

Анкуда М. А., Жарский С. Е.,  
Олиферович Н. М., Хейфец М. Л.  
(УО «Белорусский государственный технологический университет»,  
г. Минск, Беларусь)

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ШАГОВОГО ДВИГАТЕЛЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИВОДА 3D-ПРИНТЕРА

**Введение.** При проектировании и разработке 3D-принтера важное место занимают вопросы разработки систем управления приводами его рабочих органов. На сегодняшний день в качестве приводов многих типов 3D-принтеров используются приводы, построенные на шаговых двигателях (ШД). Для синтеза необходимых алгоритмов управления движения приводов по предписанным программам (траекториям), в первую очередь, требуется наличие математической модели динамики шагового привода как объекта управления.

**Математическая модель шагового двигателя.** Для всех типов ШД с помощью электронного коммутатора вырабатываются импульсы напряжения, которые подаются на обмотки управления, расположенные на статоре ШД. При этом каждый импульс обеспечивает поворот ротора на определенный угол, зависящий от конструкции ШД.

Для синтеза законов управления рассмотрим ШД с зубчатым передаточным механизмом на валу двигателя. При помощи этого механизма вращательное движение ротора двигателя преобразуется в поступательное движение механизмов 3D-принтера (в конечном счете – его печатающей головки).

При действии единичного импульса на ШД с посаженной на валу его ротора шестерней с радиусом  $R$ , одиночный угловой шаг поворота ротора преобразуется в поступательное движение шестерни на расстояние равное:

$$L_{ш} = \Delta\alpha \cdot R, \quad (1)$$

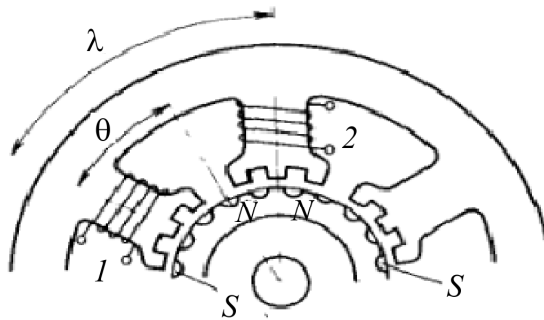
где  $\Delta\alpha$  – шаг поворота ротора ШД при подаче единичного импульса (градусы);  $L_{ш}$  – величина линейного шага шестерни при действии одного импульса на ШД.

Так как в шаговом двигателе повороты осуществляются в дискретные моменты времени, то математическое описание положения можно описать следующим выражением:

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + n_k \cdot \Delta\alpha, \quad (2)$$

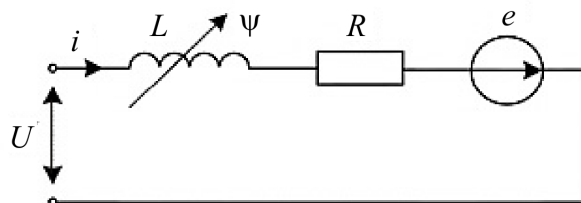
где  $\varphi_k$  – угловое положение ротора шагового двигателя в момент времени  $k$ ;  $n_k$  – количество управляющих импульсов подаваемых на шаговый двигатель в промежутке времени от  $k$  до  $k+1$ ;  $\varphi_{k+1}$  – угловое положение ротора шагового двигателя в момент времени  $k+1$ .

Перейдем непосредственно к моделированию электродвигателя. Рассмотрим двухфазный шаговый электродвигатель с активным неявнополюсным ротором (рис. 1).



**Рисунок 1 – Структура двухфазного шагового двигателя**

Обмотку шагового двигателя представляют на схеме замещения последовательным соединением индуктивности и резистора. Кроме того, при вращении ротора в обмотках возникает ЭДС [1]. Следовательно, эквивалентная схема замещения ШД выглядит, как показано на рисунке 2.



**Рисунок 2 – Схема замещения обмотки шагового двигателя**

Примем за начало отсчета угла положение, при котором ось полюса ротора совпадает с осью первой фазы. При этом  $L_1 = L_2 = L$ ;  $R_1 = R_2 = R$ ;  $U_1 = U_2 = U$ .

