

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Н. И. Жарков, А. Л. Калтыгин, Ю. Н. Мануков

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Электронный вариант учебного пособия
для студентов всех технических
специальностей*

Минск 2008

В пособии излагаются теоретические основы построения на плоскости изображений пространственных образов, а также способы и приемы, позволяющие по заданным плоским изображениям мысленно воспроизводить эти пространственные образы, решать иные инженерно-технические задачи.

Курс НГ, преподаваемый в вузе, базируется на элементарной геометрии (раздел «Стереометрия») и дисциплине «Черчение», изучаемых в средней общеобразовательной школе.

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия относится к числу основных общеобразовательных дисциплин. Она изучает законы изображения пространственных предметов на плоскости. Начертательная геометрия служит теоретической основой для изучения инженерно-технических дисциплин: инженерной графики, теоретической механики, деталей машин и т.д.

Начертательная геометрия способствует развитию пространственного воображения и логического мышления.

Впервые отдельные правила и приемы построения изображений были систематизированы и развиты французским ученым Гаспаром Монжем (1746-1818). Изложенный Гаспаром Монжем метод параллельного проецирования является основным методом, используемым при выполнении технических чертежей в настоящее время.

Основные цели начертательной геометрии:

- изучение методов построения изображений предметов на плоскости;
 - изучение геометрических свойств предмета по заданным изображениям;
 - решение пространственных задач на чертеже;
 - развитие пространственного и логического мышления.

Данное учебное пособие базируется на материалах лекций, читаемых авторами в Белорусском государственном технологическом университете, при этом учитывался опыт и методика изложения материала, используемого в учебном пособии «Краткий курс начертательной геометрии» автора И.С. Альтшулера (1965 г.).

Материал в учебном пособии изложен кратко в объеме, соответствующем количеству учебного времени, отведенного на изучение предмета. Теоретический материал сопровождается примерами решения задач. В конце каждой главы имеются вопросы для закрепления проработанного материала.

Может быть использовано в качестве учебного пособия при обучении студентов технического профиля очной и заочной форм обучения.

Авторы считают своим долгом выразить искреннюю благодарность преподавателям кафедры инженерной графики БГТУ Ращупкину С.В., Войтеховскому Б.В., Капышу Ю.Ф., Гилю В.И. за оказание помощи в оформлении данного учебного пособия.

Принятые обозначения и символы

Обозначения

1. Точки в пространстве – прописными буквами латинского алфавита A, B, C, \dots , а также цифрами.
2. Линии в пространстве – по точкам, определяющим линию, и строчными буквами латинского алфавита a, b, c, \dots
3. Плоскости – строчными буквами греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \dots$
4. Поверхности – прописными буквами русского алфавита: цилиндр – Ц, конус – К, сфера – С_ф...
5. Углы – строчной буквой греческого алфавита φ и подстрочным индексом: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$
6. Последовательность точек (и других элементов): $A_1, A_2, A_3, \dots; a_1, a_2, a_3, \dots; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$

7. Плоскости проекций – строчной буквой греческого алфавита π . Произвольная плоскость – π_0 , горизонтальная – π_1 , фронтальная – π_2 , профильная – π_3 , дополнительные – $\pi_4, \pi_5 \dots$
8. Оси проекций – строчными буквами x, y, z , начало координат – прописной буквой O .
9. Проекции точек:
на произвольную плоскость $\pi_0 - A^0, B^0, C^0 \dots$;
на горизонтальную плоскость $\pi_1 - A', B', C' \dots$;
на фронтальную плоскость $\pi_2 - A'', B'', C'' \dots$;
на профильную плоскость $\pi_3 - A''', B''', C''' \dots$;
на дополнительные плоскости $\pi_4, \pi_5 - A^{IV}, B^{IV}, C^{IV} \dots, A^V, B^V, C^V \dots$
10. Проекции линий – по проекциям точек, определяющих линию, кроме того:
прямые общего положения – $a, b, c \dots$;
горизонтальная прямая – h ;
фронтальная прямая – f ;
профильная прямая – ρ .
11. Обозначение следов плоскостей для плоскости π :
горизонтальный след – $h'_{0\alpha}$;
фронтальный след – $f''_{0\alpha}$;
профильный след – $\rho'''_{0\alpha}$.
для плоскостей частного положения задается след-проекция плоскости: $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$.
12. После преобразования чертежей вращением (плоскопараллельным перемещением) точки в новом положении – $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \dots$, после второго преобразования – $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C} \dots$

Символы

Результат геометрического построения или отдельной операции (=)

Совпадение (\equiv).

Параллельность (\parallel).

Перпендикулярность (\perp)

Скрещивание (\sphericalangle).

Принадлежность (\in), $A \in a$ – точка A принадлежит линии a .

Пересечение (\times), $A = a \times \alpha$ – точка A есть результат пересечения прямой a с плоскостью α .

Знак прямого угла (\square).

Глава 1

МЕТОД ПРОЕКЦИЙ. ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ

1.1. Метод проекций

Изображения, с которыми приходится встречаться в искусстве и технике, отличаются большим разнообразием, вследствие чего и требования, предъявляемые к ним, различные. В картинах и рисунках основным требованием является наглядность изображения. В технических изображениях главным требованием является возможность получить по изображению точное представление о форме и размерах предмета.

В начертательной геометрии для решения геометрических задач используется графический способ, при котором геометрические свойства предметов изучаются непосредственно по чертежу. Для того, чтобы чертеж соответствовал изображаемому предмету, он должен быть построен по определенным геометрическим законам. Правила построения изображений в начертательной геометрии основаны на *методе проекций*.

Метод проекций предполагает наличие плоскости проекций, объекта проецирования и проецирующих лучей.

Проекцией точки A является точка A^0 пересечения проходящего через нее проецирующего луча S с плоскостью π_0 (рис. 1.1).

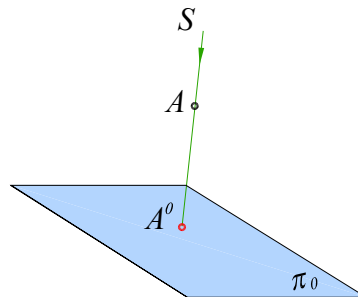


Рис. 1.1

Различают два метода проецирования: центральное и параллельное.

1.2. Центральное и параллельное проецирование

При *центральной проецировании* все проецирующие лучи проходят через произвольную точку, называемую центром проекций и не лежащую в плоскости проекций. Для построения проекций некоторых точек A, B, C, D (рис. 1.2) проводим через эти точки и центр проекций S проецирующие лучи до пересечения с плоскостью π_0 . На плоскости проекций π_0 каждой точке будет соответствовать единственная точка – проекции A^0, B^0, C^0, D^0 .

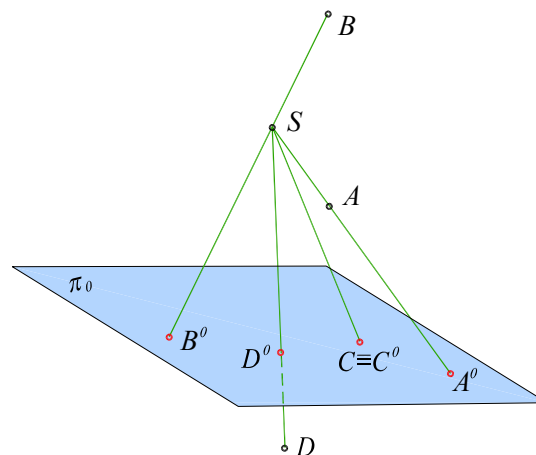


Рис. 1.2

Центральное проецирование обладает наглядностью, оно используется при построении изображений архитектурно-строительных объектов, но дает значительное искажение размеров, вследствие чего не применяется для выполнения чертежей.

При *параллельном* проецировании проецирующие лучи параллельны заданному направлению S (рис. 1.3). Точки пересечения проецирующих лучей, проходящих через точки A, B, C с плоскостью проекций π_0 – параллельные проекции A^0, B^0, C^0 на плоскости π_0 .

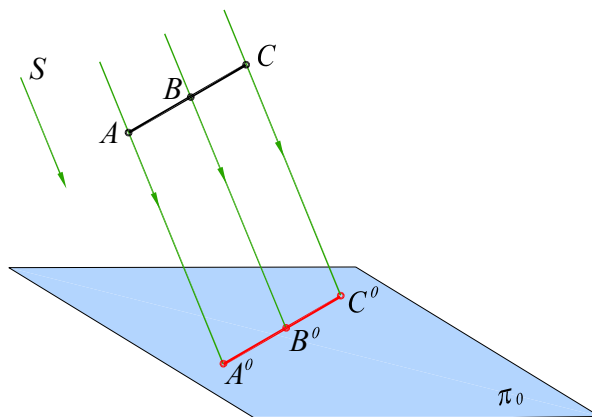


Рис. 1.3

Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального при бесконечно удаленном центре проецирования. В зависимости от направления проецирующих лучей относительно плоскости проекций параллельное проецирование может быть *прямоугольным* (проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций) и *косугольным* (проецирующие лучи составляют с плоскостью проекций угол, не равный 90°).

Прямоугольной (ортогональной) проекцией точки D (рис. 1.4) является основание перпендикуляра D^0 , проведенного из точки D на плоскость π_0 . Ортогональное проецирование имеет ряд преимуществ перед центральным и косугольным параллельным проецированием.

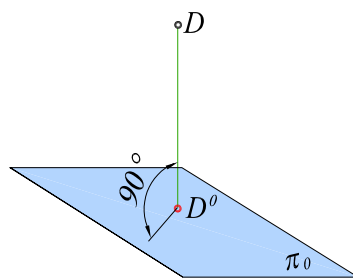


Рис. 1.4

К ним относятся простота геометрических построений и удобство измерений, поэтому прямоугольное (ортогональное) проецирование широко применяется для разработки чертежей. Прямоугольное проецирование включает в себя все свойства центрального и параллельного проецирования.

1.3. Свойства прямоугольного проецирования

1. Каждая точка и прямая в пространстве имеют единственную проекцию на плоскости, так как через любую точку в пространстве можно провести только один проецирующий луч (рис. 1.5).

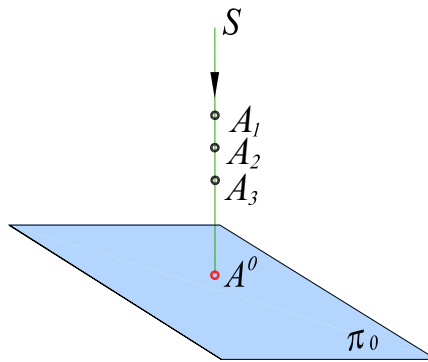


Рис. 1.5

2. Каждая точка на плоскости проекций может быть проекцией множества точек, если через них проходит общий проецирующий луч (рис. 1.5).
3. Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции этой прямой (рис. 1.6).

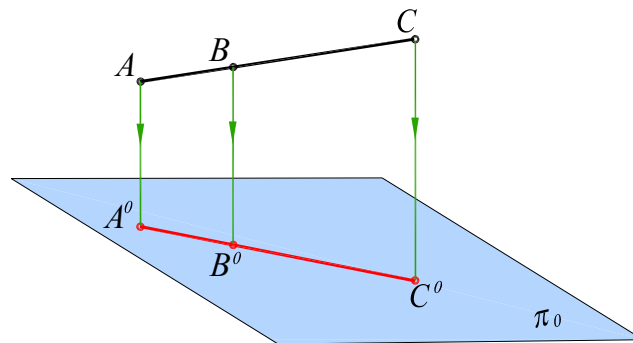


Рис. 1.6

4. Отношение отрезков прямой равно отношению их проекций (рис.1.6)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A^0B^0}{B^0C^0}.$$

5. Проекции параллельных прямых параллельны. Если $AB \parallel CD$ то $A^0B^0 \parallel C^0D^0$ (рис. 1.7).

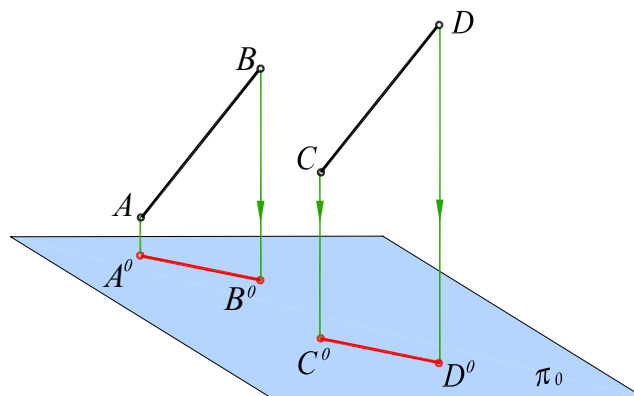


Рис. 1.7

6. Отношение отрезков параллельных прямых равно отношению их проекций (рис. 1.7):

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A^0B^0}{C^0D^0}.$$

7. Если прямая перпендикулярна плоскости проекций, то проекцией этой прямой является точка.
8. Если отрезок прямой параллелен плоскости проекций, то на эту плоскость отрезок спроецируется в натуральную величину.

1.4. Обратимость чертежа

Технический чертеж должен быть обратимым. *Обратимость чертежа* – это однозначное определение положения точки в пространстве по ее проекциям.

Если обратиться к рассмотренным ранее чертежам (рис. 1.5.), то нетрудно заметить, что точка A^0 может рассматриваться как проекция точек A_1, A_2, A_3 , лежащих на одной проецирующей прямой. Действительно, любая точка на плоскости π_0 является проекцией не единственной точки пространства, а целого множества точек, принадлежащих проецирующей прямой. Это значит, что одна проекция точки не определяет эту точку в пространстве. Поэтому для получения обратимого, то есть метрически определенного чертежа, точку (или объект) проецируют на две или на три плоскости проекций, которые образуют в пространстве систему взаимно перпендикулярных плоскостей. Формой предмета с точки зрения его изображения является его поверхность, которую можно представить как геометрическое множество точек. Поэтому операция проецирования сводится к изображению множества точек предмета на плоскостях проекций.

1.5. Точка в системе двух и трех плоскостей проекций

Изображение предмета сводится к построению ряда точек, принадлежащих этому предмету и определяющих его форму. Поэтому изучение способов построения проекций любых объектов начинают с изучения правил построения проекций точек.

Возьмем в пространстве две взаимно перпендикулярные плоскости. Одна из них располагается горизонтально – ее называют горизонтальной плоскостью проекций и обозначают буквой π_1 . Другая плоскость перпендикулярна горизонтальной и называется фронтальной плоскостью проекций. Эта плоскость обозначается буквой π_2 (рис. 1.8). Линия пересечения плоскостей проекций называется осью проекций. Ось проекций x разделяет каждую из плоскостей на две полуплоскости. Четыре двугранных угла I, II, III, IV, образованных при пересечении плоскостей, называются четвертями или квадрантами пространства.

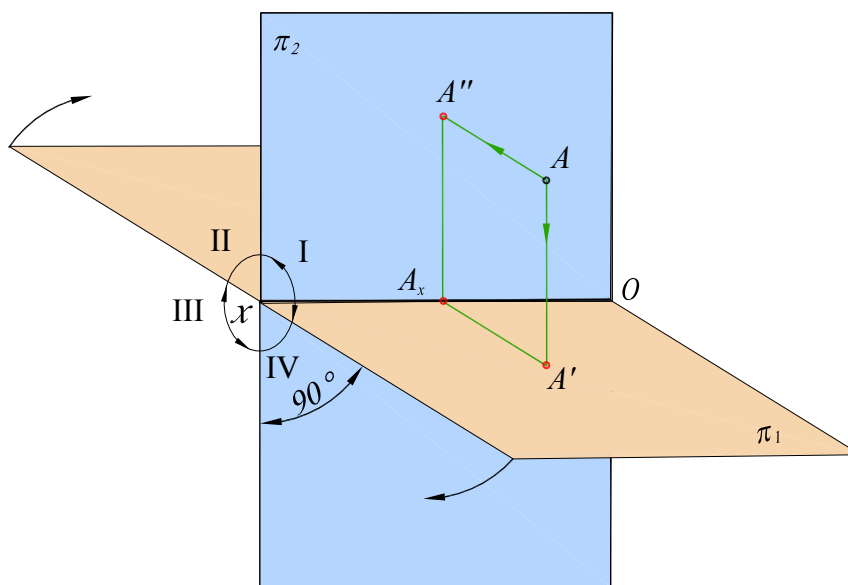


Рис. 1.8

Спроецируем точку A , расположенную в I четверти, на плоскости проекций π_1 и π_2 . Горизонтальной проекцией точки называют прямоугольную проекцию точки на горизонтальной плоскости проекций. Горизонтальную проекцию находим как точку пересечения перпендикуляра, проведенного из точки A , с плоскостью π_1 . Обозначим ее буквой A' . Проведем из точки A' в плоскости π_1 перпендикуляр на ось Ox и отметим вспомогательную точку A_x .

Фронтальной проекцией точки называют прямоугольную проекцию точки на фронтальной плоскости проекций. Фронтальную проекцию находим как точку пересечения перпендикуляра, проведенного из точки A с плоскостью π_2 . Обозначим ее A'' . Опустив перпендикуляр из точки A'' в плоскости π_2 на ось Ox , получим вспомогательную точку A_x .

Рассмотрим обратную задачу – построение точки A в пространстве по двум заданным ее проекциям – горизонтальной A' и фронтальной A'' . Точку A находим в пересечении перпендикуляров, проведенных из проекции A' к плоскости π_1 и из проекции A'' к плоскости π_2 . Эти перпендикуляры пересекутся в единственной искомой точке A пространства.

Таким образом, две прямоугольные проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве относительно данной системы взаимно перпендикулярных плоскостей проекций – т.е. чертеж становится обратимым.

Для получения плоского чертежа точки необходимо совместить плоскость π_1 с плоскостью π_2 путем поворота вокруг оси Ox на угол 90° вниз по стрелке, как это показано на рис. 1.8. При этом отрезки $A_x A''$ и $A'_x A'$ образуют один отрезок $A'' A'$, перпендикулярный к оси Ox . Этот отрезок $A'' A'$ называется линией связи. В результате совмещения плоскостей проекций получается чертеж, известный под названием эпюр Монжа (Epure – франц., чертеж) – названным в честь основоположника начертательной геометрии французского ученого Гаспара Монжа (1746 – 1848) (рис. 1.9). Без обозначения плоскостей π_1 и π_2 этот чертеж будет выглядеть так, как это показано на рис. 1.10.

Иногда двух проекций геометрического элемента бывает недостаточно, чтобы определить его форму и истинные размеры. Тогда выполняют построение изображения на третьей плоскости. Введем в систему π_1, π_2 третью плоскость проекций, перпендикулярную плоскостям π_1 и π_2 . Ее называют *профильной* плоскостью проекций и обозначают π_3 (рис. 1.11).

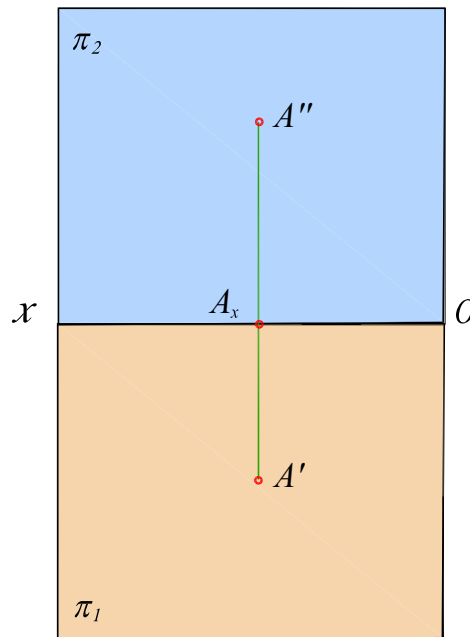


Рис. 1.9

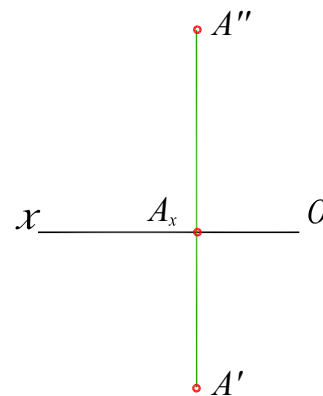


Рис. 1.10

Три взаимно перпендикулярные плоскости проекций называются координатными плоскостями. Они пересекаются по трем взаимно перпендикулярным прямым Ox , Oy , Oz , которые называются осями координат и обозначаются x , y , z . Общая точка O – начало координат.

Плоскости π_1 , π_2 , π_3 , пересекаясь между собой, делят пространство на восемь частей, называемых октантами, как это показано на рис. 1.11. В зависимости от положения точки относительно плоскостей проекций, ее координаты могут иметь положительные и отрицательные знаки. Например, в первом октанте все координаты имеют положительные значения, а в седьмом – отрицательные знаки.

Несмотря на то, что проецируемый объект можно расположить в любом октанте, во многих странах принято помещать изображаемый объект в первом октанте. Рассмотрим построение трех проекций некоторой точки пространства. Зададимся произвольной точкой A (рис. 1.11). Проецирование на плоскости π_1 и π_2 выполняется аналогично приведенному выше примеру проецирования точки A на две плоскости проекций. Профильной проекцией точки является прямоугольная проекция точки на профильной плоскости проекций π_3 . Обозначим ее A''' .

Часто с осями проекций совмещают декартову систему координат. Отметим, что проекции отрезков каждой проецирующей прямой равны между собой (рис. 1.11):

$$AA' = A''A_x = A'''A_y \quad (\text{высота } z \text{ точки } A \text{ – аппликата});$$

$$AA'' = A'A_x = A'''A_z \quad (\text{глубина } y \text{ точки } A \text{ – ордината});$$

$$AA''' = A'A_y = A''A_z \quad (\text{широта } x \text{ точки } A \text{ – абсцисса}).$$

Чтобы перейти к плоскому изображению (на листе бумаги), повернем плоскость π_1 вниз вокруг оси Ox и плоскость π_3 вправо вокруг оси Oz до совмещения с плоскостью π_2 , как это показано стрелками на рис. 1.11.

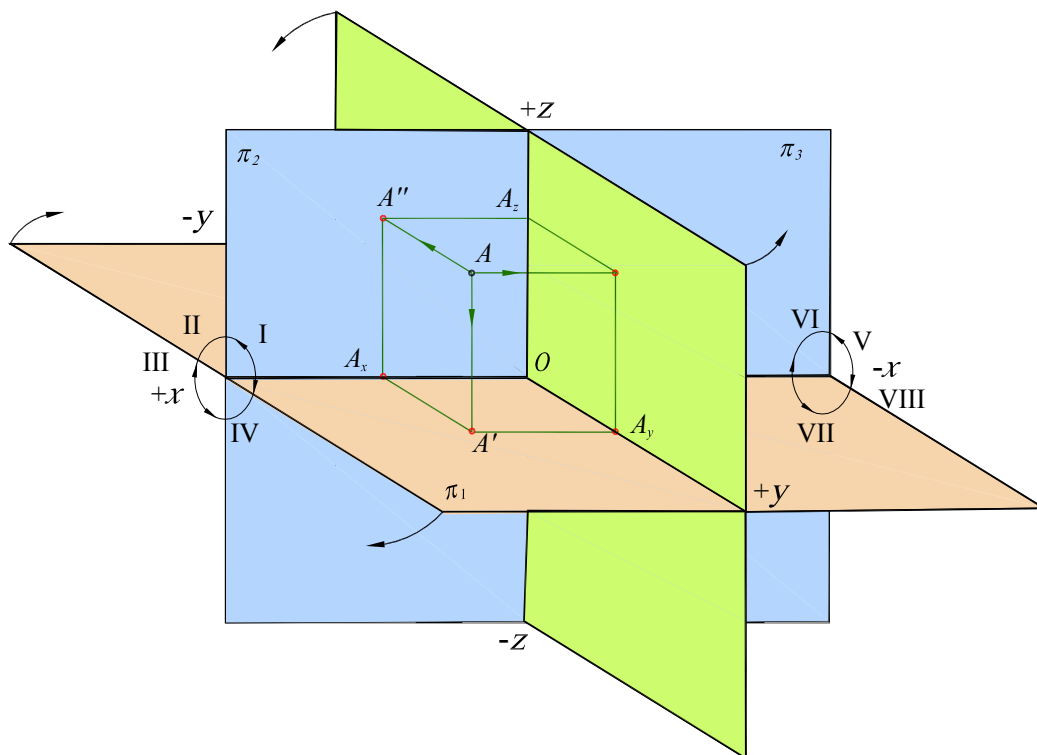


Рис. 1.11

При развороте плоскостей π_1 и π_3 ось y воспроизводится дважды. На рис. 1.12 показано расположение проекций A' , A'' , A''' точки A после совмещения плоскостей проекций.

Прямые, соединяющие на чертеже две проекции одной и той же точки, называются линиями связи, между A'' и A''' – горизонтальная линия связи, между проекциями A' и A''' – ломаная линия связи. Переход от оси u плоскости π_1 к оси u плоскости π_3 может осуществляться при помощи дуги или вспомогательной прямой (биссектрисы прямого угла) или с помощью прямой, проведенной под углом 45° к оси u .

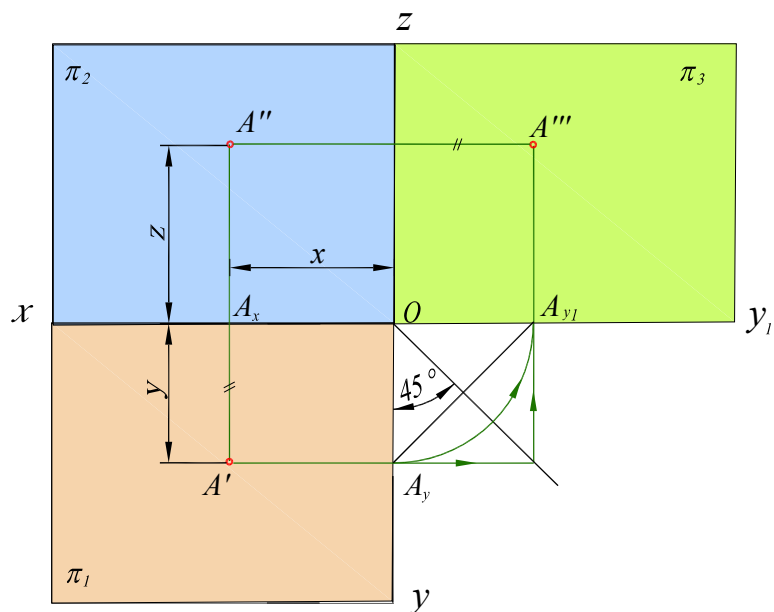


Рис. 1.12

На рис. 1.13 выполнено построение профильной проекции A''' точки A по заданной горизонтальной A' и фронтальной A'' . Построение выполняется следующим образом:

1. Проводим через проекцию A'' горизонтальную линию связи, на которой находится профильная проекция A''' .
2. Проводим ломаную линию связи через A' до пересечения с горизонтальной линией связи.

Профильную проекцию A''' можно получить откладывая на горизонтальной линии связи от точки A_z отрезок, равный координате y .

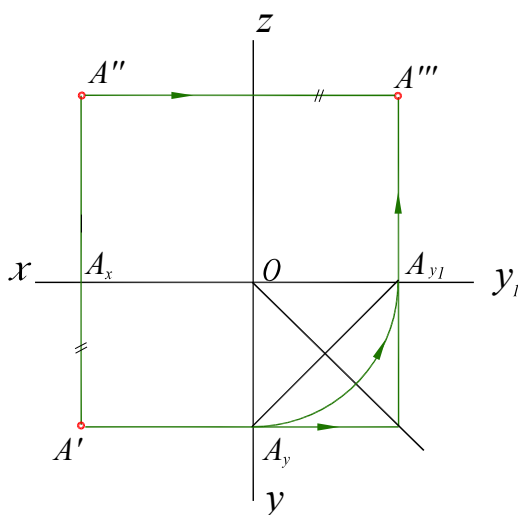


Рис. 1.13

Как известно, положение точки в пространстве может быть задано при помощи трех ее координат (абсциссы – X , ординаты – Y , аппликаты – Z) т.е. трех чисел, выражающих

расстояния от этой точки до трех плоскостей проекций. Запись координат точки производится в такой форме : $A(x, y, z)$.

Предположим, задана точка $A(15, 20, 30)$; эта запись означает, что точка A определяется координатами $x = 15, y = 20, z = 30$). Если масштаб для построения чертежа задан или выбран, то построение проводят так, как показано на рис. 1.12, 1.13 – откладывается на оси x от точки O отрезок $OA_x = 15$, а на перпендикуляре к этой оси, проведенном из точки A_x , откладывают отрезки $A_xA' = 20$ и $A_xA'' = 30$. Затем строят профильную проекцию A''' , как описано выше.

В дальнейшем все геометрические элементы (точки, прямые, фигуры, тела) будем располагать в I четверти (I октанте) пространства.

1.6. Примеры решения задач к главе 1

Пример 1. По заданным координатам точки $A(15, 20, 30)$ построить ее проекции и наглядное изображение в пространстве (рис. 1.14).

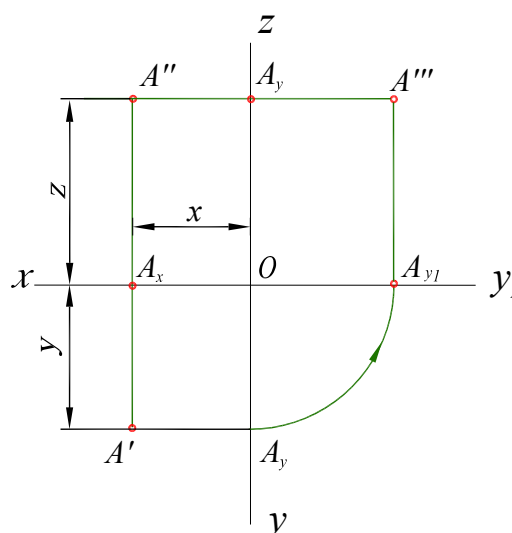


Рис. 1.14

- Выбираем масштаб 1:1 для решения задачи.
- По оси Ox откладываем $x = 15$ (точка A_x).
- В точке A_x восстанавливаем перпендикуляр к оси Ox (линию связи) и отложив на нем $y = 20$ и $z = 30$ получим соответственно точку A' – горизонтальную проекцию точки A , и точку A'' – фронтальную проекцию точки A .
- Затем из точки A' опустим перпендикуляр на ось Oy (точка A_y).
- Радиусом OA_y переносим точку A_y на ось Oy_1 (точка A_{y1}).
- Из точки A_{y1} восстанавливаем перпендикуляр к оси Oy_1 .
- Из точки A'' проводим линию связи $A''A_z$. В пересечении линии связи и перпендикуляра получим точку A''' – профильную проекцию точки A .

Для определения положения точки в пространстве построим ее аксонометрическую проекцию. Для этого воспользуемся известной из средней школы косоугольной фронтальной диметрической проекцией. Аксонометрические оси u этой проекции расположены так, как это показано на рис. 1.15.

Отметим, что коэффициент искажения по осям x и z равен 1, а по оси y равен 0,5, т.е. численные значения координаты y необходимо уменьшать в два раза.

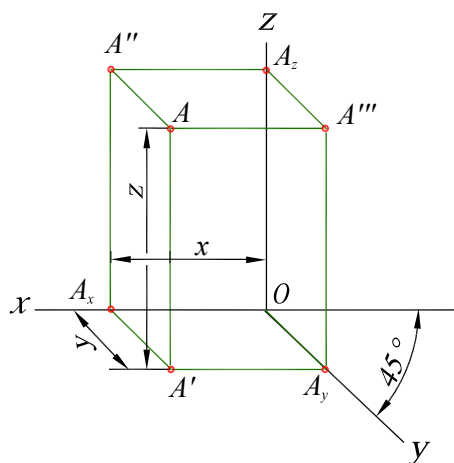


Рис. 1.15

Отложив по осям значения координат ($x = 15$, $y = 20$, $z = 30$) как это показано на рис. 1.15, получим аксонометрическую проекцию точки A .

Пример 2. Построить недостающие проекции точек A, B, C, D (рис. 1.16). Заданные проекции этих точек на чертеже показаны черными точками.

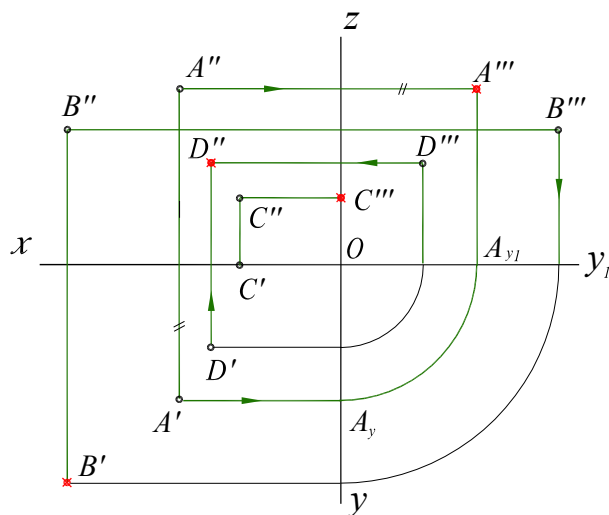


Рис. 1.16

Недостающие проекции точек строят с помощью линий связи между проекциями, направление которых указано стрелками. Выполнив необходимые построения, приведенные на чертеже, получим искомые проекции точек, отмеченные красными точками и крестиками.

1.7. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется прямоугольной проекцией точки?
2. В чем состоит сущность способа получения на плоскости изображения пространственной фигуры?
3. Сформулируйте основные свойства прямоугольного проецирования.
4. Как называются и обозначаются плоскости проекций?
5. Что называется горизонтальной, фронтальной и профильной проекцией точки?
6. Какой способ используется для получения чертежа точки в системе двух и трех проекций? Какая существует зависимость во взаимном расположении проекций точки, изображенной в системе двух и трех проекций?
7. Как обозначаются проекции точек?
8. В какой последовательности записываются координаты точек?

Глава 2 Прямая

2.1. Проекция отрезка прямой линии

Как известно из элементарной геометрии, прямая линия определяется двумя точками, поэтому, чтобы построить проекции этой прямой, необходимо иметь проекции двух точек, принадлежащих этой прямой.

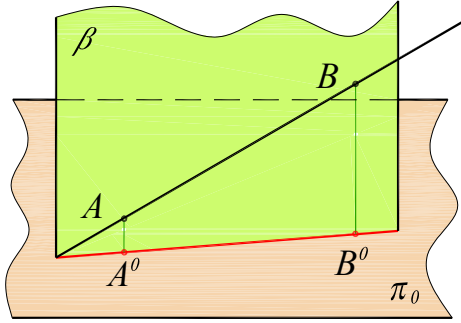


Рис. 2.1

Возьмем на произвольной прямой две точки A и B (рис.2.1). Их проекции A^0 и B^0 на плоскости π_0 определяют прямую, которую можно рассматривать как линию пересечения плоскости π_0 с плоскостью β определяемой прямой AB и проецирующими лучами AA^0 и BB^0 . Линия пересечения плоскостей π_0 и β проходит через проекции A^0 и B^0 на плоскости π_0 . Эта линия и является одноименной проекцией прямой на плоскости проекций π_0 .

Одна проекция прямой не определяет ее положения в пространстве. Две проекции прямой вполне определяют ее положение в пространстве.

2.2. Прямые общего и частного положения

Прямые в пространстве могут занимать относительно плоскостей проекций различное положение.

Прямую, не параллельную ни одной из плоскостей проекций, называют *прямой общего положения*. На рис. 2.2, а дано пространственное изображение, а на рис.2.2, б – чертеж прямой AB . Точки A и B находятся на разных расстояниях от каждой из плоскостей пространства, т.е. прямая AB не параллельна ни одной из них. Значит, прямая AB общего положения.

