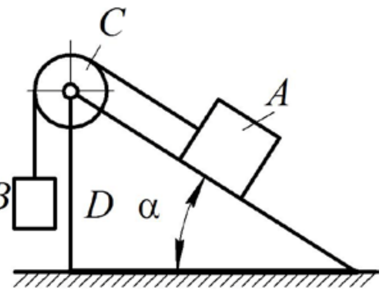

Один конец нерастяжимой тонкой нити обмотан вокруг однородного круглого цилиндра $R$, второй конец прикреплен к неподвижной точке $O$. Цилиндр, разматывая нить, опускается вниз, одновременно раскачиваясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса нити. Пренебрегая массой нити, составить дифференциальное уравнение движения цилиндра.

### Задача 69 (2002)



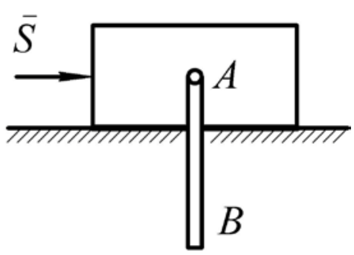

Тяжелая материальная точка $M$ скользит по гладкой направляющей радиусом $r$ прямоугольной плиты, движущейся вправо поступательно вдоль горизонтальной оси с постоянным ускорением $a$. Определить абсолютное ускорение точки $M$ в наинизшем ее положении на полуокружности, если в начальный момент точка находилась в положении $M_0$ и ее относительная скорость была равна нулю.

**Задача 70 (2002)**



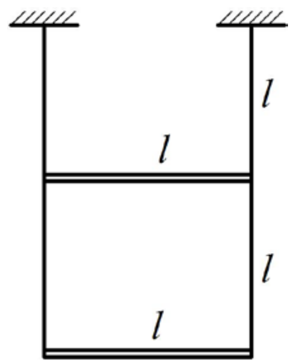

Груз $A$ массой $M_1$, опускаясь вниз с некоторым ускорением по наклонной плоскости призмы $D$, образующей угол $\alpha$ с горизонтом, приводит в движение посредством невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через блок $C$, груз $B$ массы $M_2$. При каком значении коэффициента трения призмы о пол она не будет перемещаться? Весом блока $C$ пренебречь, масса призмы $DM = 2M_1 = 4M_2$.

**Задача 71 (2002)**




Эллиптический маятник состоит из ползуна массой $M$, который может скользить вдоль горизонтальной направляющей, и однородного стержня $AB$ массой $m$ и длиной $l$, скрепленного с ползуном посредством цилиндрического шарнира. В некоторый момент, когда система находится в равновесии, по ползуну производится удар с импульсом $\overline{S}$. Определить, на какой угол отклонится стержень.

**Задача 72 (2002)**

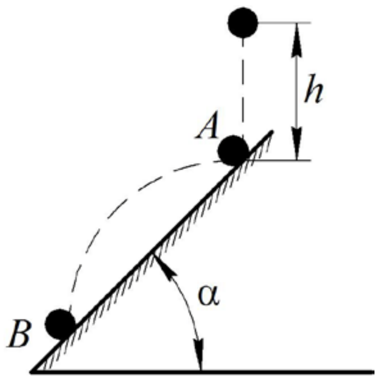



Два стержня одинаковой массы и длиной $l$ соединены двумя нерастяжимыми нитями длиной $l$ и с помощью двух нитей такой же длины подвешены к потолку. Найти собственные частоты колебаний, если:

1) стержни движутся поступательно, параллельно вертикальной продольной плоскости,

2) стержни вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их середины.

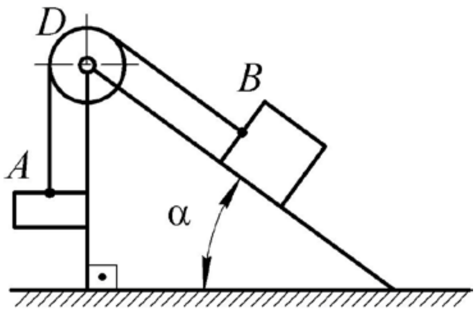
**Задача 73 (2003)**




Шарик падает без начальной скорости с высоты $h$ на наклонную плоскость с углом наклона $\alpha$.

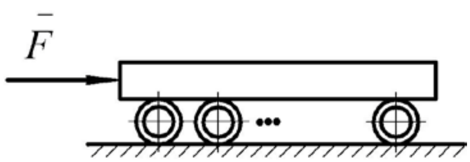
Отразившись в точке $A$ от плоскости, он попадает в точку $B$. Считая удар абсолютно упругим и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить расстояние $AB$.

**Задача 74 (2003)**




Гладкая призма массой $M$ может скользить по горизонтальной плоскости. Два груза $A$ и $B$ соответственно массами $m_1 = M/4$ и $m_2 = M/2$ соединены нерастяжимой нитью и скользят один по наклонной, а другой по вертикальной граням призмы. Определить давления грузов на грани призмы, если в начальный момент система находилась в покое. Массой блока $D$ пренебречь.

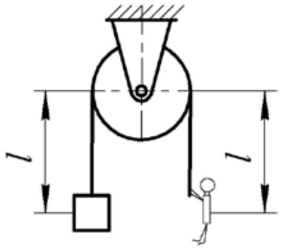
**Задача 75 (2003)**




Для перемещения однородной бетонной плиты весом $G = 10$ кН ее положили на катки в виде труб диаметром $d = 10$ см. Предполагая, что катки нагружены равномерно и их количество под плитой при движении не изменяется, определить силу, требуемую для равномерного перемещения плиты, если коэффициенты трения качения катков по настилу (полу) $\delta_1 = 0,2$ см, по поверхности плиты $\delta_2 = 0,05$ см. Массой катков пренебречь.

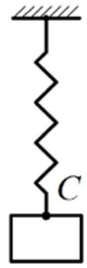
### Задача 76 (2003)

Через однородный блок массой $m_0$ переброшен невесомый канат. На расстоянии $l$ от оси блока к левому концу каната подвешен груз массой $m$, а за правый конец каната на таком же расстоянии от оси блока ухватился человек той же массы, что и груз. За какое время человек переместится на расстояние $l$, если он будет подниматься по канату с постоянной скоростью $u$ относительно каната? Силами сопротивления пренебречь.



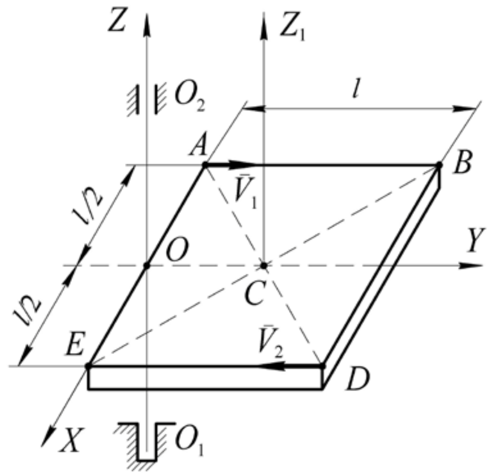

### Задача 77 (2004)

К недеформированной пружине жесткостью $c$ = 0,49 Н/см подвесили груз массой $m = 200$ г и одновременно сообщили скорость $V_0 = \sqrt{0,2205}$ м/с, направленную по вертикали. Определить, как изменится длина пружины при колебании груза по сравнению с длиной в недеформированном состоянии.

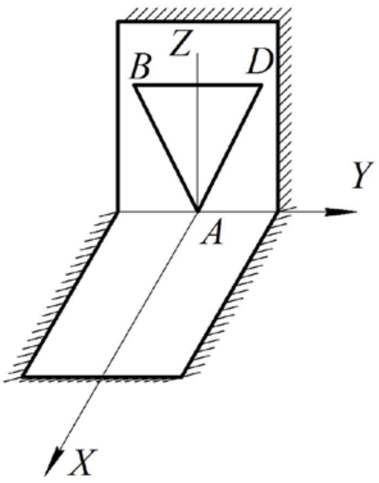



### Задача 78 (2004)

Квадратная однородная пластина $ABDE$ массой $M$ со стороной $l$ может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной вертикальной оси $OZ$. Из точек $A$ и $D$ по сторонам пластины начинают двигаться в противоположных направлениях две материальные точки массой $m_1 = m_2 = m$ с одинаковыми по величине относительными скоростями $V_1 = V_2 = V$. Определить угловую скорость вращения пластины в момент времени, когда точки окажутся на серединах соответствующих сторон квадрата, по которым они движутся. Силами трения в опорах пренебречь. В начальный момент времени пластина находилась в покое. Момент инерции пластины относительно оси $C_Z$: $J = Ml^2/6$.

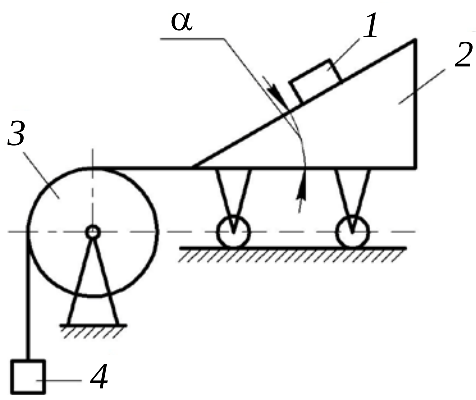


### Задача 79 (2004)



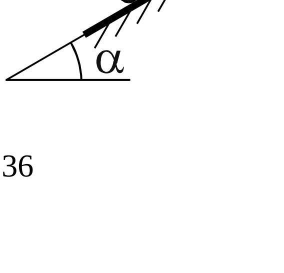

Тонкая однородная пластина, имеющая форму равностороннего треугольника со стороной, равной $l$, прислонена к гладкой вертикальной стене и находится в положении неустойчивого равновесия, опираясь вершиной $A$ на гладкую горизонтальную плоскость. Будучи выведенной из этого состояния, пластина падает, не отрываясь от вертикальной стенки. Определить скорость центра масс пластины в момент, когда она займет устойчивое положение равновесия. Момент инерции пластины относительно оси, перпендикулярной ее плоскости и проходящей через центр масс, равен $ml^2/12$.

