УДК 339.138

Студ. А.А. Александрова, Е.И. Комарова
Науч. рук. доц. И.Ф. Соловьева
(кафедра высшей математики, БГТУ)

ЭФФЕКТ БАБОЧКИ И ЭФФЕКТ КАРТОЧНОЙ КОЛОДЫ В МАТЕМАТИКЕ

«Цель науки – не только прогнозирование,
Не только поиск набора эффективных
рецептов, но и понимание природы вещей»
/ А. Пуанкаре /

Красивое название «Эффект бабочки» тесно связано с математикой. Любая точная модель атмосферы будет чувствительной к начальным условиям, и в результате взмах крыльев бабочки в такой системе действительно все изменит. Очевидно, верно и обратное.

Хаотические отображения могут быть либо дискретными, либо бесконечными функциями, где небольшие отклонения в начальных условиях со временем приводят к принципиально различному поведению. Как правило, они задаются либо в терминах рекуррентных соотношений для дискретных отображений, либо областью определения для непрерывных функций. Применение теории хаоса широко распространено в биологии, химии, физике, экономике и математике, а также среди других областей. Часто системы с большим количеством связанных переменных проявляют хаотичное поведение, к таким относятся погодные условия, рынки труда, динамика населения и небесная механика.

Условия возникновения хаоса. Существует три необходимых математических условия для хаотической системы.

1) Чувствительность к начальным условиям
2) Топологическое смешивание
3) Плотность периодических орбит

В некоторых случаях последние два подразумевают первый. Однако каждое из трех условий охватывает различные качественные аспекты хаотических систем в целом. Также каждое условие определяется как некоторое состояние в фазовом пространстве динамической системы. Если пространство имеет одно измерение, то фазовое пространство является двумерным, оси которого это координата x и скорость $\dot{x}$ точки; если пространство имеет более одного измерения, то оси – это координаты и скорости в каждом из возможных направлений.

Чувствительность к начальным условиям (эффект бабочки). Предположим, есть два множества начальных условий z_0 и z_0' для динамической системы, разделенных расстоянием $\Delta z(t)$ в фазовом пространстве. По мере развития системы, расстояние между двумя начальными состояниями изменяется во времени по закону:

$$\Delta z(t) = e^{\lambda t}\Delta z(0).$$

Показатель λ называют показателем Ляпунова. В $3d$-мерных пространствах фазовое пространство является $2d$-мерным, поэтому существует $2d$ показателей Ляпунова. Системы часто характеризуются наибольшим из этих показателей; если больший показатель положительный, система хаотична. Если же отрицательный, то траектории начальных состояний z_0 и $z_0^{'}$ остаются близкими в фазовом пространстве, система не хаотична.

Чувствительность к начальным условиям более известна как «эффект бабочки». Термин возник в связи со статьёй «Предсказание: Взмах крыльев бабочки в Бразилии вызовет торнадо в штате Техас», которую Эдвард Лоренц в 1972 году вручил американской «Ассоциации для продвижения науки» в Вашингтоне. Взмах крыльев бабочки символизирует мелкие изменения в первоначальном состоянии системы, которые вызывают цепочку событий, ведущих к крупномасштабным изменениям.

Топологическое смешивание (эффект карточной колоды). Одной только чувствительности к начальным условиям недостаточно, чтобы сделать отображение хаотичным. Запутанная топологическая структура дает эффект карточной колоды. Он заключается в том, что траектории переплетаются между собой так, будто кто-то взбивает воображаемое тесто. Близлежащие траектории со временем не только отделяются друг от друга, но они растягиваются, складываются и переплетаются друг с другом. Растягивание увеличивает неопределенность.

При складывании изначально далекие друг от друга траектории сближаются, напоминая при этом колоду карт в руках умелого игрока.

В качестве примера рассмотрим динамическую систему, сгенерированную функцией:

$$z_{n+1} = f = 1.5z_n + 1.$$

Выберем две начальные точки z_0 и $z_0^{'}$. Изменение каждой точки отображается на диаграмме на рисунке 1. Как видно, любая небольшая разница между начальными точками увеличена на коэффициент $1{,}5$ на каждом шаге. Тем не менее, система не хаотична: независимо от начальных точек, каждая точка приближается к положительной или отрицательной бесконечности, поэтому асимптотическое поведение, заданное набором начальных условий, очень предсказуемо.

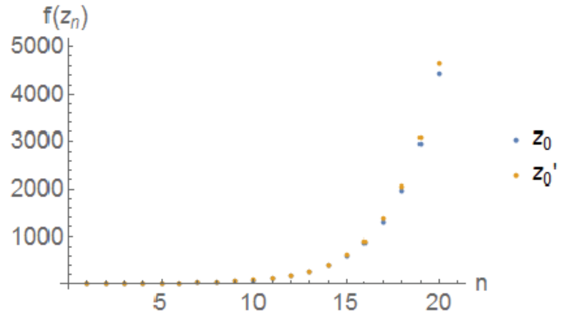

Рисунок 1 - Постепенное отделение точек z_0 и z_0' после повторного применения функции $\mathbf{f(z_n)}$

Топологическое условие смешивания предназначено для исключения таких случаев. В нем, по сути, говорится, что, учитывая любой возможный набор состояний для динамической системы, данный набор начальных условий для системы в конечном итоге эволюционирует по крайней мере до некоторых состояний в наборе. Исходя из топологии это можно сформулировать следующим образом: любое открытое множество в фазовом пространстве динамической системы в конечном итоге пересекает любое другое данное открытое множество в фазовом пространстве.