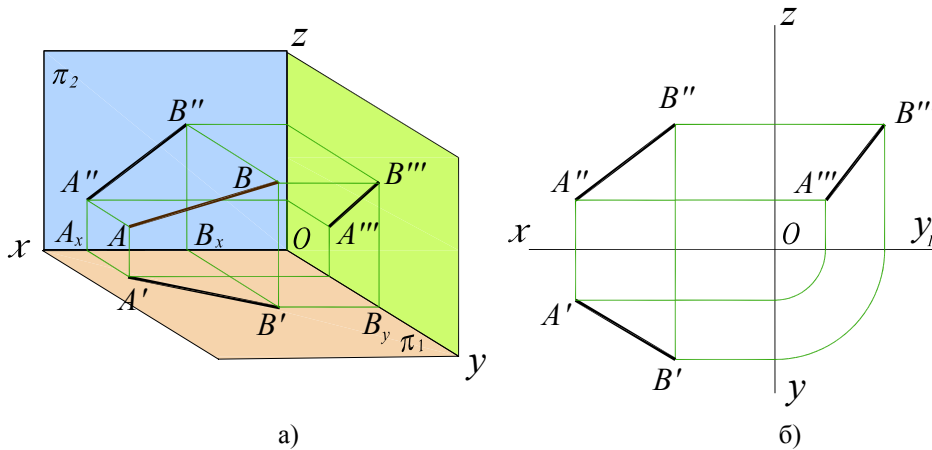


Рис. 2.2.

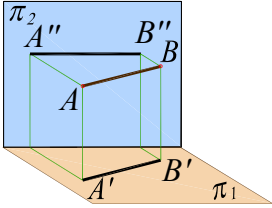
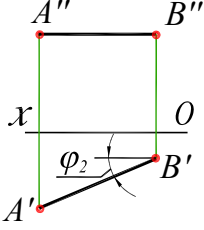
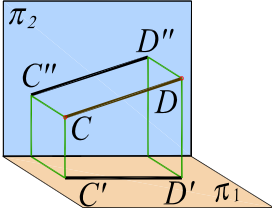
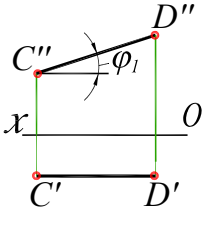
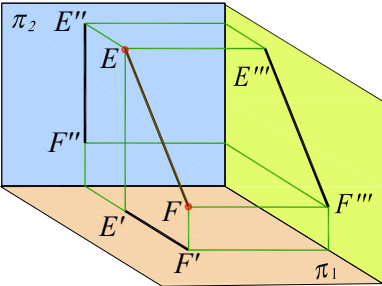
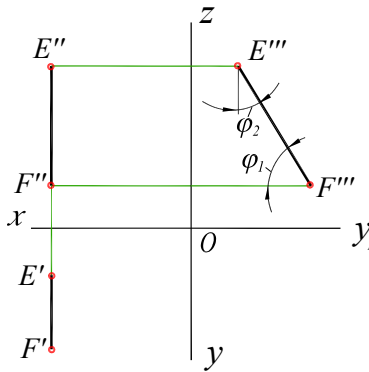
Прямые, параллельные или перпендикулярные к плоскостям проекций, называются *прямыми частного положения*. Прямая, параллельная какой-либо одной плоскости проекций, называется *прямой уровня*. Существуют три линии уровня:

- 1) горизонтальная – прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций π_1 ;
- 2) фронтальная – прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций π_2 ;
- 3) профильная – прямая, параллельная профильной плоскости проекций π_3 .

Характерные особенности прямых уровня и их проекций приведены в таблице 2.1.

Прямые уровня

Таблица 2.1

Наименование и положение прямой	Наглядное изображение прямой	Чертеж прямой	Особенности проекций прямой
Горизонтальная, $AB \parallel \pi_1$			<p>$A''B'' \parallel O_x$; $A'B'$ – натуральная величина; φ_2 – угол наклона прямой AB к плоскости π_2</p>
Фронтальная, $CD \parallel \pi_2$			<p>$C'D' \parallel O_x$; $C''D''$ – натуральная величина; φ_1 – угол наклона прямой CD к плоскости π_1</p>
Профильная, $EF \parallel \pi_3$			<p>$E'F'$ и $E''F'' \perp O_x$; $E'''F'''$ – натуральная величина; φ_1 и φ_2 – углы наклона прямой EF соответственно к плоскостям π_1 и π_2</p>

Прямая, перпендикулярная к плоскостям проекций, называется *проецирующей*.
 Различают три проецирующие прямые:

- 1) горизонтально-проецирующая – прямая, перпендикулярная к плоскости π_1 ;
- 2) фронтально-проецирующая – прямая, перпендикулярная к плоскости π_2 ;
- 3) профильно проецирующая – прямая, перпендикулярная к плоскости π_3 .

Характерные особенности проецирующих прямых и их проекции приведены в таблице 2.2.

Проецирующие прямые

Таблица 2.2

Наименование и положение прямой	Наглядное изображение прямой	Чертеж прямой	Особенности проекций прямой
Горизонтально-проецирующая			$E''F''$ – вырожденная (точка); $E''F'' \parallel$ оси z
Фронтально-проецирующая			$C''D''$ – вырожденная (точка); $C'D' \parallel$ оси y
Профильнопроецирующая			$A'''B'''$ – вырожденная (точка); $A'B' \parallel A''B'' \parallel$ оси x

2.3. Следы прямой

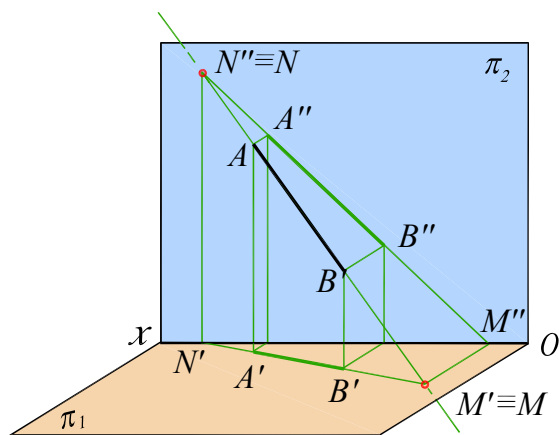


Рис. 2.3.

Точки пересечения прямой линии с плоскостями проекций называют *следами*. В системе трех плоскостей проекций прямая общего положения имеет три следа – горизонтальный, фронтальный и профильный; прямая, параллельная одной из плоскостей проекций – два, и прямая, перпендикулярная к плоскости проекций – один след. На рис. 2.3. изображена прямая общего положения AB . Она пересекается с плоскостью π_1 в точке M , а с плоскостью π_2 – в точке N . Точка M (M', M'') – горизонтальный след этой прямой, а точка N (N', N'') – ее фронтальный след. Горизонтальная проекция M' горизонтального следа совпадает с самим следом M , а фронтальная проекция M'' этого следа лежит на оси проекций Ox .

Чтобы найти горизонтальный след, надо продлить фронтальную проекцию $A''B''$ (рис. 2.4) до пересечения с осью x (точка M'') и из этой точки восстановить перпендикуляр к оси x (линию связи) до пересечения с продолжением горизонтальной проекции $A'B'$.

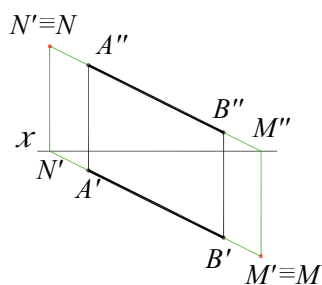


Рис. 2.4

Точка M' – горизонтальная проекция горизонтального следа, которая совпадает с самим следом M .

Для нахождения фронтального следа необходимо продолжить горизонтальную проекцию $A'B'$ до пересечения с осью x (точка N') и через точку N' , которая является горизонтальной проекцией фронтального следа, провести перпендикуляр к оси x до пересечения с продолжением фронтальной проекцией $A''B''$. Точка N'' – фронтальная проекция фронтального следа, которая совпадает с фронтальным следом N .

Отметим, что прямая не имеет следа на плоскости проекций в том случае, если она параллельна этой плоскости.

2.4. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона прямой к плоскости проекций

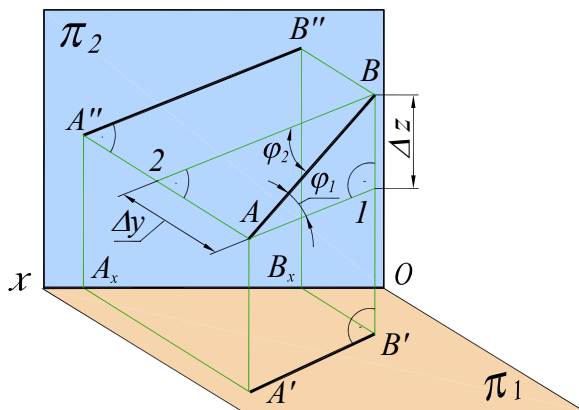


Рис. 2.5

Как отмечалось выше, отрезки прямых общего положения не проецируются в натуральную величину ни на одну из плоскостей проекций.

Длину (натуральную величину – НВ) отрезка можно определить на основании свойства ортогонального проецирования. Из рисунка 2.5 видно, что натуральная величина отрезка AB общего положения является гипотенузой прямоугольного треугольника $AB1$. В этом треугольнике один катет $A1$ параллелен плоскости π_1 и равен по длине горизонтальной проекции отрезка AB ($A1 \cong A'B'$), а величина второго катета равна разности расстояний точек B и A до плоскости проекций π_1 , т.е. $B1 = BB' - AA' = \Delta Z$.

Угол φ_1 – угол наклона прямой AB к горизонтальной плоскости проекций π_1 .

Таким образом на горизонтальной проекции чертежа отрезка (рис.2.6) можно построить прямоугольный треугольник, взяв вторым катетом ΔY . Гипотенуза этого треугольника $A'B^*$ будет натуральной величиной отрезка AB , а угол φ_1 определяет угол наклона отрезка AB к горизонтальной плоскости проекций π_1 .

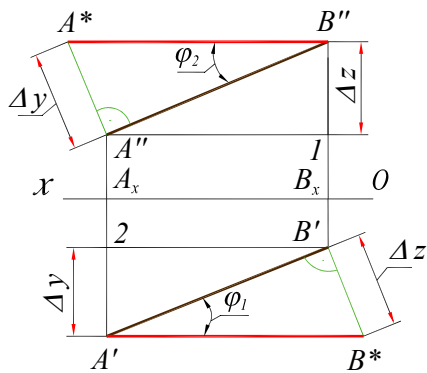


Рис. 2.6

Аналогичное построение можно сделать на фронтальной плоскости отрезка, взяв в качестве второго катета разность расстояний концов отрезка (Δz) до горизонтальной плоскости проекций π_1 . Отрезок A^*B^* – натуральная величина отрезка AB , угол φ_2 – угол наклона AB к плоскости π_1 .

Из вышесказанного вытекает, что длина (НВ) отрезка общего положения равна гипотенузе прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен проекции отрезка на плоскости проекций, а другой катет равен разности расстояний концов отрезка до этой плоскости.

2.5. Относительное положение точки. Деление отрезка прямой в данном отношении

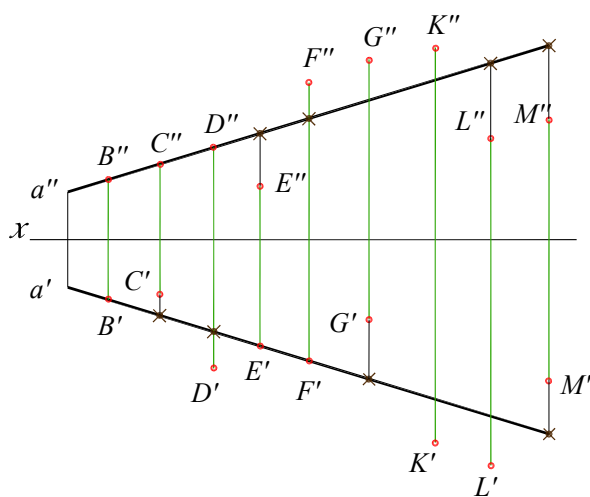


Рис. 2.7

Точка и прямая в пространстве могут занимать различное положение. Если точка принадлежит прямой, то проекции этой точки лежат на одноименных проекциях данной прямой. Точка B принадлежит прямой a (рис. 2.7), так как ее проекции B' и B'' лежат на одноименных проекциях прямой a' и a'' . Точки C, D, E, F, G, K, L, M не принадлежат прямой a , так как по крайней мере одна из проекций каждой из этих точек не лежит на соответствующей проекции прямой.

Определить положение точек, заданных на рис. 2.7, относительно прямой a можно сравнивая координаты Z и Y каждой из этих точек с соответствующей точкой (обозначенной крестиком) прямой a , лежащей на одной и той же линии связи.

Точка C находится позади прямой a ; точка D – впереди прямой a , точка E – под прямой a , точка F – под прямой a ; точка G – над и позади прямой a , точка K – над и впереди прямой a , точка L – под и впереди прямой a , точка M – под и позади прямой a .

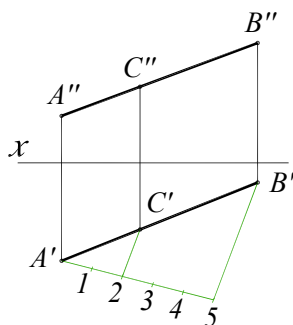


Рис. 2.8

Иногда требуется разделить отрезок в данном отношении. Из свойств параллельного проецирования известно, что отношение отрезков одной и той же прямой равно отношению проекций этих отрезков.

Чтобы разделить отрезок прямой в заданном отношении, необходимо разделить в этом отношении одну из проекций этого отрезка, а затем с помощью линий связи перенести делящую точку на другие проекции.

На рис. 2.8 дан пример деления отрезка прямой линии AB в отношении $2 : 3$. Из точки A' проведен вспомогательный отрезок прямой, на котором отложено пять одинаковых частей произвольной длины. Проведя отрезок $B'5$ и параллельно ему через точку 2 прямую, получим точку C' , причем $A'K' : K'B' = 2 : 3$; затем по линии связи находим точку C'' . Точка C делит отрезок AB в отношении $2 : 3$.

2.6. Относительное положение двух прямых в пространстве

Прямые в пространстве могут занимать различное взаимное положение – они могут быть параллельными, пересекаться и скрещиваться. Из свойств параллельного проецирования следует, что проекции параллельных прямых параллельны между собой. Действительно, если провести через данные параллельные прямые AB и CD проецирующие плоскости α и β на плоскость π_0 (рис.2.9), то эти две плоскости будут параллельны и в их пересечении с плоскостью проекций π_0 получатся две взаимно параллельные прямые $A'B^0$ и $C'D^0$, являющиеся ортогональными проекциями прямых AB и CD на плоскость π_0 .

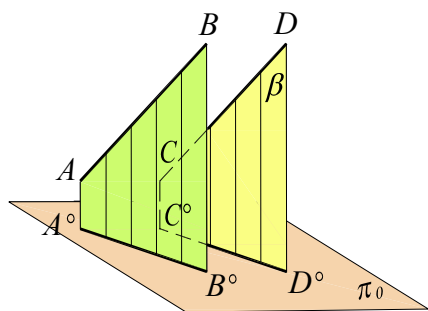


Рис.2.9.

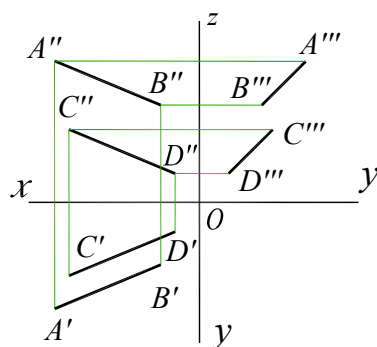


Рис.2.10

На рис. 2.10 одноименные проекции параллельных прямых AB и CD параллельны, т.е. $A'B' \parallel C'D'$, $A''B'' \parallel C''D''$, $A'''B''' \parallel C'''D'''$.

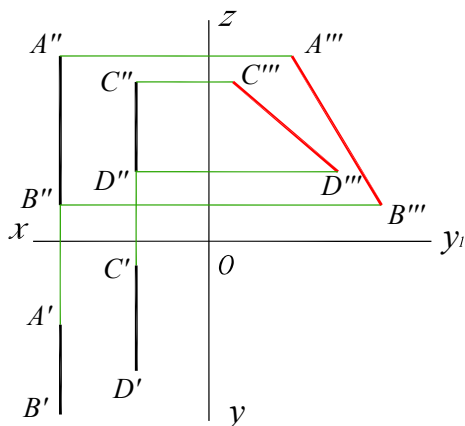


Рис.2.11

Справедливо и обратное утверждение: если в системе плоскостей проекции π_1, π_2, π_3 проекции двух прямых параллельны, то прямые в пространстве параллельны.

Это утверждение справедливо для прямых общего положения. Для прямых, параллельных одной из плоскостей проекции, оно может не подтвердиться, если заданы параллельные проекции прямых только на двух плоскостях проекций. На рис.2.11 профильные прямые AB и CD заданы параллельными проекциями $A'B' \parallel C'D'$, $A''B'' \parallel C''D''$, но сами прямые не параллельны, так как не параллельны профильные проекции $A'''B'''$ и $C'''D'''$.

Таким образом, для определения параллельности профильных прямых необходимо построить их проекции на профильной плоскости.

Если прямые в пространстве пересекаются, то на чертеже пересекаются их одноименные проекции и точки пересечения проекций этих прямых лежат на одной линии связи.

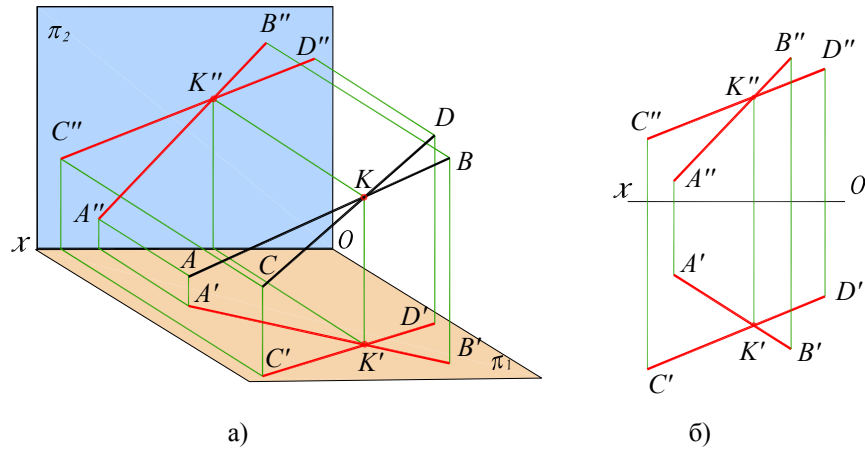


Рис. 2.12

Действительно, взаимно пересекающиеся прямые AB и CD (рис. 2.12) имеют общую точку K . Поэтому горизонтальная (K') и фронтальная (K'') проекции этой точки должны лежать на пересечении одноименных проекций данных прямых (рис. 2.12, а). На чертеже (рис. 2.12, б) проекции точки K ($K'K''$) располагаются на одном перпендикуляре к оси проекций (линии связи).

Если две прямые не параллельны и не пересекаются, то они называются скрещивающимися. Как видно из чертежа (рис. 2.12, а и б) горизонтальные проекции точек A и C (A', C') прямых m и n и фронтальные проекции точек B и D (B'', D'') сливаются в одну, так как расположены на одной проецирующей прямой. Но эти точки пересечения одноименных проекций ($A' \cong C'$ и $B'' \cong D''$) не являются общими для двух прямых и, следовательно прямые m и n скрещиваются.

Пары точек A и C , лежащие на горизонтально проецирующей прямой, или B и D , лежащие на фронтально проецирующей прямой, называются *конкурирующими*.

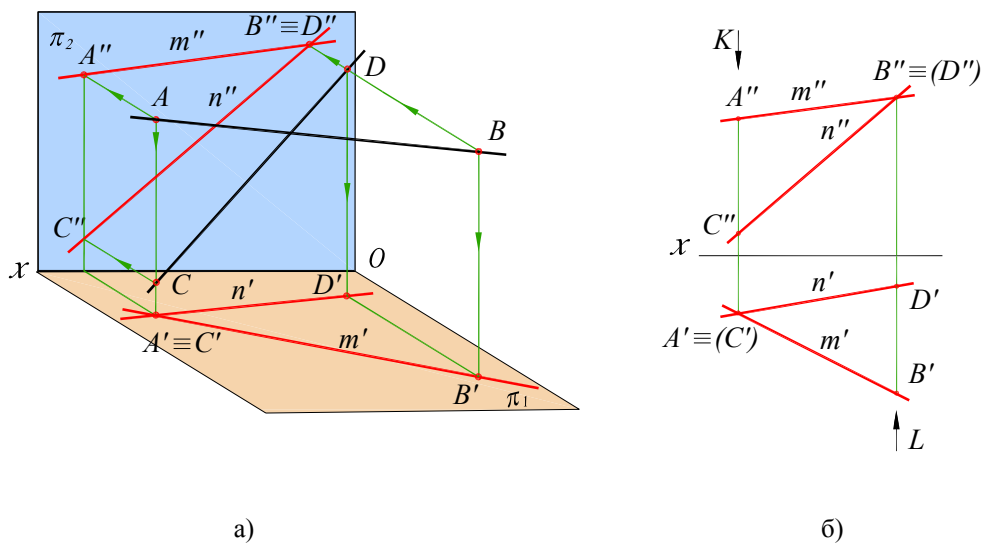


Рис. 2.13

Определим, какая из изображенных прямых (рис. 2.13, б) выше другой или ближе к наблюдателю. При взгляде сверху по стрелке K точка A закрывает точку C , так как ее фронтальная проекция A'' выше фронтальной проекции C'' (т.е. точка A'' отстоит дальше от оси Ox). Поэтому на горизонтальном изображении точка A' видна, а точки C' не видно. При взгляде спереди по стрелке L видно, что точка B прямой m закрывает точку D прямой n , т.е. точка B'' видна, а точка D'' не видна (горизонтальная проекция точки B' дальше от оси Ox). Обозначение проекций невидимых (закрытых) точек показано в скобках.

Такой способ определения видимости элементов чертежа называется способом *конкурирующих точек*.

2.7. Примеры решения задач к главе 2

Пример 1. Через точку A (рис.2.14) провести фронтальную прямую AB длиной 50мм под углом 30° к плоскости π_1 и отложить на ней отрезок $CD = 30$ мм.

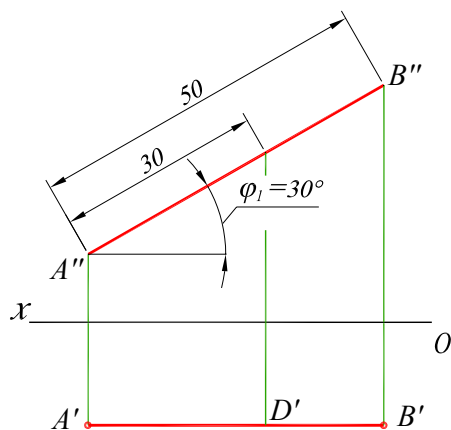


Рис. 2.14

Решение. Прямая AB параллельна фронтальной плоскости проекций π_2 и спроецируется на эту плоскость в натуральную величину, под углом 30° к оси Ox . Из точки A'' проводим прямую под углом 30° к оси Ox ($\varphi = 30^\circ$) и откладываем на ней отрезок $A''B'' = 50$ мм. Горизонтальная проекция AB ($A'B'$) параллельна оси Ox . На фронтальной проекции $A''B''$ откладываем отрезок $A''D'' = 30$ мм. По линии связи определяем горизонтальную проекцию точки D (D').

Пример 2. Построить следы прямой, проходящей через точки A и B (рис. 2.15).

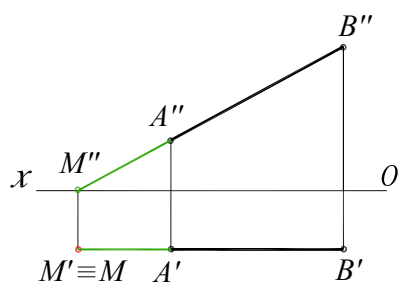


Рис. 2.15.

Решение. Проводим проекции $A'B'$ и $A''B''$ прямой AB . Из построения следует, что проекция $A'B'$ параллельна оси Ox , значит $AB \parallel \pi_2$ – фронтальная прямая и фронтального следа не имеет. Для построения горизонтального следа прямой продолжим ее фронтальную проекцию до пересечения с осью x в точке M'' , которая является фронтальной проекцией горизонтального следа прямой. Из точки M'' проводим перпендикуляр (линию связи) к оси x до пересечения с продолженной проекцией $A'B'$ в точке M' . Точка M' совпадает с самим горизонтальным следом прямой – точкой M .

Пример 3. Дана фронтальная проекция отрезка AB и горизонтальная проекция точки A . Построить горизонтальную проекцию отрезка AB , если натуральная величина его равна $l = 60$ мм.

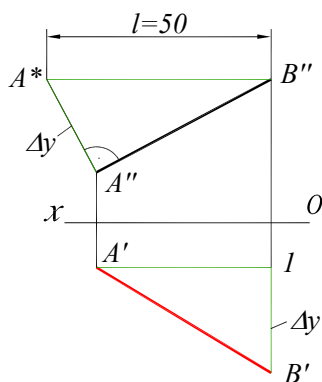


Рис. 2.16

Решение. По катету $A''B''$ и гипотенузе $l = 60$ мм строим прямоугольный треугольник $A''A^*B'$. В построенном треугольнике катет $A''A^*$ будет ΔY . Через A' проводим линию $A'1 \parallel Ox$. От точки 1 отложим ΔY и получим точку B'' . Соединив A' с B'' получим горизонтальную проекцию отрезка AB .

Пример 4. Через точку A провести прямую, пересекающую заданные прямые BC и DE (рис. 2.17).

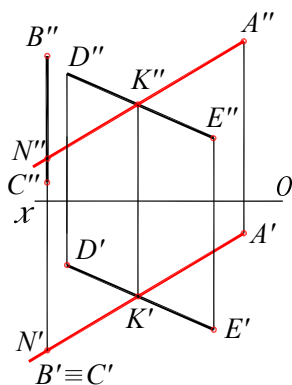


Рис. 2.17

Решение. Прямая BC ($B'C'$, $B''C''$) – горизонтально проецирующая. Горизонтальная проекция искомой прямой должна пройти через точку, являющуюся горизонтальной проекцией прямой BC . N' – горизонтальная проекция точки пересечения искомой прямой и отрезка BC . K' – горизонтальная проекция точки K пересечения искомой прямой и прямой DE . Фронтальная проекция K'' точки K лежит на перпендикуляре к оси x . Определим фронтальную проекцию K'' точки K . Через $A''K''$ проводим фронтальную проекцию искомой прямой до пересечения с прямой $B''C''$ в точке N'' .

2.8. Вопросы для самопроверки и контроля

1. Какая прямая называется прямой общего положения?
2. Какие частные положения может занимать прямая относительно плоскостей проекций?
3. Какое положение занимают на чертеже проекции прямых, параллельных плоскостям проекций, проецирующихся прямых?
4. Что называется следом прямой?
5. Сколько следов имеет прямая общего положения, прямая уровня, проецирующаяся прямая?
6. Как построить на чертеже горизонтальный и фронтальный следы прямой?
7. Как определить на чертеже взаимное положение точки и прямой?
8. Как определить натуральную величину отрезка прямой способом прямоугольного треугольника?
9. Какое взаимное положение могут быть занимать две прямые в пространстве?
10. Пояснить графические признаки параллельных прямых, пересекающихся прямых и скрещивающихся прямых на чертеже.
11. Могут ли проекции скрещивающихся прямых быть параллельными?

Глава 3 ПЛОСКОСТЬ

3.1. Задание плоскости на чертеже. Следы плоскости

Плоскостью называется поверхность, образуемая перемещением прямой линии, которая движется параллельно самой себе по неподвижной направляющей прямой.

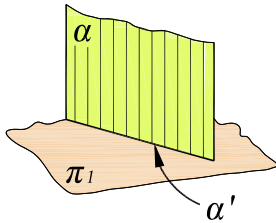


Рис. 3.1

На чертеже плоскость можно изобразить только в том случае, если она проецируется в линию. На рис. 3.1 плоскость α , расположенная перпендикулярно к плоскости π_1 , проецируется на нее прямой линией α' .

Если плоскость не перпендикулярна к плоскости проекций, то изобразить ее на чертеже невозможно, так как проекции плоскости на каждую плоскость проекций π_1, π_2, π_3 занимают полностью всю плоскость проекций. Однако ее можно

задать на чертеже, изобразив какие-либо элементы, определяющие ее. Такими элементами являются:

- 1) проекции трех точек, не лежащие на одной прямой (рис.3.2, а);
- 2) проекции прямой и точки, не лежащей на ней (рис.3.2, б);
- 3) проекции пересекающихся прямых (рис.3.2, в);
- 4) проекции двух параллельных прямых (рис. 3.2, г);
- 5) проекции плоских фигур (рис.3.2, д).

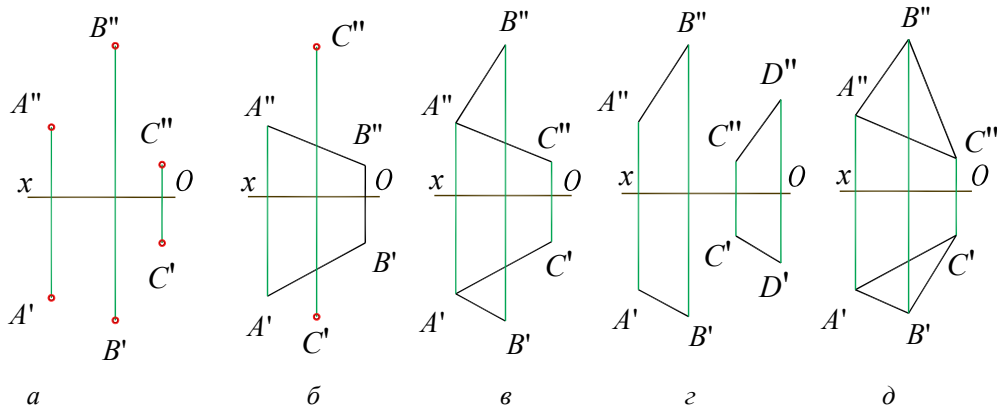


Рис. 3.2

Кроме того, плоскость может быть задана следами плоскости. *Следом плоскости* называется линия пересечения заданной плоскости с любой из плоскостей проекций.

На рис.3.3, а изображена плоскость α , которая пересекается с плоскостями проекций, и образует следующие следы:

$h_{0\alpha}$ – *горизонтальный след* – в пересечении с горизонтальной плоскостью проекций π_1 ;

$f_{0\alpha}$ – *фронтальный след* – в пересечении с фронтальной плоскостью проекций π_2 ;

$p_{0\alpha}$ – *профильный след* – в пересечении с профильной плоскостью проекций π_3 .

На чертеже плоскость задают проекциями следов $h_{0\alpha}', f_{0\alpha}'', p_{0\alpha}'''$ (рис. 3.3, б). Следы плоскости лежат на одноименных плоскостях проекций, поэтому фронтальная проекция $h_{0\alpha}''$ горизонтального следа и горизонтальная проекция $f_{0\alpha}'$ совпадают с осью x .

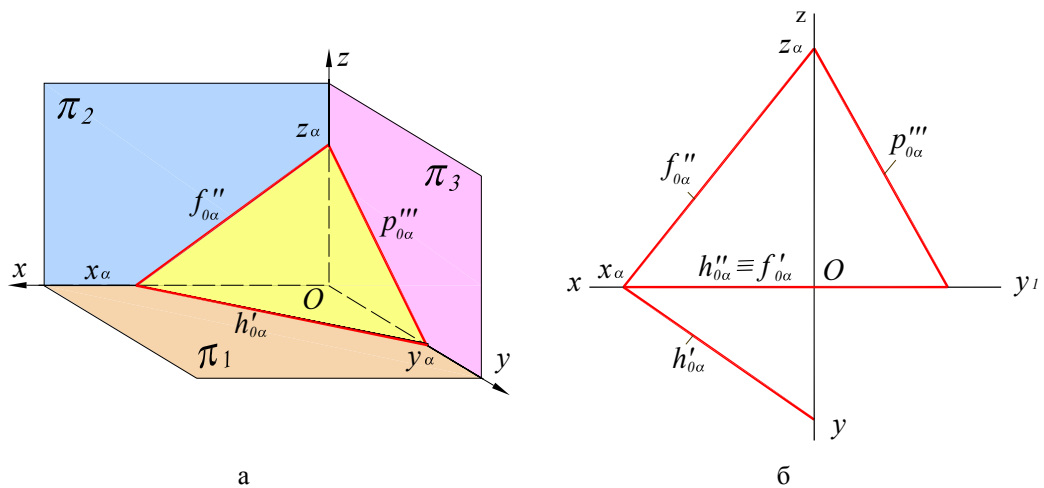


Рис. 3.3

Два следа плоскости сходятся на осях в точках x_α , y_α , z_α , которые называются *точками схода следов*.

3.2. Плоскости общего и частного положения

По отношению к плоскостям проекций плоскости могут занимать различное положение.

Плоскость, не перпендикулярную ни к одной из плоскостей проекций называют *плоскостью общего положения*.

Наглядное изображение плоскости общего положения α дано на рис.3.4, а, чертеж плоскости общего положения α , заданной плоской фигурой, приведен на рис. 3.4, б и чертеж плоскости общего положения α , заданной следами, приведен на рис.3.4, в.

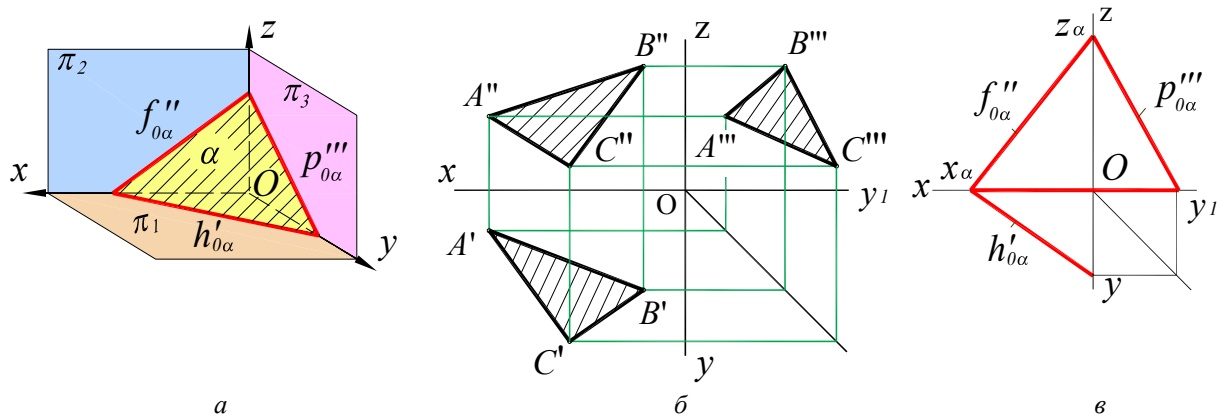


Рис. 3.4

Плоскость общего положения пересекает каждую из осей x , y , z .

Следы плоскости общего положения никогда не перпендикулярны к осям проекций.

При построении плоскости следами последние обычно ограничиваются участками, расположенными в первом октанте.

К плоскостям частного положения относятся плоскости, перпендикулярные к плоскостям проекций.

Если плоскости перпендикулярны к одной из плоскостей проекций, то они называются *проецирующими*.

Различают горизонтально-проецирующую ($\beta \perp \pi_1$), фронтально-проецирующую ($\gamma \perp \pi_2$) и профильно-проецирующую ($\delta \perp \pi_3$). Характерные особенности расположения проецирующих плоскостей приведены в таблице 3.1.

Наименование плоскости	Наглядное изображение	Плоскость задана:		Особенности проекции плоскости
		плоской фигурой	следами	
Горизонтально-проецирующая, $\beta \perp \pi_1$				$A'B'C'$ - прямая линия $f_{0\beta}'' \perp x$, $p_{0\beta}''' \perp y_1$, φ_2 – угол наклона пл. β к π_2
Фронтально-проецирующая, $\gamma \perp \pi_2$				$D'E'F'$ - прямая линия $h_{0\gamma}' \perp x$, $p_{0\gamma}''' \perp z$, φ_1 – угол наклона пл. γ к π_1
Профильно-проецирующая, $\delta \perp \pi_3$				$K''L''M''$ - прямая линия $h_{0\delta}' \parallel p_{0\delta}''' \parallel x$, φ_1 – угла наклона пл. δ к π_1 $\varphi_2 = 90^\circ - \varphi_1$

Плоскости, перпендикулярные к двум плоскостям проекций называются *плоскостями уровня*.