Для описания динамических режимов работы шагового двигателя необходимо составить уравнения электрического равновесия для напряжений контуров тока, уравнения моментов, действующих на ротор, а также уравнение электромеханического преобразования энергии. Тогда, исходя из законов Кирхгофа для заданной схемы замещения,

запишем уравнения электрического равновесия напряжений и ЭДС обмоток статора ШД:

$$\begin{cases} U = R \cdot I_1 + L \cdot \frac{dI_1}{dt} + M_{12} \cdot \frac{dI_2}{dt} - E_1 \\ U = R \cdot I_2 + L \cdot \frac{dI_2}{dt} + M_{12} \cdot \frac{dI_1}{dt} - E_2 \end{cases} \quad (3)$$

где  $U$  – напряжение фаз;  $R$  – активное сопротивление фаз;  $I_1, I_2$  – токи фаз 1 и 2, соответственно;  $M_{12}$  – взаимная индуктивность обмоток фаз;  $E_1, E_2$  – наведенные ЭДС в катушках фаз 1 и 2, соответственно.

Наведенная ЭДС в катушке фазы 1 определяется следующим выражением:

$$E_1 = \omega \cdot p \cdot \Psi_m \sin(p \cdot \theta), \quad (4)$$

где  $\omega = d\theta/dt$  – угловая скорость вращения ротора;  $p$  – число зубцов ротора;  $\Psi_m$  – максимальное потокосцепление;  $\theta$  – положение ротора.

Аналогично для фазы 2:

$$E_2 = \omega \cdot p \cdot \Psi_m \sin(p \cdot \theta - \lambda), \quad (5)$$

где  $\lambda$  – угол сдвига фаз.

Так как рассматривается двухфазный гибридный шаговый двигатель, то  $\lambda = \pi/2$ . Следовательно, взаимной индуктивностью между фазами можно пренебречь.

Исходя, из предыдущих выражений можно записать уравнения электрического баланса [2]:

$$\begin{cases} U = R \cdot I_1 + L \cdot \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \cdot p \cdot \Psi_m \sin(p\theta) \\ U = R \cdot I_2 + L \cdot \frac{dI_2}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \cdot p \cdot \Psi_m \cos(p\theta) \end{cases} \quad (6)$$

Электромагнитный момент, создаваемый обмотками фаз статора можно определить следующим выражением:

$$M_{эм} = -\Psi_m \cdot I_1 \cdot \sin(p\theta) + \Psi_m \cdot I_2 \cdot \cos(p\theta). \quad (7)$$

Для определения потокосцепления можно использовать уравнение движения ротора и паспортные данные на машину: момент удержания и номинальный ток обмоток. Примем то, что ротор находится в покое, а момент удержания – это максимальный момент, при ошибке равной шагу. Тогда:

$$\Psi_m = \frac{M_{ном}}{pI_{ном}\sqrt{2}}. \quad (8)$$

Уравнение моментов, действующих на ротор:

$$\frac{J_{\Sigma}}{p} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \cdot \frac{d\theta}{dt} = M_{\text{ЭМ}} - M_{\text{Н}}, \quad (9)$$

где  $J_{\Sigma} = J_r + J_{\text{Н}}$  – суммарный момент инерции ротора двигателя и нагрузки, приведенный к валу ротора;  $D$  – коэффициент вязкого трения;  $M_{\text{Н}}$  – момент сопротивления нагрузки [3].

Тогда система уравнений математической модели шагового электропривода в динамическом режиме может быть записана в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} U = R \cdot I_1 + L \cdot \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \cdot p \cdot \Psi_m \sin(p\theta) \\ U = R \cdot I_2 + L \cdot \frac{dI_2}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \cdot p \cdot \Psi_m \cos(p\theta) \\ \frac{J_{\Sigma}}{p} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\Psi_m \cdot I_1 \cdot \sin(p\theta) + \Psi_m \cdot I_2 \cdot \cos(p\theta) - M_{\text{Н}} \\ \omega = \frac{d\theta}{dt} \end{array} \right. , (10)$$

Уравнения приведенной чуть выше системы являются нелинейными дифференциальными уравнениями, что создает трудности при аналитическом решении подобной системы. Следовательно, требуется их предварительная линеаризация или использование численных методов решения.

