ЛИТЕРАТУРА

1. Окулов, С.М. Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике [Электронный ресурс]: учебное пособие / С.М. Окулов. – 2-е изд. (эл.). – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 422 с.

2. Белоусов, А.И. Дискретная математика: учебное пособие / А.И. Белоусов, С.Б. Ткачев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 744 с.

УДК 519.854

Студ. А.Л. Чернявский
Науч. рук. доц. Е.И. Ловенецкая
(кафедра высшей математики, БГТУ)

ЗАДАЧА ШТЕЙНЕРА

Своё название эта задача получила в честь Якоба Штейнера, швейцарского геометра, жившего в XIX веке. Это задача о соединении заданного набора точек некоторой сетью прямых отрезков так, чтобы длина этой сети была минимальной. При этом можно использовать дополнительные точки.

В настоящее время различные вариации задачи Штейнера широко используются на практике, в том числе при конструировании и трассировке сверхбольших интегральных схем, при синтезе сетей передачи данных, при проектировании коммуникаций, дорог, трубопроводов, в компьютерных и телекоммуникационных сетях и т.д. Задача Штейнера нашла применение даже в биологии при построении эволюционного дерева для группы биологических видов.

Сложность задачи Штейнера в том, что для ее решения необходимо добавить новые точки, называемые *точками Штейнера* и служащие в качестве узлов искомой кратчайшей сети.

Известны следующие свойства задачи Штейнера [1].

1. Для числа t точек Штейнера в сети выполняется неравенство $0 \le t \le n-2$, где n – количество исходных точек.

2. Каждая точка Штейнера соединена ровно с тремя другими точками, *исходными* либо *дополнительными*, причем угол между ребрами равен $120°$.

3. Если некоторая вершина сети Штейнера соединена только с двумя другими точками, то угол между двумя ребрами должен быть не меньше $120°$.

Решение задачи Штейнера для трех точек было найдено еще в XVII веке. П. Ферма, Э. Торричелли и Б. Кавальери в свое время доказали, что сеть Штейнера для треугольника строится с помощью одной дополнительной точки (при условии, что все углы треугольника меньше 120°), которая называется точкой *Ферма-Торричелли-Штейнера*. Если один из углов треугольника больше либо равен 120°, то сеть Штейнера состоит из сторон этого угла.

На рис. 1 показан процесс построения точки Штейнера *S* для трех точек *A*, *B*, *C*. Для нахождения точки Штейнера в треугольнике нужно на любой стороне исходного треугольника *ABC* достроить наружу равносторонний треугольник *A'BC*. Точка *S* пересечения окружности, описанной около треугольника *A'BC*, и отрезка *AA'* будет являться точкой Штейнера.

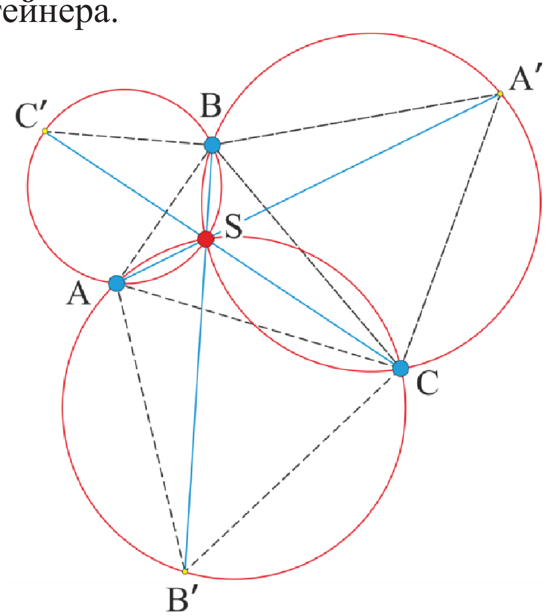

Рисунок 1 – Построение точки Штейнера *S* для треугольника *ABC* геометрическим методом

Также эту дополнительную точку можно найти, если достроить равносторонние треугольники к любым двум сторонам (например, *AC*и*BC*). Точка Штейнера – точка пересечения отрезков *AA'* и *BB'* (см. рис. 1). Этот факт был использован нами при создании программы на языке C++, находящей кратчайшую сеть для случая трех точек по известным координатам точек.

Опишем кратко реализованный алгоритм.

В диалоговом режиме задаются координаты исходных точек A, B, C. На первом этапе программы проводится проверка на существование в треугольнике угла, большего либо равного 120°. Для этого достаточно найти максимальную сторону треугольника и вычислить противоположный угол (см. рис. 2).

Если в треугольнике имеется угол, не меньший 120°, то сеть Штейнера состоит из сторон этого угла, программа выводит соответствующее сообщение и длину кратчайшей сети, равную сумме длин сторон треугольника, исходящих из этого угла. На рис. 2 построена сеть Штейнера, рассчитанная программой для чек $A(-1;1)$, $B(4;-1)$, $C(8;2)$, угол $\angle ABC > 120°$.