Плоскости уровня, являясь проецирующими одновременно параллельны одной из плоскостей проекций.

К ним относятся:

- 1 *Горизонтальная плоскость* – перпендикулярная плоскостям π_2 и π_3 и параллельная π_1 ;
- 2 *Фронтальная плоскость* – перпендикулярная плоскостям π_1 и π_3 и параллельная π_2 ;
- 3 *Профильная плоскость* – перпендикулярная плоскостям π_1 и π_2 и параллельная π_3 .

Характерные особенности расположения проекций плоскостей уровня приведены в таблице 3.2.

Плоскости, перпендикулярные к плоскостям проекций (это проецирующие плоскости и плоскости уровня) обладают важным свойством, называемым *собирательностью*: если точка, линия или фигура расположены в плоскости проекций, то на этой плоскости проекций их проекции совпадают с проекцией проецирующей плоскости.

Наименование плоскости	Наглядное изображение	Плоскость задана:		Особенности проекции плоскости
		плоской фигурой	следами	
Горизонтальная, $\alpha \parallel \pi_1$				α'' и $\alpha''' \perp z$ Плоскость имеет две вырожденные проекции – фронтальную и профильную
Фронтальная, $\beta \parallel \pi_2$				$\beta'' \parallel x, \beta''' \parallel z$ Плоскость имеет две вырожденные проекции – горизонтальную и профильную
Профильная, $\gamma \parallel \pi_3$				γ'' и $\gamma''' \perp z$ Плоскость имеет две вырожденные проекции – горизонтальную и профильную

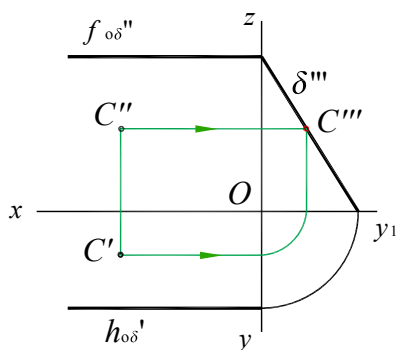


Рис. 3.5

Например, если точка C расположена в профильно-проецирующей плоскости ρ , то ее профильная проекция находится на профильном следе – проекции δ''' (рис.3.5).

Проецирующие плоскости находят широкое применение в качестве вспомогательных элементов при решении различных задач начертательной геометрии, а также используются в техническом черчении при построении разрезов и сечений на чертежах.

3.3. Прямая и точка в плоскости

К числу основных задач, решаемых на плоскости, относят: проведение любой прямой в плоскости, построение недостающей проекции точки, проверка принадлежности точки плоскости.

Решение этих задач основано на известных положениях геометрии:

1) *Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат этой плоскости.*

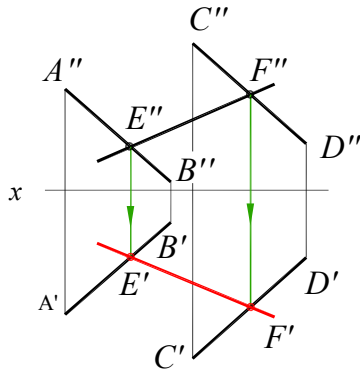


Рис. 3.6

Например, плоскость задана параллельными прямыми AB и CD (рис.3.6) требуется построить горизонтальную проекцию $E'F'$ прямой EF , лежащей в этой плоскости, если известна ее фронтальная проекция $E''F''$.

Прямые AB , CD , EF лежат в одной плоскости, поэтому точки E и F являются точками пересечения соответственно прямых AB и EF и CD и EF . По линиям связи определяем горизонтальные проекции точек F' и E' . Через точки E' и F' проводим горизонтальную проекцию прямой.

2) *Прямая будет принадлежать плоскости и в том случае, если она будет проходить через точку этой плоскости параллельно какой либо прямой, лежащей в этой плоскости.*

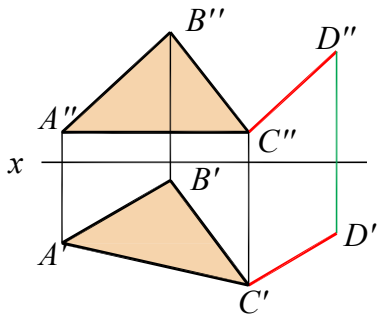


Рис. 3.7

Например, плоскость задана треугольником ABC (рис. 3.7). Требуется построить прямую, лежащую в плоскости ABC и проходящую через точку C . Через точку C проводим прямую CD , параллельную AB , ($C'D' \parallel A'B'$, $C''D'' \parallel A''B''$).

3) *Если плоскость задана на чертеже следами, то прямая принадлежит плоскости, если следы прямой лежат на одноименных следах плоскости или если она параллельна одному из следов плоскости, а с другими имеет общую точку.*

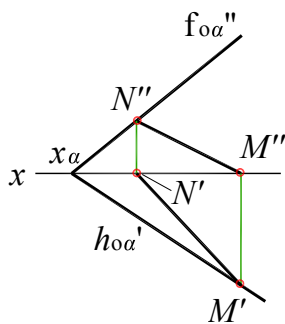


Рис. 3.8

Например, прямая MN принадлежит плоскости α (рис. 3.8), поэтому горизонтальный след M' прямой лежит на горизонтальном следе $h'_{0\alpha}$ плоскости α , а фронтальный след N'' прямой на фронтальном следе $f''_{0\alpha}$ плоскости α .

Из вышеизложенного вытекает, что для определения следов плоскости достаточно найти следы прямых, определяющих данную плоскость.

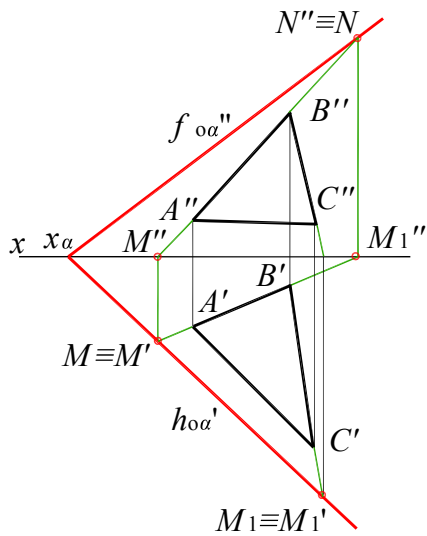


Рис.3.9

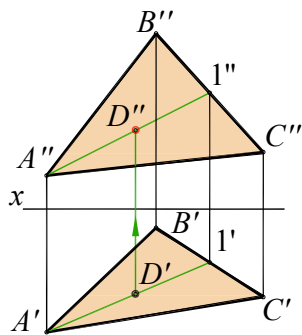


Рис. 3.10

Через следы прямых пройдут соответствующие одноименные следы плоскости.

Например, необходимо построить следы плоскости, заданной треугольником ABC (рис.3.9).

Определим горизонтальный след прямой AB . Для этого продолжим фронтальную проекцию $A''B''$ до пересечения с осью x и найдем фронтальную проекцию M'' горизонтального следа. В пересечении линии связи и продленной проекции $A''B''$ находим точку M' - горизонтальную проекцию горизонтального следа, который совпадает с горизонтальным следом M прямой AB . Аналогично находим точку M_1' - горизонтальную проекцию горизонтального следа прямой BC .

Соединив полученные точки M' и M_1' проводим горизонтальный след $h'_{0α}$. В пересечении $h'_{0α}$ с осью x получим точку схода следов $x_α$. Затем определим фронтальный след отрезка AB точку $N \equiv N''$. Соединив точку N'' с точкой $x_α$ получим фронтальный след $f''_{0α}$ плоскости ABC .

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, принадлежащей плоскости. Например, необходимо определить фронтальную проекцию точки D , принадлежащей плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 3.10). Через точку D' проведем горизонтальную проекцию прямой $A'1'$ и $A''1''$. Проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой. По линии связи находим фронтальную проекцию точки D'' .

3.4. Прямые особого положения в плоскости

К числу прямых, занимающих особое положение в плоскости, относятся *горизонтали*, *фронтали*, *профильные линии* и *линии наибольшего наклона*.

Прямая, принадлежащая данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций π_1 называется *горизонталью* плоскости.

На рис. 3.11 даны две проекции треугольника ABC .

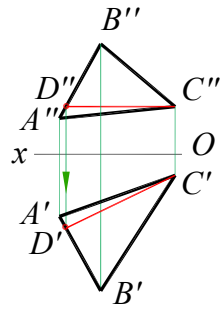


Рис.3.11

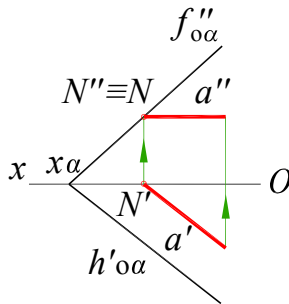


Рис. 3.12

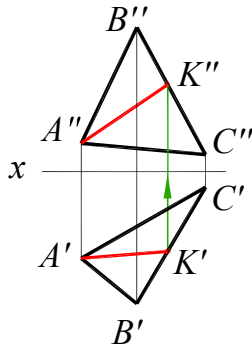


Рис.3.13

Для построения проекций горизонтали плоскости треугольника ABC , через фронтальную проекцию вершины C проводим фронтальную проекцию горизонтали $C''D'' \parallel Ox$, а затем по линиям связи строим ее горизонтальную проекцию $C'D'$. Горизонтальный след плоскости является одной из ее горизонталей (нулевая горизонталь). Фронтальная проекция горизонтали параллельна оси x .

Если плоскость задана следами (рис. 3.12), то построение в ней горизонтали можно начинать с ее горизонтальной проекции, так как горизонтальная проекция горизонтали плоскости параллельна горизонтальному следу плоскости.

При построении горизонтали плоскости α (рис. 3.12) учтено, что следы прямых, лежащих в плоскости, расположены на одноименных следах плоскости. Поэтому, проведя горизонтальную проекцию горизонтали $a' \parallel h'_{0\alpha}$, определяем горизонтальную проекцию N' , а затем фронтальную проекцию $N'' \equiv N$ фронтального следа горизонтали. Фронтальная проекция $a'' \parallel x$.

Прямая, принадлежащая данной плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций π_2 называется *фронталью плоскости*.

На рис. 3.13 построение фронтальной плоскости треугольника ABC начато с ее горизонтальной проекции $A'K' \parallel x$, а затем построена ее фронтальная проекция $A''K''$.

Если плоскость задана следами (рис.3.14), то горизонтальная проекция фронтальной плоскости $b' \parallel f''_{0\beta}$ ($f''_{0\beta}$ - нулевая фронталь), а горизонтальный след $M \equiv M'$ принадлежит горизонтальному следу $h'_{0\beta}$ этой плоскости. Горизонтальная проекция фронтальной плоскости $b' \parallel x$.

Профильной линией плоскости называется прямая, принадлежащая данной плоскости и параллельная профильной плоскости проекций π_3 . Построение на чертеже проекций профильной линии (рис.3.15) следует начинать с проведения фронтальной и горизонтальной проекций $B''D'' \parallel Oz$ $B'D' \parallel Oy$.

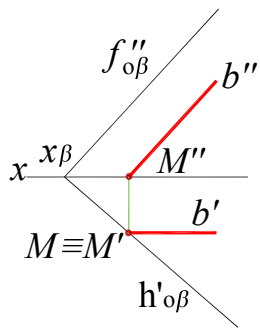


Рис. 3.14

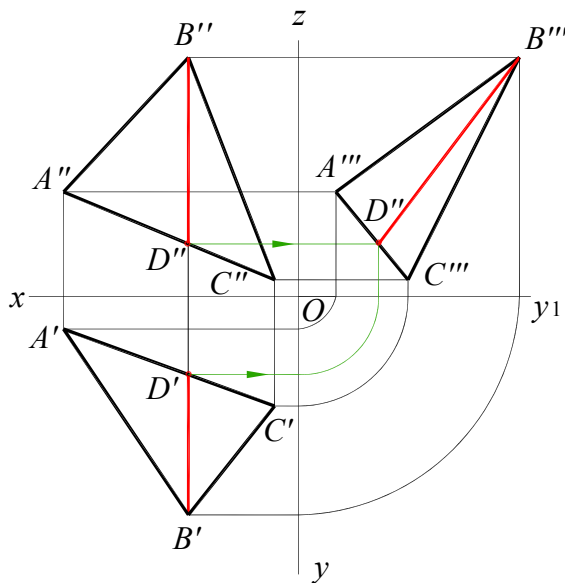


Рис.3.15

Если плоскость задана следами (рис. 3.17), горизонтальная проекция линии наибольшего наклона к π_1 перпендикулярна горизонтальному следу плоскости ($M'N' \perp h'_{o\alpha}$).

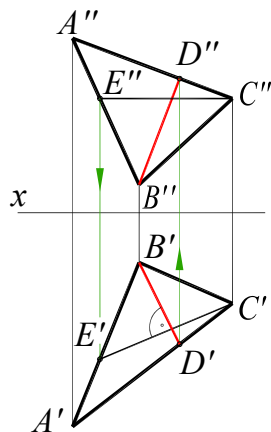


Рис. 3.16

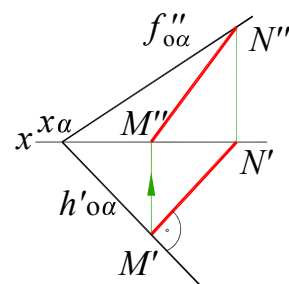


Рис. 3.17

Линия ската может служить для определения угла наклона плоскости к плоскости проекций π_1 . Аналогично, линии наибольшего наклона к плоскостям π_2 и π_3 служат для определения углов между этой плоскостью и соответственно плоскостями проекций π_2 и π_3 .

Прямая, принадлежащая данной плоскости и перпендикулярная к ее линиям особого положения называется *линией наибольшего наклона плоскости*.

В данной плоскости различают линии наибольшего наклона:

а) относительно горизонтальной плоскости проекций π_1 ;

б) относительно фронтальной плоскости проекций π_2 ;

в) относительно профильной плоскости проекций π_3 .

Линия наибольшего наклона к плоскости π_1 называется *линией ската плоскости*.

Если плоскость задана треугольником ABC (рис. 3.16), линия наибольшего наклона этой плоскости, относительно плоскости π_1 (линия ската) определяется при помощи вспомогательной горизонтали CE проведенной через точку C этого треугольника. Горизонтальную проекцию $B'D'$ линии наибольшего наклона проводим через B' перпендикулярно к горизонтальной проекции горизонтали ($B'D' \perp C'E'$), а фронтальную проекцию – через точку B'' и точку D'' построенную по точке D' с помощью линии связи.

3.5. Примеры решения задач к главе 3

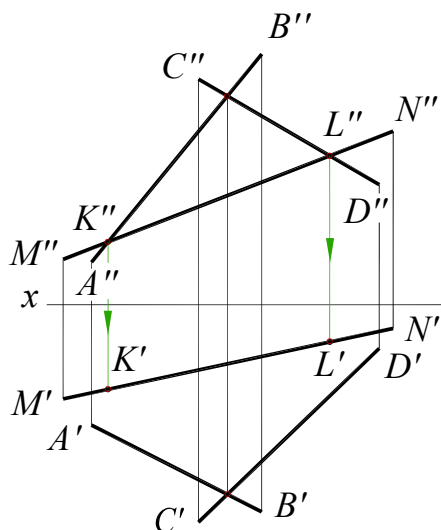


Рис. 3.18

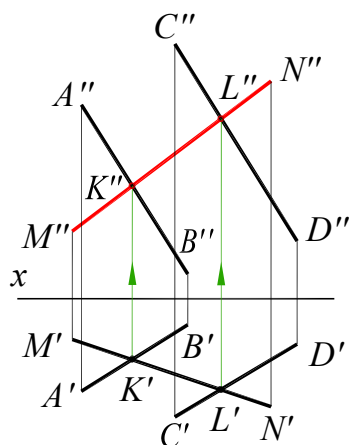


Рис. 3.19

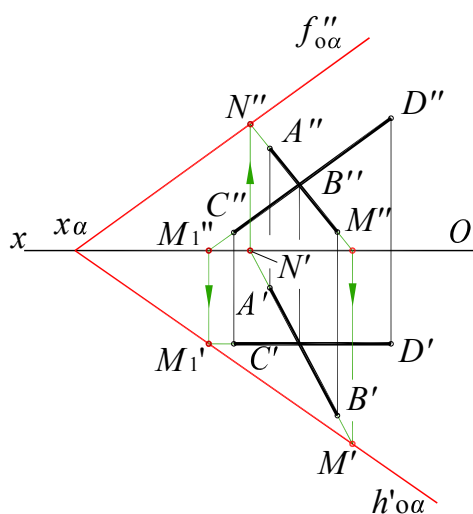


Рис.3.20

Пример 1. Плоскость задана двумя пересекающимися прямыми AB и CD . Определить лежит ли прямая MN в этой плоскости (рис. 3.18).

Обозначим точки пересечения фронтальных проекций прямых AB и MN через K'' и прямых CD и MN через L'' . Построим их горизонтальные проекции – точки K' и L' на горизонтальной проекции прямой $M'N'$. Из построения видно, что точки K ($K'K''$) и ($L' L''$) принадлежащие прямой MN не лежат в плоскости пересекающихся прямых AB и CD . Значит прямая MN не лежит в заданной плоскости.

Пример 2. Построить фронтальную проекцию отрезка прямой MN принадлежащую плоскости заданной двумя параллельными прямыми AB и CD (рис. 3.19).

Обозначим горизонтальные проекции точек пересечения прямой MN с прямыми AB и CD соответственно K' и L' . По линиям связи определяем их фронтальные проекции K'' и L'' и проводим искомую проекцию $M''N''$.

Пример 3. Построить следы плоскости α заданной двумя пересекающимися прямыми AB и CD (рис. 3.20).

Находим горизонтальные следы M ($M' M''$) и M_1 ($M_1' M_1''$) прямых AB и CD . Проводим горизонтальный след $h'_{o\alpha}$ плоскости α через точки M' и M_1' до пересечения с осью x и находим точку схода следов x_α . Затем находим фронтальный след N ($N' N''$) прямой AB . Соединив точки N'' и x_α , находим фронтальный след $f''_{o\alpha}$ плоскости α .

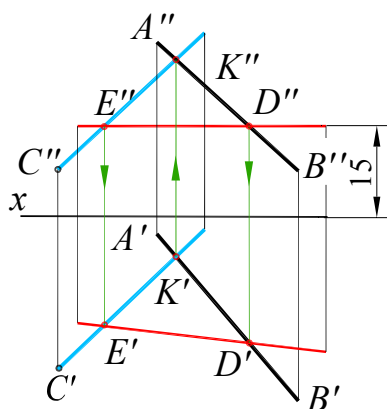


Рис. 3.21

Пример 4. В плоскости, заданной прямой AB и точкой C , провести горизонталь на расстоянии 15 мм от горизонтальной плоскости проекций π_1 (рис. 3.21).

Зададим исходную плоскость двумя пересекающимися прямыми. Для этого из точки C проведем прямую CK ($C'K'$, $C''K''$) пересекающую прямую AB в точке K ($K'K''$). Затем на расстоянии 15 мм от оси x проводим фронтальную проекцию горизонтали ED ($E''D'' \parallel x$), которая пересекает в точках D'' и E'' прямые $A''B''$ и $C''D''$. По линиям связи определяем горизонтальные проекции точек D' и E' и через них проводим горизонтальную проекцию горизонтали $E'D'$.

3.6. Вопросы для контроля

1. Как можно задать плоскость на чертеже?
2. Что такое следы плоскости?
3. Какая плоскость называется плоскостью общего положения?
4. Какая плоскость называется проецирующей?
5. Какая плоскость называется плоскостью уровня?
6. В каком случае следы плоскости сливаются в одну прямую, пересекающую ось x ?
7. Как построить точку в плоскости общего положения?
8. Как проверить принадлежит ли точка плоскости?
9. Какие линии в плоскости называются горизонталями, фронталями и профильными прямыми?
10. Что называется линией наибольшего наклона плоскости?

Глава 4

ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ, ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Задачи, связанные с определением взаимного расположения геометрических фигур, называются позиционными. Обычно в этих задачах определяется взаимная принадлежность фигур или строится линия (точки) взаимного пересечения.

Задачи на взаимную принадлежность решаются на основании таких свойств проецирования как: точка принадлежит плоскости, если она принадлежит линии плоскости; прямая линия принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат плоскости, и т.д.

Задачи на взаимное пересечение связаны с построением точек, принадлежащих одновременно двум рассматриваемым геометрическим образам (прямой и плоскости, двум плоскостям, плоскости и поверхности и т.д.).

4.1. Параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей

4.1.1. Параллельность прямой и плоскости

Определение: прямая параллельна плоскости, если в плоскости можно провести прямую, ей параллельную.

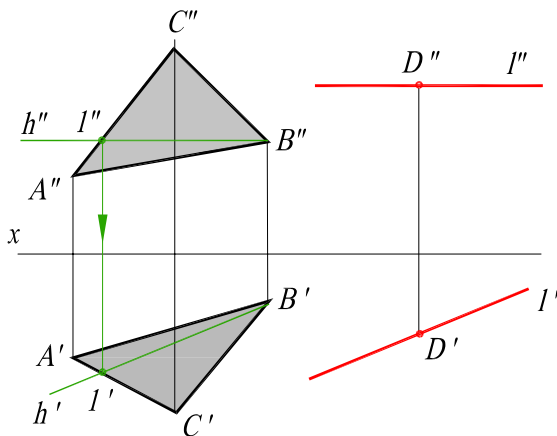


Рис. 4.1

Пример: Через точку D провести прямую, параллельную плоскости треугольника ABC .

Решение: Построение следует начинать с проведения в плоскости треугольника ABC произвольной прямой (например, горизонтали h , рис 4.1), затем через точку D проводят прямую l , параллельную h .

Иногда бывает необходимо проверить параллельность прямой m заданной плоскости. Для этого в какой-либо проекции плоскости проводят прямую, параллельную соответствующей проекции прямой m , а затем проверяют параллельность других проекций.

4.1.2. Параллельность двух плоскостей

Две плоскости параллельны в том случае, если две пересекающиеся прямые, принадлежащие одной плоскости, например AB и AC (рис. 4. 2), параллельны двум пересекающимся прямым (a и b) другой плоскости. Как следствие из этого определения вытекает: у параллельных плоскостей следы попарно параллельны (рис. 4.3).

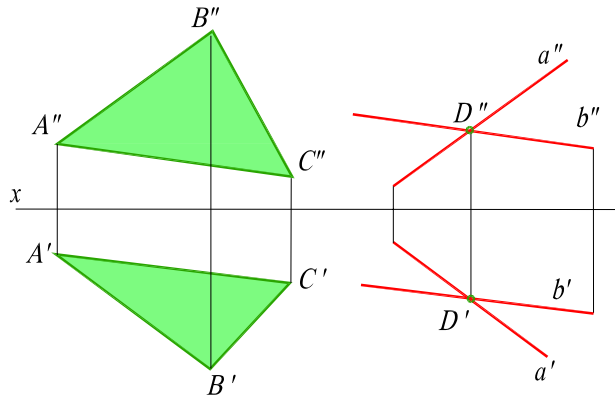


Рис. 4.2

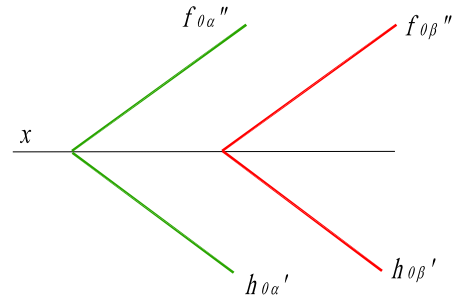


Рис. 4.3

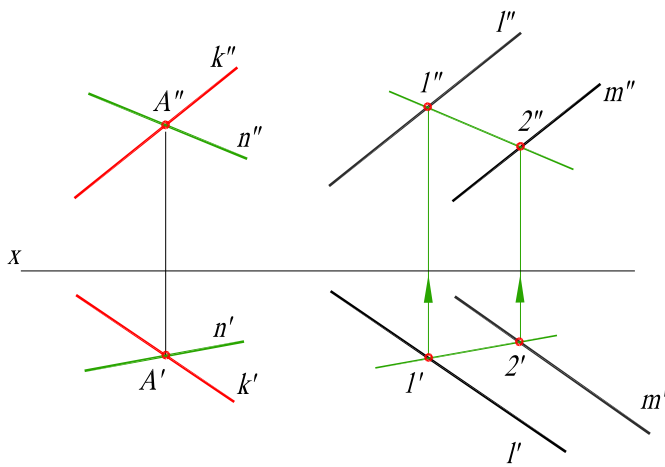


Рис. 4.4

Пример: Заданы плоскость α двумя параллельными прямыми l и m , и точка A в пространстве. Провести через эту точку плоскость, параллельную заданной (рис. 4.4).

Решение:

1. Через точку A проводим прямую k , параллельную прямым l и m , задающим плоскость α .

2. Для того чтобы получить вторую прямую, проводим в плоскости α вспомогательную прямую 1–2. Затем проводим через точку A прямую n , параллельную прямой 1–2. Так как прямые попарно параллельны, то и плоскости, которые они задают, также будут параллельны.

4.2. Пересечение прямой линии с плоскостью частного положения

К плоскостям частного положения относятся проецирующие плоскости и плоскости уровня. Так как проецирующая плоскость проецируется на перпендикулярную к ней плоскость проекций в виде прямой линии, то на этой прямой должна находиться соответствующая проекция точки пересечения прямой с проецирующей плоскостью. Благодаря этому построение выполняется достаточно просто. Примеры определения точек пересечения прямой с плоскостями частного положения даны на рис. 4.5.

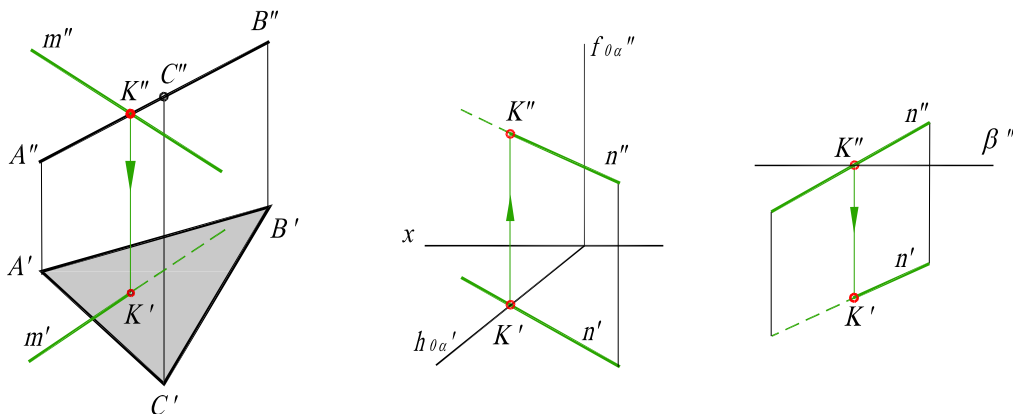


Рис. 4.5

В первом случае фронтальная проекция K'' точки пересечения прямой с плоскостью треугольника ABC находится в точке пересечения фронтальной проекции прямой с проекцией $A''B''C''$, так как треугольник ABC проецируется на плоскость проекций π_2 в виде отрезка $A''B''$. Проекция K' построена при помощи линий связи. Прямая «уходит» под плоскость, выраженную треугольником. Невидимая часть горизонтальной проекции прямой представлена штриховой линией.

Во втором примере на рис. 4.5 показано пересечение прямой общего положения с горизонтально-проецирующей плоскостью α , заданной следами. На этот раз отмечена точка K' на следе $h_{0\alpha}'$, так как этот след является и горизонтальной проекцией плоскости α .

В третьем примере построена точка пересечения прямой с горизонтальной плоскостью β , заданной ее фронтальной проекцией β'' . Во всех случаях плоскость считается «непрозрачной», что принято в построениях, связанных с плоскостями.

4.3. Пересечение двух плоскостей

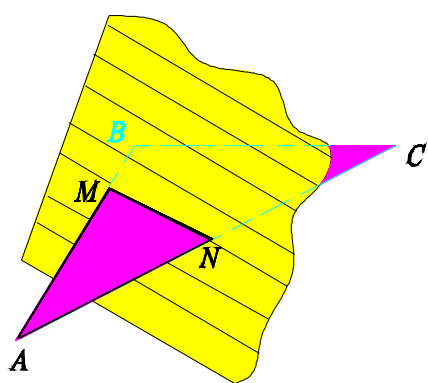


Рис. 4.6

Прямая линия, получаемая при пересечении двух плоскостей, определяется двумя точками, которые принадлежат обеим плоскостям. Из рисунка 4.6 видно, что прямая MN , по которой пересекаются между собой две плоскости, проходит через точки M и N , но в этих точках прямые AB и AC плоскости треугольника пересекают вторую плоскость, т. е. точки M и N принадлежат обеим плоскостям.

Для нахождения точек пересечения обычно приходится выполнять специальные построения. Но если хотя бы одна из пересекающихся плоскостей перпендикулярна к плоскости проекций, то построение проекций линии пересечения упрощается.

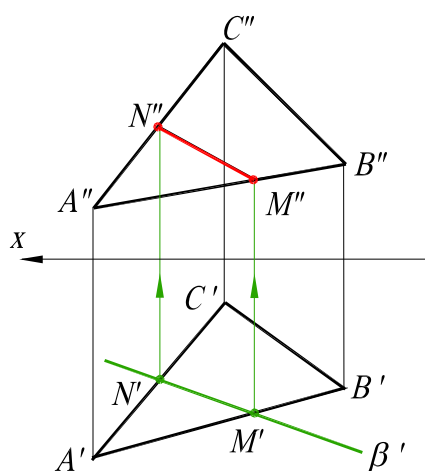


Рис. 4.7

Пример 1: Дано: плоскость общего положения α ($\triangle ABC$) и горизонтально-проецирующая плоскость $\beta \perp \pi_1$ (рис. 4.7). Построить линию пересечения этих плоскостей.

Решение: Как видно из рис. 4.7, горизонтально-проецирующая плоскость β проецируется на горизонтальную плоскость проекций в виде прямой линии. На этой же линии находится горизонтальная проекция $M'N'$ отрезка прямой, по которому пересекаются обе плоскости. С помощью линий связи находим фронтальные проекции точек M'' и N'' . В завершении определяется видимость сторон треугольника (на чертеже не показано).

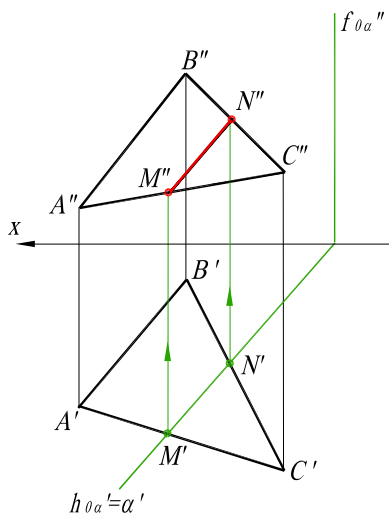


Рис. 4.8

Пример 2: Дано: плоскость общего положения (ΔABC) и следы горизонтально-проецирующей плоскости α (рис. 4.8). Построить линию пересечения этих плоскостей.

Решение: Горизонтально-проецирующая плоскость α пересекает плоскость треугольника ABC . Горизонтальная проекция линии пересечения этих плоскостей – отрезок $M'N'$ определяется на следе α' . Фронтальная проекция линии пересечения $M''N''$ строится по линиям связи.

Теперь рассмотрим общий случай построения линии пересечения двух плоскостей. Эта задача решается с использованием вспомогательных секущих плоскостей-посредников следующим образом:

- дополнительно проводят две плоскости частного положения, пересекающие заданные плоскости;
- находят линии пересечения вспомогательных плоскостей с заданными плоскостями;
- по точкам пересечения полученных линий строят искомую линию.

Пример 3: Построить линию пересечения двух плоскостей: плоскость α задана следами, плоскость β задана проекциями треугольника ABC (рис. 4.9).

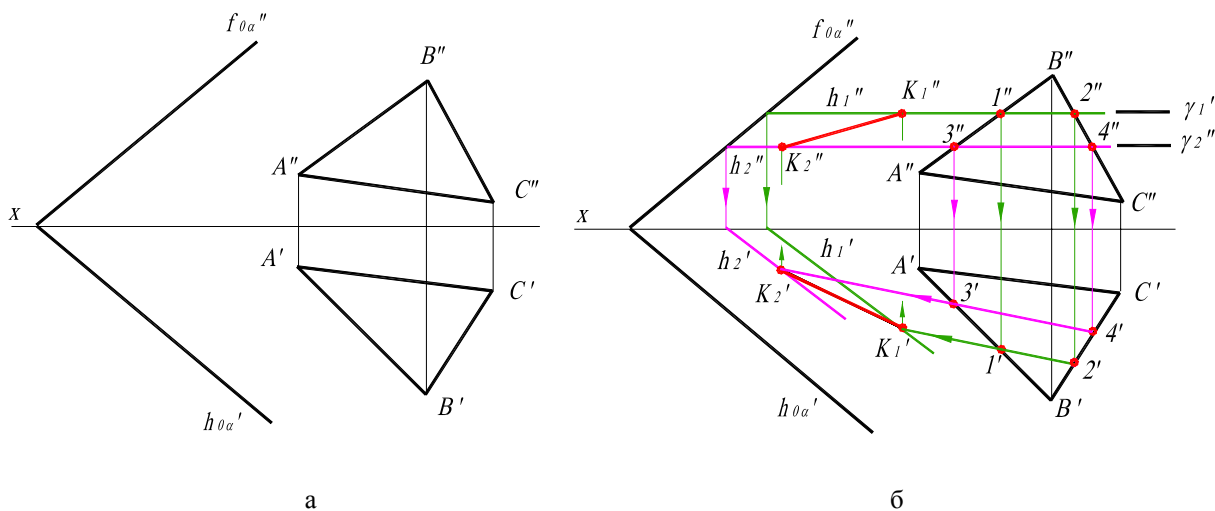


Рис. 4.9

Решение: Линию пересечения можно построить, если найти две точки K_1 и K_2 , лежащие на ней. Для нахождения точки K_1 проведем вспомогательную плоскость $\gamma_1 \parallel \pi_1$. Эта плоскость пересечет плоскость α по горизонтали h_1 (h_1', h_1''), а плоскость β по горизонтали 1–2 ($1'-2', 1''-2''$). Построение проекций видно из чертежа (рис. 4.9, б).

Пересечение горизонталей h и 1–2 даст точку K_1 (K_1', K_1''), которая принадлежит одновременно трем плоскостям α , β , γ_1 и, следовательно, находится на линии пересечения плоскостей α и β .

Для того чтобы определить K_2 , проведем вторую вспомогательную плоскость $\gamma_2 \parallel \pi_1$ и выполним те же построения, что и для плоскости γ_1 . Точки K_1 и K_2 определяют искомую прямую.

Пример 4: Построить линию пересечения двух плоскостей общего положения. Первая плоскость – плоскость α – задана пересекающимися прямыми a и b , вторая плоскость – плоскость β – задана параллельными прямыми c и d (рис. 4.10).

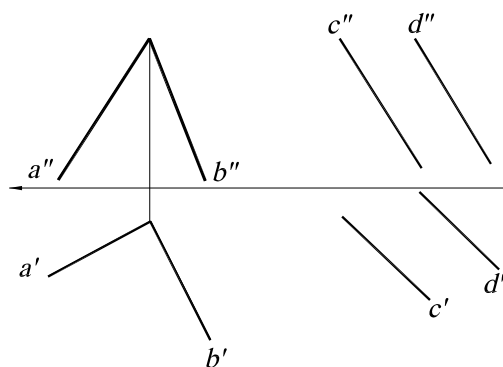


Рис. 4.10

Решение. Проведем две вспомогательные секущие плоскости γ_1 и γ_2 , параллельные горизонтальной плоскости проекций (рис. 4.11). Плоскость γ_1 пересечет прямые a и b в точках 1 и 2, а прямые c и d – в точках 3 и 4.