Если по обмоткам обеих фаз проходит постоянный ток  $I_0$ , то положение равновесия здесь достигается при  $\theta = \lambda/2$ . Отклонение от положения равновесия обозначим  $\delta$ . Оно является функцией времени  $t$  и в последующем анализе является малой величиной. Когда ротор поворачивается или колеблется, ток в обеих обмотках отклоняется от установившегося значения на  $i_1$  и  $i_2$  соответственно.

Предположим, что

$$\theta = \frac{\lambda}{2} + \delta, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon, \quad I_1 = I_0 + i_1, \quad I_2 = I_0 + i_2,$$

Тогда получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} U = R \cdot I_0 + R \cdot i_1 + L \cdot \frac{di_1}{dt} - \frac{d\delta}{dt} \cdot p \cdot \Psi_m \sin\left(\frac{p\lambda}{2}\right) \\ U = R \cdot I_0 + R \cdot i_2 + L \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{d\delta}{dt} \cdot p \cdot \Psi_m \cos\left(\frac{p\lambda}{2}\right) \\ \frac{J_{\Sigma}}{p} \cdot \frac{d^2\delta}{dt^2} + D \cdot \frac{d\delta}{dt} = -\Psi_m \cdot I_1 \cdot \left(\sin\left(\frac{p\lambda}{2}\right) + \cos\left(\frac{p\lambda}{2}\right) p\delta\right) - \\ - \Psi_m \cdot I_2 \cdot \left(p\delta \cdot \sin\left(\frac{p\lambda}{2}\right) + \cos\left(\frac{p\lambda}{2}\right)\right) - M_{\text{Н}} \\ \varepsilon = \frac{d\delta}{dt} \end{array} \right. . \quad (11)$$

Для удобства представим уравнения к виду, характерному для уравнений, описывающих систему в пространстве состояний. Введем переменные состояния:  $x_1 = i_1$ ,  $x_2 = i_2$ ,  $x_3 = \varepsilon$  и  $x_4 = \delta$ . Система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{K_1}{U-R \cdot I_0}x_3 + \frac{U-R \cdot I_0}{L} \\ \dot{x}_2 = -\frac{R}{L}x_2 - \frac{K_1}{U-R \cdot I_0}x_3 + \frac{U-R \cdot I_0}{L} \\ \dot{x}_3 = -\frac{K_4 p}{J_\Sigma}x_1 + \frac{K_4 p}{J_\Sigma}x_2 - \frac{Dp}{J_\Sigma}x_3 - \frac{K_3 p}{J_\Sigma}x_4 \\ \dot{x}_4 = x_3 \end{cases}, \quad (12)$$

или в векторно-матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}$$

где  $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$  – вектор переменных состояния,  $Y = [M_H \ 0 \ 0 \ 0]^T$  – вектор возмущающего воздействия,  $U = [0 \ 0 \ U \ U]^T$  вектор входных сигналов [3].

**Заключение.** Была разработана математическая модель, которая учитывает электромагнитную и механическую части гибридного шагового двигателя, и проведена процедура предварительной линеаризации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: Учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов.–7-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 2008. – 528 с.
2. Анкуда, М. А. Математическая модель гибридного шагового двигателя для привода 3D-принтера / М. А. Анкуда, С. Е. Жарский // Химическая технология и техника : тезисы докладов 82-й научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 1-14 февраля 2018 г. / Белорусский государственный технологический университет. – Минск : БГТУ, 2018. – С. 96.
3. Кенио, Т. «Шаговые двигатели и их микропроцессорные системы управления»/ Т. Кенио.–М.: Энергоатомиздат, 1987.–200с.
4. Филипс Ч. Системы управления с обратной связью / Ч. Филипс, Р. Харбор. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 616 с]