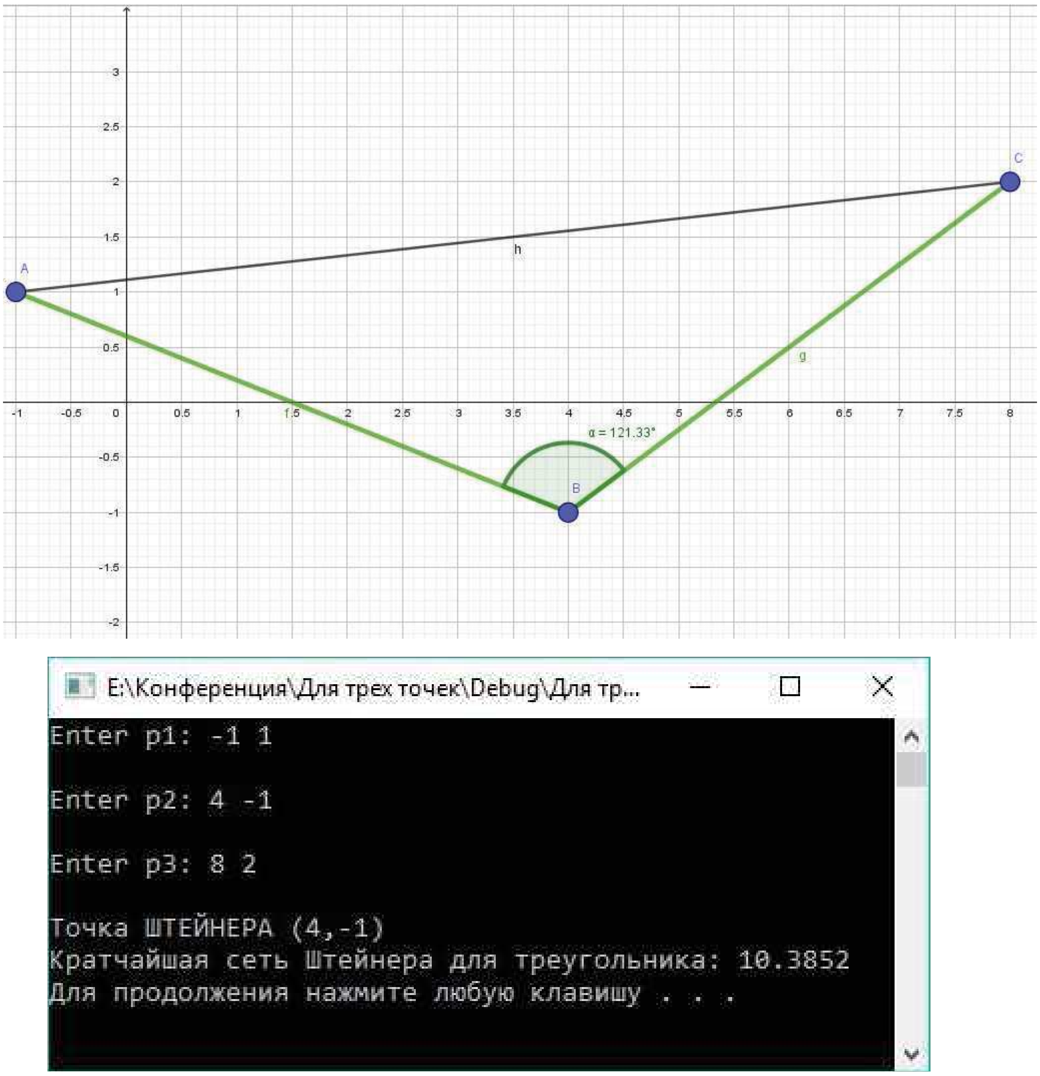

Рисунок 2 - Графическая иллюстрация построения сети Штейнера и результат работы программы для треугольника с углом больше 120°

Если все углы треугольника меньше 120°, то нужно искать точку Штейнера внутри треугольника. Для этого берутся любые две стороны исходного треугольника, например, *AB*и*BC*, и на них строятся равносторонние треугольники *ABC’* и *BCA’* (см. рис. 3). Для построения вершины *C’* от точки*D*– середины отрезка*AB*– откладывается вектор $\overrightarrow{DC'}$, длина которого равна высоте $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$ равностороннего треугольника *ABC'*. Аналогично строится точка *A'*. После этого точка Штейнера *S* находится как точка пересечения прямых *AA'* и *CC'*.

Например, на рис. 3 показано построение сети Штейнера для точек *A*(2;2),*B*(4;8),*C*(10;4). Найдена точка Штейнера *S*(4,89;5,14). Длина кратчайшей сети равна 12,4984.