### Задача 80 (2004)




К тележке *2* массы $m_2$ на нерастяжимой невесомой нити, переброшенной через однородный блок *3* массы $m_3$, привязали груз *4* массы $m_4$, который, опускаясь вниз, приводит систему в движение из состояния покоя. В некоторый момент времени на гладкую наклонную плоскость положили груз *1* массы $m_1$. Угол наклона плоскости равен $\alpha$. Определить массу груза *4*, при которой груз *1* относительно тележки не будет перемещаться. Массой катков тележки и трением пренебречь.

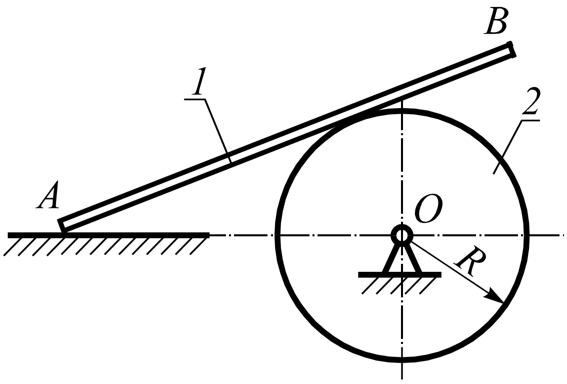
### Задача 81 (2005)




К материальной точке массы $m$, находящейся на наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонталью, приложена параллельная плоскости переменная сила, изменяющаяся по закону $F = mgt/\tau$, где $\tau$ – некоторая константа. Коэффициент трения точки о плоскость $f = \sqrt{3}/5$. Определить, на каком расстоянии от начального положения будет находиться точка через $\tau$ с после начала действия силы $F$, если в начальный момент скорость точки была равна нулю.

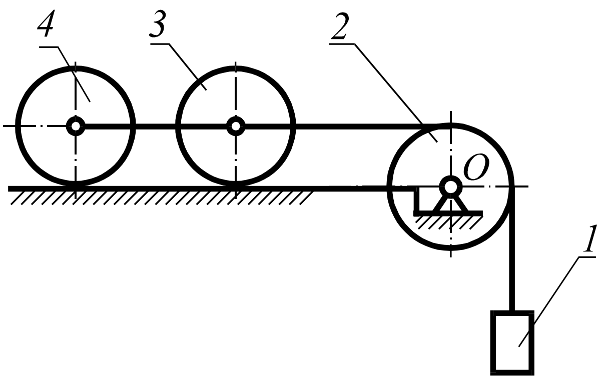
**Задача 82 (2005)**

Система состоит из стержня *1*, имеющего длину $2l$ и массу $m_1$, и однородного цилиндра *2* с массой $m_2$ и радиусом $R$. Под действием силы тяжести стержня его конец $A$ скользит по гладкой горизонтальной плоскости, а цилиндр вращается вокруг горизонтальной оси $O$. Проскальзывание между стержнем и цилиндром отсутствует. В начальный момент времени стержень касается цилиндра средней точкой, и тела неподвижны. Определить угловую скорость цилиндра в момент, когда его коснется точка $B$ стержня.



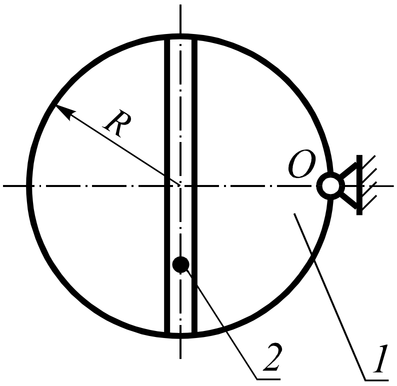

**Задача 83 (2005)**

Груз *1* подвешен к невесомой нити, переброшенной через блок *2*, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси $O$. Он приводит в движение катки *3* и *4*, перемещающиеся по горизонтальной плоскости. Массы тел *2*, *3* и *4* одинаковы и равны $m$ каждая. Блок *2* и каток *3* – сплошные однородные диски, масса катка *4* равномерно распределена



по ободу. Коэффициент трения между катками и поверхностью $f$. Пренебрегая сопротивлением качению, определить, при какой максимальной массе груза *1* качение обоих катков по поверхности будет происходить без проскальзывания. Найти также минимальную массу груза, при которой оба катка будут проскальзывать.

### Задача 84 (2005)

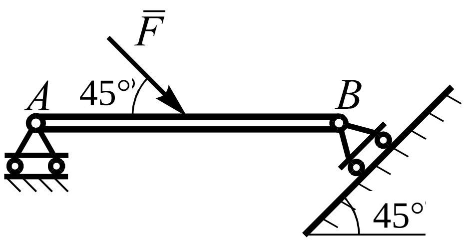



Сплошной однородный диск *1* с массой $m_1$ и радиусом $R$ расположен в горизонтальной плоскости и может вращаться вокруг вертикальной оси $O$. Силы сопротивления при этом пренебрежимо малы. Из центра покоящегося диска по расположенному вдоль его диаметра пазу начинает ползти жук *2* с постоянной относительной скоростью $V_{\text{отн}}$. Определить работу, которую выполнил жук к моменту, когда он оказался на ободе диска. Масса жука $m_2$.

### Задача 85 (2006)

Велосипед движется с постоянной скоростью $v$ по прямолинейному участку мокрой дороги. Его колеса, имеющие одинаковые радиусы $R$, катятся по поверхности земли без проскальзывания. Определить, на какую наибольшую высоту по отношению к уровню земли могут подниматься капли воды, отрывающиеся от колес.

### Задача 86 (2006)

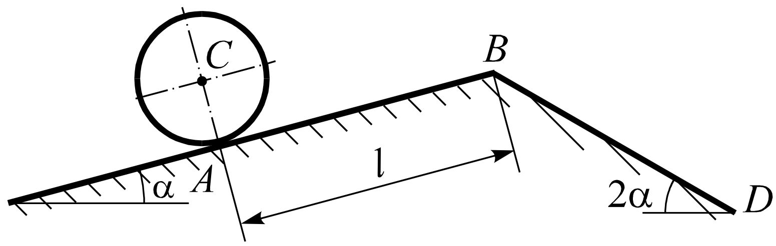



Однородная балка $AB$ опирается на гладкие поверхности в точках $A$ и $B$, как показано на рисунке. В некоторый момент, когда балка была неподвижной, равнодействующая активных сил $F$ оказалась приложенной к средней точке балки. Какова в этот момент реакция опоры $A$?

**Задача 87 (2006)**

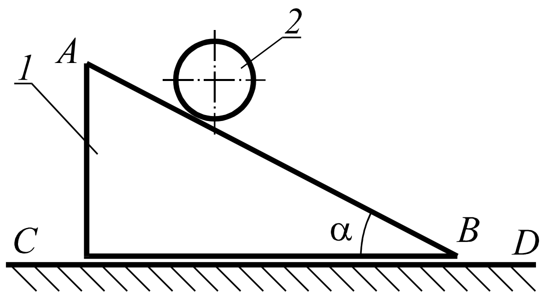
Шар с радиусом $r$ катится без проскальзывания по наклонной плоскости $AB$, составляющей угол $\alpha$ с горизонтом. Длина участка $AB$ равна $l$. Достигнув вершины $B$, шар начинает поворачиваться вокруг нее. Пренебрегая сопротивлением качению, определить, при каких значениях начальной скорости центра $C$ шара он сможет перейти на плоскость $BD$, образующую угол $2\alpha$ с горизонтом, не отрываясь от опорной поверхности.

Момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр масс, $I_x = 0{,}4\, mr^2$.

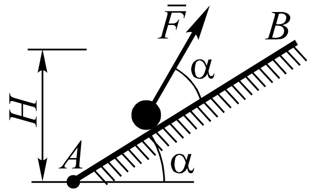



**Задача 88 (2006)**

На гладкую горизонтальную плоскость $CD$ помещена треугольная призма *1* массой $m$, которая может скользить по этой плоскости без трения. На грань $AB$ призмы, составляющую с горизонтом угол $\alpha = 30°$, устанавливают сплошной однородный цилиндр *2* той же массы $m$. Определить, при каком из двух случаев: 1) поверхность $AB$ гладкая; 2) качение цилиндра происходит по плоскости $AB$ без проскальзывания – будет больше ускорение призмы и во сколько раз.




**Задача 89 (2007)**

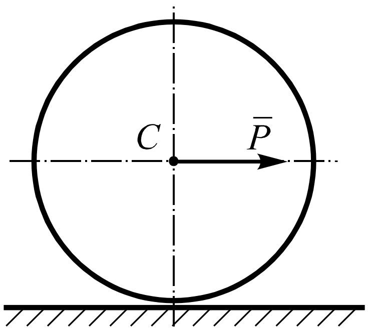



В начальный момент времени материальная точка массой $m = 1$ кг находится в положении $A$ и имеет скорость $v_0 = 10$ м/с, направленную к точке

В

вдоль наклонной плоскости. К материальной точке приложена сила $F$, изменяющаяся по закону $F = 20t$ (сила в ньютонах). Пренебрегая трением, определить высоту $H$, на которую поднимется точка через $t = 2$ с, если $\alpha = 30°$.

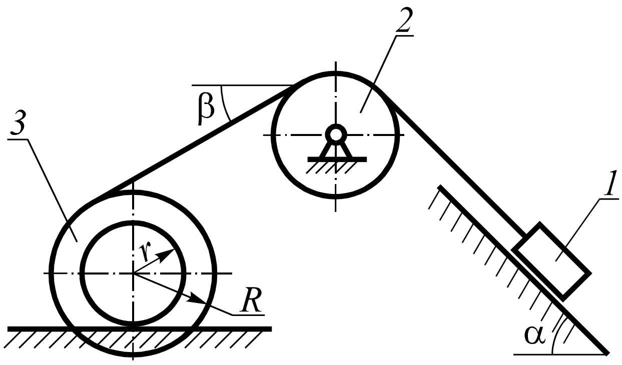
**Задача 90 (2007)**




Центр колеса, представляющего собой сплошной однородный диск с массой $m$ и радиусом $r$, движется так, что его ускорение связано со скоростью зависимостью $a_C = v_C^2 / r$. В начальный момент времени скорость центра колеса равна $v_0$. Полагая, что качение колеса происходит без проскальзывания, найти силу $P(t)$, под действием которой осуществляется описанное движение.