Плотность периодических орбит. Плотность периодических орбит в динамической системе означает, что любая заданная точка в фазовом пространстве произвольно близка к набору начальных условий, приводящих к периодической орбите.Это очень интересное условие, так как в сочетании с топологическим смешиванием (эффект карточной колоды) оно подразумевает чувствительность к начальным условиям (эффект бабочки). Можно взять два близких начальных условия и изобразить открытые множества вокруг каждого начального условия в фазовом пространстве, чтобы два открытых множества не пересекались.

Учитывая топологическое смешивание, эти открытые множества в конечном итоге развиваются до пересечения любого другого открытого множества, т. е. они "размазываются" над остальной частью фазового пространства с течением времени. Но если в каждом из этих открытых множеств существует произвольно много периодических орбит, это "размытие " возможно только в том случае, если периодические орбиты выглядят принципиально разными. Если это верно для произвольно близких начальных условий, то траектории в фазовом пространстве должны расходиться, поскольку близлежащие периодические орбиты не сходятся к траекториям начальных условий.

Пример. Аттрактор Лоренца относится к динамической системе, заданной следующим набором ОДУ первого порядка в трех измерениях:

$$\dot{x} = \sigma(y - z)$$
$$\dot{y} = x(r - z) - y$$
$$\dot{z} = xy - bz,$$

где σ, r, b параметры.

Эта модель представляла собой упрощенное описание конвекции в атмосфере, то есть движение потоков горячего и холодного воздуха в условиях заметной разницы температур, его легко смоделировать на языке HTML5 и JavaScript [1].

Листинг:

```
<html>
<body>
<canvasheight='500'width='500'id='cnv'></canvas>
<script>
varcnv=document.getElementById("cnv");
varcx=cnv.getContext('2d');
varx=3.051522,y=1.582542,z=15.62388,x1,y1,z1;
vardt=0.0001;
vara=5,b=15,c=1;
varh=parseInt(cnv.getAttribute("height"));
varw=parseInt(cnv.getAttribute("width"));
varid=cx.createImageData(w,h);
varrd=Math.round;
varidx=0;
i=1000000;while(i--){
x1=x+a*(-x+y)*dt;
y1=y+(b*x-y-z*x)*dt;
z1=z+(-c*z+x*y)*dt;
x=x1;y=y1;z=z1;
idx=4*(rd(19.3*(y-x*0.292893)+320)+rd(-
11*(z+x*0.292893)+392)*w);
id.data[idx+3]=255;
}
cx.putImageData(id,0,0);
</script>
</body>
</html>
```

Результат:

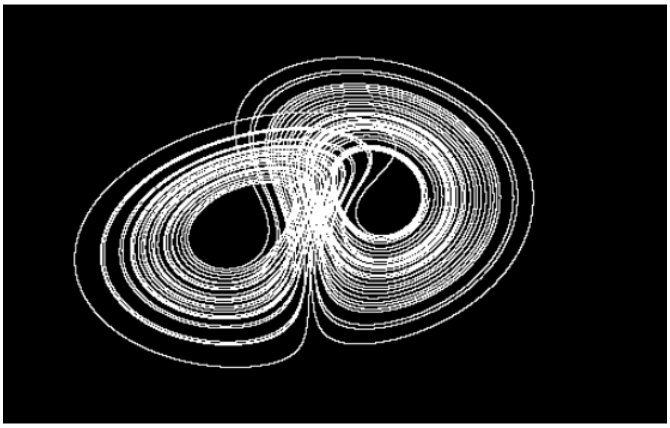

Рисунок 2 - Набор из орбит аттрактора Лоренца с заданным набором параметров σ, r, b

С геометрической точки зрения хаотические аттракторы намного сложнее классических. Их структура очень хаотична и запутанна, а порой даже не предсказуема.

«На самом деле, чем величественней наука,
Тем сильнее ощущение тайны»
В.Набоков /

ЛИТЕРАТУРА

1. Hasselblatt B., Katok A. A First Course in Dynamics: Witha Panorama of Recent Developments. Canibridge University Press. 2003.

УДК 519.1

Студ. Ю.А. Карленок
Науч. рук. доц. Е.И. Ловенецкая
(кафедра высшей математики, БГТУ)

ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ОСТОВНОГО ДЕРЕВА

Английским математиком Артуром Кэли была сформулирована задача: как соединить *n* городов железнодорожными линиями так, чтобы не строить лишних дорог. При этом известна стоимость строительства дороги между каждой парой городов. Требуется найти сеть дорог, соединяющую все города и имеющую минимально возможную стоимость. Эта задача относится к теории графов. Под графом понимается множество точек (вершин графа), часть из которых соединена отрезками. Отрезки, соединяющие вершины графа между собой, называются ребрами.

Пусть каждому ребру графа ставится в соответствие некоторое число – вес ребра. Это число может означать цену ребра, его длину, в