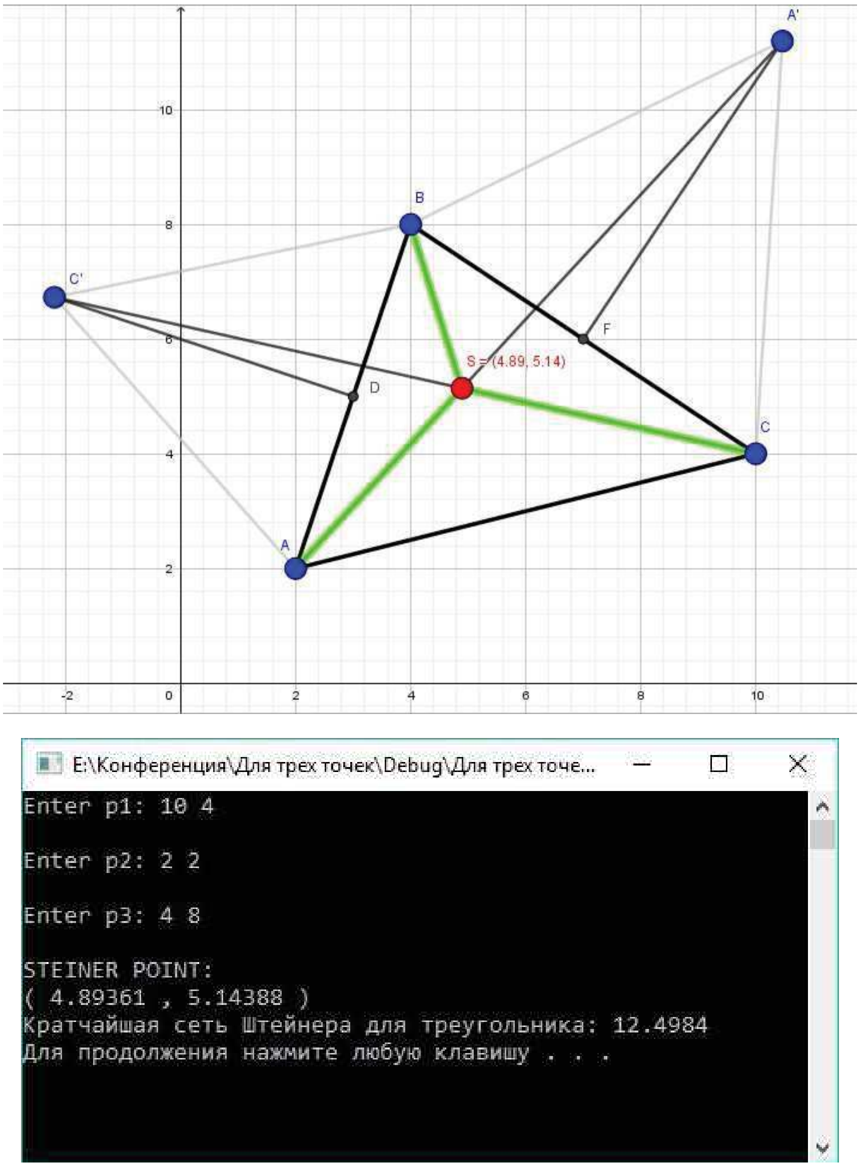

Рисунок 3 – Графическая иллюстрация построения сети Штейнера и результат работы программы для треугольника с углом меньше 120°

Решение задачи Штейнера для трех точек является основой для построения кратчайшей сети Штейнера для большего числа точек. Известно, что для любой конечной системы точек на плоскости существует *конечное множество* сетей Штейнера. Для нахождения кратчайшего пути среди множества точек нужно найти все сети Штейнера, а потом выбрать самую короткую. Однако точное решение задачи требует рассмотрения огромного количества вариантов, так что даже лучшие из существующих алгоритмов, выполняющиеся на самых быстродействующих компьютерах, не в состоянии дать решение для большого множества заданных точек за реально приемлемое время. Более того, задача Штейнера принадлежит к классу задач, для которых, по мнению многих современных исследователей, эффективные алгоритмы так никогда и не будут найдены. В силу востребованности задачи для практических приложений, актуальным является построение новых алгоритмов, в том числе дающих приближенное решение задачи Штейнера [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгоритмы о выборе дороги и сетях. Сети Штейнера. Лекция Владимира Протасова в Яндексе [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://habrahabr.ru/company/yandex/blog/215931/. Дата доступа: 04.04.2018

2. Алгоритм Штейнера (Поиск кратчайших сетей) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://lmatrix.ru/news/practice/algoritm-shtejjnera-poisk-kratchajjshikh-setejj_137.html Дата доступа: 08.04.2018

УДК 511.34

Студ. К.С. Марчук
Науч. рук. доц. И.К. Асмыкович
(кафедра высшей математики, БГТУ)

ПРИМЕНЕНИЕ КИТАЙСКОЙ ТЕОРЕМЫ ОБ ОСТАТКАХ В АЛГОРИТМЕ RSA

Много великих открытий и изобретений было сделано в Китае: печатные книги, фарфор, шёлк, зеркала, зонтики и бумажные змеи – это лишь малая часть. Но сегодня мы поговорим о "китайской теореме об остатках"[1].

Если натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ попарно взаимно просты, то для любых целых $r_1, r_2, \dots, r_n$ таких, что $0 \le r_i < a_n$при всех $i \in \{1,2,\dots,n\}$, найдётся число N, которое при делении на a_i даёт остаток r_i при всех $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Рассмотрим пример использования данной теоремы.