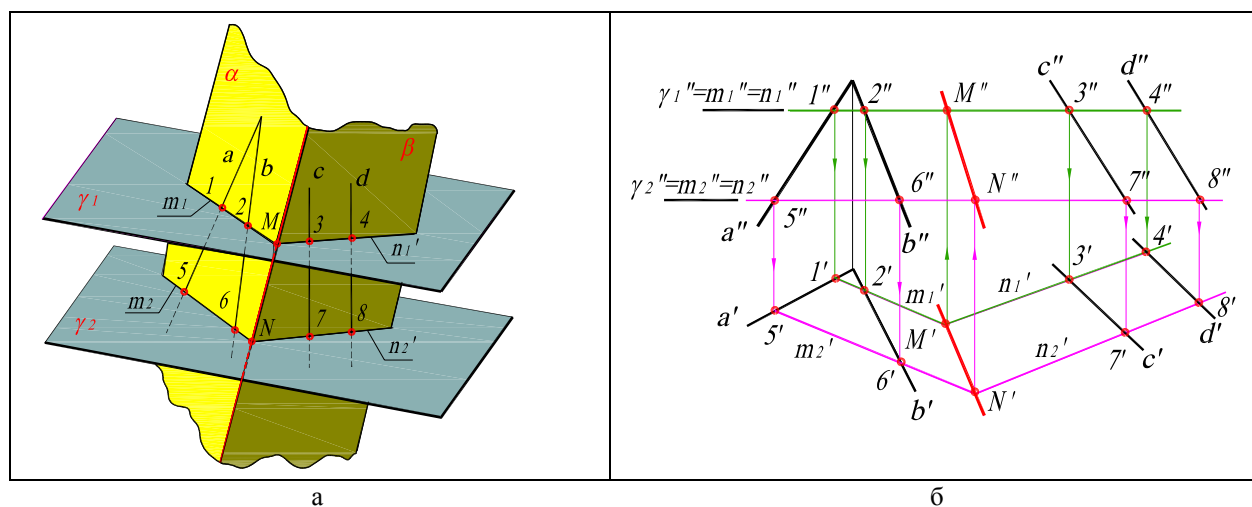


Рис. 4.11

Точки 1 и 2 принадлежат линии пересечения m_1 вспомогательной плоскости γ_1 и заданной плоскости α , а точки 3 и 4 – линии пересечения n_1 плоскостей γ_1 и β . На пересечении прямых m_1 и n_1 (горизонтальная проекция) отмечаем точку M (M'), принадлежащую линии пересечения заданных плоскостей α и β , затем по линии связи находим фронтальную проекцию этой точки M'' .

Плоскость γ_2 пересечет прямые a и b в точках 5 и 6, а прямые c и d – в точках 7 и 8. Точки 5 и 6 принадлежат линии пересечения m_2 вспомогательной плоскости γ_2 и заданной плоскости α , а точки 7 и 8 – линии пересечения n_2 плоскостей γ_2 и β . На пересечении горизонтальных проекций прямых m_2' и n_2' отмечаем точку N' , принадлежащую линии пересечения заданных плоскостей α и β , затем по линии связи находим фронтальную проекцию этой точки N'' . Прямая MN является искомой.

Если плоскости заданы их следами на плоскостях проекций, то естественно искать точки, определяющие прямую пересечения плоскостей, в точках пересечения одно-

именных следов плоскостей (рис. 4.12): прямая, проходящая через эти точки, является общей для обеих плоскостей, т.е. их линией пересечения.

Точки пересечения одноименных следов плоскостей являются следами линии пересечения этих плоскостей. Поэтому для построения проекций линии пересечения плоскостей α и β надо:

- 1) найти точку M' пересечения следов $h_{0\alpha}'$ и $h_{0\beta}'$ и точку N'' в пересечении $f_{0\alpha}''$ и $f_{0\beta}''$, а по ним – проекции M'' и N' ;
- 2) провести прямые линии $M''N''$ и $M'N'$.

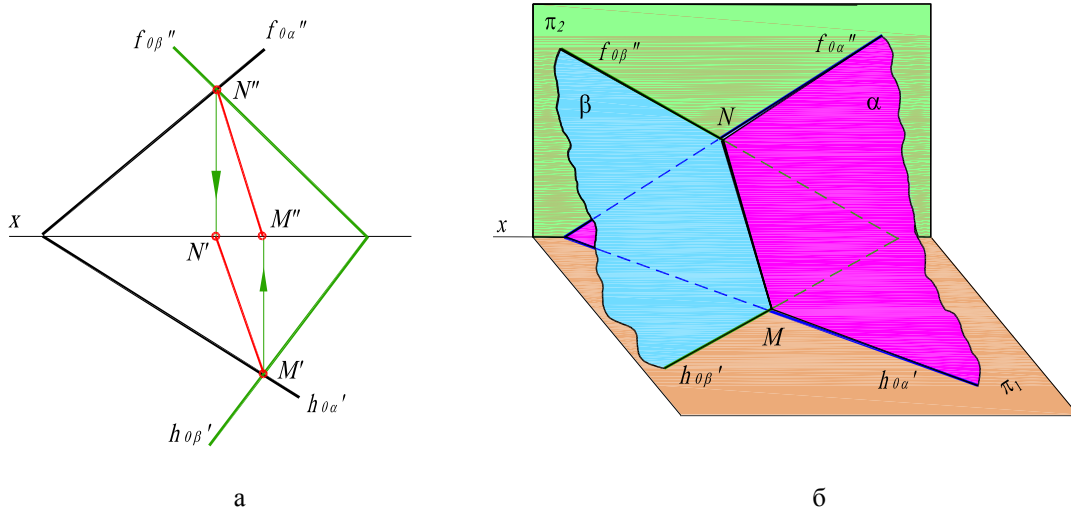


Рис. 4.12

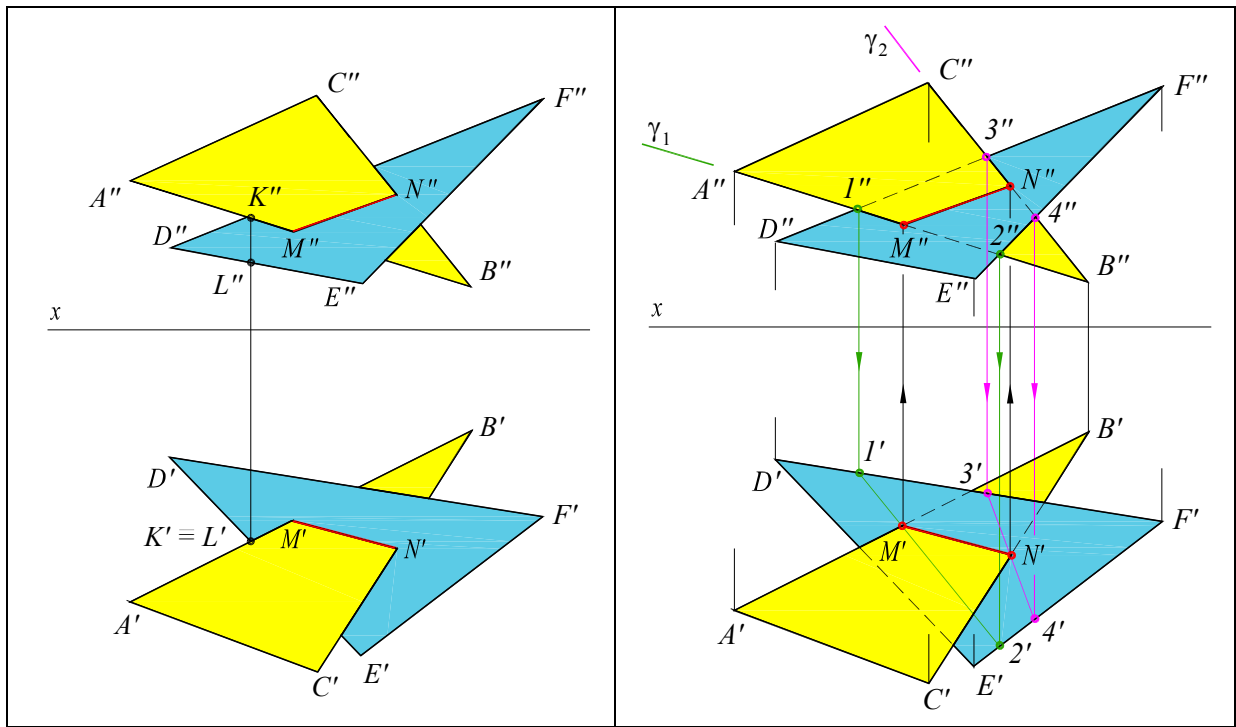
4.3.1. Пересечение двух треугольников

Как отмечено выше, для построения линии пересечения двух плоскостей общего положения используют вспомогательные секущие плоскости. Если плоскости представлены в виде многоугольников, то в этом случае находят точки пересечения прямых, принадлежащих одной плоскости, с другой плоскостью. Таким образом, если плоскости заданы треугольниками, нужно найти точку пересечения одной стороны треугольника с плоскостью общего положения, которой является второй треугольник, затем найти точку пересечения второй стороны треугольника с той же плоскостью общего положения.

Соединив эти точки прямой линией, получим прямую, по которой пересекаются треугольники (рис. 4.13, а). Как правило, в качестве секущих плоскостей используют плоскости частного положения – фронтально-проецирующие, либо горизонтально-проецирующие.

На рис. 4.13, б) приведено построение линии пересечения, которая проходит через точки M и N . Точка M найдена как точка пересечения прямой AB с плоскостью треугольника DEF . Для построения этой точки через сторону AB проведена фронтально-проецирующая плоскость γ_1 (на рисунке изображена ее фронтальная проекция γ_1'' , совпадающая с проекцией $A''B''$ прямой AB). Секущая плоскость γ_1 пересекает плоскость треугольника DEF по прямой $1-2$; точка M получается как точка пересечения прямых AB и $1-2$. Сначала находим горизонтальную проекцию точки M' , затем по линии связи строим фронтальную проекцию M'' .

Точка N линии пересечения треугольников получена с помощью второй секущей плоскости γ_2 , которая проведена через прямую BC треугольника ABC и, также как γ_1 , является фронтально-проецирующей. Фронтальная проекция секущей плоскости γ_2'' совпадает с проекцией $B''C''$ прямой BC . Плоскость γ_2 пересекает треугольник DEF по линии $3-4$. На пересечении прямых BC и $3-4$ получается точка N , принадлежащая линии пересечения двух треугольников.



а

б

Рис. 4.13

Из рис. 4.13, б видно, что сначала находится горизонтальная проекция точки N' , затем по линии связи определяется фронтальная проекция N'' .

Для определения видимости сторон треугольников надо сравнить положение двух точек, из которых одна принадлежит стороне треугольника ABC , вторая – стороне треугольника DEF и у которых совпадают либо горизонтальные, либо фронтальные проекции (конкурирующие точки). В первом случае устанавливается, какая из этих точек «закрывает» другую по отношению к горизонтальной плоскости проекций, во втором – относительно фронтальной плоскости проекций. На рис. 4.13, а в качестве примера приведены две горизонтально-конкурирующие точки – K и L . У этих точек совпадают горизонтальные проекции ($K' \equiv L'$). Но точка K принадлежит стороне AB треугольника ABC и отстоит от плоскости π_1 выше, чем точка L , принадлежащая стороне DE треугольника DEF . Следовательно, для наблюдателя, смотрящего на плоскость π_1 сверху, точка K «закрывает» точку L , а это значит, что эта часть треугольника ABC , которой принадлежит точка K , закрывает треугольник DEF . Поэтому часть горизонтальной проекции прямой $D'E'$, закрытой треугольником ABC , обычно не показывается (рис. 4.13, а), или показывается штриховой линией (рис. 4.13, б). Аналогично устанавливается взаимное положение фронтальных проекций треугольников ABC и DEF .

4.4. Пересечение прямой с плоскостью общего положения

Для определения точки пересечения прямой m с плоскостью α ($\triangle ABC$) выполняют следующие операции.

1. Через прямую m проводят проецирующую плоскость β (рис. 4.14). В данном примере проводят горизонтально проецирующую плоскость β' .

2. Определяют линию n пересечения плоскости β с плоскостью α ($\triangle ABC$). На рис. 4.14 горизонтальная проекция этой линии n' совпадает с m' по построению, а фронтальная n'' определяется проецированием точек $1'$ и $2'$ на фронтальные проекции $A''B''$ и $B''C''$ сторон треугольника ABC .

3. Находят точку K пересечения прямой m с плоскостью α . Фронтальная проекция n'' линии пересечения n пересекает m'' в точке K'' .

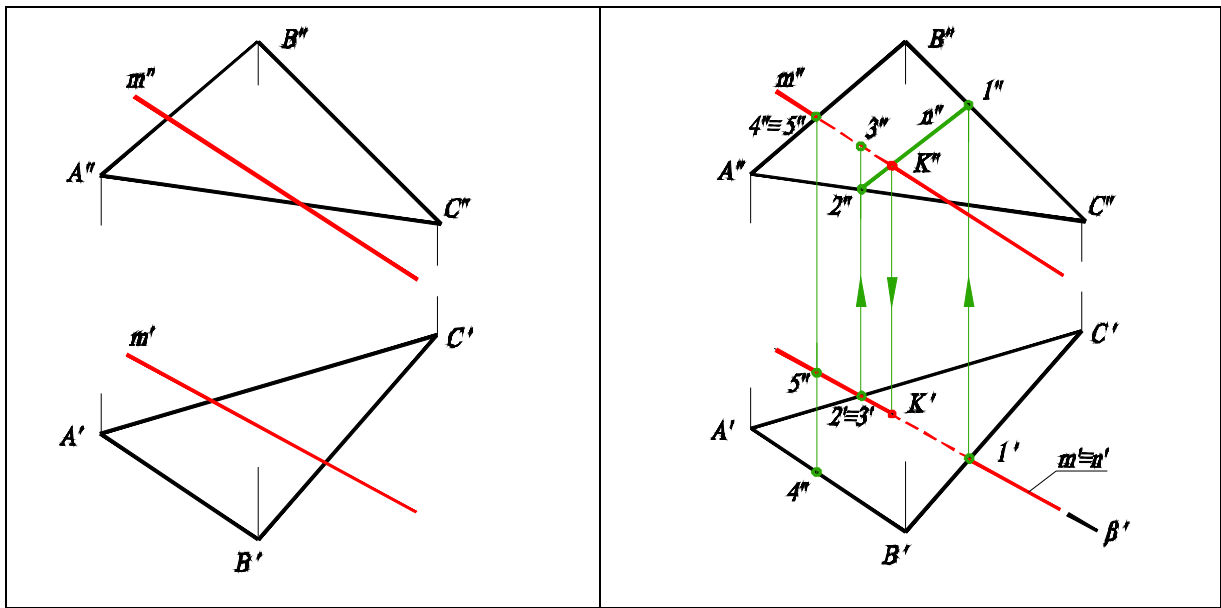


Рис. 4.14

Поскольку n лежит в плоскости α , то точка K принадлежит как плоскости α , так и прямой m , т.е. является точкой их пересечения. Ее горизонтальная проекция K' определяется проецированием K'' на m' .

Видимость прямой и плоскости относительно горизонтальной плоскости проекций определяется с помощью горизонтально конкурирующих точек 2 и 3. Точка 2 лежит на стороне AC , а 3 – на прямой m . Их фронтальные проекции $2''$ и $3''$ показывают, что точка 2 находится ниже точки 3 и поэтому на горизонтальной плоскости проекций горизонтальная проекция $2'$ точки 2 будет закрыта проекцией $3'$ точки 3. Отсюда следует, что проекция $A'C'$ стороны AC расположена ниже проекции m' и участок этой прямой с левой стороны до K' будет видимым. Относительную видимость на фронтальной плоскости проекций можно определить с помощью фронтально конкурирующих точек 4 и 5. Как показывают горизонтальные проекции этих точек $4'$ и $5'$, точка 4 лежит ближе к наблюдателю, чем точка 5, но поскольку последняя принадлежит прямой m , то участок ее фронтальной проекции $5''K''$ невидим.

На рис. 4.15 дан пример построения точки пересечения прямой AB с плоскостью общего положения α , заданной следами.

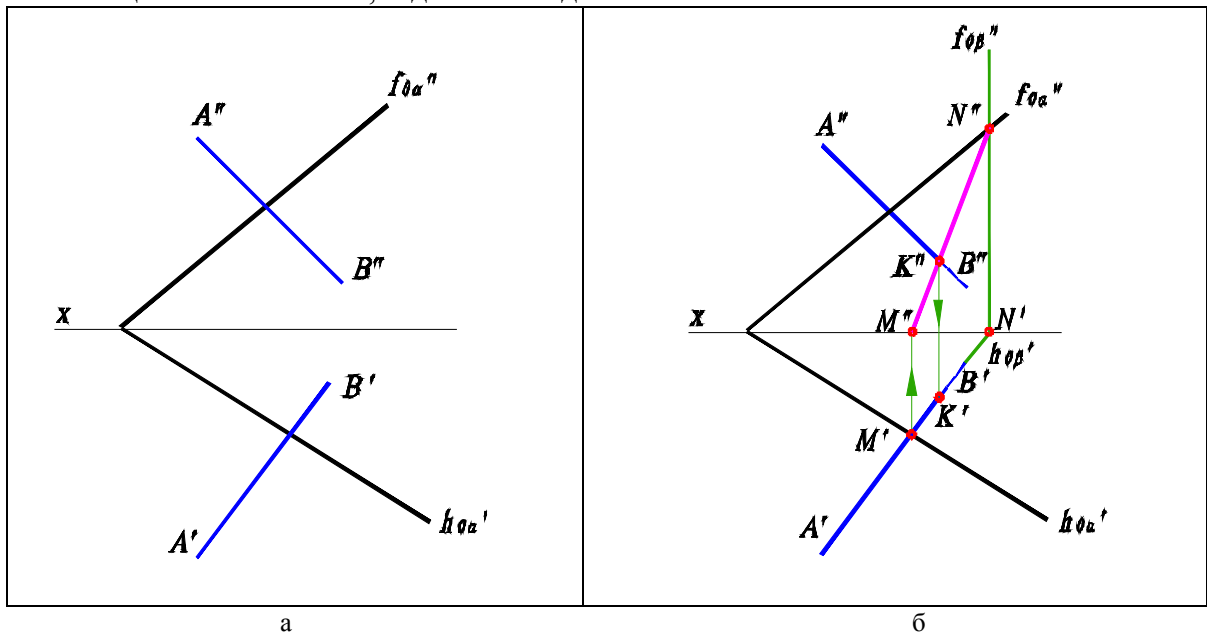


Рис. 4.15

В данном случае через прямую AB проведена горизонтально-проецирующая плоскость β . На горизонтальной плоскости проекций линия пересечения плоскостей MN совпадает с горизонтальным следом этой плоскости. Построив фронтальную проекцию прямой $M''N''$ находим фронтальную проекцию точки пересечения ее с прямой AB – K'' , после чего по линии связи находим горизонтальную проекцию точки K' . В завершении определяем видимость прямой AB относительно точки пересечения.

4.5. Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум прямым этой плоскости, например ее горизонтали и фронтали.

Пример 1: Провести перпендикуляр из точки D к плоскости треугольника ABC .

Решение задачи начинают с построения горизонтали h (h' , h'') и фронтали f (f' , f'') плоскости треугольника (см. рис. 4.16). Затем к этим прямым проводят из точки D перпендикуляр n , как показано на рисунке.

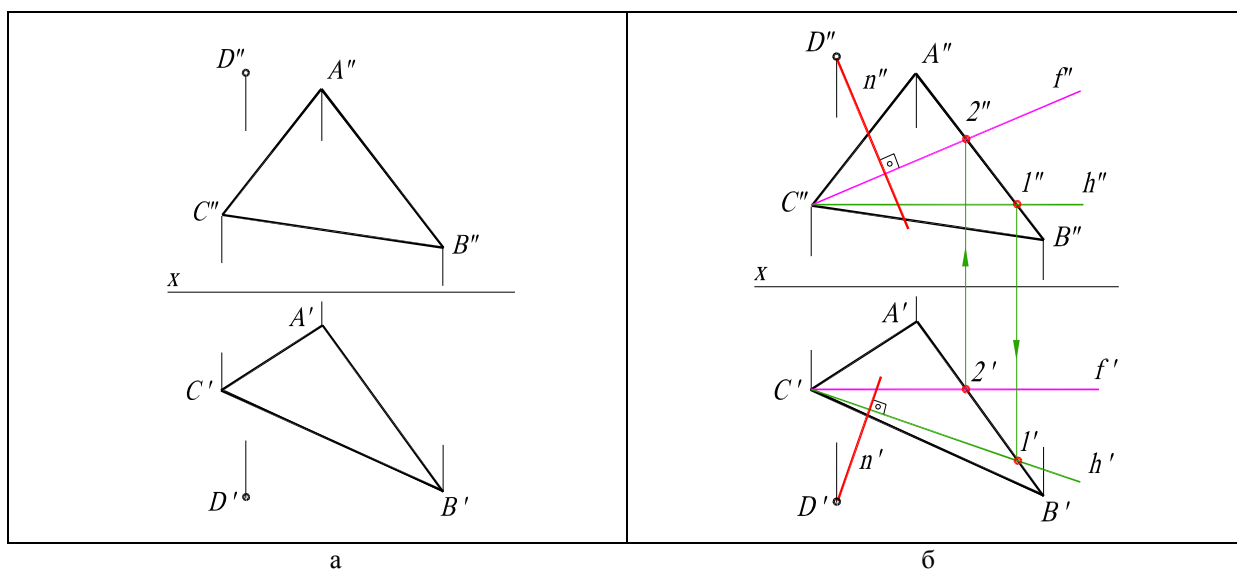


Рис. 4.16

Прямая n перпендикулярна плоскости $\alpha(ABC)$, так как $n \perp h$ и $n \perp f$ (на основании свойства ортогонального проецирования).

При построении на комплексном чертеже перпендикуляра к плоскости нужно иметь в виду следующее: если $n \perp \alpha(h \cap f)$, то фронтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна фронтальной проекции фронтали, а его горизонтальная проекция – горизонтальной проекции горизонтали ($n' \perp h'$; $n'' \perp f''$). Действительно и обратное утверждение.

Замечание: Построенный перпендикуляр не определяет расстояние от точки D до плоскости! Полученные точки пересечения перпендикуляра с фронталью и горизонталью не являются точками пересечения перпендикуляра с плоскостью. Точка пересечения находится с помощью дополнительных построений (секущих плоскостей), подобно тому, как это было рассмотрено в предыдущем подразделе.

Приведенное решение используется при определении расстояния от точки до плоскости и до других более сложных поверхностей.

Пример 2: Определить расстояние от точки C до прямой AB (рис. 4.17).

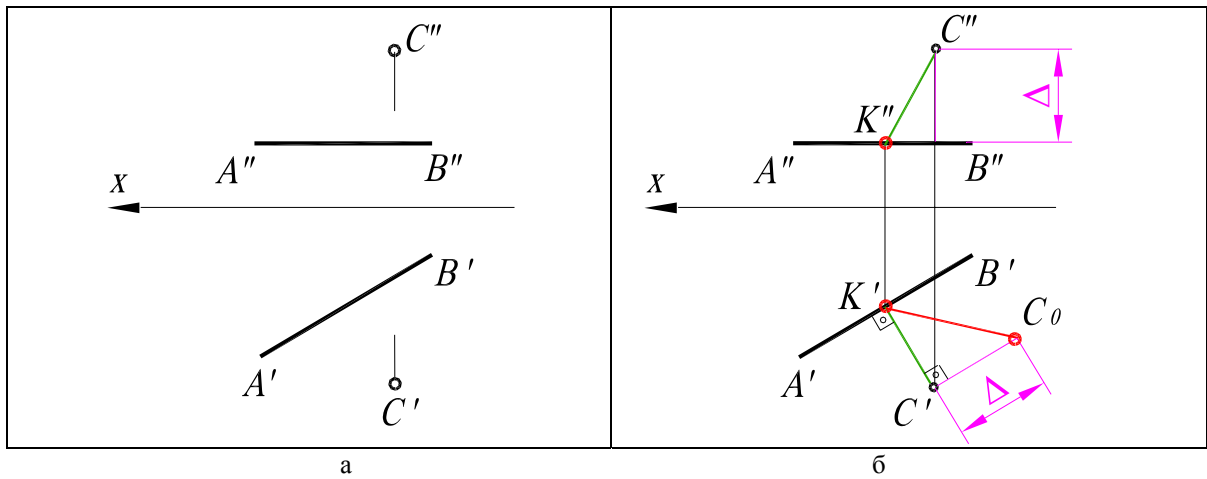


Рис. 4.17

Решение: Расстояние от точки до прямой измеряется натуральной величиной отрезка перпендикуляра, опущенного на нее из этой точки. Поскольку данная прямая – горизонталь, то в соответствии со свойством проецирования прямого угла горизонтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали. Проводим перпендикуляр из C' к $A'B'$, затем строим на его горизонтальной проекции вспомогательный прямоугольный треугольник для определения натуральной величины отрезка перпендикуляра CK .

4.6. Перпендикулярность двух плоскостей

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них содержит прямую, перпендикулярную к другой плоскости. Поэтому построение перпендикулярных плоскостей сводится к построению взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.

Пример 1: Провести через прямую m плоскость, перпендикулярную плоскости треугольника ABC (рис. 4.18).

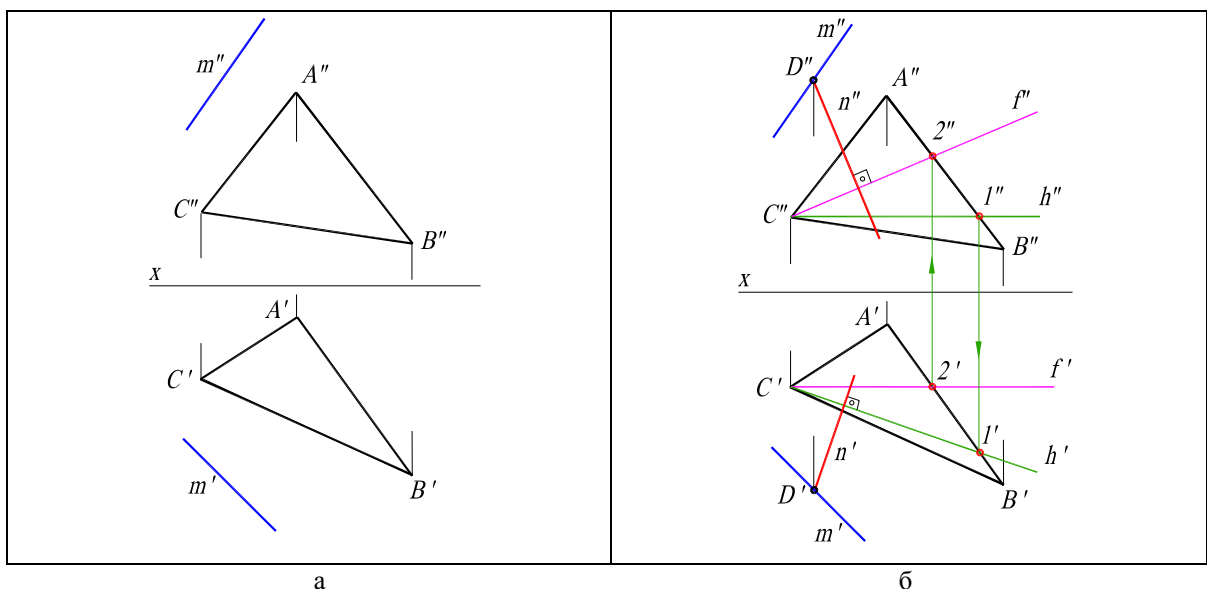


Рис. 4.18

Решение: На рис. 4.16 была рассмотрена задача на построение перпендикуляра из заданной точки к плоскости треугольника. Данная задача сводится к предыдущей, если на прямой m задать точку D и провести через нее перпендикуляр n к плоскости треугольника ABC . Полученная таким образом плоскость будет задана двумя пересекающимися прямыми, m и n , одна из которых перпендикулярна плоскости треугольника

ABC . А как известно, плоскость, содержащая перпендикуляр к другой плоскости, сама перпендикулярна этой плоскости.

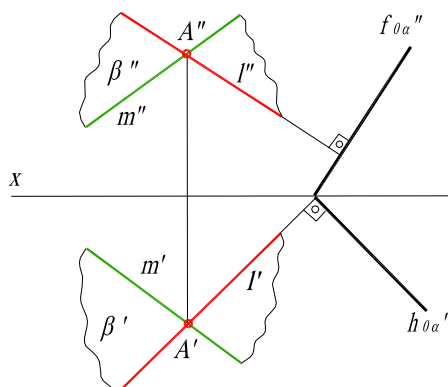


Рис. 4.19

Пример 2: Плоскость α задана следами $f_{0\alpha}''$ и $h_{\alpha 0}'$. Построить плоскость β , перпендикулярную заданной. Расстояние между плоскостями произвольное. Плоскость β задать пересекающимися прямыми (рис. 4.19).

Решение: Проводим прямую l , перпендикулярную плоскости α ($l' \perp h_{\alpha 0}'$ и $l'' \perp f_{0\alpha}''$). Затем заключаем эту прямую в какую-либо плоскость. Для этого выбираем на прямой l произвольную точку A и проводим через нее произвольную прямую m . Полученная таким образом плоскость β будет искомой, так как она задана двумя пересекающимися прямыми, m и l , из которых одна перпендикулярна плоскости α .

4.7. Перпендикулярность прямых

Определение: Две прямые перпендикулярны, если одну из них можно заключить в плоскость, перпендикулярную другой прямой.

Таким образом, чтобы провести прямую n перпендикулярно заданной прямой l , следует вначале построить плоскость $\alpha \perp l$, как это было рассмотрено в разделе 4.5, а затем в этой плоскости провести произвольную прямую. Все прямые этой плоскости будут перпендикулярны прямой l .

4.8. Вопросы для контроля

1. Как построить на чертеже плоскость, параллельную другой плоскости?
2. Как определить на чертеже расстояние от точки до прямой частного положения?
3. Как построить точку пересечения плоскости с прямой линией общего положения? Приведите примеры.
4. Покажите на примерах построение прямой и плоскости, параллельных плоскости общего положения.
5. Расскажите, как построить прямую, перпендикулярную плоскости общего положения. Приведите примеры.
6. Приведите примеры построения прямой линии, перпендикулярной проецирующей плоскости.
7. Как определить на чертеже расстояние от точки до проецирующей плоскости? Приведите примеры.
8. Сформулируйте, как построить на чертеже плоскость, перпендикулярную другой плоскости общего положения. Приведите примеры.
9. Расскажите, как построить линию пересечения двух плоскостей. Приведите пример.
10. Сформулируйте условие перпендикулярности двух прямых общего положения.

Глава 5

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

Решение пространственных задач на комплексном чертеже значительно упрощается, если интересующие нас элементы фигуры занимают частное положение. Переход от общего положения геометрической фигуры к частному выполняется следующими способами:

- 1) введением дополнительных плоскостей проекций, расположенных либо параллельно либо перпендикулярно рассматриваемому геометрическому элементу;
- 2) изменением положения линии или плоской фигуры в пространстве при неизменной системе плоскостей проекций.

Получающиеся в этом случае вырожденные проекции помогают решению многих задач по начертательной геометрии.

5.1. Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа заключается в том, что на существующих плоскостях проекций строятся дополнительные плоскости проекций, расположенные *параллельно* или *перпендикулярно* заданному геометрическому объекту. При этом новая плоскость проекций обязательно должна быть перпендикулярна к одной из имеющихся плоскостей проекций. В результате образуется новая система взаимно перпендикулярных плоскостей проекций, заменяющая прежнюю.

Введем в систему плоскостей проекций π_1/π_2 новую плоскость проекций π_4 (рис. 5.1). В результате будем иметь другую систему – π_1/π_4 . При этом проецирование остается ортогональным, т.е. новое направление проецирования S перпендикулярно плоскости π_4 . В результате получается комплексный чертеж, представленный на рис. 5.2. Можно ввести новую плоскость проекций, сохранив в качестве общей (связующей) плоскости не π_1 , а π_2 . При этом все построения проводят аналогично предыдущему случаю.

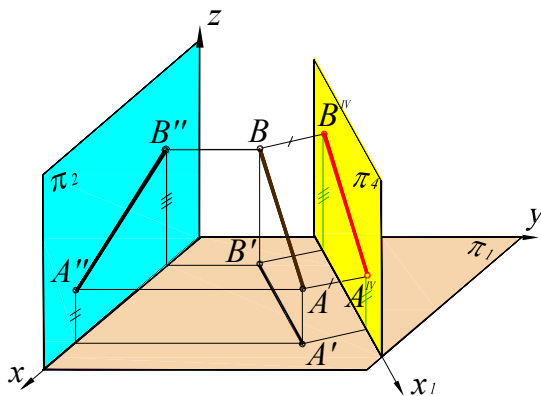


Рис. 5.1

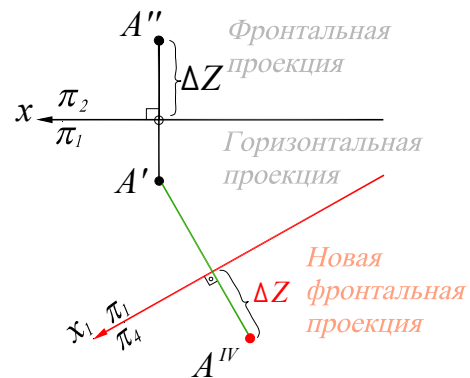


Рис. 5.2

Рассмотрим основные задачи преобразования комплексного чертежа.

5.1.1. Перевод прямой общего положения в положение прямой уровня

Для преобразования прямой AB в *прямую уровня* (т.е. параллельно плоскости проекций) (рис. 5.3) вводят новую плоскость проекций π_4 так, чтобы ось проекций x_{14} была параллельна какой-либо проекции AB (в данном случае – $A'B'$), затем откладывают на новой плоскости проекций от оси x_{14} координаты Z для построения точек A^{IV} и B^{IV} , равные координатам Z точек A'' и B'' . Новая проекция прямой $A^{IV}B^{IV}$ дает натуральную величину отрезка AB и позволяет определить угол наклона φ_1 этого отрезка к плоскости

проекций π_1 . Угол наклона отрезка AB к фронтальной плоскости проекций ϕ_2 можно определить, построив его изображение на дополнительной плоскости проекций $\pi_5 \perp \pi_2$ (рис. 5.4). Ось x_{15} параллельна фронтальной проекции отрезка $A''B''$. Проекция $A^V B^V$ также будет представлять собой натуральную величину отрезка AB .

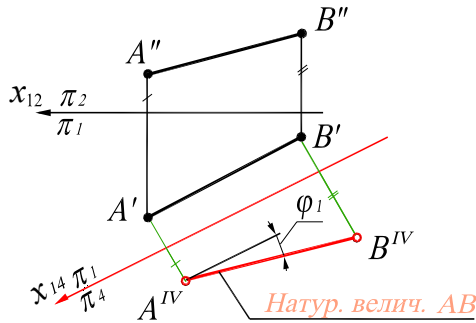


Рис. 5.3

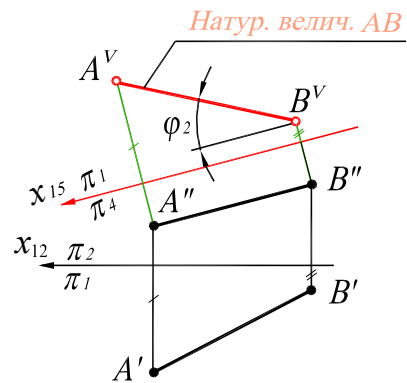


Рис. 5.4

5.1.2. Перевод прямой уровня в проецирующее положение

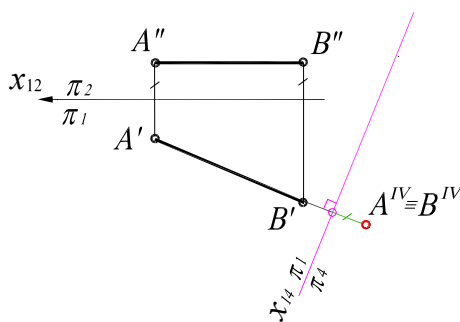


Рис. 5.5

Чтобы на новой плоскости проекций изображение прямой уровня преобразовалось в точку (рис. 5.5.), надо эту плоскость расположить перпендикулярно данной прямой, т.е. провести на комплексном чертеже ось проекций перпендикулярно направлению проекции прямой на общую плоскость проекций. Горизонталь будет иметь своей проекцией точку на плоскости $\pi_4 \perp \pi_1$. Аналогичные построения можно выполнить и для фронтали. В этом случае новая плоскость проекций $\pi_5 \perp \pi_2$.