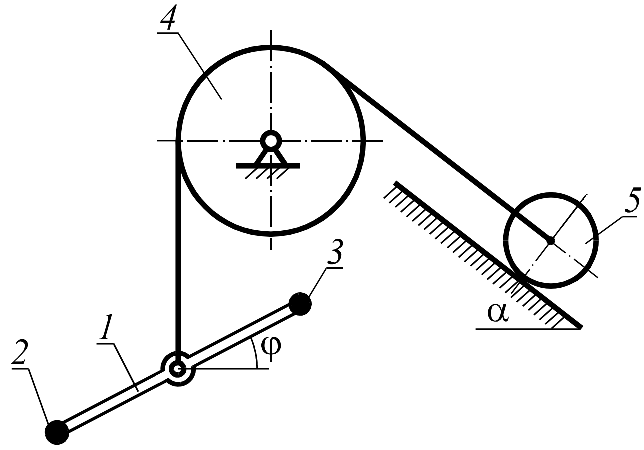
**Задача 91 (2007)**

Груз *1* массой $m_1 = m$ находится на шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом (коэффициент трения $f = 0{,}25$). К грузу прикреплена нерастяжимая нить, переброшенная через блок *2* массой $m_2 = m$, являющийся сплошным однородным диском. Другой конец нити намотан на ступенчатый каток *3*, который катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности и имеет соотношение между радиусами $R = r\sqrt{3}$, массу $m_2 = 1{,}5m$ и радиус инерции относительно оси, проходящей через центр катка $i_{3x} = r\sqrt{2}$. Определить скорость груза *1* к тому моменту времени, когда он пройдет по наклонной плоскости расстояние $s$, если в этот момент нить составляет угол $\beta = 30°$ с горизонталью. В начальный момент система находилась в покое.




**Задача 92 (2007)**

К концам стержня *1* длиной $l$ и массой $m_1 = m$ прикреплены точечные грузы *2* и *3*, массы которых $m_2 = 2m$, $m_3 = m$. Переброшенная через блок *4* массой $m_4 = 2m$ нить соединяет центры тяжести стержня *1* и катка *5* радиусом $r$, который катится без проскальзывания по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Тела *4* и *5* – сплошные однородные цилиндры. Определить массу $m_5$ катка, при которой тела *1* и *5* системы, отпущенной из состояния покоя, в начальный момент времени будут иметь одинаковые угловые ускорения. Принять, что в этот момент $\cos\varphi = 0{,}8$.

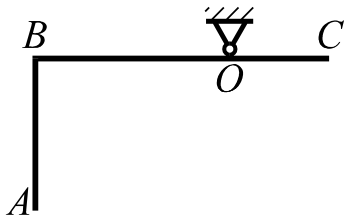



**Задача 93 (2008)**

Максимальная дальность полета камня, выпущенного из неподвижной катапульты, равна $s$. Найдите максимально возможную дальность полета камня, выпущенного из этой же катапульты, но установленной на платформе, масса которой вместе с катапультой в $n$ раз больше массы камня. Платформа находится на горизонтальной плоскости. В начальный момент она неподвижна. Трением пренебречь.

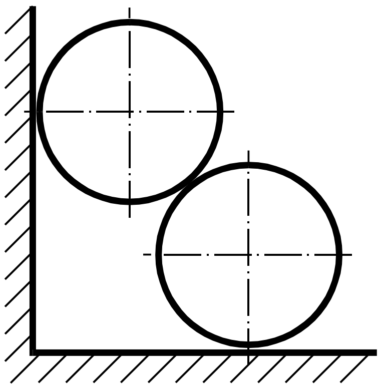
**Задача 94 (2008)**

Однородный Г-образный стержень постоянного поперечного сечения с длинами элементов $l$ и $2l$ расположен в вертикальной плоскости так, что его большая сторона горизонтальна.




Определить такое место прикрепления шарнира $O$ к элементу $BC$ стержня (расстояние $OB$), при котором в данном положении угловое ускорение стержня максимально.

**Задача 95 (2008)**



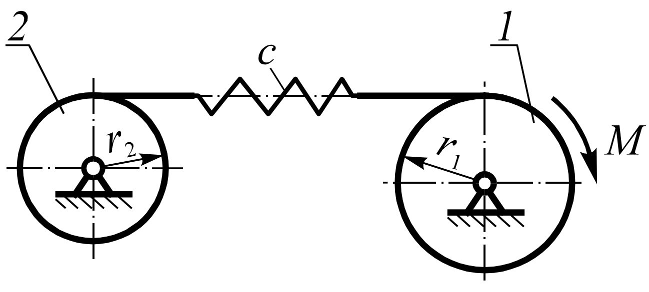
Два одинаковых однородных гладких цилиндра радиуса $R$ прислонены к вертикальной стенке. Из-за того, что нижний цилиндр чуть-чуть сместился вправо по горизонтальной плоскости, верхний стал опускаться по вертикали, и система пришла в движение. Найдите конечную скорость нижнего цилиндра.

**Задача 96 (2008)**

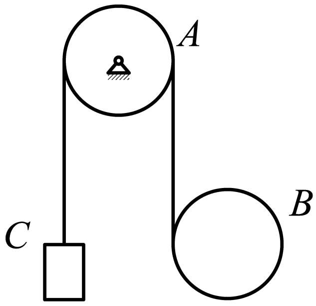
Барабан *1* массой $m_1$ и радиусом $r_1$ приводится во вращение постоянным вращающим моментом $M$. От этого барабана через деформируемый трос движение передается к блоку *2* массой $m_2$ и радиусом $r_2$. В этом случае трос можно промоделировать пружиной, сила натяжения которой прямо пропорциональна деформации прямолинейного участка троса, коэффициент пропорциональности равен $c$.

Определить закон изменения угловой скорости барабана *1*, полагая, что в начальный момент времени система находилась в покое.

Тела *1* и *2* считать сплошными однородными цилиндрами. Деформациями криволинейных участков троса и трением пренебречь.

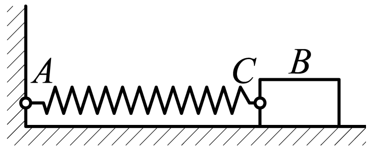


### Задача 97 (авторская)



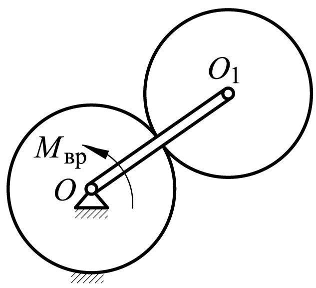

Груз $C$ посредством каната, перекинутого через шарнирно закрепленный диск $A$, соединен с диском $B$. Диски $A$ и $B$ однородные, причем $m_A = m_B = m_1$, $r_A = r_B = r$. Определить, какова должна быть масса груза $C$, чтобы его ускорение составило $a_C = 0{,}125g$.

### Задача 98 (авторская)



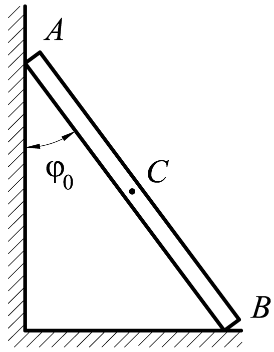

Тело $A$ массой 5 кг лежит на горизонтальной плоскости и соединено с неподвижной точкой $B$ пружиной, ось $BC$ которой горизонтальна. Коэффициент трения тела о плоскость равен 0,2; жесткость пружины 2,45 Н/см. Тело $A$ отодвинули от точки $B$ так, что пружина растянулась на 3 см, и затем отпустили без начальной скорости. Определить координату остановки тела $A$, если начало координат совмещено с телом $A$, когда пружина была недеформированной.

### Задача 99 (авторская)




К кривошипу $OO_1$ эпициклического механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, приложен момент $M_{вр} = M_0 - \alpha\omega$, где $M_0$ и $\alpha$ – положительные постоянные, а $\omega$ – угловая скорость кривошипа. Массы кривошипа и сателлита (подвижного колеса) одинаковые и равны $m$. Считая кривошип тонким однородным стержнем, а сателлит – однородным круглым диском радиусом $r$, определить угловую скорость $\omega$ кривошипа как функцию времени. В начальный момент система находилась в покое. Радиус неподвижной шестерни равен радиусу сателлита. Силами сопротивления пренебречь.

**Задача 100 (авторская)**




Однородный стержень $AB$ длиной $a$ поставлен в вертикальной плоскости под углом $\varphi_0$ к вертикали так, что концом $A$ он опирается на гладкую вертикальную стену, а концом $B$ – на гладкий горизонтальный пол. Затем стержню предоставлено падать без начальной скорости. Найти, какой угол $\varphi_1$ будет составлять стержень со стеной в тот момент, когда стержень отойдет от стены.

# ОТВЕТЫ И ПРИМЕЧАНИЯ

**Задача 1 (1997)**

Ответ: $H = 2{,}1$ м.

*Примечание*: учесть, что выталкивающая сила приложена в центре тяжести фигуры, находящейся под водой, и равна весу вытесненной воды.

**Задача 2 (1997)**

Ответ: $F = mgf\left(\sqrt{2}-1\right)$.

*Примечание*: считать, что стержень начнет поворачиваться относительно некоторой точки, расположенной на стержне, и сила трения равномерно распределена по длине стержня.

**Задача 3 (1998)**

Ответ: $N = 0{,}373P$ и $T = 1{,}067P$.

*Примечание*: при решении использовать теорему о трех непараллельных силах.

**Задача 4 (1998)**

Ответ: $N_A = \rho gV/4$.

*Примечание*: учесть, что вес стержня равен $\rho_{\text{ст}}Vg$. Выталкивающая сила равна весу вытесненной воды.

**Задача 5 (1999)**

Ответ: $M = Fc\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

**Задача 6 (1999)**

Ответ: $R_B = R_C = G\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ и $R_A = G\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

*Примечание*: при решении рассмотреть сходящуюся систему сил.

**Задача 7 (2000)**

Ответ: $\dfrac{Pl\sin\varphi}{1+2f\sin\varphi} \le M \le \dfrac{Pl\sin\varphi}{1-2f\sin\varphi}$.

*Примечание*: рассмотреть два случая: 1) возможность поворота кривошипа по часовой стрелке; 2) возможность поворота кривошипа против часовой стрелки.

