УДК

Д.С. Карпович, А.Н. Рудь, О.Г. Барашко
(УО «Белорусский государственный технологический университет»,
г. Минск, Беларусь)

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ПРИМЕРЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Основными формами представления объектов с распределенными параметрами, как и в случае объектов с сосредоточенными параметрами, являются представление в виде дифференциальных уравнений в частных производных, представление в виде передаточных функций, представление в виде временных характеристик, представление в виде частотных характеристик.

Особенностью распределенных систем является наличие пространственных составляющих в сигнале входа и выхода.

Как известно, в сосредоточенных системах импульсная переходная функция характеризует реакцию системы на единичный идеальный импульс, переходная характеристика характеризует реакцию системы на единичную ступенчатую функцию, а комплексная передаточная функция – реакцию системы на гармоническое входное воздействие. В распределенных системах к временным входным воздействиям, рассмотренным выше, необходимо добавить пространственную форму.

В настоящей работе в качестве объекта управления выступает температурное поле многослойной пластинки, которая представлена на рисунке 1.

Управляющим воздействием служит тепловой поток, распределенный по поверхности, а функцией выхода – температурное поле $T(x,y,z,t)$. Поверхности S_3, S_5, S_4 теплоизолированы, а поверхности S_2, S_6 поддерживаются при постоянной температуре.

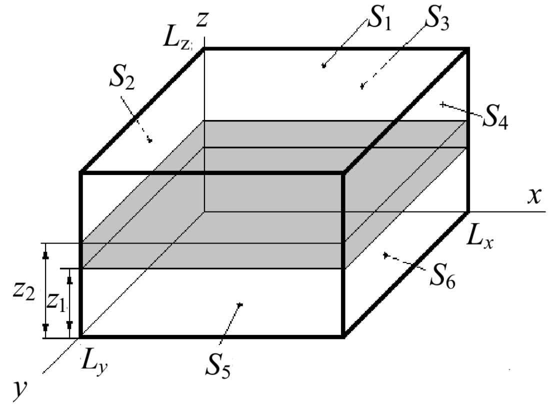

Рисунок 1 – Объект управления

При описании объектов с распределенными параметрами можно выделить три подхода:

1. Представление в форме дифференциальных уравнений в частных производных. Уравнение Фурье можно записать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

$$0 < x < L_x,\ 0 < y < L_y,\ 0 < z < L_z,$$

где $T(x, y, z, t)$ – фазовая переменная; x, y, z, – пространственные координаты; a – заданный коэффициент; L_x, L_y, L_z – заданные числа.

Граничные и начальные условия для уравнения (1) имеют вид:

$$T(0,y,z,t) = T(x,0,z,t) = T(L_x,y,z,t) = T(x,L_y,z,t) = 0$$

$$\frac{\partial T(x,y,0,t)}{\partial z} = 0, \quad T(x,y,L_z,t) = U(x,y,t), \quad T(x,y,z,0) = 0. \qquad (2).$$

Общий способ решения – использование приближенных численных методов. Наиболее широко распространены методы сеток.

Основная идея метода сеток – аппроксимация искомой непрерывной функции совокупностью приближенных значений, рассчитанных в некоторых точках области – узлах. Совокупность узлов, соединенных определенным образом, образует сетку. Сетка, в свою очередь, является дискретной моделью области определения искомой функции.

Общий алгоритм метода сеток:

1. Построение системы в заданной области (дискретизация задачи);
2. Получение системы алгебраических уравнений относительно узловых значений (алгебраизация задачи);
3. Решение полученной системы алгебраических уравнений .

Наиболее часто используют 2 вида метода сеток:

– метод конечных элементов.
– метод конечных разностей.

В методе конечных разностей используются, как правило, регулярные сетки, шаг которых постоянен либо меняется по несложному закону. Расстояние. между соседними узлами – шаг сетки.

В методе конечных элементов исходная область определения функции разбивается с помощью сетки, в общем случае неравномерной, на отдельные подобласти – конечные элементы. Искомая непрерывная функция апроксимируется кусочно-непрерывной, определенной на множестве КЭ. Практически МКЭ применяют в виде специальных программных систем, например, PDE Toolbox/MATLAB.

2. Определение реакции системы на входной сигнал, представленный в виде комбинации дельта функций в пространственной и временной областях

$$\omega\left(x,t\right)=\delta\left(x-\mu\right)\cdot\delta\left(t-\tau\right), \qquad (3)$$

где x, μ – заданные точки пространства; t, τ – временные независимые переменные.

Реакция объекта на входное воздействие $\omega(t,\ x)$ представляется в виде функции Грина $G(x,t,\mu,\tau)$ или импульсной переходной функцией.

Реализация данного подхода сопряжено с определенными трудностями при использовании распространенных математических пакетов.

3. Определение реакции объекта на собственные вектор-функции оператора объекта. В этом случае распределенный объект (систему) структурно можно представить бесконечной совокупностью независимых условно сосредоточенных контуров. Передаточная функция каждого условно сосредоточенного контура может быть представлена в виде отношения аналитических целых функций.

Разложим входное воздействие $U\left(x,y,t\right)$ в ряд Фурье. Учитывая граничные условия (2), входное воздействие может быть представлено в виде:

$$U\left(x,y,t\right)=\sum_{\eta,\gamma=1}^{\infty}C_{\eta,\gamma}\left(t\right)\cdot sin\left(\psi_{\eta}\cdot x\right)\cdot sin\left(\tilde{\phi}_{\gamma}\cdot y\right),$$

где $\psi_{\eta}=\pi\cdot{}^{\eta}\!/_{x_L}$; $\tilde{\phi}_{\gamma}=\pi\cdot{}^{\gamma}\!/_{y_L}$.

Передаточная функция объекта по η,γ $\left(\eta,\gamma=\overline{1,\infty}\right)$ моде входного воздействия:

$$W_{0,\eta,\gamma}\left(p\right)=\frac{\bar{H}_{\eta,\gamma}\left(x,y,z=\overset{*}{z},p\right)}{\bar{C}_{\eta,\gamma}\left(p\right)\cdot sin\left(\psi_{\eta}\cdot x\right)\cdot sin\left(\tilde{\phi}_{\gamma}\cdot y\right)}=$$

$$=\frac{\exp\left(\beta_{\eta,\gamma}\cdot\overset{*}{z}\right)+\exp\left(-\beta_{\eta,\gamma}\cdot\overset{*}{z}\right)}{\exp\left(\beta_{\eta,\gamma}\cdot z_L\right)+\exp\left(-\beta_{\eta,\gamma}\cdot z_L\right)},\ \left(\eta,\gamma=\overline{1,\infty}\right),$$

где $\beta_{\eta,\gamma}=\left(\dfrac{p}{a}+\psi_{\eta}^{2}+\tilde{\phi}_{\gamma}^{2}\right)^{1/2}$, $\left(\eta,\gamma=\overline{1,\infty}\right)$.

Таким образом, рассматриваемый распределенный объект может быть представлен в виде совокупности передаточных функций $W_{0,\eta,\gamma}(p)$ $\left(\eta, \gamma = \overline{1, \infty}\right)$.

В зависимости от особенностей теплового объекта и необходимости в определении выходных параметров объекта управления с учетом влияния входного или входных воздействий можно воспользоваться любым из представленных выше способов описания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рапопорт Э. Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2009. – 677 с.