Для построения вырожденной в точку проекции прямой общего положения необходимо последовательно решить две предыдущие задачи. Другими словами, выполняется двойная замена плоскостей проекций. В новой системе эта прямая должна стать проецирующей.

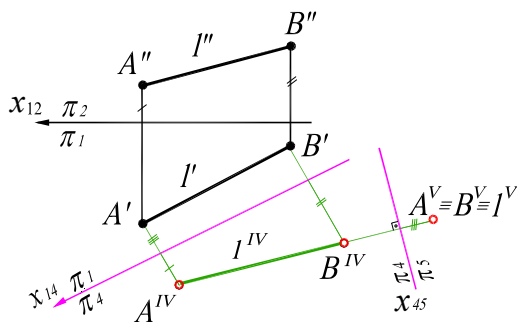


Рис. 5.6

На рис. 5.6 представлена такая задача. Прямая общего положения $l (AB)$ сначала переводится в положение прямой уровня введением плоскости проекций $\pi_4 \perp \pi_1$ ($A^IV B^IV \parallel \pi_4$), а затем в положение проецирующей прямой в системе плоскостей π_4/π_5 ($A^V B^V \perp \pi_5$). На плоскости π_5 прямая l изобразится в виде точки.

5.1.3. Перевод плоскости общего положения в проецирующее положение

Известно, что если одна плоскость перпендикулярна другой, то она должна содержать прямую, перпендикулярную этой плоскости. В качестве такой прямой для преобразований и перевода плоскости в проецирующее положение можно взять прямую уровня, например, горизонталь, как это показано на рис. 5.7.

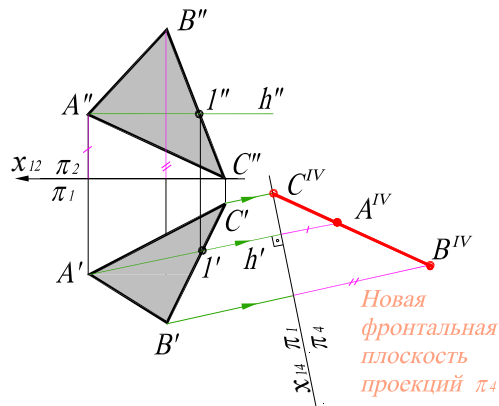


Рис. 5.7

Используя рассуждения и построения, приведенные в предыдущем разделе, переведем горизонталь h в проецирующее положение, вводя новую плоскость проекций π_4 . Проецируем точки плоскости треугольника ABC на плоскость проекций π_4 , беря их координаты Z с плоскости π_2 , т.е. заменяем плоскость π_2 на π_4 . Поскольку проекция плоскости треугольника $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ на плоскость π_4 вырождена в прямую, она будет служить геометрическим местом всех точек, принадлежащих этой плоскости.

5.1.4. Перевод проецирующей плоскости в положение плоскости уровня

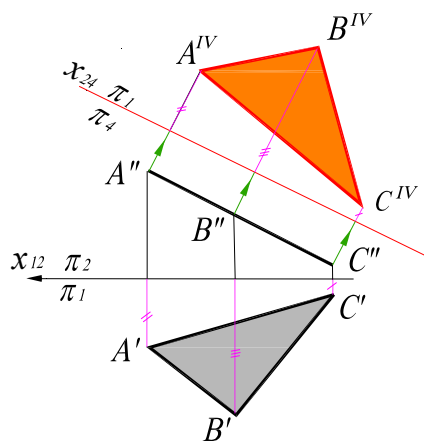


Рис. 5.8

Если заданная плоскость перпендикулярна одной из плоскостей проекций, то с помощью замены плоскостей проекций ее можно переместить в положение плоскости уровня. Решение этой задачи позволяет определить натуральную величину плоской фигуры (рис. 5.8.).

Пусть задана фронтально-проецирующая плоскость α ($\triangle ABC \perp \pi_2$). Вводим новую плоскость проекций π_4 , параллельную α . Новая ось проекций x_{24} по этой причине будет расположена параллельно α , т.е. в системе плоскостей проекций π_2 / π_4 плоскость α займет положение плоскости уровня. Треугольник ABC будет проецироваться на плоскость π_4 в натуральную величину.

5.1.5. Перевод плоскости общего положения в плоскость уровня

Если в исходном положении плоскость занимает общее положение, а нужно получить ее изображение как плоскости уровня, то прибегают к двойной замене плоскостей проекций, решая последовательно две предыдущие задачи.

Пример: Преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения стала параллельной одной из плоскостей проекций новой системы.

Пусть дан треугольник ABC , плоскость которого занимает общее положение (рис. 5.9). Нужно создать такую новую ортогональную систему плоскостей проекций, в которой плоскость треугольника займет положение, параллельное одной из них.

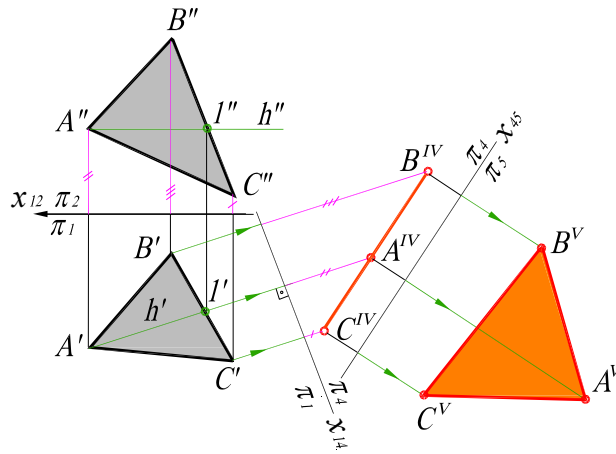


Рис. 5.9

В системе π_1/π_2 такую плоскость построить нельзя. Действительно, плоскость, параллельная треугольнику, не будет перпендикулярна ни π_1 , ни π_2 , т.е. она не образует с плоскостями проекций ортогональной системы.

Решение задачи требует двойной замены плоскостей проекций. При первой замене (π_2 на π_4) используется горизонталь треугольника h . Новая ось проекций x_{14} проводится перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали h' . Спроецировав треугольник ABC на новую плоскость проекций π_4 , получим проекцию $A^{IV}B^{IV}C^{IV} \perp \pi_4$. Этот процесс был описан выше.

На втором этапе преобразуем плоскость треугольника ABC в плоскость уровня. Для этого перейдем от системы π_1/π_4 к системе π_4/π_5 (см. рис. 5.9). Новая плоскость π_5 устанавливается параллельно треугольнику, а значит, новая ось x_{45} на чертеже проводится параллельно прямой, на которой расположены точки A^{IV}, B^{IV}, C^{IV} . Через указанные точки проводят перпендикуляры – линии связи к новой оси и откладывают на них от оси x_{45} в плоскости π_5 отрезки, равные по длине расстояниям от оси x_{14} до вершин A', B' и C' соответственно. Полученная проекция $A^VB^VC^V$ определяет истинную величину треугольника.

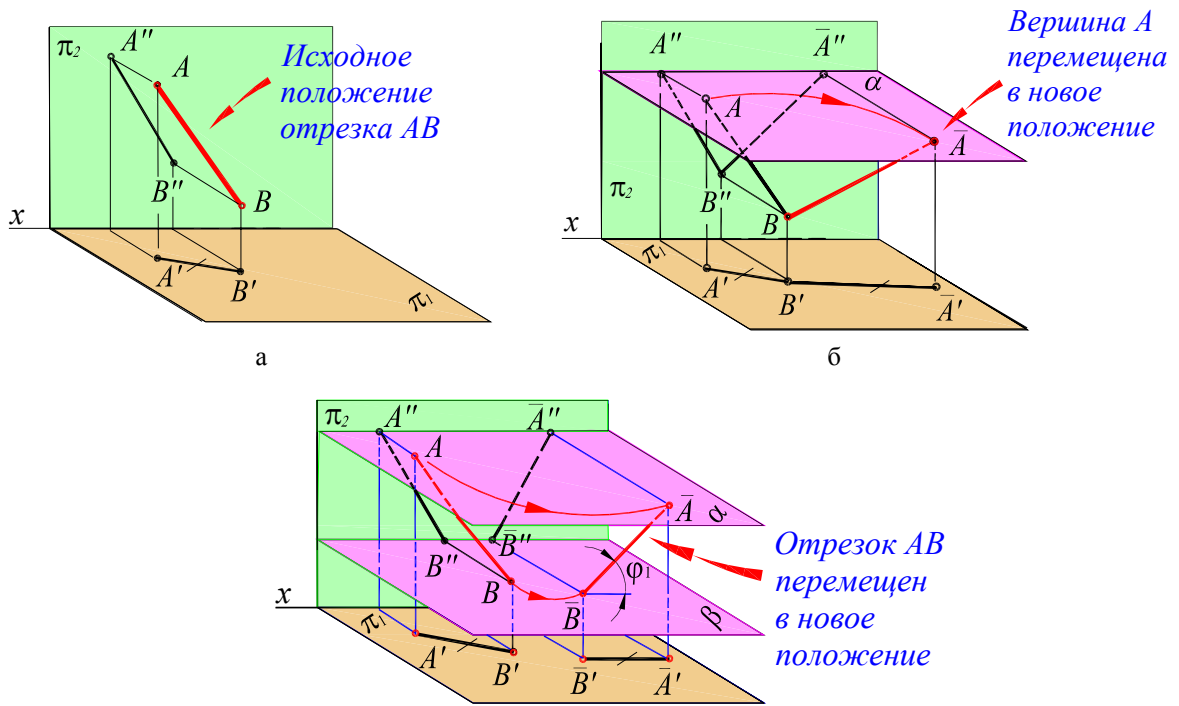
Подобные двойные преобразования используются для решения задач на определение углов при вершинах треугольника, построение высот, биссектрис, вписанных (описанных) окружностей и т. п.

5.2. Способ плоскопараллельного перемещения

При плоскопараллельном перемещении заданная фигура движется в пространстве так, что все ее точки перемещаются в плоскостях, параллельных друг другу и (как правило) параллельно одной из плоскостей проекций. Сами траектории точек фигуры произвольны.

5.2.1. Плоскопараллельное перемещение отрезка

На рис.5.10 показано плоскопараллельное перемещение отрезка из первоначального положения AB в положение \overline{AB} . Концы A и B отрезка движутся соответственно в плоскостях α и β , параллельных горизонтальной плоскости проекций π_1 .



в
Рис. 5.10

Отметим, что при таком движении угол наклона φ_1 отрезка к плоскости π_1 сохраняется неизменным. Поэтому не изменяется и длина горизонтальной проекции отрезка, т.е. $A'B' = \bar{A}'\bar{B}'$. Последнее свойство имеет важное значение, так как используя его, мы получаем возможность проецировать объект в удобном для решения задач положении.

На рис. 5.11 приведен комплексный чертеж, на котором выполнено плоскопараллельное перемещение отрезка AB , занимающего общее положение, в новое положение, параллельное фронтальной плоскости проекций. На этом чертеже сначала перемещается в новое положение, параллельное оси x , горизонтальная проекция отрезка, которая после перемещения получает обозначение $\bar{A}'\bar{B}'$, причем $A'B' = \bar{A}'\bar{B}'$. Затем по линиям связи строится новая фронтальная проекция отрезка $\bar{A}''\bar{B}''$.

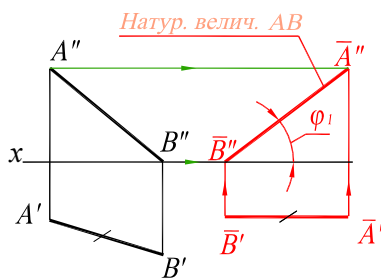


Рис. 5.11

После перемещения отрезка AB в положение $\bar{A}\bar{B}$ он станет фронталью и его новая фронтальная проекция будет равна натуральной величине (НВ), т.е. $\bar{A}''\bar{B}'' = AB$. Соответственно угол φ_1 наклона проекции $\bar{A}''\bar{B}''$ к горизонтальной плоскости проекций будет равен углу наклона отрезка AB к той же плоскости ($\varphi_1 = \varphi$). Отметим, что в данном случае новое положение горизонтальной проекции выбрано произвольно, а все точки фронтальной проекции отрезка движутся по горизонтальным прямым.

5.2.2. Плоскопараллельное перемещение плоскости

В качестве примера рассмотрим задачу о переводе плоскости треугольника ABC , занимающего общее положение, в положение плоскости уровня методом плоскопараллельного перемещения. Условие задачи и ее решение задачи показано на рис. 5.12.

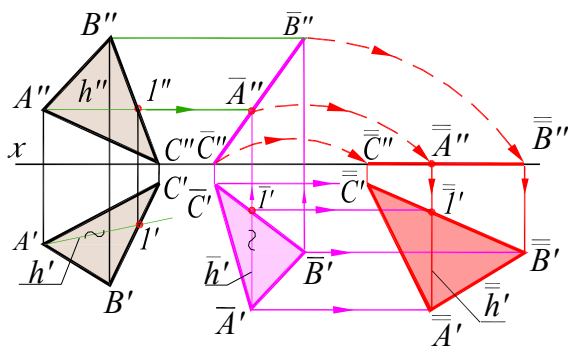


Рис. 5.12

При первом движении треугольник ABC переводится во фронтальное проецирующее положение. С этой целью в плоскости треугольника строится горизонталь A_1I_1 , затем ее горизонтальная проекция $A'I'$ перемещается в проецирующее положение (на свободном поле чертежа проводится отрезок $\overline{A'I'} = A'I'$ перпендикулярно оси x). В процессе перемещения размеры и форма горизонтальной проекции треугольника не изменяются. Построение вершин $\overline{C'}$ и $\overline{B'}$ выполняется с помощью циркуля по засечкам.

Все вершины треугольника на фронтальной плоскости проекций перемещаются по горизонталям, пересечение которых с линиями связи, проведенными из соответствующих вершин новой горизонтальной проекции, образует вырожденную в прямую новую фронтальную проекцию $\overline{A''B''C''}$.

При втором движении все точки треугольника перемещаются в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций, в результате чего он займет положение горизонтальной плоскости уровня, а его вырожденная фронтальная проекция $\overline{A''B''C''}$ – положение горизонтали. Длина ее при этом сохранится неизменной. Горизонтальная проекция $\overline{A'B'C'}$ треугольника ABC будет равна его натуральной величине.

5.3. Способ вращения вокруг проецирующей прямой

К частным случаям метода плоскопараллельного перемещения относятся метод вращения вокруг проецирующих прямых, а также метод вращения вокруг прямых уровня.

5.3.1. Вращение точки вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций

Пусть точка A вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости π_1 (рис. 5.13).

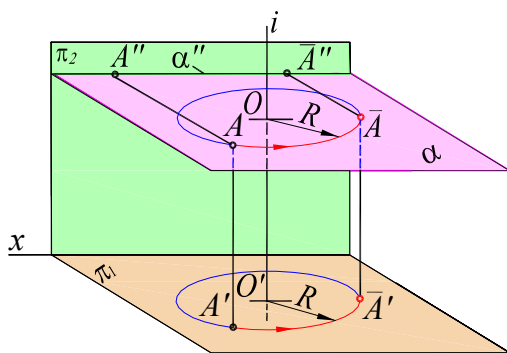


Рис. 5.13

Через точку A проведена плоскость, перпендикулярная к оси вращения i , следовательно, параллельная плоскости π_1 . При вращении точка A описывает в плоскости α окружность радиуса R ; величина радиуса выражается длиной перпендикуляра, проведенного из точки A на ось. Окружность, описанная в пространстве точкой A , проецируется на плоскость π_1 без искажений. Так как плоскость α перпендикулярна к плоскости π_2 , то проекции точек окружности на плоскости π_2 расположатся на α'' , т.е. на прямой, перпендикулярной к фронтальной проекции оси вращения.

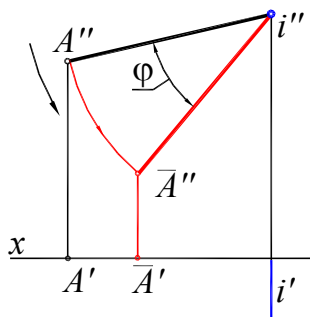


Рис. 5.14

На рис. 5.14 показан поворот точки A против часовой стрелки на угол φ вокруг оси, проходящей через точку i перпендикулярно к плоскости π_2 . Из точки i'' , как из центра, проведена дуга радиуса $i''A''$, соответствующая углу φ и направлению вращения. Новое положение фронтальной проекции точки A – точка \bar{A}'' .

5.3.2. Вращение прямой вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций

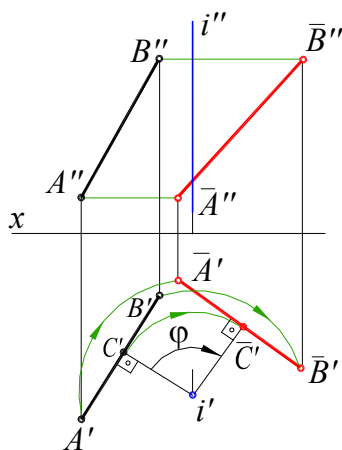


Рис. 5.15

Рассмотрим вращение отрезка прямой линии вокруг заданной оси. В общем случае выполняется поворот двух точек A и B на один и тот же заданный угол и по заданному направлению на одной из плоскостей проекций. Каждая точка будет иметь свой радиус вращения. Затем по линиям связи находится новое положение второй проекции отрезка.

Для решения задач, связанных с вращением отрезка прямой, используется следующий способ (рис. 5.15). Если ось вращения перпендикулярна плоскости π_1 , то через точку i' проводим перпендикуляр к $A'B'$ в точку C' и поворачиваем его на заданный угол φ .

Проведя через точку \bar{C}' (новое положение точки C') прямую, перпендикулярную к радиусу $O'C'$, получаем направление нового положения горизонтальной проекции отрезка. Так как отрезки $C'A'$ и $C'B'$ не изменяют своей величины, то, откладывая от точки C' отрезки $\bar{C}'\bar{A}' = C'A'$ и $\bar{C}'\bar{B}' = C'B'$, находим новое положение $\bar{A}'\bar{B}'$ проекции всего отрезка. Затем по линиям связи достраивается новая фронтальная проекция отрезка $\bar{A}''\bar{B}''$.

Данным способом можно не только повернуть отрезок на заданный угол, но и определить угол, на который нужно повернуть заданный отрезок, чтобы придать ему требуемое положение (например, расположить параллельно плоскости π_2 или найти точку пересечения с другой прямой и т. д.).

5.3.3. Вращение плоскости вокруг проецирующей прямой

При вращении плоскости, заданной следами, обычно поворачивают один из следов и горизонталь (или фронталь) плоскости. На следе берется произвольная точка и поворачивается вокруг оси на заданный угол φ . Новый след будет проходить через выбранную точку перпендикулярно отрезку, соединяющему эту точку с центром вращения. Второй след находится по новому положению горизонтали (фронталю).

5.4. Способ вращения точки, прямой, плоскости вокруг прямой уровня

Поворот плоской фигуры используется для определения ее натуральной величины. Например, чтобы определить форму и размеры плоской фигуры, ее можно повер-

нуть вокруг горизонтали так, чтобы в результате вращения фигура расположилась параллельно плоскости π_1 .

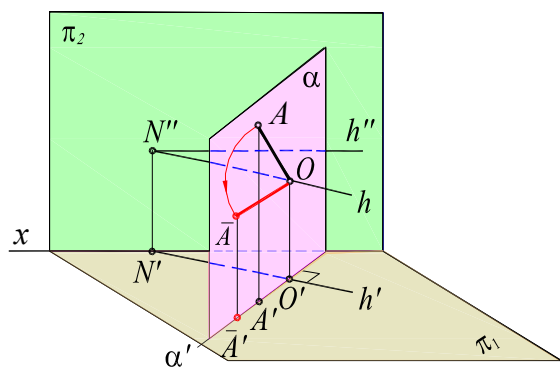


Рис. 5.16

Рассмотрим сначала поворот точки вокруг прямой уровня (рис. 5.16).

Точка A вращается вокруг некоторой горизонтально расположенной оси ON'' , описывая дугу окружности, лежащую в плоскости α . Эта плоскость перпендикулярна к оси вращения и, следовательно, является горизонтально-проецирующей; поэтому горизонтальная проекция окружности, описываемая точкой A , должна находиться в плоскости α' . Если радиус OA займет положение, параллельное плоскости π_1 , то проекция $O'A'$ окажется равной натуральной величине радиуса OA .

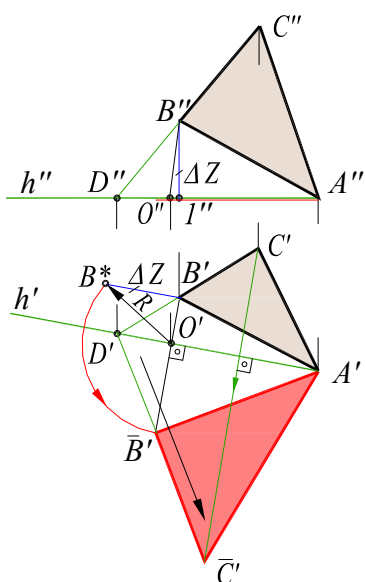


Рис. 5.17

Пример. Найти натуральную величину треугольника ABC способом вращения вокруг прямой уровня. В качестве оси вращения взять горизонталь AD (рис. 5.17). Решение. Точка A , расположенная на оси вращения, останется на месте. Следовательно, для изображения горизонтальной проекции треугольника после поворота надо найти положение проекций других двух его вершин. Опуская из точки B' перпендикуляр на $A'D'$, находим горизонтальную проекцию центра вращения – точку O' и горизонтальную проекцию радиуса вращения точки B – отрезок $O'B'$, а затем фронтальную проекцию радиуса вращения точки B – отрезок $O''B''$.

Теперь надо определить натуральную величину радиуса вращения точки B . Для этого применяется способ прямоугольных треугольников. По катетам $O'B'$ и $B'B^* = B''I'' = \Delta Z$ строим прямоугольный треугольник $O'B'B^*$, гипотенуза его равна радиусу R вращения точки B .

После этого можно найти положение точки \bar{B}' , а затем точки \bar{C}' , причем не определять радиус вращения точки C , а найти положение точки \bar{C}' в пересечении двух прямых, из которых одна является перпендикуляром, проведенным из точки C' к прямой $A'D'$, а другая проходит через найденную точку \bar{B}' и точку D' (горизонтальную проекцию точки D , принадлежащей стороне BC и расположенной на оси вращения).

Проекция $A'\bar{B}'\bar{C}'$ выражает натуральную величину треугольника ABC , так как после поворота плоскость треугольника параллельна плоскости π_1 . Фронтальная же проекция треугольника совпадает с фронтальной проекцией горизонтали, т.е. представляет собой прямую линию.

На рис. 5.17 дано построение для случая, когда горизонталь проведена вне проекций треугольника. Это позволяет избежать наложения проекций одной на другую, но чертеж занимает несколько большую площадь.

Если требуется повернуть плоскую фигуру до положения, параллельного плоскости π_2 , то за ось вращения надо выбрать фронталь.

5.5. Контрольные вопросы

1. В чем заключается сущность способа замены плоскостей проекций?
2. Какое основное условие должно быть соблюдено при введении новой плоскости проекций?
3. Какая координата точки сохраняется в новой плоскости проекций?
4. Каковы исходные задачи преобразования комплексного чертежа?
5. Как перевести прямую общего положения в положение прямой уровня?
6. Как перевести прямую уровня в проецирующее положение?
7. Переведите плоскость общего положения в положение плоскости уровня.
8. В чем заключается суть способа плоскопараллельного перемещения?
9. Какое основное условие должно быть соблюдено при плоскопараллельном перемещении фигуры?

Глава 6. МНОГОГРАННИКИ

6.1. Общие сведения о многогранниках

Одним из видов пространственных форм являются многогранники – замкнутые пространственные фигуры, ограниченные плоскими многоугольниками. Эти многоугольники образуют грани; общие стороны многоугольников называются *ребрами*; вершины многогранных углов, образованных его гранями, сходящихся в одной точке – *вершинами* многогранника.

Если вершины и ребра многогранника находятся по одну сторону от плоскости любой его грани, то многогранник называют выпуклым.

Наибольший практический интерес представляют собой призмы, пирамиды и правильные многогранники (тела Платона).

Призма – многогранник, две грани которого представляют равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами (основаниями). Ребра, не принадлежащие основаниям и параллельные друг другу, называют боковыми. Призму, ребра которой перпендикулярны к основаниям, называют *прямой*. Прямая призма называется *правильной*, если ее основаниями являются правильные многоугольники.

Пирамида – многогранник, одна грань которого плоский n -угольник (основание), а остальные грани являются треугольниками с общей вершиной. Если основанием пирамиды является правильный многоугольник и высота ее проходит через вершину этого многоугольника, пирамиду называют *правильной*.

Многогранник называют *правильным*, если его грани представляют собой правильные и равные многоугольники. Гранями правильных многогранников могут быть только правильные треугольники, четырехугольники (квадраты) и пятиугольники.

Существует пять видов правильных многогранников (рис. 6.1):

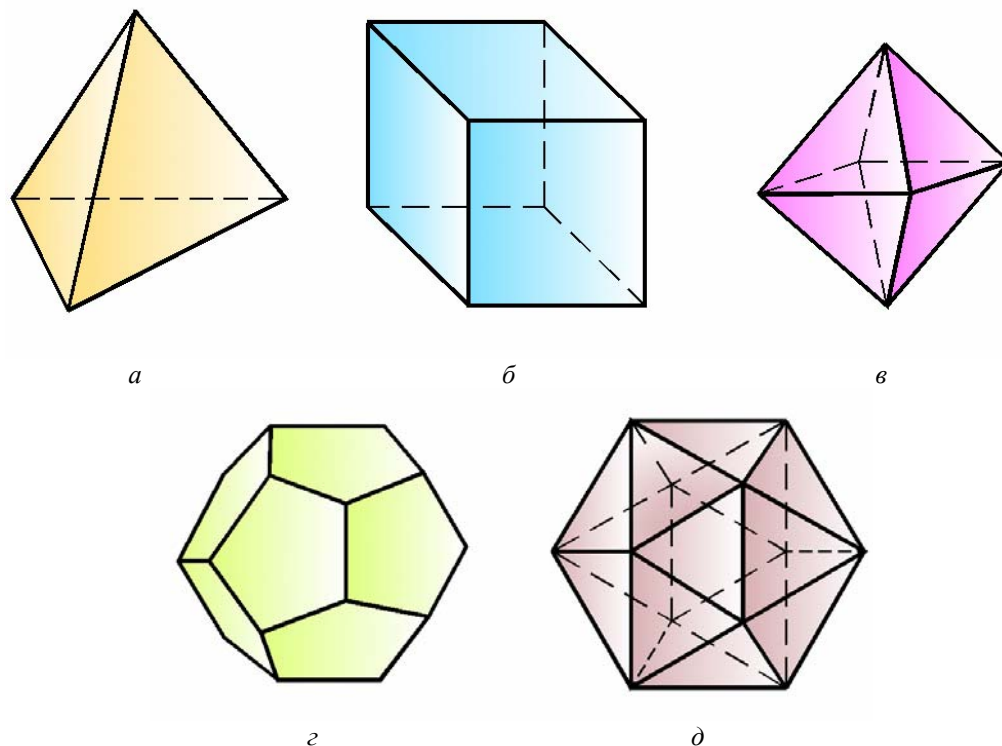


Рис. 6.1

- 1) правильный четырехгранник (тетраэдр) ограничен 4-мя равными правильными треугольниками. Представляет собой правильную пирамиду, в качестве основания которой может быть выбрана любая из 4-х граней (рис. 6.1, а);

- 2) правильный шестигранник (гексаэдр) ограничен 6-ю равными квадратами – это куб. Представляет собой частный случай правильной призмы (рис. 6.1, б);
- 3) правильный восьмигранник (октаэдр) ограничен 8-ю равносторонними и равными треугольниками (рис. 6.1, в);
- 4) правильный двенадцатигранник (додекаэдр) ограничен 12-ю правильными и равными пятиугольниками (рис. 6.1, г);
- 5) правильный двадцатигранник (икосаэдр) ограничен 20-ю равносторонними и равными треугольниками (рис. 6.1, д).

У всякого выпуклого многогранника число граней (Γ) плюс число вершин (B) минус число ребер (P) равно двум, т.е. $\Gamma + B - P = 2$.

6.2. Точка и прямая линия на поверхности многогранника

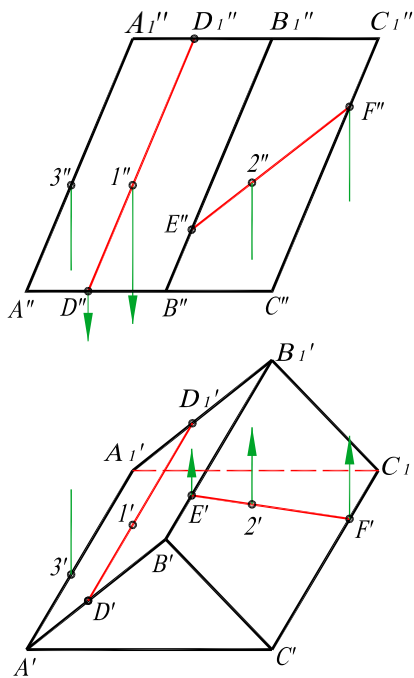


Рис. 6.2

Грани многогранника представляют собой плоскости. Поэтому построение точек и прямых на поверхности многогранника сводится к построению точек и прямых линий на плоскости.

Точки на гранях призмы и пирамиды строятся при помощи вспомогательных прямых, принадлежащих соответствующим плоскостям граней.

Чтобы определить по данной проекции $1''$ точки 1, лежащей на грани AA_1BB_1 наклонной призмы, горизонтальную проекцию $1'$ (рис. 6.2), проводим через точку $1''$ фронтальную проекцию вспомогательной прямой DD_1 , параллельную ребрам призмы. Определив горизонтальную проекцию DD_1' вспомогательной прямой, по линии связи найдем горизонтальную проекцию $1'$.

Фронтальная проекция $2''$ точки 2, лежащей на грани BB_1CC_1 , построена с помощью вспомогательной прямой EF , проведенной через проекцию $2'$. Недостающую проекцию точки 3, расположенную на ребре AA_1 , определим с помощью линии связи.

Нахождение недостающих проекций точек, находящихся на боковой поверхности прямой призмы (рис. 6.3) упрощается, т.к. боковые грани призмы являются горизонтально-проецирующими плоскостями. Так горизонтальная проекция $1'$ точки 1, расположенной на грани AA_1BB_1 находится на отрезке $A'B'$ ($A_1'B_1'$). Профильную проекцию точки 1 определим с помощью линий связи.

Горизонтальная проекция $2'$ точки 2, расположенной на боковом ребре BB_1 совпадает с горизонтальной проекцией этого ребра. Профильную проекцию точки 2 построим при помощи горизонтальной линии связи.

На рис. 6.4 показано построение недостающих проекций точек, находящейся на боковой поверхности пирамиды $SABC$. Фронтальная проекция $1''$ точки 1, расположенная на грани SBC , представляющей собой профильно-проецирующую плоскость, построена с помощью линий связи.

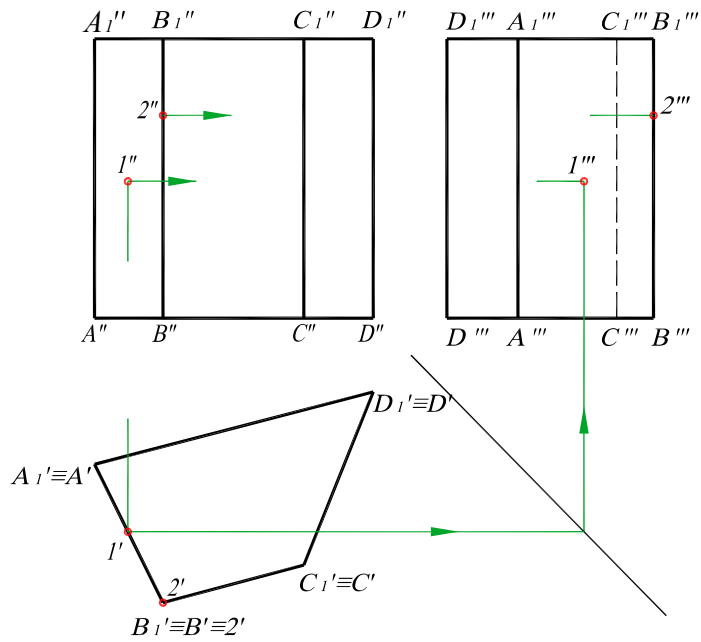


Рис. 6.3

Чтобы определить по заданной проекции $2''$ точки 2, лежащей на грани SAB , проекцию $2'$ (рис. 6.4), используем горизонталь h . Фронтальная проекция горизонтали h'' проведена через проекцию $2''$ до пересечения с проекцией $B''S''$ ребра BS в точке D'' . Горизонтальная проекция h' горизонтали h проходит через точку D' параллельно проекции $A'B'$ стороны AB .

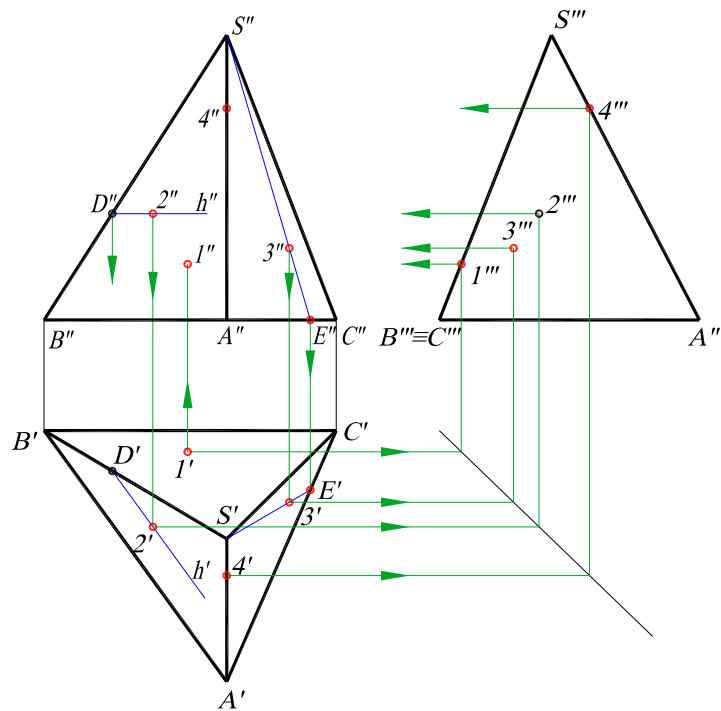


Рис. 6.4

Чтобы определить по заданной проекции $3''$ точки 3, расположенной на грани SAC , проекцию $2'$ используем прямую SE . Фронтальная проекция $S''E''$ проведена через проекцию $3''$. Построив горизонтальную проекцию $S'E'$ по линии связи найдем $3'$. Фронтальная проекция $4''$ точки 4, расположенная на ребре SA , построена с помощью линий связи сначала на профильной проекции ребра $S'''A'''$, а затем на фронтальной $S'A'$.

6.3. Пересечение многогранников плоскостью. Развертка поверхности многогранника

6.3.1. Общие сведения

При пересечении многогранника плоскостью в сечении получается многоугольник, вершинами которого являются точки пересечения ребер многогранника плоскостью, а сторонами – отрезки прямых, по которым грани многогранника пересекаются этой плоскостью.

Определение вершин многоугольника сводится к построению точек пересечения прямых (ребер многогранника) с плоскостью – *способ ребер*.