**Задача 8 (2000)**

Ответ: $R_C = 2\sqrt{2}P$, $M_A = \left(6+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)Pa$.

**Задача 9 (2001)**

Ответ: $x = \dfrac{l+2fh}{6}$.

**Задача 10 (2001)**

Ответ: с плоскостью $XOY$ $\left(\frac{3}{4}a;\ \frac{a}{2}\right)$, с плоскостью $XOZ$ $\left(a;\ -a\right)$.

**Задача 11 (2002)**

Ответ: $\alpha = 153°26'$.

*Примечание*: при решении не учитывать возможность поворота квадрата *ADOE* относительно точки *O*.

**Задача 12 (2002)**

Ответ: $\alpha < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} f$, $f < \frac{P\cos\alpha}{Q + P\sin\alpha}$ и $h < \frac{\left(Q + P\sin\alpha\right)k}{P\cos\alpha}$.

*Примечание*: при решении учесть, что линия действия силы должна лежать вне конуса трения.

**Задача 13 (2003)**

Ответ: $\varphi_1 = 30°$ и $\varphi_2 = 60°$.

*Примечание*: при решении необходимо использовать формулу для синуса (косинуса) разности.

**Задача 14 (2003)**

Ответ: $M = qa^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

*Примечание*: учесть, что система сил сводится к одной силе при условии перпендикулярности главного вектора и главного момента.

**Задача 15 (2004)**

Ответ: $f \ge \frac{1}{\sin\alpha}$.

**Задача 16 (2004)**

Ответ: $Y_C = P,\ \ Y_A = -P,\ \ X_C = 2P,\ \ X_B = 3P,\ \ Z_A = -2P,\ \ Z_B = 2P$.

**Задача 17 (2005)**

Ответ: 1 случай: $F = \frac{qb}{6\sin\alpha}$ и $M = 1{,}5qb^2 + F\left(a\cos\alpha - b\sin\alpha\right)$;

2 случай: $F = \frac{1{,}5qb}{\sin\alpha}$ и $M = \frac{qb^2}{6} + F\left(a\cos\alpha - b\sin\alpha\right)$.

*Примечание*: в 1-м случае $R_{Dy}$ и $R_{Ay}$ направлены в одну сторону, во 2-м случае – в разные.

**Задача 18 (2005)**

Ответ: $f = \operatorname{ctg}\alpha\sqrt{1 + \frac{4a^2}{b^2}}$.

**Задача 19 (2006)**

Ответ: $Q_{\max} \leq \dfrac{2PR}{r\left(1-f\sqrt{3}\right)}$ и $Q_{\max} \leq \dfrac{2PR^2}{r\left(R-\delta\sqrt{3}\right)}$;

$Q_{\min} \geq \dfrac{2PR}{r\left(1+f\sqrt{3}\right)}$ и $Q_{\min} \leq \dfrac{2PR^2}{r\left(R+\delta\sqrt{3}\right)}$.

**Задача 20 (2006)**

Ответ: $F_{\min} = G\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

*Примечание*: для решения воспользоваться принципом возможных перемещений.

**Задача 21 (2007)**

Ответ: $F \leq \dfrac{G}{1+\sin\alpha}$ и $F \leq \dfrac{G(1+f)}{f+1/f+\cos\alpha(f-1)+\sin\alpha(f+1)}$.

*Примечание*: учесть возможности отрыва цилиндра от горизонтальной плоскости и проскальзывания цилиндра.

**Задача 22 (2007)**

Ответ: $F_{\text{упр}} = \dfrac{2G_2}{\sqrt{3}} + G_1\dfrac{a\left(15+\sqrt{3}\right)}{6l}$.

**Задача 23 (2008)**

Ответ: $\dfrac{P}{F} = \dfrac{OA}{OB}$.

*Примечание*: при решении воспользоваться принципом возможных перемещений.

**Задача 24 (2008)**

Ответ: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{4-f\sqrt{2}+5f\sqrt{2}\dfrac{r}{\delta}}{2(4-5f)\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{r}{\delta}+1\right)}$ при $f \geq \dfrac{\delta}{r}$;

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{4-f\sqrt{2}+5f\sqrt{2}\dfrac{1}{f}}{2(4-5f)\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{f}+1\right)}$ при $f \leq \dfrac{\delta}{r}$.

**Задача 25 (1997)**

Ответ: $V_B = \dfrac{3}{\sqrt{22}}u$.

*Примечание*: при решении воспользоваться координатным способом задания движения точки.

**Задача 26 (1997)**

Ответ: $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_C = 0$. МЦУ стержня *AB* находится в точке *O*.

**Задача 27 (1998)**

Ответ: $V = \dfrac{lh}{(Y-h)^2}u$, $a = \dfrac{2lh}{(Y-h)^3}u^2$.

*Примечание*: при решении учесть, что $V = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{dy}\dfrac{dy}{dt}$ и $a = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dy}\dfrac{dy}{dt}$.

**Задача 28 (1998)**

Ответ: $a_M = 0$.

*Примечание*: при решении учесть, что минимальная скорость у той точки, расстояние от которой до МЦС наименьшее. Использовать теоремы о сложении ускорений при плоском и сложном движении.

**Задача 29 (1999)**

Ответ: $\omega = \omega_1 / \sqrt{2}$.

*Примечание*: при решении воспользоваться координатным способом движения.

**Задача 30 (1999)**

Ответ: $V = \dfrac{\omega h}{2\pi}\sqrt{\omega^2 \mathrm{tg}^2 \alpha t^2 + 1}$.

*Примечание*: при решении учесть, что груз участвует в сложном движении.

**Задача 31 (2000)**

Ответ: $S = \dfrac{\ln 2}{2} S_0$.

*Примечание*: при решении учесть, что ускорение точки будет лежать в плоскости треугольника, если составляющие ускорения, перпендикулярные плоскости треугольника, равны.

**Задача 32 (2000)**

Ответ: $V_C = 0{,}2$ м/с, $a_C = 0{,}793$ м/с$^2$.

*Примечание*: движение ползуна рассмотреть как сложное.

**Задача 33 (2001)**

Ответ: окружность, задаваемая в полярной системе координат уравнением $r = \dfrac{U}{\omega}\sin\varphi$.

*Примечание*: при решении рассмотреть векторный треугольник скоростей, из которого получить дифференциальное уравнение $\dfrac{dr}{dt} = \sqrt{U^2 - \omega^2 r^2}$.

**Задача 34 (2001)**

Ответ: $a_C = \omega^2 l \sqrt{1 - 2\cos^3\alpha + \cos^4\alpha}$.

**Задача 35 (2002)**

Ответ: $V_A = \dfrac{\left(l^2 - a^2\right)\omega}{8r\cos^2\dfrac{\omega t}{2}}$ и $a_A = \dfrac{\left(l^2 - a^2\right)\omega^2 \operatorname{tg}\dfrac{\omega t}{2}}{8r\cos^2\dfrac{\omega t}{2}}$.

*Примечание*: при решении воспользоваться координатным способом задания движения точки.

**Задача 36 (2002)**

Ответ: $a_C = r\omega_0^2\sqrt{30}$.

*Примечание*: при решении учесть, что шестеренка I участвует в сферическом движении.

**Задача 37 (2003)**

Ответ: $\varphi = \arccos k$, $x_M \cong 0,6R$ и $y_M \cong 0,75R$.

*Примечание*: при решении учесть, что в точке перегиба нормальное ускорение точки равно нулю.

**Задача 38 (2003)**

Ответ: $V_D = 300\sqrt{3}$ м/с и $a_C = 250\sqrt{19}$ м/с$^2$.

*Примечание*: движение ползуна $C$ рассмотреть как сложное.

**Задача 39 (2004)**

Ответ: $\omega_{AB}^r = 2,42\omega_0$.

*Примечание*: при решении воспользоваться теорией о сложении вращений вокруг параллельных осей.

**Задача 40 (2004)**

Ответ: $V_B = 40\sqrt{3}$ м/с и $a_B \cong 550$ м/с$^2$.

*Примечание*: при решении учесть, что конус участвует в сложном движении, а его относительное движение – сферическое.

**Задача 41 (2005)**

Ответ: φ = 30°.

*Примечание*: при решении учесть, что максимальная угловая скорость достигается в тот момент, когда угловое ускорение становится равным нулю.

**Задача 42 (2005)**

Ответ: $a_D = \omega_1^2 l_1 \cos 2\varphi + \omega_1^2\sqrt{l_3^2 - l_2^2} - \dfrac{\omega_1^2 l_1^2 \sin^2 2\varphi}{4\sqrt{l_3^2 - l_2^2}}$, $\omega_2 = \omega_1 + \dfrac{\omega_1 l_1 \sin 2\varphi}{2l_2}$ и направлено в сторону $\omega_1$.

*Примечание*: при решении движение ползуна рассмотреть как сложное.

**Задача 43 (2006)**

Ответ: $V = 8\sqrt{\cos^2 4t + 4\sin^2 4t}$ и $a = 32\sqrt{\sin^2 4t + 4\cos^2 4t}$.

*Примечание*: при решении необходимо переходить к дифференциальному уравнению второго порядка.

**Задача 44 (2006)**

Ответ: $V_B = \omega_1 l \cos 30°$ и $a_B = l\sqrt{\frac{3}{4}\varepsilon_1^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega_1^2\varepsilon_1 + \frac{21}{16}\omega_1^4}$.

*Примечание*: при решении движение точки *B* рассмотреть как сложное.

**Задача 45 (2007)**

Ответ: $\varepsilon = \frac{4\omega^2 \sin 2\varphi}{8\sin^2\varphi + 1}$ и направлено противоположно угловой скорости.

*Примечание*: при решении воспользоваться координатным способом задания движения точки, учитывая, что скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю.

**Задача 46 (2007)**

Ответ: $V_A^r = V_B^r = 2\omega_1 l$, $a_A^r = 7\omega_1^2 l$ и $a_B^r = \omega_1^2 l$.

*Примечание*: движение ползунов рассмотреть как сложное.

**Задача 47 (2008)**

Ответ: $V_B = \omega 2l$ и $a_B = \omega^2 l\sqrt{424 + 240\sqrt{3}}$.

