ЛИТЕРАТУРА

1. Блинная сортировка. [Электронный ресурс] / Wikipedia. – 2018. / Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Блинная_сортировка. – Дата доступа: 05.04.2018.
2. William H. Gates; Christos H. Papadimitriou Bounds for sorting by prefix reversal. [Электронный ресурс] / USRegents. – 2018/ Режим доступа: https://people.eecs.berkeley.edu/christos/papers/Bounds%20For%20Sorting%20By%20Prefix%20Reversal.pdf. – Дата доступа: 06.04.2018. 11с.
3. BillGatesandhisPancakeProblem. [Электронныйресурс] / Youtube.–2018 / Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=oDzauRFiWFU. – Дата доступа: 06.04.2018

УДК 517.9

Студ. Н. Пивоварчик
Науч. рук. доц. О.Н.Пыжкова
(кафедра высшей математики, БГТУ)

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИМИ СРЕДСТВАМИ

Многочисленные задачи естествознания, техники и механики, биологии, медицины и других отраслей научных знаний сводятся к математическому моделированию процессов в виде формулы, т.е. в виде функциональной зависимости. Так, например, переходные процессы в радиотехнике, кинетика химических реакций, динамика биологических популяций, движение космических объектов, модели экономического развития исследуются с помощью дифференциальных уравнений. Всё это и явилось главной причиной выбора темы. Материалом для данной работы послужила теория дифференциальных уравнений и наиболее известные задачи исследовании динамики полета и формирования управлений различных летательных аппаратов, решаемые с помощью дифференциальных уравнений.

Современные ракеты являются результатом давней традиции изобретений и экспериментов, они сочетают достижения широкого круга инженерных дисциплин. Несколько изобретений человечества, если они есть, способны противостоять тем же экстремальным условиям, что и ракеты.По китайской легенде во времена династии Мин 16 века местный чиновник Ван Ху построил стул, к которому были прикреплены 47 пороховых бамбуковых ракет, а в некоторых версиях легенды – еще и крылья из воздушного змея. Все 47 бамбуковых ракет одновременно зажгли, и запустили стул, и после того как всё закончилось, Ван Ху пропал. Говорят, что он достиг космоса, и теперь он – «человек на Луне». Вероятнее всего Ван Ху пережил первую в истории аварию на пусковой платформе.

По одной теории, ракеты завезли в Европу в ходе монгольских завоеваний 13-го века. В Англии Роджер Бэкон изобрёл более мощный порох (75% селитра, 15% уголь и 10% сера), который увеличил дальность ракет, в то время как Жан Фруассар добавил стартовый стол, запуская ракеты через трубы для увеличения точности. К Возрождению использование ракет в качестве оружия вышло из моды, и на замену пришли эксперименты с фейерверками. В конце 16-го столетия немецкий испытатель Иоган Шмидлап экспериментировал со ступенчатыми ракетами, идеей, которая лежит в основе всех современных ракет.

Жюль Верн, как всегда впереди всех, изложил мечту о космических полётах в своём научно-фантастическом романе «De la Terre á la Lune» (С Земли на Луну), в котором в Луну из огромной пушки выстрелили снарядом под названием Колумбиад с трёмя пассажирами внутри. Российский учитель Константин Циолковский предложил использовать ракеты в качестве средства передвижения для исследования космоса, но признал, что для этого потребуется серьёзный прорыв в дальности ракет. Циолковский понимал, что скорость и дальность ракет была ограничена скоростью выбрасывания топливных газов. В докладе 1903 года, «Исследование мировых пространств реактивными приборами», он предложил использование жидкого топлива и сформулировал уравнение, которое было введено выше, связав скорость истечения газов ракетного двигателя с изменением скорости самой ракеты. Теперь эта формула известна как формула Циолковского, хотя она и была известна до него.

С падением Третьего рейха в апреле 1945-го многие из этих технологий попали в руки Союзников. Ракетная программа Союзников была не такой продвинутой, и началась настоящая гонка, чтобы захватить как можно больше немецких разработок. Одни американцы захватили 300 вагонов с деталями ракет Фау-2 и отправили их в США. Более того, самые выдающиеся из немецких ракетчиков эмигрировали в Соединённые штаты, отчасти потому что там было лучше заниматься разработками, и отчасти чтобы избежать последствий за участие в военной машине нацистов. Фау-2 основательно выросла в американскую ракету Redstone, которая использовалась в программе Меркьюри. Но одно дело поднять ракеты в воздух, другое плавно опустить их на землю.

Одной из актуальных современных задач является создание многоразовых космических аппаратов (МКА), которые после вывода полезной нагрузки на околоземную орбиту возвращается на Землю и после непродолжительной подготовки снова готовы к запуску. Вертикальное приземление МКА на Землю с помощью ракетных двигателей достаточно строго описывается системой из трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} mV' = -X - P + G + F, \\ h' = -V, \\ m' = -P/W \end{cases}$$

где m – масса МКА; V – скорость падения; h – высота над поверхностью земли; $X = C_x \rho \dfrac{V^2}{2}$ – сила лобового сопротивления; C_x – коэффициент силы лобового сопротивления; ρ – плотность атмосферы; P – тормозящая сила тяги ракетного двигателя; $W = I \cdot g_k$ – скорость истечения частиц сгорания ракетного топлива; I – удельный импульс двигателя; G – сила притяжения Земли; F – возмущающая сила; g_k=const=9,806 м/с^2.