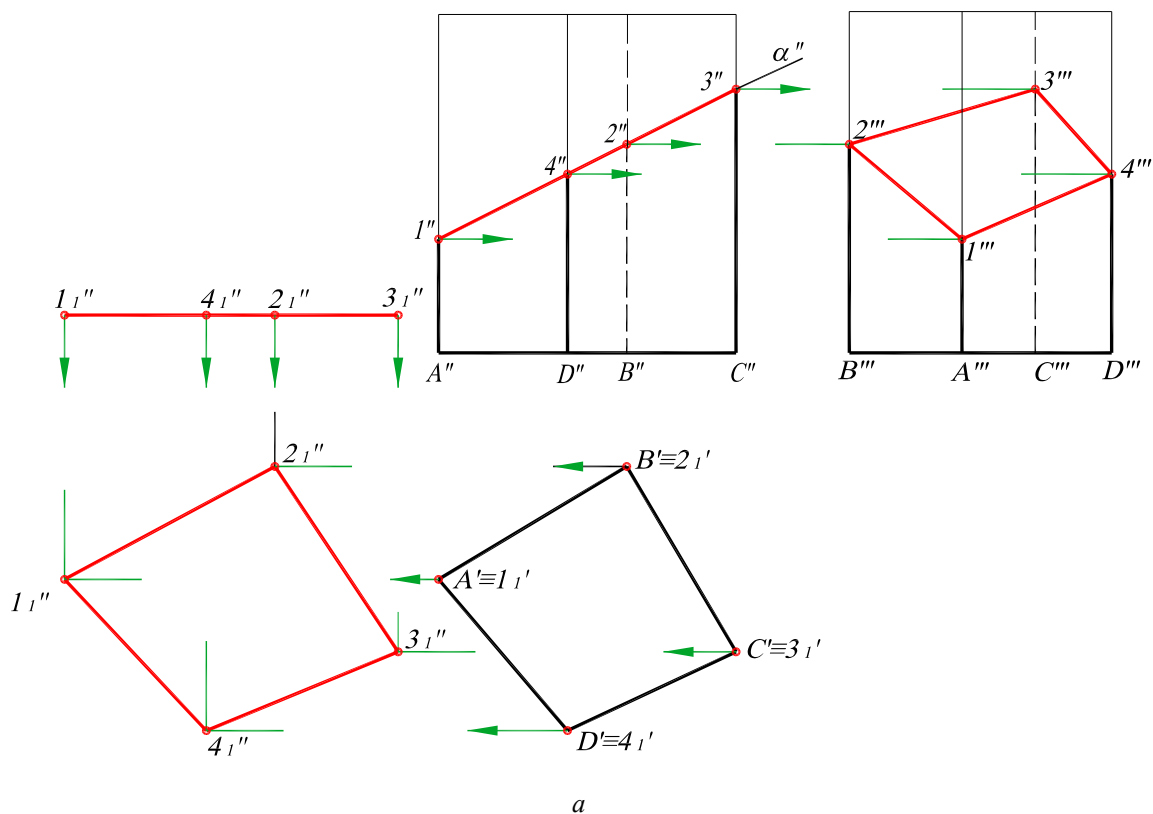
При определении сторон многоугольника решаются задачи на пересечение двух плоскостей – *способ граней*.

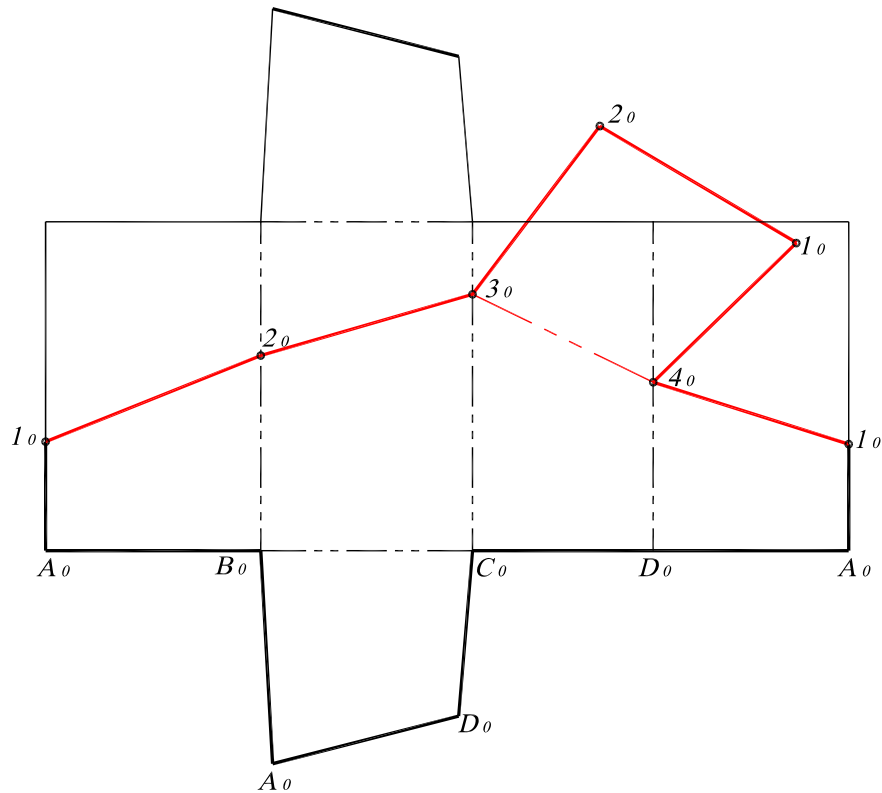
Разверткой называется фигура, полученная при совмещении поверхности геометрического тела с плоскостью (без наложения элементов поверхности друг на друга).

Развертки необходимы при изготовлении изделий из листового материала.

6.3.2. Пересечение многогранника проецирующей плоскостью

На рис. 6.5, *a* показано построение проекций линии пересечения прямой четырехугольной призмы фронтально-проецирующей плоскостью α .





б
Рис.6.5

Пересечение следа – проекции α'' с фронтальными проекциями боковых ребер призмы дает проекции $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ вершин многоугольника сечения. Горизонтальные проекции этих вершин совпадают с «вырожденными» проекциями соответствующих ребер, так как призма прямая. Профильные проекции $1'''$, $2'''$, $3'''$, $4'''$ вершин определим при помощи горизонтальных линий связи на соответствующих проекциях ребер призмы.

Натуральная величина многоугольника сечения найдена способом плоскопараллельного перемещения. Переместим сечение в горизонтальное положение. Проекция $1_1'-2_1'-3_1'-4_1'$ – натуральная величина многоугольника сечения.

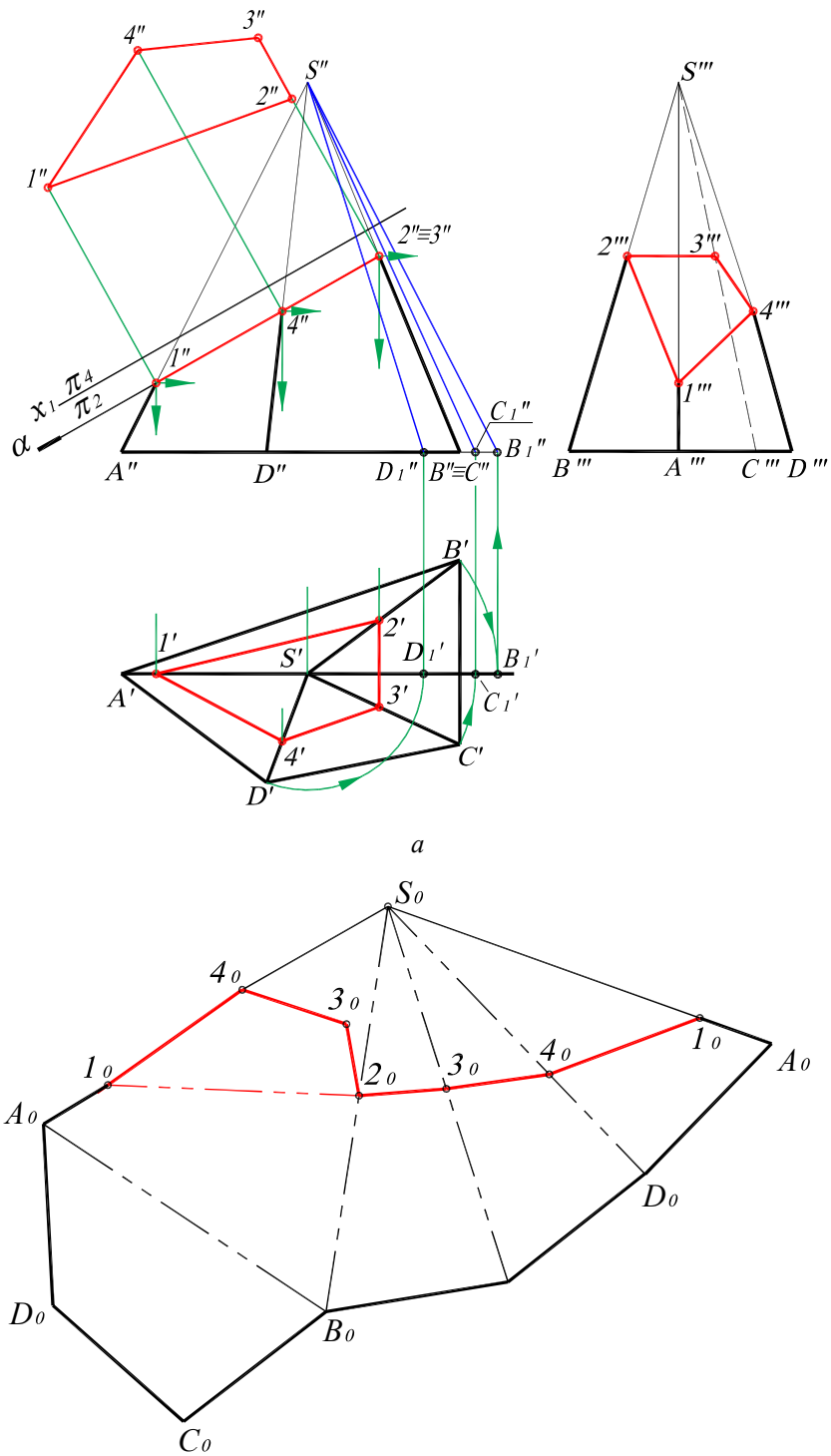
Развертка боковой поверхности призмы состоит из четырех прямоугольников, у которых одна сторона равна высоте призмы, а другие стороны равны сторонам основания призмы. Достроив к сторонам прямоугольника верхнее и нижнее основание призмы, получим полную развертку ее поверхности (рис. 6.5, б).

Для построения развертки боковой поверхности усеченной призмы наносим на развертку точки 1_0 , 2_0 , 3_0 , 4_0 , расположенные на соответствующих ребрах. Чтобы получить полную развертку усеченной части призмы, к одному из участков линии пересечения (3_0-4_0) пристраиваем натуральную величину сечения.

Развертку усеченной части призмы обводим сплошной толстой основной линией, линии сгиба – на развертке – штрихпунктирной с двумя точками линией.

На рис. 6.6, а приведено построение проекций линии пересечения четырехугольной пирамиды $SABC$ фронтально-проецирующей плоскостью α

Фронтальные проекции $1''2''3''4''$ вершин многоугольника сечения находятся в пересечении следа-проекции α'' плоскости α с фронтальными проекциями боковых ребер пирамиды. Проекции $2''$ и $3''$ точек 2 и 3, лежащих на ребрах SB и SC , совпадают, так как грань SBC является фронтально-проецирующей плоскостью. Горизонтальные и профильные проекции точек 1, 2, 3, 4 определяются по линиям связи на соответствующих ребрах пирамиды.



б
Рис. 6.6

Натуральная величина многоугольника сечения найдена способом перемены плоскостей проекций. Это четырехугольник $1^{IV} 2^{IV} 3^{IV} 4^{IV}$.

Развертка боковой поверхности пирамиды состоит из четырех треугольников – боковых граней пирамиды.

Одна из сторон треугольников определяется величиной, соответствующей горизонтальной проекции ребра основания пирамиды, поскольку основание пирамиды занимает горизонтальное положение.

Из боковых ребер пирамиды ребро AS параллельно фронтальной плоскости и проекция $A''S''$ - его истинная величина. Для определения натуральной величины других бо-

ковых ребер используем способ вращения вокруг оси, проходящей через вершину S перпендикулярно плоскости π_1 .

Поворачиваем ребра SB, CS, SD до положения, параллельного плоскости π_2 . Длины проекций $S''B_1, C''S_1, S''D_1$ являются натуральными длинами соответствующих ребер.

На рис. 6.6, б представлено построение полной развертки усеченной части пирамиды. Вначале на плоскости чертежа строим треугольники – боковые грани пирамиды – по трем сторонам, последовательно пристраивая треугольники друг к другу боковыми ребрами. Пристроив к стороне $A \cdot B$ одного из треугольников четырехугольное основание пирамиды, получим полную развертку ее поверхности.

Чтобы выделить на развертке усеченную часть пирамиды, находим положение вершины 1° фигуры сечения на ребре $A \cdot \delta$. Зная натуральную величину многоугольника сечения $1^{IV} 2^{IV} 3^{IV} 4^{IV}$, последовательно засекаем на ребре развертки точки $2^\circ, 3^\circ$ и 4° , используя величину сторон многоугольника сечения. Полученные на развертке точки соединяем отрезками прямых. Пристраиваем затем натуральную величину сечения $1^{IV} 2^{IV} 3^{IV} 4^{IV}$ к одному из участков линии пересечения ($1 \cdot 2^\circ$). Полученную полную развертку поверхности усеченной пирамиды обводим сплошной толстой основной линией, а линии сгиба – штрихпунктирной с двумя точками линией.

6.3.3. Пересечение многогранника плоскостью общего положения

При решении задач на построение проекций фигуры сечения многогранника плоскостью общего положения применяются вспомогательные плоскости, которые проводят через грани или ребра многогранника. В качестве вспомогательных плоскостей используют плоскости частного положения.

На рис. 6.7 приведено построение проекций линии пересечения прямой треугольной призмы плоскостью общего положения. Плоскость задана двумя пересекающимися прямыми DE и EF ($DE \parallel \pi_1, EF \parallel \pi_2$).

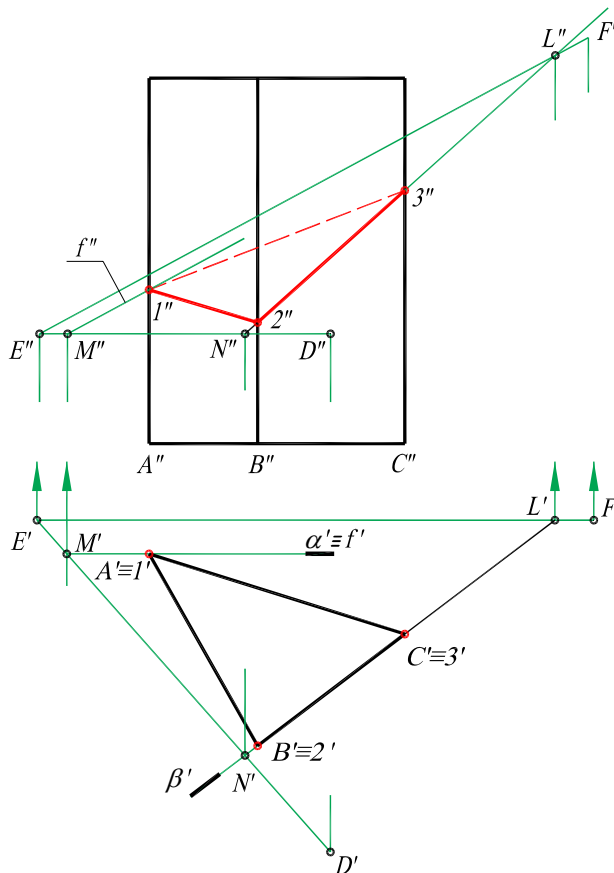


Рис. 6.7

Так как боковые грани призмы являются горизонтально-проецирующими плоскостями, то горизонтальная проекция $1'2'3'$ линии пересечения совпадает с горизонтальными проекциями самих граней.

Фронтальную проекцию $1''$ точки пересечения ребра A с заданной плоскостью определим при помощи фронтальной плоскости α (α'), проходящей через это ребро.

Плоскость α пересекает заданную плоскость по фронталью f , параллельной прямой EF . Фронталь f проходит через точку M прямой ED . В пересечении проекции f'' с фронтальной проекцией ребра находится проекция $1''$. Для построения фронтальной проекции $2''3''$ линии пересечения грани BC призмы с заданной плоскостью, заключаем грань во вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость β (β'). Плоскость β пересекает заданную по прямой NL ($N'L', N''L''$), на фронтальной проекции которой находится $2''3''$.

$1''2''3''$ - фронтальная проекция искомой фигуры сечения. Фронтальная проекция $1''3''$ отрезка 1-2 расположена на невидимой грани и показана штриховой линией.

Для построения фигуры сечения многогранника плоскостью общего положения можно использовать один из способов преобразования чертежа, позволяющей преобразовать плоскость общего положения в проецирующую.

На рис. 6.8 дано построение проекций линий пересечения пирамиды $SABC$ плоскостью общего положения, заданной двумя пересекающимися прямыми – горизонталью ED и фронталью EF .

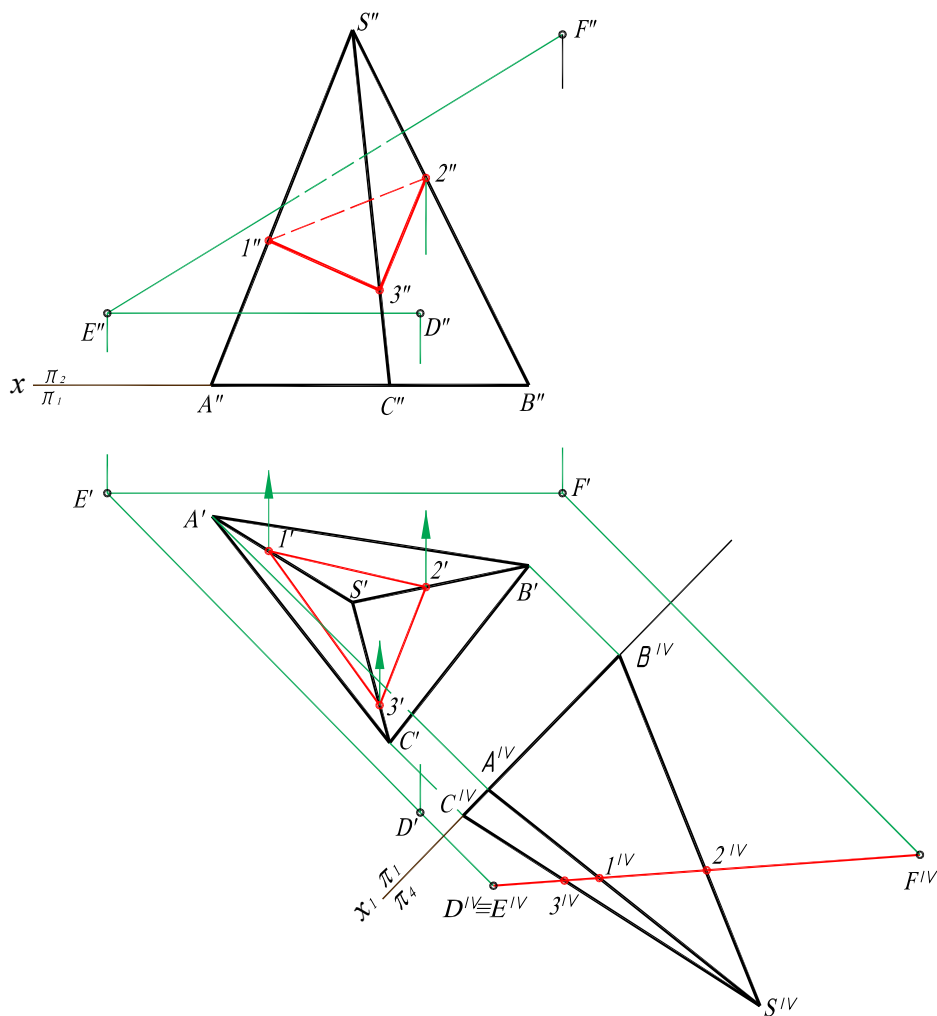


Рис. 6.8

Построение выполнено при помощи способа перемены плоскостей проекций. Дополнительная плоскость проекций π_4 , перпендикулярная плоскости π_1 , выбрана перпендикулярно горизонтали DE . При этом новая ось проекций X_1 будет расположена перпендикулярно к проекции $D'E'$.

На плоскости π_4 получим проекцию пирамиды $S^{IV} A^{IV} B^{IV} C^{IV}$, а секущая плоскость спроецируется в виде прямой, т.е. станет перпендикулярной π_4 .

На следе – проекции секущей плоскости – будет находиться проекция линии пересечения $1^{IV} 2^{IV} 3^{IV}$.

Точка 1 расположена на ребре SA , точка 2 – на SB , точка 3 – на SC .

Путем обратного проецирования на плоскость π_1 и плоскость π_2 построим горизонтальную $1'2'3'$ и фронтальную $1'' 2'' 3''$ проекции линии пересечения.

Фронтальная проекция отрезка расположена на невидимой грани пирамиды.

6.4. Примеры решения задач к главе 6

Пример 1. Правильная треугольная призма усечена двумя плоскостями: горизонтально-проецирующей α (α') и фронтально-проецирующей β (β'') (рис. 6.9). Построить профильную проекцию усеченной призмы.

Решение. Плоскость α пересекает верхнее основание призмы по прямой 4-5, а боковую поверхность по горизонтально-проецирующим прямым 1-5 и 3-4. Прямая 1-5 совпадает с ребром A призмы.

Плоскость β пересекает ребро A призмы в точке 1, а ребро C – в точке 2.

Плоскости α и β пересекаются по линии 1-3.

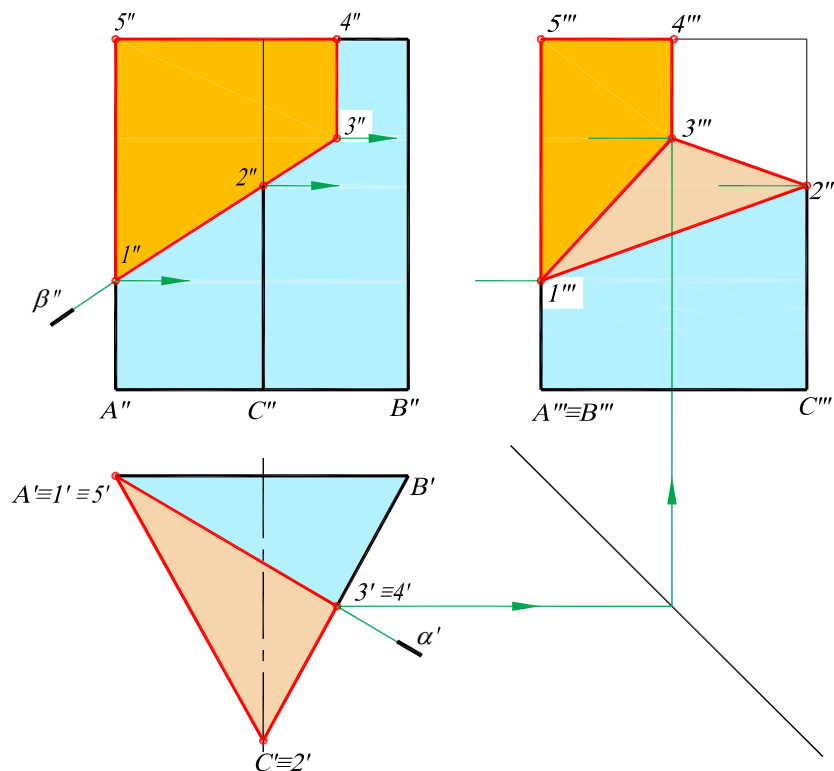


Рис. 6.9

Профильные проекции указанных выше точек определяются при помощи линий связи. Соединив построенные точки получим профильную проекцию линии пересечения.

Пример 2. Правильная треугольная пирамида усечена двумя плоскостями: фронтально-проецирующей α (α'') и профильной β (β'') (рис. 6.10). Построить недостающие проекции усеченной пирамиды.

Решение. Плоскость α пересекает грань SAC по отрезку 1 - 2, грань SBC по отрезку 2 - 3, грань SAB по отрезку 1 - 4.

Плоскость β пересекает грань SBC по отрезку 3 - 5, а грань SAB по отрезку 1 - 4. При построении проекций точек, принадлежащих линии пересечения, следует учитывать, что профильные проекции $S'''A'''$ и $S'''B'''$ совпадают, т.к. грань SAB пирамиды является профильно-проецирующей плоскостью.

Недостающие проекции точки 1, расположенной на ребре SA и точки 5, расположенной на ребре SB , построены при помощи линий связи.

Проекция точки 2, расположенной на ребре SC , определены при помощи линий связи сначала на профильной проекции ребра, а затем на горизонтальной.

Для построения горизонтальных проекций точек 3 и 4, через их фронтальную проекцию проведены вспомогательные прямые SD и SE , принадлежащие соответственно граням SBC и SAB .

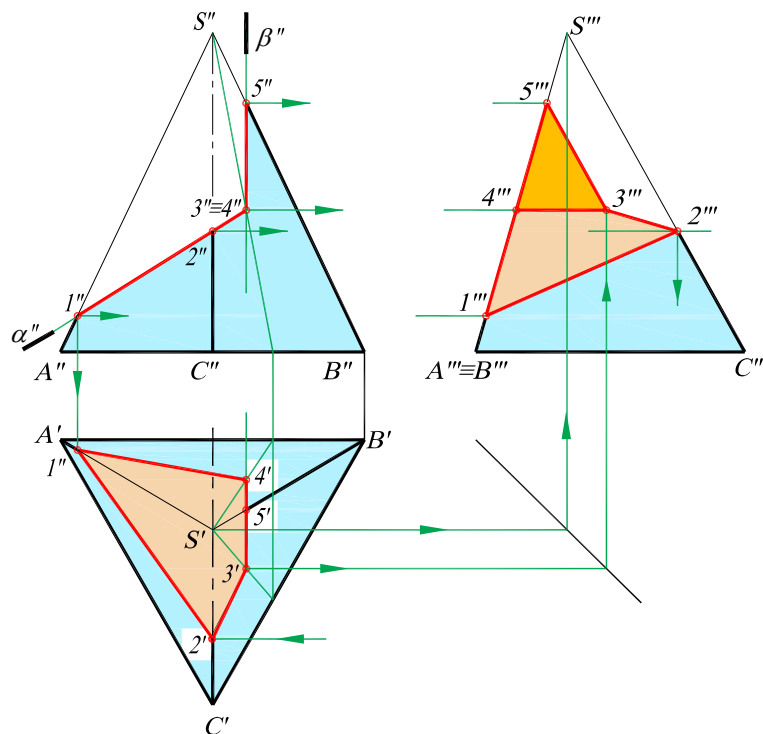


Рис. 6.10

Построив горизонтальные проекции SD и $S'E'$ этих прямых по линии связи определим горизонтальные проекции точек 3 и 4, а затем и их профильные проекции.

Плоскости α и β пересекаются по фронтально-проецирующей прямой 3 - 4. Соединив построенные проекции точек получим проекции линии пересечения.

6.5. Вопросы для контроля

1. Какая фигура называется многогранником?
2. Дайте определение призмы, пирамиды, правильного многогранника.
3. Как определить недостающую проекцию точки на поверхности многогранника?
4. Что представляет собой сечение многогранника плоскостью?
5. В чем различие способа ребер и способа граней?
6. Как используется способ перемены плоскостей проекций при построении сечения многогранника плоскостью?

Глава 7. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ ЛИНИЯХ И КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

7.1. Кривые линии и их проекции

Линию можно рассматривать как множество последовательных положений движущейся точки – траекторию точки.

Кривая – разновидность линии, которая получается, когда движущая точка изменяет направление своего движения. Кривая линия может являться результатом пересечения кривой поверхности плоскостью или кривых поверхностей между собой.

В начертательной геометрии кривые линии изучаются по их проекциям. Если все точки кривой лежат в одной плоскости, кривую называют плоской, в противном случае – пространственной.

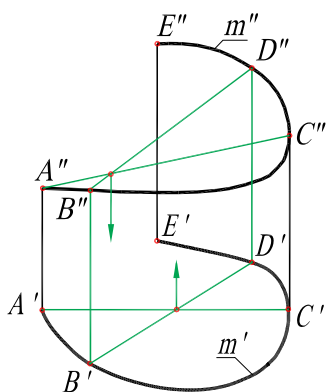


Рис. 7.1

Чтобы установить по чертежу, какая задана кривая, (плоская или пространственная), необходимо определить, принадлежат ли все точки кривой одной плоскости.

Заданная на рис. 7.1 кривая линия m (m' , m'') – пространственная, т. к. точки A , B , C , D не принадлежат одной плоскости (прямые AC и BD , которые соединяют точки A и C , B и D , лежащие на кривой m , являются скрещивающимися). Кривые линии разделяют на алгебраические (определяемые в декартовых координатах

алгебраическими уравнениями) и трансцендентные (определяемые неалгебраическими уравнениями).

Порядком алгебраической кривой называют наибольшую степень ее уравнения.

Геометрический порядок плоской кривой определяется наибольшим числом точек пересечения ее с прямой линией, а пространственной кривой наибольшим числом точек пересечения ее с ее плоскостью. При проецировании порядок алгебраической кривой в общем случае сохраняется.

Все плоские кривые разделяются на циркульные, состоящие из сопряженных дуг окружностей (их проводят при помощи циркуля), и лекальные, вычерчивающиеся с помощью лекала по предварительно построенным точкам.

7.2. Некоторые кривые, часто встречающиеся в практике

Рассмотрим построение некоторых плоских алгебраических кривых (эллипса, гиперболы, параболы), трансцендентных (спираль Архимеда, эвольвенту окружности, синусоиду), а также пространственных винтовых линий.

Эллипс (рис.7.2) – плоская замкнутая кривая, у которой сумма расстояний от любой ее точки (например, от точки M) до двух заданных точек F_1 и F_2 (фокусов эллипса) есть величина постоянная, равная большой оси эллипса AB ($F_1M + F_2M = AB$). Отрезок CD – малая ось эллипса, точка O – центр эллипса. Точки F_1 и F_2 расположены на большой оси AB симметрично относительно точки O и удалены от концов малой оси (точек C и D) на расстояние, равное половине большой оси эллипса.

Существует ряд способов построения эллипса. Наиболее просто построить эллипс по двум его осям при помощи вспомогательных окружностей (рис.7.3).

Из центра проводят две окружности радиусами, равными половине большой и малой осей. Большую окружность делят на 12 равных частей и точки деления соединяют с точкой O .

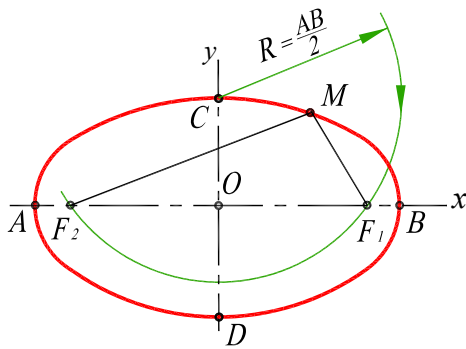


Рис. 7.2

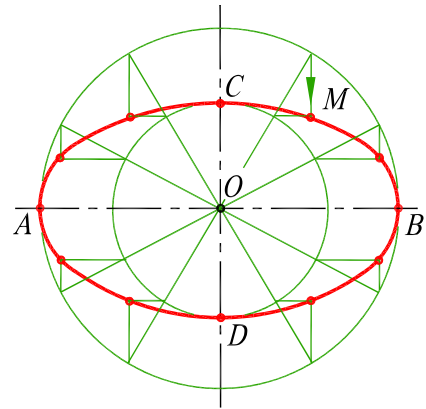


Рис. 7.3

Через точки деления меньшей окружности проводят прямые, параллельные большой оси эллипса, а через точки деления большей окружности – прямые, параллельные малой оси. Точки пересечения (например, точка M) соединяют плавной кривой.

Окружность – частный вид эллипса, у которого полуоси равны между собой и являются радиусом окружности.

Гипербола (рис. 7.4) – кривая, у которой разности расстояний от любой ее точки (например, от точки M) до двух заданных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная AB . Гипербола имеет две ветви, действительную ось x и мнимую ось y , центр O , вершины A и B .

На рис. 7.4 показано построение точки M гиперболы по действительной оси AB и фокусам F_1 и F_2 . Из фокусов, как из центров, проводим дуги окружностей соответственно радиусом R и $R+AB$. Точка их пересечения является точкой гиперболы. Изменяя радиус R и повторяя построения, получаем новые точки гиперболы.

Парабола (рис. 7.5) – кривая, каждая точки которой (например, точка M) равноудалена от заданной точки F (фокуса) и прямой d (директриссы), ($FM=NM$). Расстояние FO от фокуса F до директриссы d – параметр параболы (P), x – ось параболы, точка A – вершина параболы.

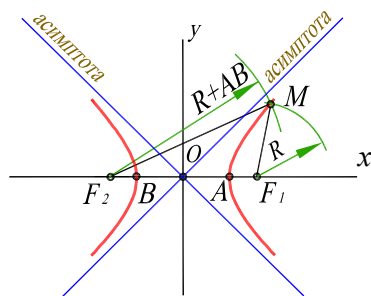


Рис. 7.4

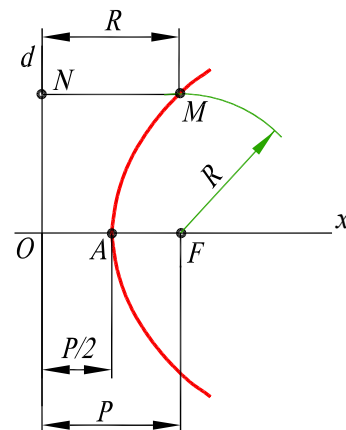


Рис. 7.5

На рис. 7.5 показано построение точки M параболы по заданным фокусу (F) и директриссе (d). Из фокуса F делаем засечку дугой радиуса R на прямой, удаленной от директриссы d на расстояние R , причем $R > P/2$. Изменяя величину R и повторяя построения, получаем новые точки параболы.

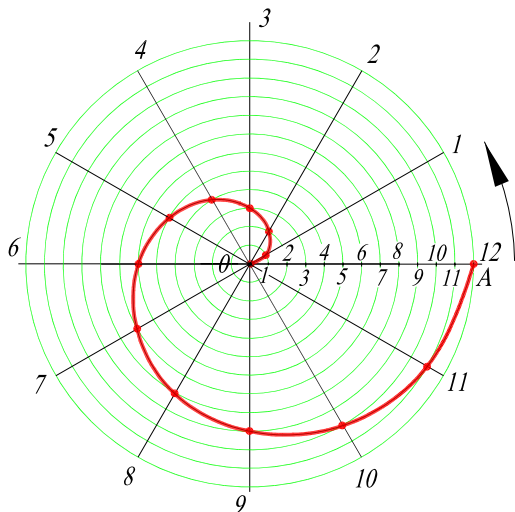


Рис. 7.6

Спираль Архимеда (рис. 7.6) – кривая, которую описывает точка, равномерно вращающаяся вокруг неподвижной точки (полюса O) и одновременно равномерно удаляющаяся от него. Расстояние OA , пройденное точкой от полюса O при повороте на 360° – шаг спирали.

Точки, принадлежащие спирали Архимеда, строят, исходя из определения кривой, задаваясь шагом OA и направлением вращения.

Полученный отрезок и окружность делят на одинаковое число частей (12) и через точки деления окружности проводят в одном направлении касательные к ней. На каждой касательной откладываем отрезки $1A_1, 2A_2, 3A_3$ и т.д., равные соответственно A_01, A_02, A_03 и т.д. Полученные точки соединяем плавной кривой.