**Задача 48 (2008)**

Ответ: $S = a\sqrt{2}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{(\omega_0 + \varepsilon t)^2}\right)$.

*Примечание*: движение точки $M$ рассмотреть как сложное.

**Задача 49 (1997)**

Ответ: $t = \frac{3}{8}\frac{r\omega_0}{fg}$.

*Примечание*: при решении воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента.

**Задача 50 (1997)**

Ответ: $h_C = 1{,}5h$.

*Примечание*: при решении воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

**Задача 51 (1997)**

Ответ: $R / r = 3$ и $1{,}1875ma \le F \le 1{,}25ma$.

*Примечание*: при решении воспользоваться уравнением Лагранжа II рода или общим уравнением динамики.

**Задача 52 (1997)**

Ответ: $M_{\text{вр}} = \dfrac{4mu^2 \sin\varphi}{3\cos^3\varphi}$.

*Примечание*: при решении воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

**Задача 53 (1998)**

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}\left(\dfrac{4}{5}\sin\varphi + \cos\varphi - 1\right)}$ и $\varepsilon = \dfrac{g}{2l}\left(\dfrac{4}{5}\cos\varphi - \sin\varphi\right)$.

*Примечание*: для решения можно воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии или уравнением динамики вращательного движения.

**Задача 54 (1998)**

Ответ: $M_K = \dfrac{\pi}{2}\rho R^3\omega^2$.

*Примечание*: для решения воспользоваться принципом Даламбера.

**Задача 55 (1998)**

Ответ: $\omega = \dfrac{2u}{a}\dfrac{\sin\alpha}{1 + 2\sin^2\alpha}$.

*Примечание*: для решения воспользоваться теоремой об изменении количества движения.

**Задача 56 (1998)**

Ответ: $f \ge 0{,}132$.

*Примечание*: для решения воспользоваться принципом Даламбера.

**Задача 57 (1999)**

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}\left(3f - 2\dfrac{\delta}{r}\right)$.

*Примечание*: при решении учесть, что стержень не нагружен в случае, когда ускорения груза *1* и центра масс катка *2* совпадают.

**Задача 58 (1999)**

Ответ: $m_1 / m_2 = 1{,}52$.

*Примечание*: при решении использовать теорему об изменении количества движения и понятие абсолютно упругого удара.

**Задача 59 (1999)**

Ответ: $N_{\max} = \left(4+2\sqrt{2}\right) mR\omega^2$.

*Примечание*: при решении использовать уравнение динамики относительного движения.

**Задача 60 (1999)**

Ответ: $a_1 = \dfrac{2}{3}a$ и $a \le 3fg$.

*Примечание*: при решении использовать уравнение динамики относительного движения.

**Задача 61 (2000)**

Ответ: $A_T = V_c^2\left(m_1 - m_0\left(1 - \ln\dfrac{m_0}{m_1}\right)\right)$.

*Примечание*: при решении воспользоваться уравнением движения тела переменной массы.

**Задача 62 (2000)**

Ответ: $T = 4mg$.

*Примечание*: при решении воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

**Задача 63 (2000)**

Ответ: $\varphi \ge \mathrm{arcctg}\,3f$ и $\omega = \dfrac{2Sf}{mR}\sin\varphi$.

*Примечание*: при решении пренебречь силой тяжести по сравнению с ударной силой.

**Задача 64 (2000)**

Ответ: $\varphi = \varphi_0 \cos(3{,}5t)$.

*Примечание*: при решении воспользоваться уравнением динамики вращательного движения и теоремой Гюйгенса – Штейнера.

**Задача 65 (2001)**

Ответ: $t = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ суток.

*Примечание*: при решении учесть силу Кориолиса.

**Задача 66 (2001)**

Ответ: $R_D = \dfrac{\dfrac{ml^2}{3}\ddot{\varphi} - m\ddot{x}_C\sin\varphi + \cos\varphi\left(G - m\ddot{y}_C\right)}{\dfrac{H}{l\sin\varphi} - 2\cos^2\varphi}$, где $\ddot{\varphi} = 2\left(\dfrac{V_A}{H}\right)^2\cos\varphi\sin^2\varphi$,

$\ddot{x}_C = -l\left(\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi\right)$, $\ddot{y}_C = l\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)$, $\dot{\varphi} = \dfrac{V_A}{H}\sin^2\varphi$.

**Задача 67 (2001)**

Ответ: $a_2 = \dfrac{2mg\left(\sin\alpha - \dfrac{\delta}{R}\cos\alpha\right)\left(\cos\alpha + f\sin\alpha\right)}{3\left(M+m\right) - 2m\left(\cos\alpha + \dfrac{\delta}{R}\sin\alpha\right)\left(\cos\alpha + f\sin\alpha\right)}$ и $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\delta}{R}\right)$.

*Примечание*: при решении воспользоваться принципом Даламбера.

**Задача 68 (2001)**

Ответ: $\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi} - \dfrac{2}{3}\rho\dot{\varphi}^2 = \dfrac{2}{3}g\cos\varphi$ и $\dfrac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right) - R\rho\dot{\varphi}^2 = -g\rho\sin\varphi$.

*Примечание*: при решении воспользоваться уравнением Лагранжа II рода.

**Задача 69 (2002)**

Ответ: $a_M = 2\left(g + a\right)$.

*Примечание*: при решении использовать уравнение динамики относительного движения, которое необходимо спроецировать на естественные координатные оси.

**Задача 70 (2002)**

Ответ: $f \geq \dfrac{\sin 2\alpha - \cos\alpha}{10 - 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha}$.

**Задача 71 (2002)**

Ответ: $\sin\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{S}{\sqrt{m\left[gl\left(4M+m\right) - \dfrac{3S^2}{4M+m}\right]}}$.

*Примечание*: при решении воспользоваться теоремами об изменении количества движения, кинетического момента и кинетической энергии.

**Задача 72 (2002)**

Ответ: 1) $\omega_{1,2} = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$, 2) $\omega_{1,2} = \sqrt{3\left(2 \pm \sqrt{2}\right)}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

*Примечание*: при решении воспользоваться уравнением Лагранжа II рода.

**Задача 73 (2003)**

Ответ: $AB = 8h\sin\alpha$.

*Примечание*: при решении учесть, что при абсолютно упругом ударе угол падения равен углу отражения.

**Задача 74 (2003)**

Ответ: $N_A = \dfrac{Mg}{2}\dfrac{\left(2\sin\alpha - 1\right)\cos\alpha}{21 - 4\cos^2\alpha}$ и $N_B = \dfrac{Mg}{2}\dfrac{\left(2\sin\alpha + 17\right)\cos\alpha}{21 - 4\cos^2\alpha}$.

*Примечание*: при решении учесть, что призма будет перемещаться и грузы будут участвовать в сложном движении.

**Задача 75 (2003)**

Ответ: $F = \dfrac{G}{d}\left(\delta_1 + \delta_2\right)$.

**Задача 76 (2003)**

Ответ: $t = \dfrac{l\left(4m + m_0\right)}{\left(2m + m_0\right)u}$.

*Примечание*: при решении воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента.

**Задача 77 (2004)**

Ответ: $0{,}01 \le \lambda \le 0{,}09$ м.

*Примечание*: амплитуда колебаний – это максимальное отклонение груза от положения статического равновесия.

**Задача 78 (2004)**

Ответ: $\omega = \dfrac{12mV}{l\left(5M + 12m\right)}$.

*Примечание*: при решении воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента и теоремой Гюйгенса – Штейнера.

**Задача 79 (2004)**

Ответ: $V_C = 0{,}5\sqrt{\sqrt{3}gl}$ .

*Примечание*: при решении воспользоваться теоремами о движении центра масс и об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

**Задача 80 (2004)**

Ответ: $m_4 = \dfrac{\left(m_1 + m_2 + 0{,}5m_3\right)\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}\alpha}$.

*Примечание*: при решении воспользоваться принципом Даламбера и общим уравнением динамики.

**Задача 81 (2005)**

Ответ: $S = 0{,}004g\tau^2$.

*Примечание*: при решении учесть, что при малой силе $F$ точка движется вниз.

**Задача 82 (2005)**

Ответ: $\omega_2 = \dfrac{4m_1 gl\left(\dfrac{1}{\sqrt{l^2 - r^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{4l^2 - r^2}}\right)}{R\left(\dfrac{m_1}{2} + \dfrac{m_1 R^2}{6l^2} + m_2\right)}$.

*Примечание*: при решении воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

**Задача 83 (2005)**

Ответ: $m_1 = \dfrac{4mf}{1-f}$ и $m_1 = \dfrac{7mf}{1-2f}$.

*Примечание*: при решении воспользоваться общим уравнением динамики.

**Задача 84 (2005)**

Ответ: $A = \dfrac{3m_1 m_2^2 V_{\text{отн}}^2}{4\left(1{,}5m_1 + 2m_2\right)^2} + \dfrac{m_2}{2}\left( V_{\text{отн}}^2 + \dfrac{2m_2^2 V_{\text{отн}}^2}{\left(1{,}5m_1 + 2m_2\right)^2} + \dfrac{2m_2 V_{\text{отн}}^2}{\left(1{,}5m_1 + 2m_2\right)} \right)$.

*Примечание*: при решении воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента и теоремой об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

**Задача 85 (2006)**

Ответ: при скорости отрыва капли $V \le \sqrt{gR}$ $H_{\max} = 2R$, при скорости отрыва капли $V \ge \sqrt{gR}$ $H_{\max} = R + \dfrac{V^2}{2g} + \dfrac{gR^2}{2V^2}$.

**Задача 86 (2006)**

Ответ: $N_A = \dfrac{9\sqrt{2}}{32} F$.

*Примечание*: при решении воспользоваться уравнениями динамики плоскопараллельного движения.

**Задача 87 (2006)**

Ответ: $\sqrt{\dfrac{g\left(l\sin\alpha + r - r\cos\alpha\right)}{0{,}7}} \le V_{C0} \le \sqrt{\dfrac{g}{7}\left(17r\cos 2\alpha + 10l\sin\alpha - 10r\cos\alpha\right)}$.

При $\cos 2\alpha < 10/17$ отрыв будет происходить при любой начальной скорости.