Первое уравнение описывает динамику вертикального движения МКА, второе – это кинематическое уравнение и третье уравнение описывает динамику работы ракетного двигателя.Система уравнений решается с начальными условиями, а задании конечных условий, требуется для мягкого приземления. Интегрирование системы дифференциальных уравнений достаточно успешно выполняется различными численными методами. Однако, получая численные результаты, можно просмотреть закономерности, важные для практического применения закона регулирования силы тяги. В этом смысле трудно переоценить значение аналитических решений дифференциальных уравнений, которые, кроме того, дают контрольные решения для проверки правильности численных решений.

Аналитические решения дифференциальных уравнений удается получить для так называемых модельных систем, образуемых из начальной системы при различных допущениях и упрощениях.

При этом возникает вопрос, какое из решений или какая модельная система «лучше»? Ответ следует из сравнения проектных параметров МКА, участвующих в проектировании МКА и которыми являются: максимальная сила тяги, диапазон регулирования силы тяги, полный расход топлива, число включений-выключений двигателя, динамика нарастания и спада тяги и др.

Общим допущением для всех модельных систем является предположение о постоянстве ускорения силы притяжения g=const, и отсутствия возмущений, F=0. Аналитические решения дифференциальных уравнений получены на основе табличных неопределенных интегралов.

Самая простая модельная система образуется из первой системы в предположении отсутствия атмосферы, q=0, и постоянства массы, m = const. После деления первого уравнения в первой системе на массу, приходим к уравнениям:

$$\begin{cases} V' = -n + g, \\ h' = -V \end{cases}$$

где $n = P / m$ –тормозящее ускорение, $g = g_k$.

Начальные условия: $t = t_0, V(t_0) = V_0$, $h(t_0) = h_0$.Конечные условия, требуемые для мягкого приземления: $t = t_k < \infty$, $V(t_k) = V_k = 0$, $h(t_k) = h_k = 0$.

Проинтегрируем первое уравнение $\dfrac{dV}{dt} = -n + g \Rightarrow dV = -(n-g)dt \Rightarrow V(t) = -(n-g)t + C$. Определим константу из начальных условий: $V_0 = -(n-g)t_0 + C \Rightarrow C = V_0 + (n-g)t_0$. Получаем, что $V(t) = -(n-g)t + V_0 + (n-g)t_0$ или $V(t) = V_0 - (n-g)(t-t_0)$.

В конечный момент, $t = t_k < \infty$, скорость равна нулю $V(t_k) = 0$, и при $t_0 = 0$ имеем: $0 = V_0 - (n-g)t_k$ откуда $n - g = \dfrac{V_0}{t_k}$.

Проинтегрируем второе уравнение системы $h' = -V$ или $h'(t) = -V_0 + (n-g)(t-t_0) \Rightarrow h(t) = -V_0 t + (n-g)\dfrac{(t-t_0)^2}{2} + C_1$. Определим константу из начальных условий: $h_0 = -V_0 t_0 + C_1$ откуда $C_1 = V_0 t_0 + h_0$.

$$h(t) = -V_0 t + (n-g)\frac{(t-t_0)^2}{2} + V_0 t_0 + h_0 \text{ или}$$

$$h(t) = h_0 - V_0(t-t_0) + \frac{n-g}{2}(t-t_0)^2 .$$

Найденные выражения $V(t)$ и $h(t)$ определяют решение задачи приземления в виде текущих параметров движения в функции времени.

Подстановка конечных условий $t = t_k, h(t_k) = 0, t_0 = 0$ дает выражение для определения программы тормозящего ускорения:

$$n = g + \frac{V_0^2}{2h_0},$$

подстановка которого определяет время до момента касания поверхности:

$$t_k = 2\frac{h_0}{V_0}.$$

Величина силы тяги определяется по формуле:

$$P = m_0 n = m_0\left(g + \frac{V_0^2}{2h_0}\right),$$

массовый секундный расход рассчитывается из соотношения: $|m'| = \frac{P}{W}$, полный расход топлива на приземление составляет:

$$\Delta m_k = m_0 - m_k = |m'| t_k.$$

Например, $m_0 = 40$ т, $h_0 = 500$ м, $V_0 = 100$ м/с. Тогда

$t_k = 2\frac{h_0}{V_0} = 10$ с, $n = 9,81 + \frac{100^2}{2 \cdot 500} = 19.81$ м/с^2,

$P = 40000 \cdot 19,81 = 792,4$ kH,

$|m'| = 792400 / 2500 = 316,96$ кг/с, $m_k = 40000 - 316,96 \cdot 10 = 36830,4$ кг.

Полный расход топлива: $\Delta m_k = 40000 - 36830,4 = 3169,6$ кг.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев, В.А. Аналитическое решение дифференциальных уравнений в задачах управления техническими системами: учебное пособие/ В.А. Афанасьев – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2009. – 24 с.