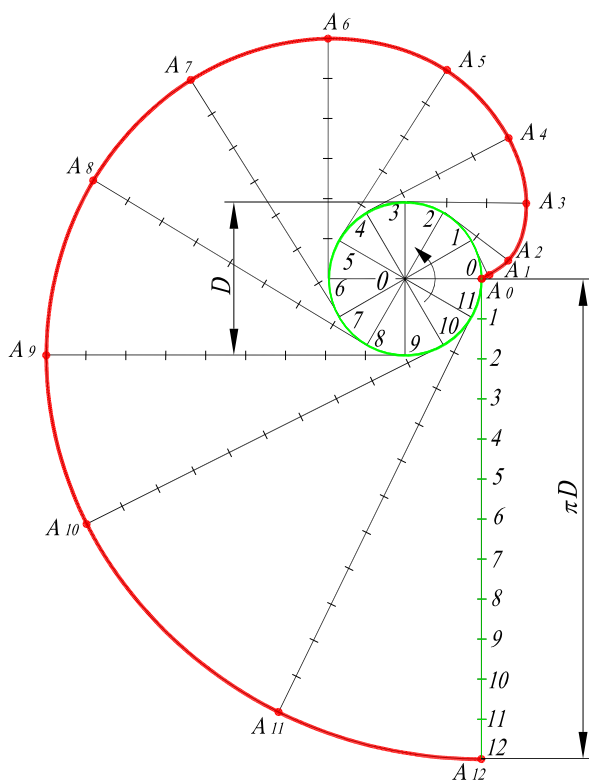


Рис. 7.7

Эвольвента окружности (рис. 7.7) – кривая, образуемая точками касательной прямой, катящейся без скольжения по неподвижной окружности.

На рис. 7.7. показано построение эвольвенты окружности диаметра D в указанном направлении и начальном положении точки A (точка A_0).

Через точку A_0 проводим касательную к окружности и на ней откладываем длину заданной окружности πD .

Синусоида (рис.7.8) – кривая, характеризующая изменение синуса угла в зависимости от величины центрального угла.

Расстояние между крайними точками синусоиды по высоте, равное диаметру производящей окружности, называется амплитудой. Расстояние $T=2\pi R$ – шаг синусоиды. Построение точек синусоиды ($A, A_1, A_2, \dots, A_{12}$) показано на рис. 7.8.

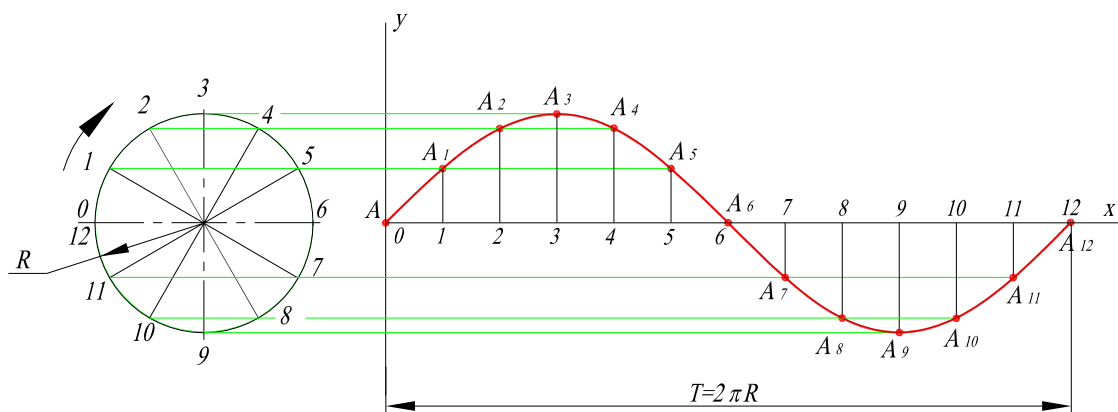


Рис. 7.8

Цилиндрическая винтовая линия (гелиса) – пространственная кривая, которая образуется на поверхности цилиндра вращения в результате двойного равномерного движения точки – вращения вокруг оси цилиндра и поступательного движения вдоль образующей цилиндра (рис. 7.9).

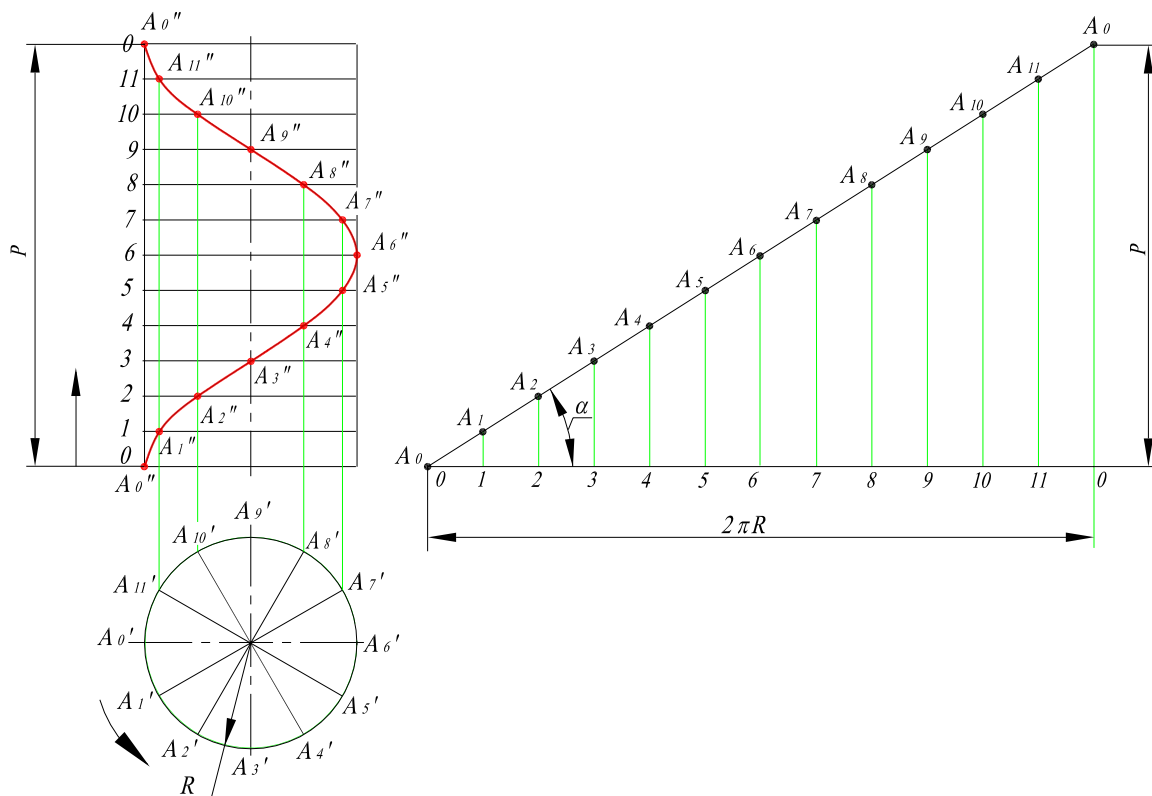


Рис. 7.9

Шаг винтовой линии (P) – расстояние между двумя ее соседними витками в направлении параллельности. Для построения цилиндрической винтовой линии делим окружность основания цилиндра и шаг P винтовой линии на равное число частей (12). Определим соответствующие фронтальные проекции перемещаемой точки (A_0, A_1, \dots, A_{11}) и соединим их плавной кривой.

Горизонтальная проекция цилиндрической винтовой линии – окружность, а фронтальная синусоида. Разверткой цилиндрической винтовой линии ($A_0, A_1, A_2, \dots, A_{11}$) является прямая.

Угол α – угол подъема винтовой линии: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{2\pi R}$.

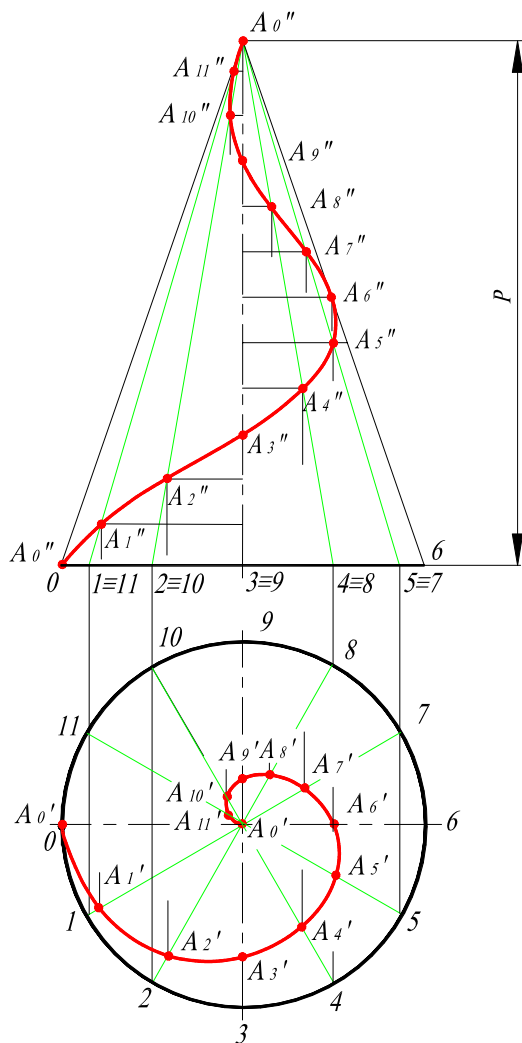


Рис. 7.10

Различают правые и левые винтовые линии. У правой подъем слева вверх направо, у левой – справа вверх налево.

Коническая винтовая линия (рис. 7.10) – пространственная кривая, которая образуется на поверхности конуса вращения в результате двойного равномерного движения точки – вращения вокруг оси конуса и поступательного движения вдоль образующей конуса.

Шаг конической винтовой линии (P) – величина прямолинейного перемещения точки в направлении оси конуса при полном обороте вокруг оси.

Для построения проекций конической винтовой линии разделим окружность основания конуса и шаг P на равное число частей (12). Проводим проекции образующих конуса и определим на них положение соответствующих проекций точек $A_0, A_1, A_2 \dots A_{11}$ и соединим их плавной кривой.

Горизонтальная проекция винтовой линии – спираль Архимеда, а фронтальная – затухающая синусоида (синусоида с уменьшающейся амплитудой).

7.3. Образование и классификация кривых поверхностей

Различают три основных способа задания поверхности:

1. аналитический (поверхность задается уравнением);
2. каркасный (поверхность задается совокупностью точек или линий);
3. кинематический (поверхность образуется непрерывным перемещением в пространстве какой-либо линии поверхности).

В начертательной геометрии в основном рассматривается кинематический способ образования поверхности.

Перемещающаяся в пространстве линия или поверхность называется образующей, которая при движении может сохранять или изменять свою форму.

Закон перемещения образующей обычно определяется другими линиями (иногда точками), называемыми направляющими, по которым скользит образующая при своем движении, а также условием движения образующей.

Совокупность геометрических элементов и условий, которые определяют поверхность в пространстве называют определителем.

Следует отметить, что одна и та же поверхность может быть получена различными способами. Например, цилиндрическая поверхность может быть получена в резуль-

тате перемещения прямолинейной образующей по кривой направляющей, или движением кривой образующей по прямолинейной направляющей.

Для большей наглядности изображения поверхностей в ряде случаев используют ее очерк – границы видимости на плоскостях проекций. Очерк проекции получается при пересечении с плоскостью проекций проецирующей поверхности, обертывающей данную. Например, очерком сферы является окружность радиуса, равного радиусу сферы.

В зависимости от формы образующей поверхности разделяются на линейчатые (образующая – прямая линия) и нелинейчатые (криволинейная образующая).

Линейчатые поверхности называются развертывающимися, если их можно совместить с плоскостью без разрывов и складок. Неразвертывающиеся поверхности не могут быть совмещены с плоскостью без наличия разрывов и складок.

Поверхности с постоянной образующей – поверхности, образующая которых не изменяет своей формы при образовании поверхности. Поверхности с переменной образующей – поверхности, образующая которых изменяется при образовании поверхности.

В зависимости от формы образующей и закона ее перемещения в пространстве поверхности можно условно разделить на группы, указанные на рис. 7.11.

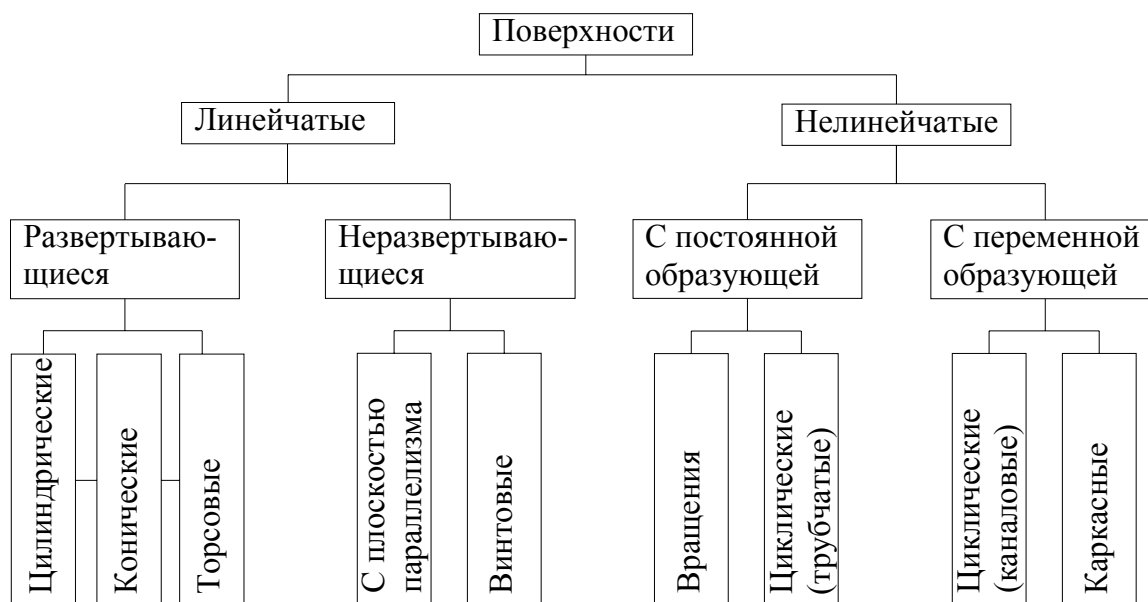


Рис. 7.11

7.4. Линейчатые поверхности

7.4.1. Цилиндрическая поверхность (рис. 7.12) образуется движением прямой линии l (образующей), пересекающей кривую линию m (направляющую и имеющей постоянное направление S).

7.4.2. Коническая поверхность (рис. 7.13) образуется движением прямой линии l (образующей), пересекающей кривую m (направляющую) и проходящей во всех своих положениях через неподвижную точку S (вершину конической поверхности).

При задании цилиндрических и конических поверхностей на чертеже в качестве направляющей часто используют линию пересечения поверхности с одной из плоскостей проекций.

На рис. 7.12 показано построение линии пересечения заданной цилиндрической поверхности с горизонтальной плоскостью проекций. Образующая L (L_1, L_2, L_3, L_4) при своем движении, пересекаясь с плоскостью проекций π_1 , дает точки M_1, M_2, M_3, M_4 . Кривая, проведенная через эти точки является линией пересечения (следом) цилиндрической поверхности с плоскостью проекций π_1 .

На рис. 7.13 показано построение линии пересечения конической поверхности с горизонтальной плоскостью проекций.

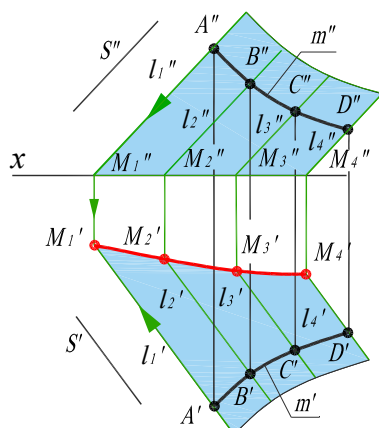


Рис. 7.12

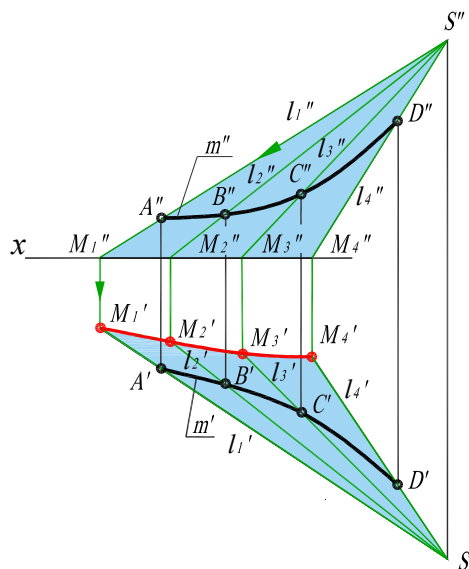


Рис. 7.13

Цилиндрическая поверхность является частным случаем конической, у которой вершина S удалена в бесконечность.

7.4.3. Торсовая поверхность (поверхность с ребром возврата) образуется движением прямолинейной образующей (во всех своих положениях касающейся некоторой пространственной кривой m (рис. 7.14).

Образующая занимает положения касательно L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 кривой m (ребру возврата) в точках A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 .

Коническую и цилиндрическую поверхности можно рассматривать как частные случаи тора, когда ее ребро возврата вырождается в точку (конечную или бесконечно удаленную).

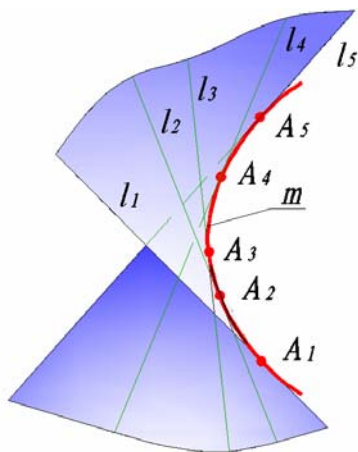


Рис. 7.14

Цилиндрическая, коническая и торсовая поверхности являются *развертывающимися*.

7.4.4. Поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана) образуются движением прямолинейной образующей, параллельной некоторой заданной плоскости (плоскости параллелизма) и пересекающей две заданные линии (направляющие).

Цилиндроид (рис. 7.15) образуется движением прямолинейной образующей L (L_1, L_2, L_3, L_4) по двум криволинейным направляющим m и n , причем во всех положениях образующая остается параллельной плоскости параллелизма π_1 .

Коноид (рис. 7.16) образуется движением прямолинейной образующей L (L_1, L_2, L_3, L_4) по двум направляющим, из которых одна m - кривая, а другая n - прямая. При этом во всех положениях образующая остается параллельной плоскости параллелизма π_1 (направляющая n - горизонтально-проецирующая).

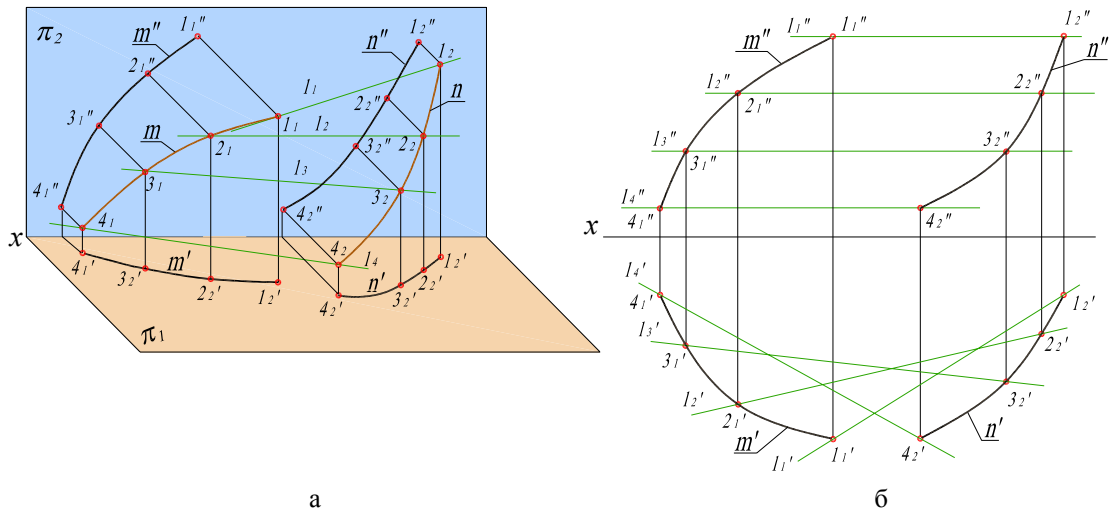


Рис. 7.15

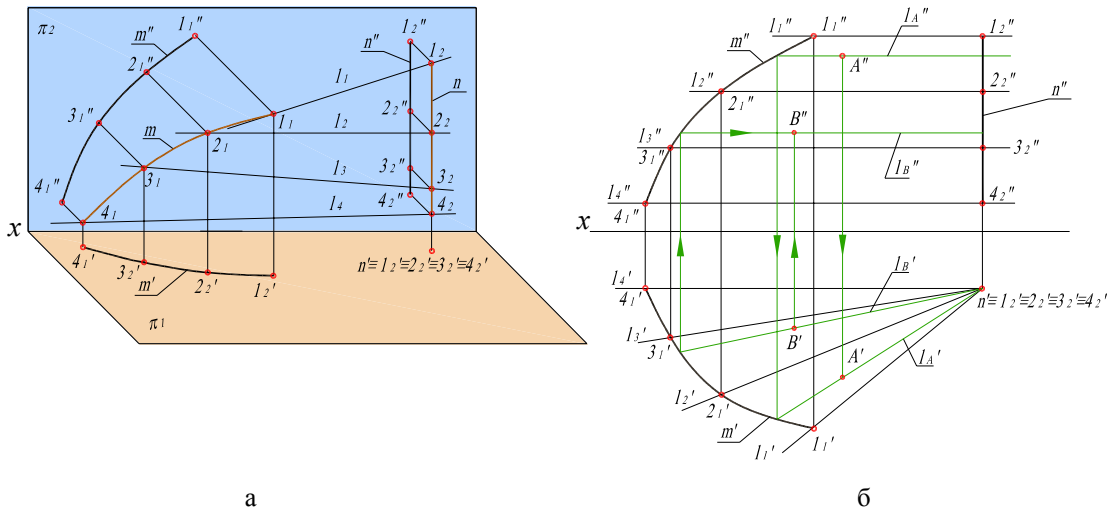


Рис. 7.16

Косая плоскость (гиперболический параболоид) образуется движением прямолинейной образующей L (L_1, L_2, L_3, L_4) по двум направляющим – скрещивающимся прямым линиям (m и n) – параллельно плоскости параллелизма π_1 (рис. 7.17).

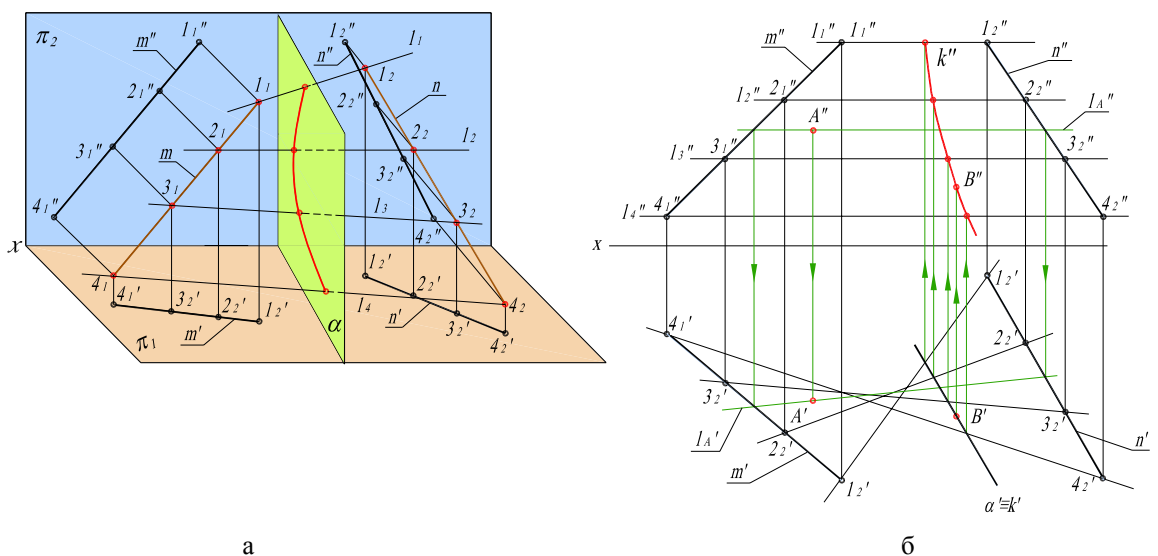


Рис. 7.17

При пересечении косої плоскости плоскостями кроме прямых линий могут получиться параболы и гиперболы, чем и объясняется ее название – гиперболический параболоид.

Поверхности с плоскостью параллелизма имеют применение в архитектуре, строительстве, в конструировании технических форм.

7.4.5. *Винтовые поверхности* получаются винтовым перемещением образующей линии.

Линейчатые винтовые поверхности (образующая – прямая линия) называются геликоидами.

Прямой геликоид (рис.7.18) образуется движением прямой, которая пересекает винтовую линию, а также ось винтовой линии i под прямым углом.

Поскольку образующая перпендикулярна оси винтовой линии, то она параллельна плоскости проекций π_1 . Поэтому другое название прямого геликоида – винтовой коноид.

Косой геликоид (рис. 7.19) образуется движением прямой, которая пересекает винтовую линию и ось винтовой линии i под постоянным углом не равным 90° .

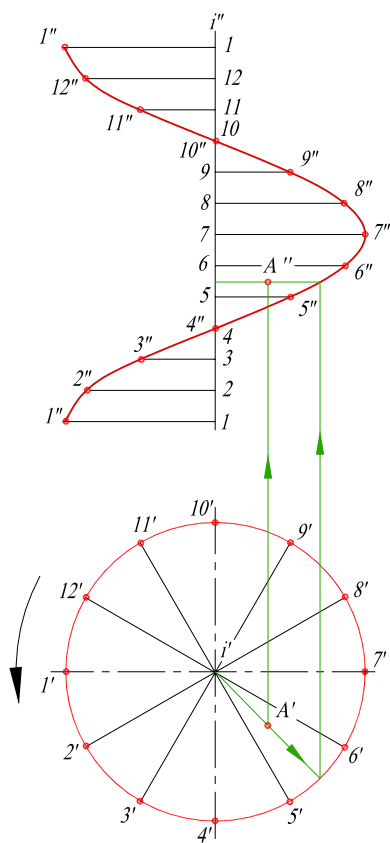


Рис. 7.18

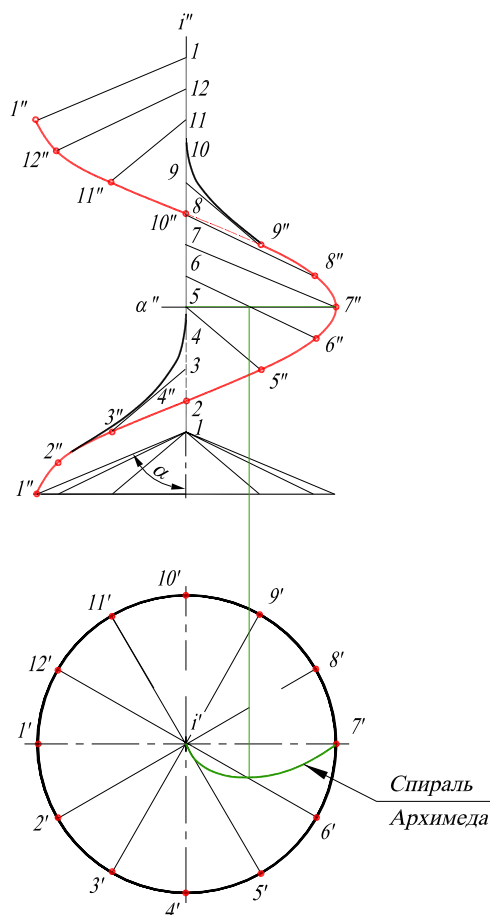


Рис. 7.19

Кривая пересечения поверхности косої геликоида плоскостью (α) перпендикулярной оси винтовой линии – спираль Архимеда. Поэтому другое название косої геликоида – Архимедов геликоид.

Образующая косої геликоида пересекает ось винтовой линии i под углом α (рис. 7.19). Для определения фронтальных проекций образующих может быть использован направляющий конус, образующие которого составляют с ось i угол α . Фронтальный очерк поверхности косої геликоида ограничен фронтальной проекцией винтовой линии и кривыми, огибающими ряд положений образующей линии.

Винтовой торс (рис. 7.20) – поверхность с ребром возврата, которым является цилиндрическая винтовая линия. Эта поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей, во всех своих положениях касающейся цилиндрической винтовой линии.

Поскольку это поверхность развертываемая – другое ее название развертываемый геликоид.

Кривая пересечения поверхности винтового торса поверхностью перпендикулярной оси винтовой линии i – эвольвента окружности. Отсюда и другое ее название – *эвольвентный геликоид*.

Прямолинейная образующая, касаясь винтовой линии в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 пересекается с горизонтальной плоскостью проекций в точках $M_1, M_2, M_3, \dots, M_8$ и образует с ней постоянный угол α , равный углу подъема винтовой линии.

Если прямолинейная образующая скользит по винтовой линии, а с плоскостью π_1 образует угол не равный углу подъема винтовой линии, то образуется *конволютный геликоид*.

Винтовой цилиндридой (рис. 7.21) образуется движением прямолинейной образующей по двум криволинейным направляющим (винтовым линиям m и n), причем во всех положениях образующая остается параллельной плоскости параллелизма π_1 .

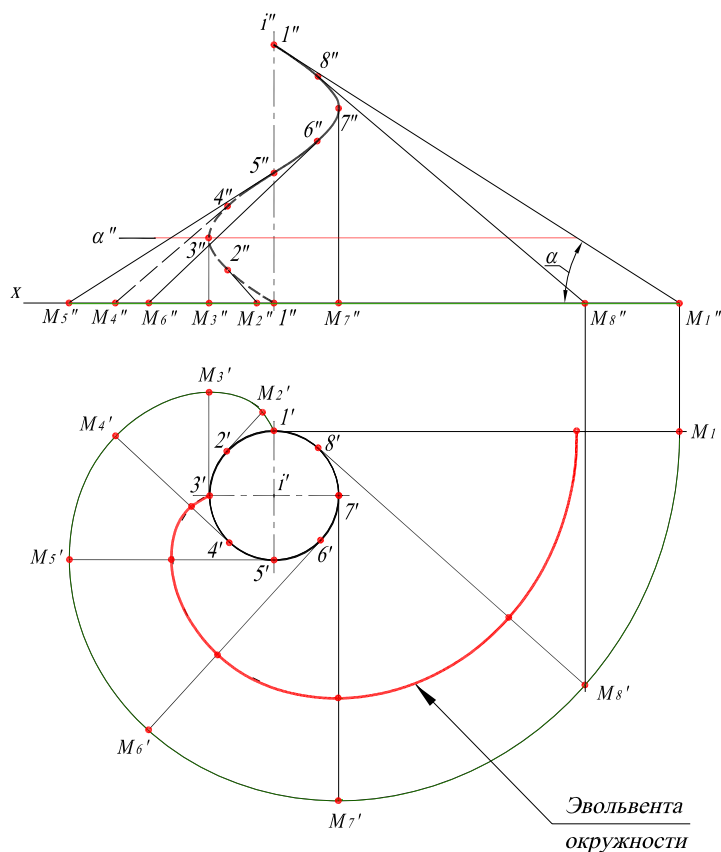
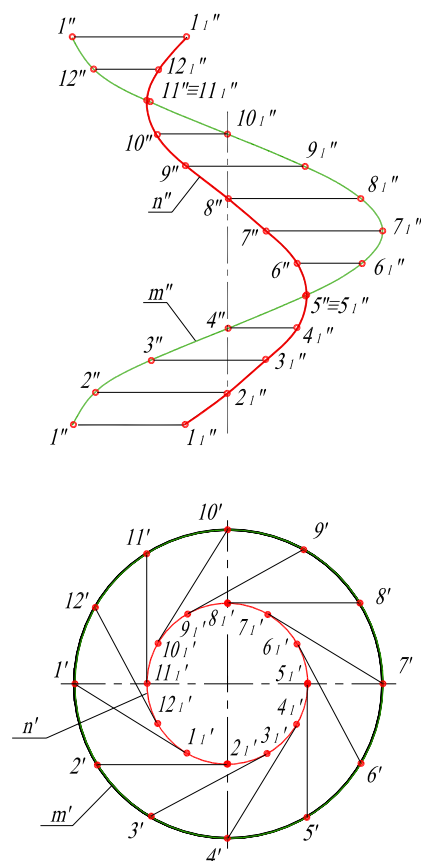


Рис. 7.20



7.21

Геликоиды имеют широкое применение в технике (различные профили резьб, рабочие поверхности червяков червячных передач, червячные фрезы, винтовые транспортеры и пр.) и в строительстве (винтовые лестницы и винтовые въезды, откосы насыпи и выемки полотна железной дороги на кривой с подъемом).

7.5. Поверхности вращения

Поверхность вращения (рис. 7.22) получается вращением прямолинейной или криволинейной образующей (l) вокруг неподвижной прямой (i) – оси поверхности. За ось вращения обычно принимается вертикальная прямая. Каждая точка образующей (например, точка A) описывает при своем вращении окружность с центром O на оси. Эти окружности называются *параллелями*. Наибольшая из этих параллелей называется *экватором*, наименьшая – *горлом*.

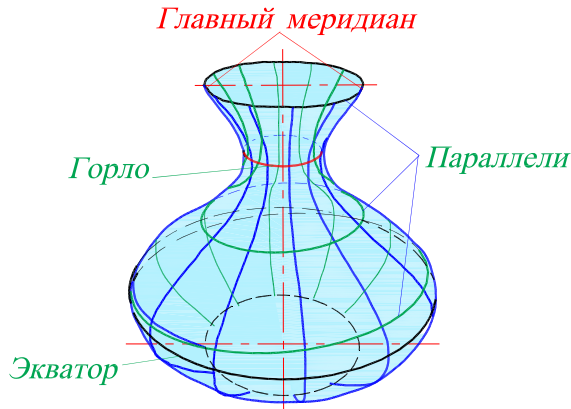


Рис. 7.22

Плоскости, проходящие через ось вращения, пересекают поверхность по *меридианам*. Меридиан, расположенный в плоскости, параллельной π_2 , называется *главным*.

Поверхность вращения называют *замкнутой*, если криволинейная образующая пересекает ось поверхности в двух точках. Если образующая – прямая линия, то получается *линейчатая поверхность вращения*, если кривая – *нелинейчатая*.

Замкнутую область пространства вместе с ее границей (поверхностью) называют *геометрическим телом*.

Цилиндр вращения (рис. 7.23) образуется вращением прямой l вокруг параллельной ей оси i . Все точки образующей l (например, точка A) описывают окружности (параллели) равные окружностям оснований цилиндра.

Конус вращения (рис. 7.24) образуется вращением прямой l вокруг пересекающей с ней оси i . Все точки образующей l описывают окружности различных радиусов (для точки A – радиус R_a). Величина радиуса изменяется от нуля до радиуса окружности основания конуса.

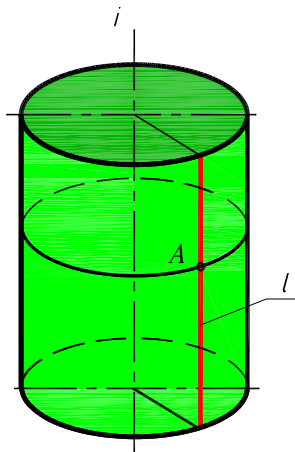


Рис. 7.23

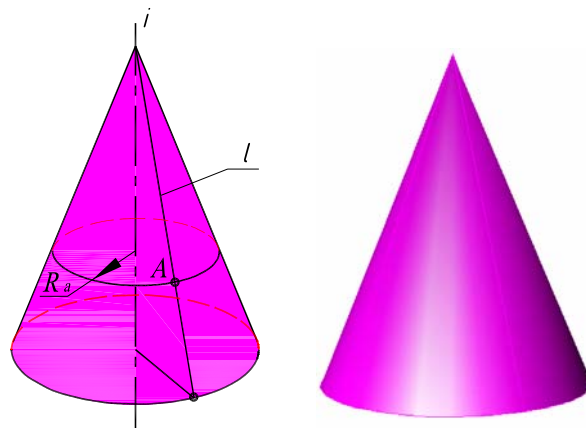


Рис. 7.24

Однополостный гиперболоид вращения (рис. 7.25) образуется вращением прямой l вокруг скрещивающейся с ней оси i . Точки образующей l (описывают окружности переменных радиусов (для точки A – радиус R_a). Радиус параллели наименьшего радиуса (горла) равен кратчайшему расстоянию между образующей l и осью i .