*Примечание*: при решении воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

**Задача 88 (2006)**

Ответ: ускорение больше в случае 1 в 1,8 раза.

*Примечание*: при решении воспользоваться уравнением Лагранжа II рода.

**Задача 89 (2007)**

Ответ: $H = 18{,}84$ м.

*Примечание*: при решении учесть, что под действием силы $F$ материальная точка может оторваться от плоскости.

**Задача 90 (2007)**

Ответ: $P = \dfrac{3}{2} mr \dfrac{V_0^2}{\left(r - V_0 t\right)^2}$.

*Примечание*: при решении воспользоваться уравнениями динамики плоскопараллельного движения.

**Задача 91 (2007)**

Ответ: $V_1 = \sqrt{gs\frac{9\sqrt{2}}{26}}$.

*Примечание*: при решении воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

**Задача 92 (2007)**

Ответ: $m_5 = \frac{19,84l - 0,6r}{2,5l - 0,8r}m$ или $m_5 = \frac{19,84l + 0,6r}{2,5l + 0,8r}m$.

*Примечание*: при решении учесть, что угловые скорости тел могут быть направлены в одну или разные стороны.

**Задача 93 (2008)**

Ответ: $S_1 = \frac{2S}{1 + \frac{(n+1)^2}{n^2}}$.

*Примечание*: при решении использовать теорему о движении центра масс системы.

**Задача 94 (2008)**

Ответ: $BO = \frac{2+\sqrt{5}}{3}l$.

*Примечание*: при решении использовать теорему Гюйгенса – Штейнера.

**Задача 95 (2008)**

Ответ: $V_C = \frac{4}{3\sqrt{3}}gR$.

*Примечание*: при решении воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

**Задача 96 (2008)**

Ответ: $\omega = \frac{2M}{r_1(m_1r_1 + m_2r_2)}\left(t + \frac{m_2r_2}{m_1r_1\sqrt{\frac{2c}{m_1r_1} + \frac{2c}{m_2r_2}}}\sin\left(t\sqrt{\frac{2c}{m_1r_1} + \frac{2c}{m_2r_2}}\right)\right)$.

*Примечание*: при решении воспользоваться уравнением динамики вращательного движения.

**Задача 97 (авторская)**

Ответ: $m_C = 0,5m_1$.

*Примечание*: при решении воспользоваться уравнением Лагранжа II рода. Учесть, что система имеет две степени свободы.

**Задача 98 (авторская)**

Ответ: $x = -0,2$ см.

*Примечание*: при решении учесть, что сила трения всегда направлена против движения.

**Задача 99 (авторская)**

Ответ: $\omega = \frac{M_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{J_{\text{пр}}}t}\right)$, где $J_{\text{пр}} = \frac{22}{3}mr^2$.

*Примечание*: при решении воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

**Задача 100 (авторская)**

Ответ: $\cos\varphi_1 = \frac{2}{3}\cos\varphi_0$.

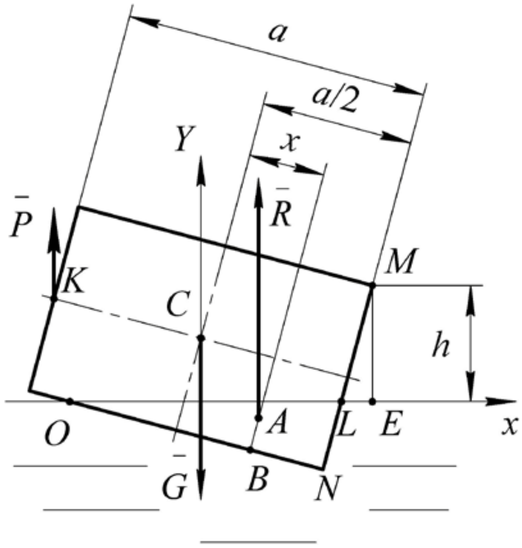
*Примечание*: при нахождении кинетической энергии движение стержня рассмотреть как вращательное вокруг мгновенного центра скоростей.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### Задача 1 (1997)

*Решение*

Составим уравнения равновесия плоской системы параллельных сил, приложенных к понтону, в момент начала его подъема:




$$\sum Y_i = 0;\ P + R - G = 0;$$

$$R = G - P = 2000 - 750 = 1250 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = 0;\ Rx - P\frac{a}{2} = 0;$$

$$x = \frac{a}{2}\cdot\frac{P}{R} = \frac{7500}{1250} = 6\text{м}.$$

Считаем, что точка $A$ приложения выталкивающей силы $R$ не изменяет своего положения при подъеме понтона и совпадает с центром тяжести $\Delta OLN$. Тогда

$$BN = \frac{a}{2} - x = 10 - 6 = 4 \text{ м};$$

$$ON = 3BN = 12 \text{ м}.$$

По закону Архимеда

$$R = V\gamma = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot LNb\gamma. \quad (1)$$

Подставляя в (1) численные значения переменных, получаем

$$1250 = \frac{1}{2}\cdot 12LN\cdot 10\cdot 10,$$

откуда

$$LN = \frac{25}{12} \approx 2{,}083.$$

$$OL = \sqrt{ON^2 + NL^2} = \sqrt{12^2 + \frac{25^2}{12^2}} = \frac{1}{12}\sqrt{12^4 + 25^2}.$$

Из подобия треугольников $\Delta LME \sim \Delta ONL$ можем записать отклонения их сторон:

$$\frac{LM}{OL} = \frac{ME}{ON},$$

откуда

$$LM = \frac{ME \cdot OL}{ON} = \frac{\sqrt{12^4 + 25^2}}{12^2} \approx \sqrt{1 + \frac{625}{20736}} \approx 1{,}015.$$

Теперь можем получить длину $MN$:

$$MN = LN + LM = 2{,}083 + 1{,}015 \approx 3{,}1 \text{ м}.$$

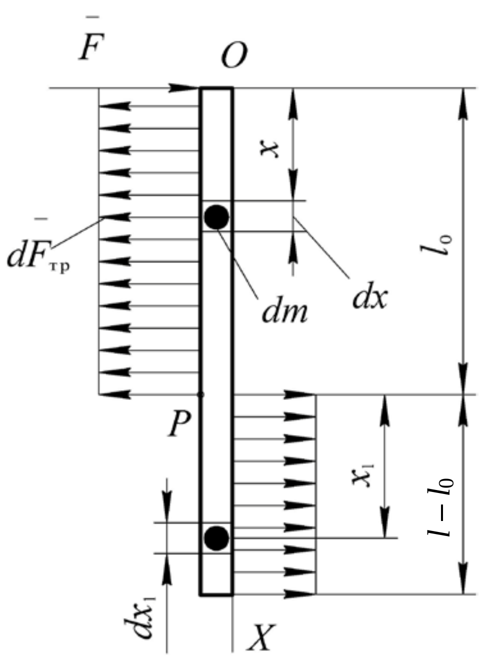
Погружение судна в воду в нормальном положении (осадка) по закону Архимеда равна

$$\Delta h = \frac{G}{\gamma ab} = \frac{2000}{10 \cdot 20 \cdot 10} = 1 \text{м},$$

следовательно,

$$H = MN - \Delta h = 2{,}1 \text{м}.$$

## Задача 2 (1997)




*Решение*

Пусть $S_0$ – площадь поперечного сечения стержня, $\rho$ – его плотность, а $l$ – длина. Тогда элементарная сила трения по Амонтону будет иметь вид

$$dF_{тр} = fdN = f\rho g S_0 dx,$$

где $f$ – коэффициент трения скольжения, $g$ – ускорение свободного падения, $dx$ – выделенный элементарный участок длины стержня на расстоянии $x$.

Момент сил трения на участке $l_0$ определим как

$$M_1 = \int_0^{l_0} fgS_0\rho x dx = fgS_0\rho\frac{l_0^2}{2},$$

а на участке $(l - l_0)$ соответственно

$$M_2 = \int_0^{l-l_0} fgS_0\rho x_1 dx_1 = fgS_0\rho\frac{(l-l_0)^2}{2}.$$

Суммарный момент трения равен

$$M_{\text{тр}} = M_1 + M_2 = \frac{fgS_0\rho}{2}\left[l_0^2 + (l-l_0)^2\right].$$

Сумма проекций всех сил на ось $X$:

$$\sum X_i = 0;\ F - \int_0^{l_0} \rho g S_0 f dx_1 = 0$$

или

$$F - \rho g S_0 f l_0 + \rho g S_0 f (l - l_0) = 0 \tag{1}$$

Сумма моментов всех сил относительно точки $P$:

$$\sum M_p(\vec{F}_i) = 0;\ M_{\text{тр}} - Fl_0 = 0$$

или

$$Fl_0 = \frac{fgS_0\rho}{2}\left[l_0^2 + (l-l_0)^2\right], \tag{2}$$

где $P$ – центр вращения стержня в момент начала его движения.

Из (1) выразим $F = \rho g S_0 f(2l_0 - l)$ и подставим в (2). После преобразований получаем

$$4l_0^2 - 2ll_0 = l^2 - 2ll_0 + 2l_0^2;$$

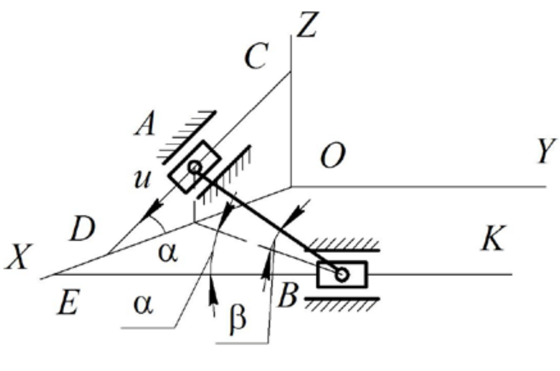
$$2l_0^2 = l^2;$$

$$l_0 = l\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}7l.$$

Тогда

$$F = \rho g S_0 f(l\sqrt{2} - 1) = \rho g S_0 l f(\sqrt{2} - 1) = mgf(\sqrt{2} - 1) \cong 0{,}4mgf.$$

## Задача 25 (1997)




*Решение*

Задача может быть решена двумя способами.

*Первый способ.* Получим уравнение движения ползуна $B$ вдоль оси $Y$:

$$y_B = AB\cos\alpha\cos\beta =$$
$$= 2l\cos\alpha\cos\beta. \qquad (1)$$

С учетом геометрии механизма выразим $\cos\beta$:

$$\sin\beta = \frac{OE - x_A}{AB\cos\alpha} = \frac{1{,}5l - x_A}{2l\cos\alpha};$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{(1{,}5l - x_A)^2}{4l^2\cos^2\alpha}} = \frac{\sqrt{4l^2\cos^2\alpha - (1{,}5l - x_A)^2}}{2l\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Учитывая (2), уравнение (1) примет вид

$$y_B = \sqrt{4l^2\cos^2\alpha - (1{,}5l - x_A)^2}\,, \qquad (3)$$

где $\alpha = f(t)$.

Для получения скорости ползуна продифференцируем уравнение (3) по времени

$$V_B = \frac{dy_B}{dt} = \frac{-4l^2 2\cos\alpha\sin\alpha\cdot\dot{\alpha} - 2(1{,}5l - x_A)(-\dot{x}_A)}{2\sqrt{4l^2\cos^2\alpha - (1{,}5l - x_A)^2}}. \qquad (4)$$

Получим выражения для параметров $\dot{\alpha}$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $x_A$, и $\dot{x}_A$, входящих в (4). Из рисунка очевидно, что

$$\sin\alpha = \frac{z_A}{2l}. \qquad (5)$$

Продифференцировав (5) по времени:

$$\cos\alpha\cdot\dot{\alpha} = \frac{\dot{z}_A}{2l},$$

получим

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{z}_A}{2l\cos\alpha}. \quad (6)$$

С другой стороны

$$\dot{z}_A = -\frac{u\sqrt{2}}{2}. \quad (7)$$

Тогда окончательно

$$\dot{\alpha} = -\frac{u\sqrt{2}}{4l\cos\alpha}, \quad (8)$$

кроме того,

$$\dot{x}_A = u\cos 45^\circ = \frac{u\sqrt{2}}{2}. \quad (9)$$

Когда ползун опустится на высоту $h = \frac{l}{2}$, тогда $z_A = \frac{l}{2}$; $x_A = \frac{l}{2}$; $\sin\alpha = \frac{l}{2\cdot 2l} = \frac{1}{4}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\dot{\alpha} = -\frac{u\sqrt{2}}{4l\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{u\sqrt{2}}{l\sqrt{15}}$.

Подставим полученные значения $\dot{\alpha}$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $x_A$, и $\dot{x}_A$ в (4). В итоге получаем искомое значение скорости ползуна:

$$V_B = \frac{-4l^2\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{u\sqrt{2}}{l\sqrt{15}}\right) - (1{,}5l - 0{,}5l)\cdot\left(-\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{4l^2\cdot\frac{15}{16} - (1{,}5l - 0{,}5l)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{ul\sqrt{2}}{4} + \frac{ul\sqrt{2}}{2}}{\frac{l}{2}\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{2}u}{2\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{22}}u. \quad (10)$$

*Второй способ.* Уравнение сферы радиусом *AB* и с центром в точке *B* можно записать следующим образом:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = AB^2. \quad (11)$$

С учетом начальных условий $y_A = 0$; $z_B = 0$; $x_B = 1{,}5l$ уравнение (11) примет вид

$$(x_A - 1{,}5l)^2 + y_B^2 + z_A^2 = 4l^2. \qquad (12)$$

Продифференцируем по времени уравнение (12):

$$2(x_A - 1{,}5l)\dot{x}_A + 2y_B \cdot \dot{y}_B + 2z_A \cdot \dot{z}_A = 0,$$

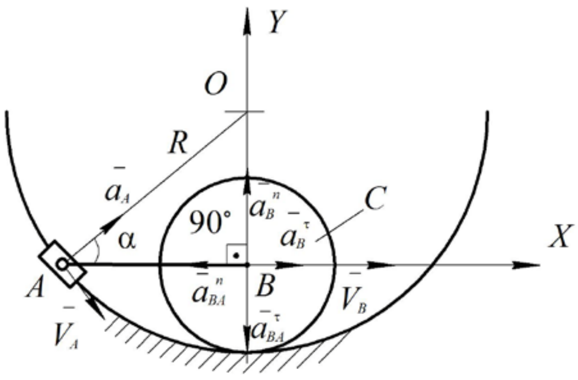
откуда получаем

$$\dot{y}_B = \frac{3l\dot{x}_A - 2x_A\dot{x}_A - 2z_A\dot{z}_A}{2y_B}.$$

С учетом значений $x_A$, $z_A$, $\dot{x}_A$ и $\dot{z}_A$ (см. (5)–(9)) получаем

$$V_B = \frac{3l\frac{u\sqrt{2}}{2} - 2\frac{l}{2}\frac{u\sqrt{2}}{2} + 2\frac{l}{2}\frac{u\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{4l^2 \cdot \frac{15}{16} - l^2}} = \frac{3u\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{22}}u.$$

## Задача 26 (1997)




*Решение*

Пусть $V_A = V = \text{const}$, $OA = R$, $\angle OAB = \alpha$. Восстановив перпендикуляр к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$, получим точку $O$ – МЦС (мгновенный центр скоростей).

Тогда

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{OA} = \frac{V}{R};\ V_B = V\sin\alpha.$$

Так как по условию

$$V_A = V = \text{const},$$

то

$$\alpha_A = \frac{V^2}{R}. \qquad (1)$$

Запишем теорему о сложении ускорений для проскопараллельного движения:

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n. \qquad (2)$$

Спроектируем уравнение (2) на ось $X$:

$$a_B^\tau = a_A \cos\alpha - a_{BA}^n. \qquad (3)$$

Так как

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 AB = \left(\frac{V}{R}\right)^2 R\cos\alpha = a_A \cos\alpha,$$

то на основании выражения (3) получаем

$$a_B^\tau = 0 \text{ и } \varepsilon_C = 0.$$

Спроектируем уравнение (2) на ось $Y$

$$a_B^n = a_A \sin\alpha - a_{BA}^\tau. \qquad (4)$$

Так как

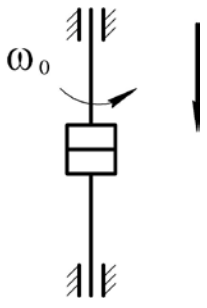
$$a_B^n = \frac{V_B^2}{BO} = \frac{V^2 \sin^2\alpha}{R\sin\alpha} = a_A \sin\alpha,$$

то из выражения (4) получаем

$$a_{BA}^\tau = 0 \text{ и } \varepsilon_{AB} = 0.$$

Следовательно, МЦУ (мгновенный центр ускорений) стержня $AB$ находится на пересечении $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B = \vec{a}_B^n$, т. е. в точке $O$, а так как $tg\gamma = \dfrac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} = 0$, то $\gamma = 0$.

**Задача 49 (1997)**




*Решение*

Для двух дисков составим дифференциальное уравнение вращательного движения вокруг неподвижной оси:

$$I_z' \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_i^e) = 0, \qquad (1)$$

где $I_z' = 2I_z$, $I_z$ – момент инерции одного диска, который рассчитывается по следующей формуле:

$$I_z = \frac{mr_0^2}{2}.$$

На основании уравнения (1) имеем

$$I_z'\omega = \text{const}.$$

Тогда можно записать следующее соотношение:

$$I_z\omega_0 = 2I_z\omega,$$

откуда получаем

$$\omega = \frac{\omega_0}{2}. \qquad (2)$$

Теперь рассмотрим вращение только нижнего диска под действием момента сил трения $M_{\text{тр}}$:

$$I_z\frac{d\omega}{dt} = M_{\text{тр}}. \qquad (3)$$

В (3) момент трения можно получить как

$$M_{\text{тр}} = \int_0^{M_{\text{тр}}} dM_{\text{тр}} = \int_0^{r_0} f\left(\frac{mg}{\pi r_0^2}\right) r 2\pi r dr = \int_0^{r_0} 2f\frac{mg}{r_0^2} r^2 dr.$$

Окончательно имеем

$$M_{\text{тр}} = \frac{2}{3} fmgr_0. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (3) и получим

$$\frac{I_z d\omega}{dt} = \frac{2}{3} fmgr_0$$

или

$$\int_0^t dt = \int_0^{0,5\omega_0} \frac{3}{2}\frac{I_z d\omega}{fmgr_0}. \qquad (5)$$

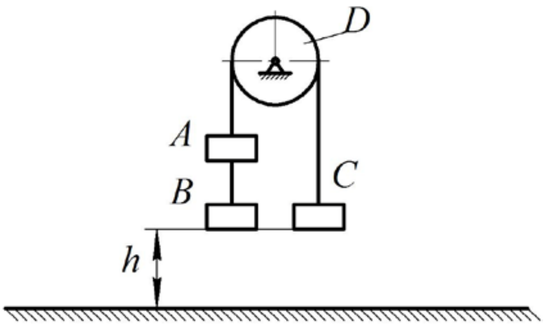
Интегрируем (5) по времени:

$$t = \frac{3}{2}\frac{I_z}{fmgr_0}\frac{\omega_0}{2} = \frac{3mr_0^2}{4\cdot 2\, fmgr_0}\omega_0 = \frac{3r_0\omega_0}{8\, fg}.$$

И получаем искомое время

$$t = \frac{3}{8}\frac{r_0\omega_0}{fg}.$$

## Задача 50 (1997)




*Решение*

Рассмотрим решение данной задачи в несколько этапов.

1. Применим теорему об изменении кинетической энергии для системы грузов *A*, *B* и *C*, считая на первом этапе конечным такое положение, когда груз *B* достигнет горизонтальную плоскость, имея скорость $V_B$:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e ,$$

где $T_1 = \dfrac{5m}{2} V_B^2$;

$$\sum A_k^e = mgh.$$

Получим искомую скорость

$$V_B = \sqrt{\frac{2}{5} gh}.$$

2. На втором этапе, применяя еще раз теорему об изменении кинетической энергии для системы грузов *A* и *C*, найдем длину нити *AB* при условии, что $V_A = \dfrac{V_B}{2}$.

$$T_2 - T_1' = \sum A_k^e ,$$

где $T_2 = \dfrac{3m}{2} V_A^2 = \dfrac{3}{2} m \left( \dfrac{1}{2} \sqrt{\dfrac{2}{5} gh} \right)^2 = \dfrac{3}{20} mgh$;

$$T_1' = \frac{3m}{2} V_B^2 = \frac{3}{2} m \frac{2}{5} gh = \frac{3}{5} mgh ;$$

$$\sum A_k^e = -mgAB.$$

Отсюда находим

$$AB = \frac{T_1' - T_2}{mg} = \frac{\frac{3}{5} mgh - \frac{3}{20} mgh}{mg} = \frac{9}{20} h.$$

3. На третьем этапе для груза $C$ имеем:

$$T_3 - T_2' = \sum A_k^e,$$

где $T_3 = 0$;

$$T_2' = \frac{1}{2} \cdot 2mV_C^2 = m\left(\frac{1}{2}V_B\right)^2 = \frac{1}{10}mgh;$$

$$\sum A_k^e = -2mgh_3.$$

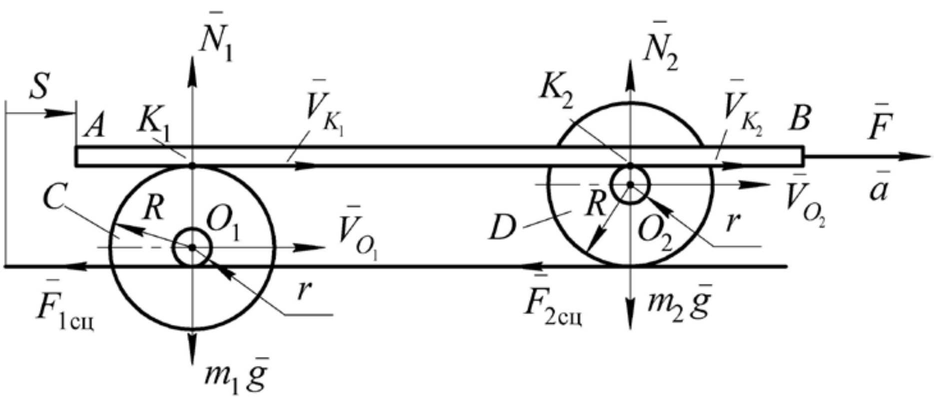
Здесь было учтено, что $V_C = V_A$, а $V_A = \frac{1}{2}V_B$, по условию

$$h_3 = \frac{1}{20}h.$$

4. На последнем этапе определяем общую максимальную высоту груза $C$ над горизонтом

$$h_C = h + \frac{9}{20}h + \frac{1}{20}h = 1{,}5h.$$

**Задача 51 (1997)**




*Решение*

Применим уравнение Лагранжа 2-го рода, приняв за обобщенную координату перемещение диска $s$ доски:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s, \qquad (1)$$

где $T$ – кинетическая энергия системы, $Q_s$ – обобщенная сила, $s$ – обобщенная координата, $\dot{s}$ – обобщенная скорость.

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{m_1 V_{O_1}^2}{2} + \frac{I_{O_1}\omega_1^2}{2} + \frac{m_2 V_{O_2}^2}{2} + \frac{I_{O_2}\omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_{C_3}^2}{2}. \qquad (2)$$

Свяжем скорости точек и угловые скорости тел, входящие в выражение (2), между собой:

$$V_{C_3} = \dot{s}; \qquad (3)$$

$$V_{O_1} = \frac{\dot{s}\cdot r}{R+r}; \qquad (4)$$

$$V_{O_2} = \frac{\dot{s}\cdot R}{R+r}; \qquad (5)$$

$$\omega_1 = \frac{\dot{s}}{R+r}; \qquad (6)$$

$$\omega_2 = \frac{\dot{s}}{R+r}. \qquad (7)$$

Осевые моменты инерции тел качения системы:

$$I_{O_1} = m_1\rho^2 \text{ и } I_{O_2} = m_2\rho^2, \qquad (8)$$

где $\rho$ – радиус инерции тела качения; $m$ – его масса.

После подстановки соотношений (3)–(8) в выражение (2) для $T$ и учитывая, что $\rho = r$, $m_1 = m_2 = \dfrac{m}{4}$, $m_3 = m$, получим

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{8}m\dot{s}^2\,\frac{R^2+3r^2}{(R+r)^2}. \qquad (9)$$

Теперь возьмем соответствующие производные согласно уравнению (1):

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0; \qquad (10)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = m\ddot{s} + \frac{1}{4}m\ddot{s}\,\frac{R^2+3r^2}{(R+r)^2}. \qquad (11)$$

Обобщенная сила

$$Q_s = \frac{\left(\sum \delta A\right)_s}{\delta s} = \frac{F\cdot\delta s}{\delta s} = F. \qquad (12)$$

Тогда уравнение (1) с учетом (10)–(12) примет вид

$$F = m\ddot{s}\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{3+k^2}{(1+k)^2}\right), \tag{13}$$

где $k = \dfrac{R}{r}$, $\ddot{s} = a$ – ускорение доски.

По конструктивным соображениям $1 < k < \infty$.

В зависимости от $k$ значение силы $F$ для сообщения заданного ускорения $a$ будет различным.

Так при $k \to 1$ или при $k \to \infty$ получаем максимальное значение силы

$$F \to F_{\max} = 1,25m\ddot{S} = 1,25ma.$$

Значение $k$ , при котором сила $F$ будет минимальной, найдем из условия

$$\frac{\partial F}{\partial k} = 0. \tag{14}$$

Откуда получаем

$$k = 3. \tag{15}$$

Так как

$$\frac{\partial^2 F}{\partial k^2} > 0,$$

то

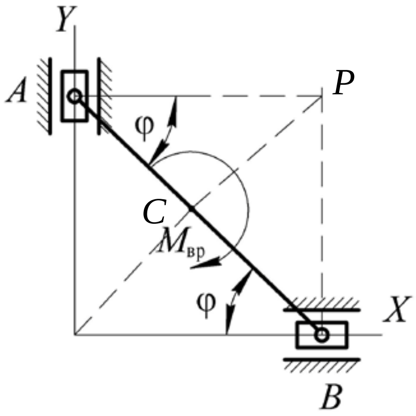
$$F_{\min} = F_{|k=3} = ma\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{3+3^2}{(1+3)^2}\right) = 1,1875ma.$$

Таким образом, движение с заданным ускорением $a$ возможно, если значение силы находится в диапазоне

$$1,1875ma \le F < 1,25ma.$$

Для решения задачи можно применить общее уравнение динамики (рекомендуется проделать самостоятельно).

## Задача 52 (1997)




*Решение*

Задачу можно решить с помощью общего уравнения динамики, но более рациональным является применение теоремы об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме:

$$dT = \sum dA_i^e . \qquad (1)$$

В данном случае работу будет совершать приложенный вращающий момент $M_{\text{вр}}$, т. е.

$$\sum dA_i^e = M_{\text{вр}} d\varphi . \qquad (2)$$

Тогда

$$dT = M_{\text{вр}} d\varphi$$

или, поделив на $dt$,

$$\frac{dT}{dt} = M_{\text{вр}} \frac{d\varphi}{dt} = M_{\text{вр}} \dot{\varphi} . \qquad (3)$$

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = T_A + T_B + T_{AB} = \frac{mu^2}{2} + \frac{mV_B^2}{2} + \frac{mV_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_{AB}^2}{2} . \qquad (4)$$

Свяжем скорости точек и тел, входящих в выражение (4):

$$V_B = \frac{V_A}{PA} PB = V_A \operatorname{tg}\varphi = u \operatorname{tg}\varphi ; \qquad (5)$$

$$V_C = \frac{V_A}{PA} PC = \frac{u}{l\cos\varphi} \cdot \frac{l}{2} = \frac{u}{2\cos\varphi} ; \qquad (6)$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{PA} = \frac{u}{l\cos\varphi} . \qquad (7)$$

Осевой момент инерции звена *AB* можно определить как

$$I_C = \frac{ml^2}{12}. \tag{8}$$

Тогда выражение (4) после подстановки в него (5)–(8) примет вид

$$\begin{gathered} T = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{2} + \frac{mu^2}{2 \cdot 4 \cos^2 \varphi} + \frac{ml^2 u^2}{12 \cdot 2 l^2 \cos^2 \varphi} = \\ = \frac{mu^2}{2\cos^2 \varphi} + \frac{mu^2}{8\cos^2 \varphi} + \frac{mu^2}{24\cos^2 \varphi} = \frac{16mu^2}{24\cos^2 \varphi} = \frac{2mu^2}{3\cos^2 \varphi}, \end{gathered} \tag{9}$$

а производная от *T* по времени соответственно

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2mu^2}{3} \cdot \frac{2\cos\varphi \sin\varphi \cdot \varphi}{\cos^4 \varphi} = \frac{4\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} mu^2}{3\cos^3 \varphi}. \tag{10}$$

Подставим (10) в (3) и выразим $M_{\text{вр}}$:

$$M_{\text{вр}} = \frac{4mu^2 \sin\varphi}{3\cos^3 \varphi}, \tag{11}$$

где $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник конкурсных задач олимпиад по теоретической механике 1987–1998 годов с анализом их решения / сост. А. В. Чигарев, [и др.]; под ред. А. В. Чигарева. – Минск: Тэхналогія, 2000. –281 с.

2. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: международный сборник трудов / под ред. А. О. Шимановского. – Гомель: УО «БелГУТ». – 2007. – Вып. 1. – 107 с.

3. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки / под ред. А. О. Шимановского. – Гомель: УО «БелГУТ». – 2008. – Вып. 2 – 148 с.

4. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие / под ред. Н. В. Бутенина, А. И Лурье, Д. Р. Меркина. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

Сборник конкурсных задач
с методическими указаниями
к их решению

Составители:
**Камлюк** Андрей Николаевич
**Ласовский** Руслан Николаевич
**Борисевич** Сергей Анатольевич

Редактор *О. П. Соломевич*
Верстка *И. А. Ткаченко*

Подписано в печать 10.03.2009. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,2. Уч.-изд. л. 4,4.
Тираж 50 экз. Заказ .

Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13а.
ЛИ № 02330/0133255 от 30.04.2004.

Отпечатано в лаборатории полиграфии учреждения образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13.
ЛП № 02330/0150477 от 16.01.2009.