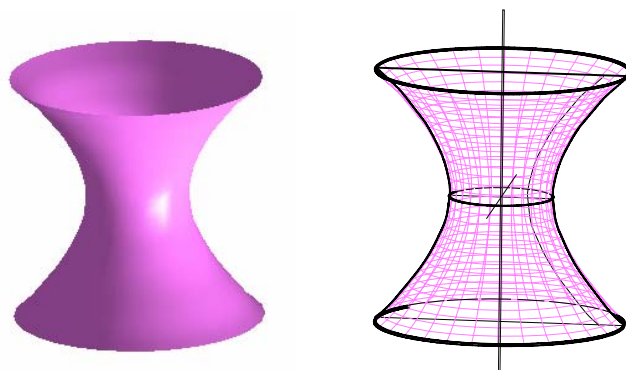


Рис. 7.25

Сфера (рис. 7.26) образуется вращением окружности вокруг ее диаметра. Точки образующей окружности описывают окружности переменных радиусов. Точка *A* описывает параллель наибольшего радиуса (экватор). Для сферы экватор и меридианы – равные между собой окружности.

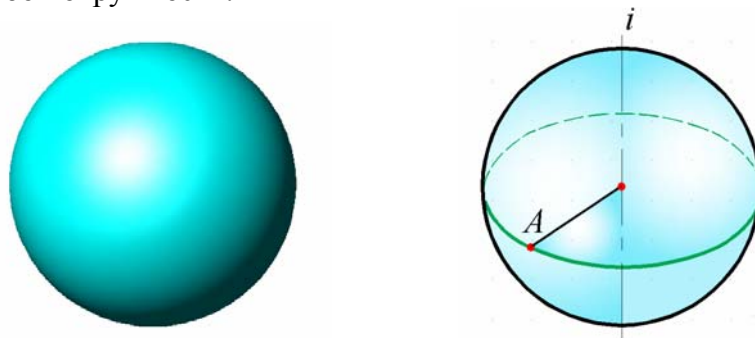


Рис. 7.26

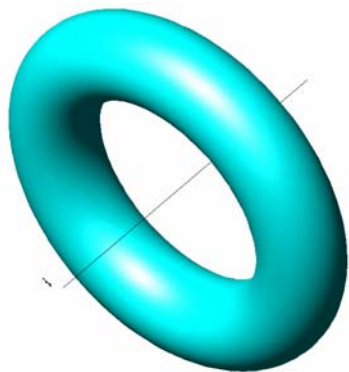


Рис. 7.27

Тор (рис. 7.27) образуется вращением окружности вокруг оси *i*, лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр. В зависимости от взаимного расположения образующей окружности и оси вращения различают:

- а) открытый тор (круговое кольцо) (рис. 7.28, а), $\frac{r}{R} < 1$;
- б) замкнутый (рис. 7.28, б), $\frac{r}{R} = 1$;
- в) самопересекающийся (рис. 7.28, в), $\frac{r}{R} > 1$;

Внутреннюю часть открытого тора в технике называют глобoidом (рис. 7.29). Пример применения – глобoidная червячная передача.

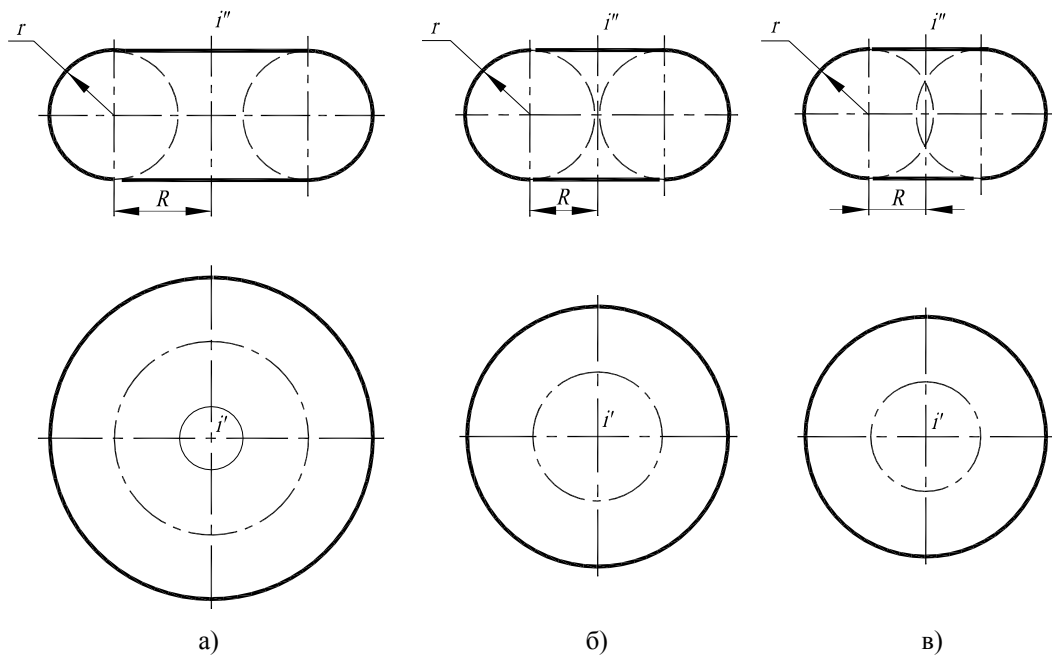


Рис. 7.28

Эллипсоид вращения образуется вращением эллипса вокруг его оси. При вращении эллипса вокруг его большой оси получается вытянутый эллипсоид (рис. 7.30, а), при вращении вокруг малой – сжатый эллипсоид (рис. 7.30, б). Для эллипсоида вращения меридианом является эллипс.

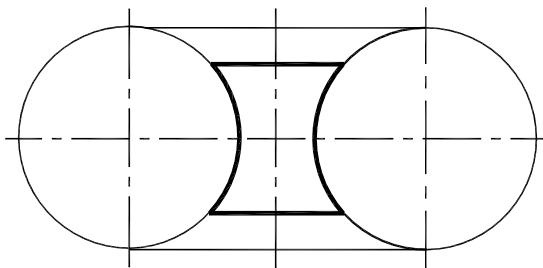


Рис. 7.29

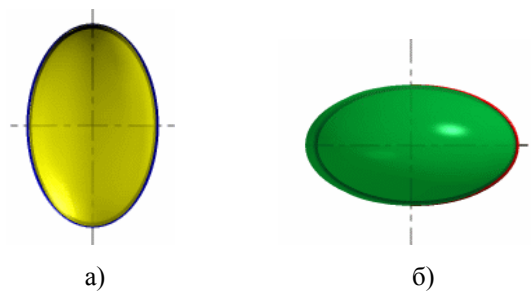


Рис. 7.30

Однополостный гиперboloид вращения (рис. 7.31) образуется вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси.

Двуполостный гиперboloид вращения (рис. 7.32) образуется вращением гиперболы вокруг ее действительной оси.

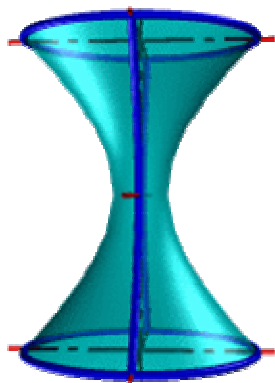


Рис. 7.31

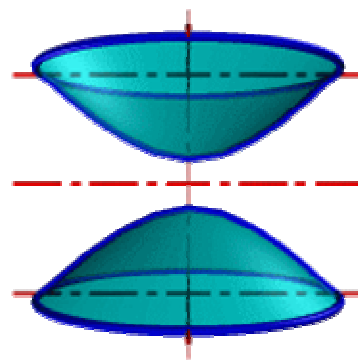


Рис. 7.32

Меридианами гиперboloидов вращения являются гиперболы.

Параболоид вращения (рис. 7.33) образуется вращением параболы вокруг ее оси. Меридианом параболоида вращения является парабола.

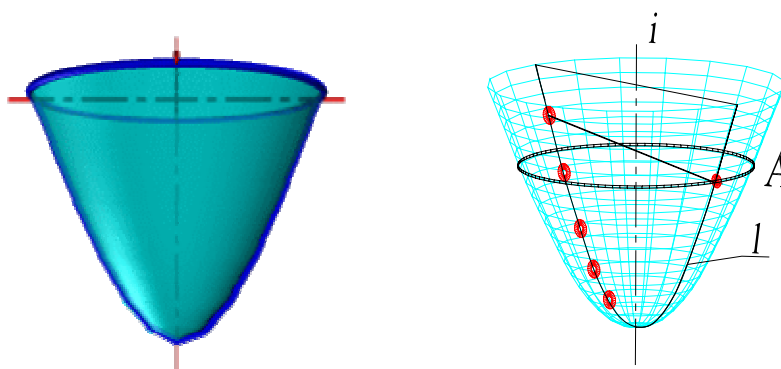


Рис. 33

Поверхности вращения: цилиндр, конус, однополостный гиперболоид – являются также и линейчатыми поверхностями.

Тор является поверхностью четвертого порядка, что соответствует максимальному числу точек пересечения поверхности с прямой линией. Все остальные перечисленные выше поверхности вращения являются поверхностью второго порядка.

7.6. Циклические и каркасные поверхности

Циклическая поверхность образуется окружностью постоянного или переменного радиуса при ее произвольном движении.

Каналовая поверхность (рис. 7.34) образуется движением окружности переменного радиуса вдоль кривой направляющей, причем плоскость образующей окружности остается перпендикулярной к заданной направляющей, по которой движется центр окружности. Если радиус образующей окружности постоянен, то такая каналовая поверхность называется *трубчатой*.

Когда направляющей кривой является цилиндрическая винтовая линия, образуется трубчатая винтовая поверхность. Она может быть получена и движением

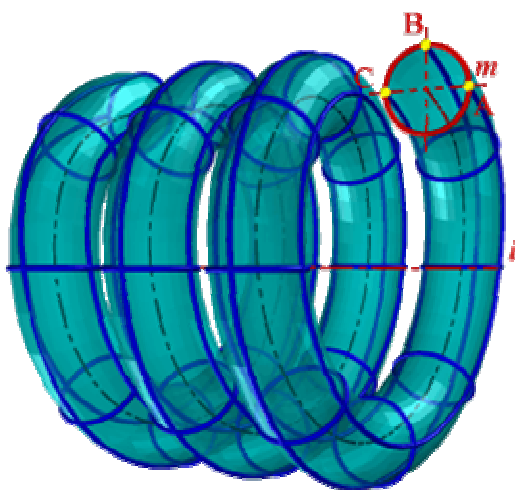


Рис. 7.34

сферы постоянного диаметра, центр которой перемещается по цилиндрической винтовой линии. Примером такой поверхности является поверхность цилиндрической пружины с круглым сечением витков.

Каркасными называют поверхности, заданные некоторым числом линий – каркас поверхности может быть получен линиями пересечения ее плоскостями параллельными плоскостям проекций.

Примером каркасных поверхностей могут служить поверхности корпусов судов, самолетов, автомобилей. К разряду каркасных поверхностей относится и топографическая поверхность. Эта изображается совокупностью горизонталей, т.е. линий, получаемых в сечении земной поверхности поверхностью горизонтальными плоскостями.

7.7. Построение точек, лежащих на геометрических телах и поверхностях

Точка принадлежит поверхности в том случае, когда она находится на линии, принадлежащей этой поверхности. В качестве таких линий могут быть выбраны образующие, параллели, меридианы и др.

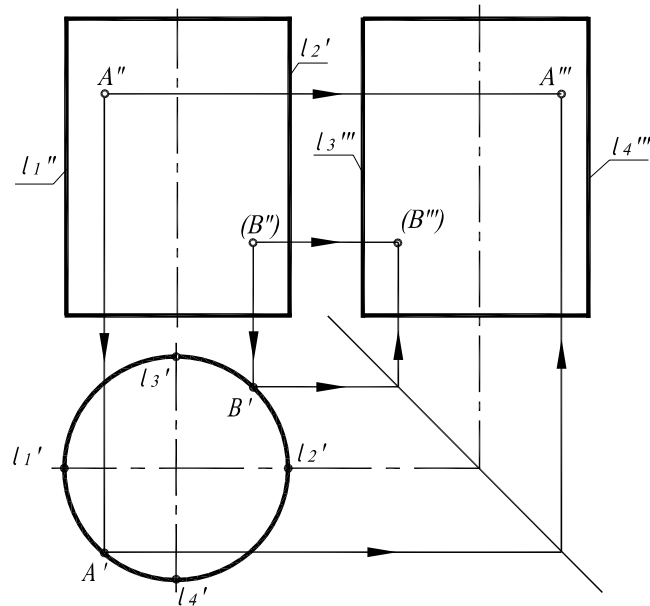


Рис. 7.35

Поверхности цилиндра вращения (рис. 7.35) является горизонтально проецирующей, образующие цилиндра перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций, вследствие чего поверхность цилиндра проецируется на эту плоскость окружностью.

Горизонтальные проекции точек A и B (A' и B') лежат на окружности. Профильные проекции этих точек A''' и B''' находятся при помощи линий.

Очерковые образующие цилиндра разделяют фронтальную и профильные проекции на видимую и невидимые части. Так образующие L_1 и L_2 делят цилиндрическую поверхность на видимую спереди и невидимую, образующие L_3 и L_4 на видимую слева и невидимую. Невидимые проекции точек указаны в скобках.

Конус вращения является также и линейной поверхностью, поэтому для построения точек на его поверхности можно использовать и образующие и параллели.

На рис. 7.36, а показано построение горизонтальной A' и профильной A''' проекций точки A по заданной фронтальной проекции A'' .

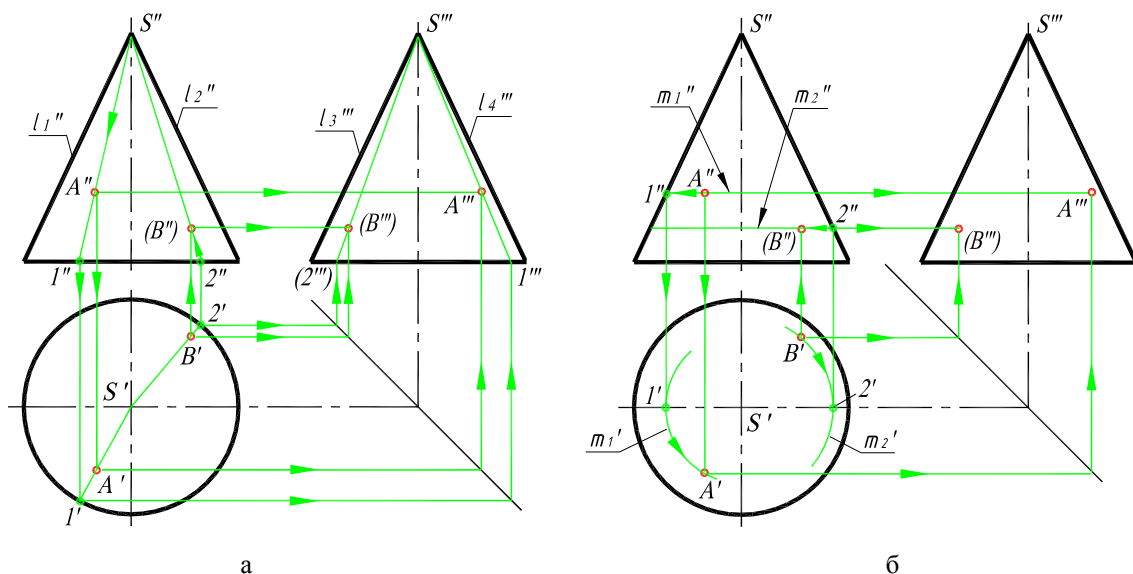


Рис. 7.36

Если задана горизонтальная проекция B' точки B , то построение начинается с проведения горизонтальной проекции $S' 2'$ образующей S_2 , на которой находится точка B . Определить фронтальную проекцию $S'' 2''$ этой образующей, по линиям связи находим фронтальную проекцию B'' точки B , а затем и профильную B''' .

Образующие L_1 и L_2 разделяют коническую поверхность на видимую спереди и невидимую, а образующие L_3 и L_4 на видимую слева и невидимую.

Проекции B'' и B''' находятся на невидимой части конуса. Горизонтальная проекция поверхности конуса является видимой.

На рис. 7.36, б показано построение недостающих проекций точек A и B при помощи параллелей. Через заданные проекции A'' и B'' проводятся проекции m''_1 и m''_2 параллелей m_1 и m_2 . Используя т.1 и 2, лежащие на очерковых образующих, определим положение проекций m'_1 и m'_2 проведенных параллелей. По линиям связи определим положение проекций A' и A'' точки A и проекций B'' и B''' точки B .

На рис. 7.37 приведены проекции сферы, которые ограничены экватором K , фронтальным меридианом m и профильным n . Каждый из них проецируется на соответствующую плоскость проекций в натуральную величину (окружность), на остальные – в виде отрезков прямых длиной, равной диаметру сферы. На этом же рисунке показано построение недостающих проекций точек A , B и C по заданным фронтальным проекциям этих точек. Точка A находится на экваторе K , точка B – на фронтальном меридиане m , точка C – на профильном меридиане n . Недостающие проекции определяются при помощи линий связи (проведение линий связи на рисунке показано стрелками).

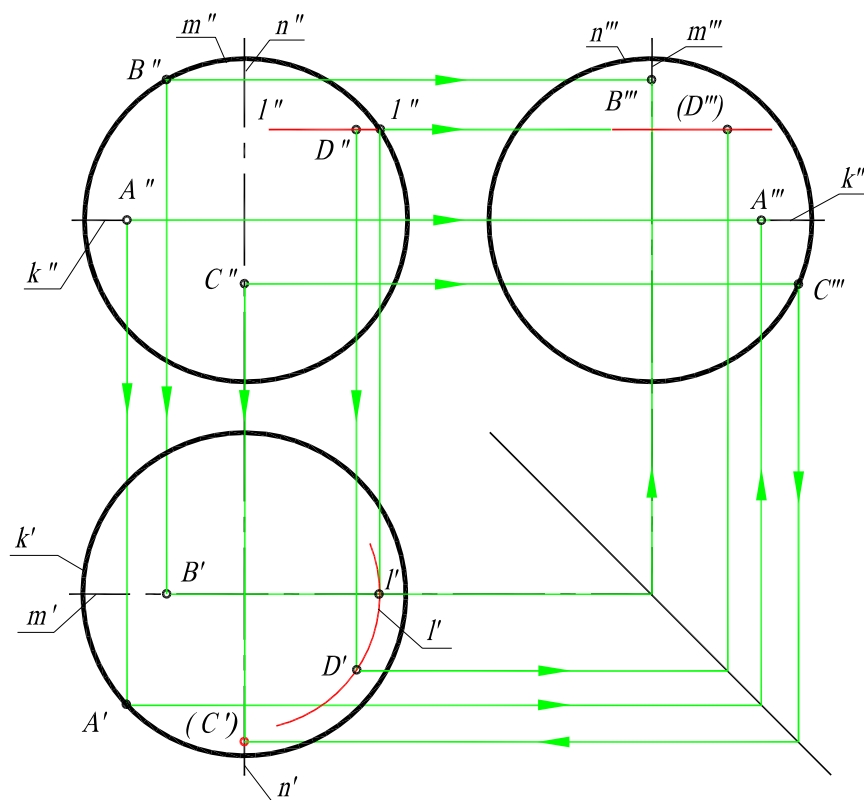


Рис. 7.37

Экватор K разделяет сферу на видимую (верхняя половина) на горизонтальной проекции невидимую части. Фронтальный меридиан m разделяет сферу на видимую (ближняя половина) и невидимую части на фронтальной проекции.

Профильный меридиан n разделяет сферу на видимую (левая половина) и невидимую части на профильной проекции.

Так на рис. 7.37 горизонтальная проекция C' точки C невидима (взята в скобки), т.к. находится на нижней (невидимой) половине сферы.

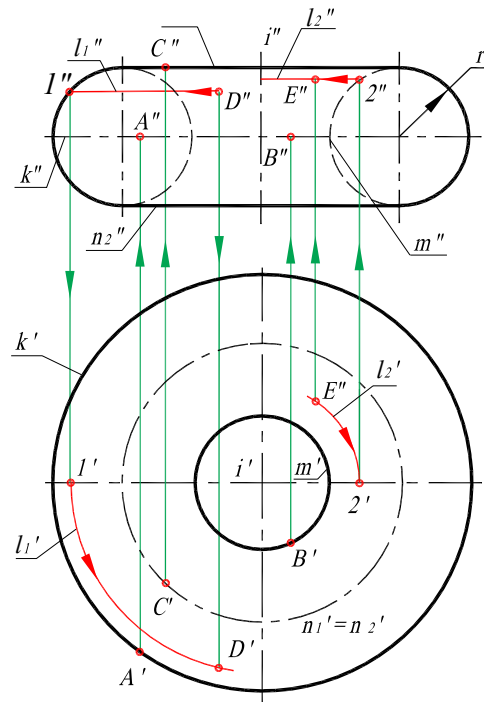


Рис. 7.38

Стрелками на рисунке показано построение фронтальных проекций точек A, B, C по заданным горизонтальным, расположенным соответственно на экваторе k , горле - m , и крайней (верхней) параллели n_1 .

Для построения горизонтальной проекции D' точки D , через фронтальную проекцию D'' проведена фронтальная проекция L_1'' параллели L_1 . Горизонтальная проекция L_1' параллели L_1 построена при помощи точки I , лежащей на образующей окружности. Горизонтальная проекция точки B найдена при помощи линий связи, как принадлежащая параллели L_1 .

Для построения фронтальной проекции точки E (по заданной горизонтальной), лежащей на внутренней части тора (рис. 7.38), использована параллель L_2 . Фронтальная проекция этой параллели строится при помощи точки 2 , принадлежащей образующей окружности.

Экватор k разделяет тор на видимую (верхняя половина) и невидимую части на горизонтальной проекции. На фронтальной проекции видимой является ближняя наружная часть открытого тора.

7.8. Примеры решения задач к главе 7

Пример 1. Построить недостающие проекции линий, принадлежащих поверхности сферы (рис. 7.39).

Решение. На рис. 7.39 задана горизонтальная проекция линий AB и BC , находящихся на поверхности сферы. Любая плоская кривая сферы является окружностью. Так как линия AB – фронтальная параллель, то фронтальная проекция ее – дуга $A''-1''-B''$, а профильная – прямая $A'''-1'''-B'''$. Точки A и B расположены на экваторе сферы. Кривая BC также является частью окружности, но на фронтальную и профильную плоскости проекций она проецируется в виде эллиптических кривых. Построение проекций этих кривых сводится к построению отдельных точек (2, 3, 4, 5, 6), для нахождения которых использованы вспомогательные фронтальные параллели (см. построение точки B на рис. 7.37). Точка C принадлежит экватору сферы.

На поверхности сферы можно провести множество параллелей, соответственно параллельных плоскостям проекций. Эти параллели используются для построения проекций точек на сфере.

По данной фронтальной проекции A'' точки A , найдена горизонтальная A' как принадлежащая горизонтальной параллели L_1 . Для построения горизонтальной проекции L_2' использована точка 1 , принадлежащая фронтальному меридиану. Профильная проекция A''' точки A построена при помощи линий связи и находится на невидимой (правой половине) части сферы.

На рис. 7.38 представлены проекции открытого тора (кругового кольца), полученного вращением окружности радиуса r вокруг оси i . Проекции экватора обозначены k , горла - m , крайних параллелей n_1 (верхняя) и n_2 (нижняя).

Профильные проекции точек определяются при помощи линий связи. Полученные точки соединены плавной кривой. Видимые части проекций кривых расположены на видимых полушариях сферы.

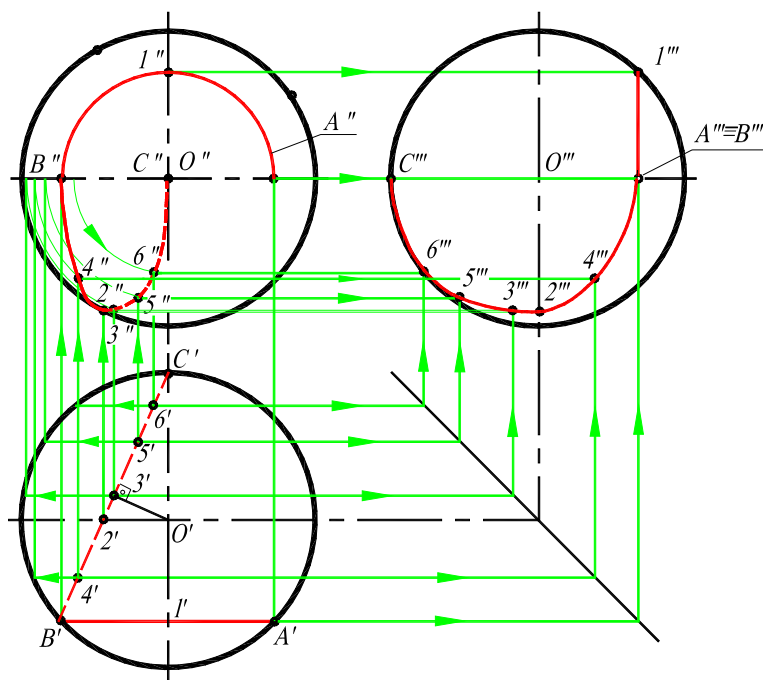


Рис. 7.39

Пример 2. Построить недостающие проекции линии, принадлежащего поверхности открытого тора (рис. 7.40).

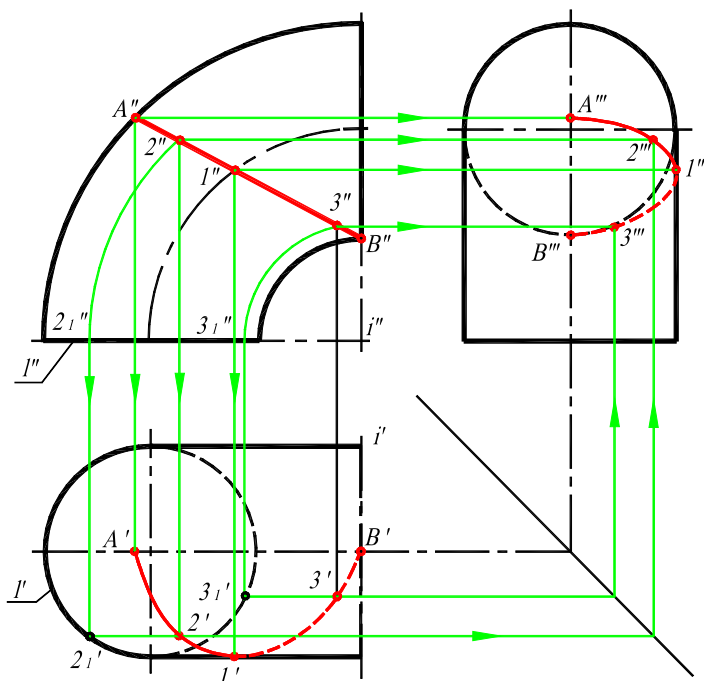


Рис. 7.40

Решение. На рис. 7.40 задана фронтальная проекция линии AB , находящейся на поверхности части открытого тора, полученного вращением образующей окружности l вокруг фронтально-проецирующей оси i . Линия AB является плоской кривой, для построения недостающих проекций которой следует построить ряд точек ($A, B, 1, 2, 3$), принадлежащих этой кривой.

Построение точек на поверхности тора приведено на рис. 7.38. Точка A находится на экваторе, точка B на горле, а точка 1 на крайней (ближней) параллели тора. Поэтому горизонтальные проекции этих точек определяются при помощи линий связи.

Для построения горизонтальных проекций $2'$, $3'$ точек 2 и 3 приведены фронтальные проекции параллелей, проходящих через эти точки (дуги окружностей). Для построения горизонтальных проекций этих параллелей использованы точки 2_1 и 3_1 , лежащие на образующей окружности l .

Профильные проекции точек кривой определяются при помощи линий связи.

Полученные проекции точек соединяются плавной кривой. Видимыми проекциями кривой являются те участки, которые расположены на видимых частях тора.

Пример 3. Построить фронтальную проекцию линии AB , принадлежащую поверхности коноида (рис. 7.41).

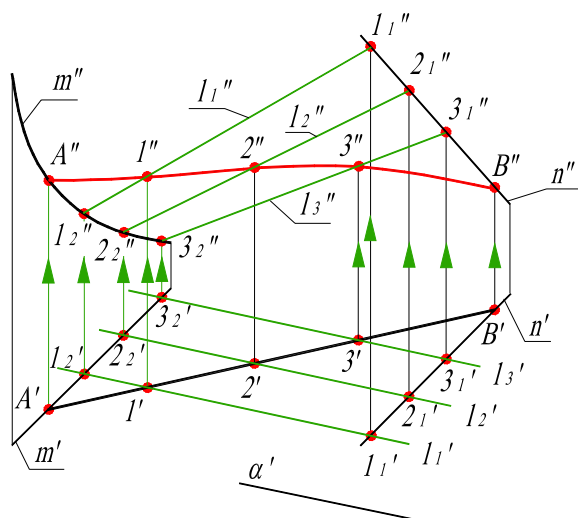


Рис. 7.41

Решение. На рис. 7.41 задана горизонтальная проекция линии AB , принадлежащей поверхности коноида. Коноид определяется двумя направляющими m (кривая) и n (прямая) и плоскостью параллелизма α (горизонтально-проецирующая плоскость).

Линия AB является плоской кривой, для построения фронтальной проекции которой следует определить фронтальные проекции ряда точек ($A, 1, 2, 3, B$).

Фронтальные проекции A'' и B'' точек A и B определяются при помощи линий связи как принадлежащие направляющим m и n . Фронтальные проекции $1''$, $2''$, $3''$ точек 1, 2, 3 определяются при помощи образующих l_1, l_2, l_3 .

Горизонтальные проекции этих образующих проходят через проекции $1', 2', 3'$ точек 1, 2, 3 параллельно плоскости параллелизма α .

Фронтальные проекции образующих $1'', 2'', 3''$ определяются с использованием точек $1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2$, которые принадлежат направляющим m и n .

Полученные фронтальные проекции точек $A'', 1'', 2'', 3'', B''$ соединяются плавной кривой.

7.9. Вопросы для контроля

1. Перечислите плоские лекальные кривые.
2. Как образуется цилиндрическая винтовая линия?
3. Перечислите линейчатые поверхности (развертывающиеся и неразвертывающиеся).
4. Как образуются поверхности с плоскостью параллелизма (цилиндроида, коноид, косая плоскость)?
5. Как образуются линейчатые винтовые поверхности (геликоиды) и дайте им название?
6. Как образуются поверхности вращения?
7. Перечислите линейчатые поверхности вращения.
8. Перечислите нелнейчатые поверхности вращения.
9. Как образуется поверхность тора и назовите его разновидности?

Глава 8. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТЬЮ. РАЗВЕРТЫВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

8.1 Общие положения

Линия пересечения кривой поверхности с плоскостью представляет собой плоскую кривую, которая может распадаться и на прямые линии в случае пересечения плоскости с линейчатой поверхностью по ее образующим.

Для построения этой кривой линии на чертеже находят проекции ее отдельных точек, соединяемых с помощью лекала.

Среди точек линии пересечения имеются точки, которые занимают особое расположение на кривой или выделяются своим местоположением относительно плоскостей проекций. Такие точки называют опорными или характерными. К ним относятся высшие и низшие, ближние и дальние, точки, расположенные на крайних образующих (точки видимости) и др. Остальные точки называются промежуточными или случайными.

Для нахождения точек линии пересечения применяются вспомогательные секущие плоскости (проецирующие или плоскости уровня). Вспомогательные плоскости выбираются так, чтобы в пересечении с кривой поверхностью получались простейшие линии – прямые и окружности.

На рис. 8.1. цилиндр вращения пересекается плоскостью общего положения α , заданной следами $h_{0\alpha}$ и $f_{0\alpha}$.

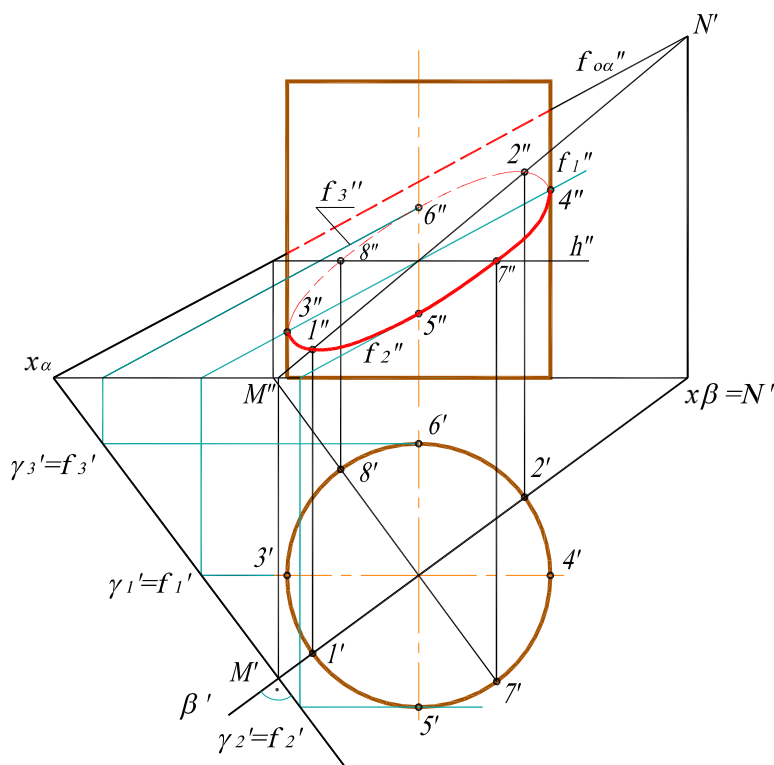


Рис. 8.1

Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра (окружностью). Для построения фронтальных проекций точек кривой пересечения использованы вспомогательные плоскости частного положения.

Низшая 1 и высшая 2 точки определены при помощи горизонтально-проецирующей плоскости β , перпендикулярной секущей плоскости α . Она пересекает плоскость α по линии MN (линии наибольшего ската) а поверхность цилиндра – по образующим.

Точки видимости 3 и 4, ближняя и дальняя 5 и 6 построены при помощи фронтальных плоскостей χ_1, χ_2, χ_3 , пересекающих заданную плоскость α по фронталям f_1, f_2 ,

f_3 , а поверхность цилиндра по образующим.

Для построения точек 7 и 8 использована горизонтально-проецирующая плоскость δ , которая пересекается секущей плоскостью α по горизонтали h (как плоскости с параллельными горизонтальными следами), а с поверхностью цилиндра по образующим.

Последовательно соединив фронтальные проекции точек, получим фронтальную проекцию линии пересечения цилиндра плоскостью – эллипс (большая ось эллипса – отрезок 1-2, малая – отрезок 7-8).

Для нахождения промежуточных точек можно воспользоваться либо фронтальными, либо горизонтальными плоскостями уровня. В последнем случае плоскости будут пересекать секущую плоскость по горизонталям, а поверхность цилиндра – по окружностям. Определив горизонтальные проекции точек, принадлежащие линии сечения, можно найти и фронтальные. Построение промежуточных точек на рис. 8.1 не показано.

Задача на построение линии пересечения кривой поверхности плоскостью значительно упрощается, если заданные секущие плоскости являются плоскостями частного положения. В этом случае одна проекция линии пересечения совпадает со следом – проекцией секущей плоскости, а построение недостающих сводится к построению ряда проекций точек на поверхности. А если секущая плоскость является плоскостью общего положения, то можно преобразовать чертеж так, чтобы секущая плоскость стала в новом положении проецирующей (например, использовать способ перемены плоскостей проекций).

В дальнейшем пересечение поверхностей будет рассматриваться только плоскостями частного положения (проецирующими или плоскостями уровня).

8.2 Пересечение цилиндра плоскостью. Построение развертки

При пересечении цилиндра вращения плоскостью возможны случаи:

- 1 секущая плоскость параллельна оси – в сечении цилиндрической поверхности получаются две прямые (образующие) (рис. 8.2, а);
- 2 секущая плоскость перпендикулярна оси – в сечении получается окружность, равная окружностям оснований (рис. 8.2, б);
- 3 секущая плоскость наклонна к оси – в сечении получается эллипс, малая ось которого всегда равна диаметру цилиндра, а большая зависит от угла φ (рис. 8.2, в).

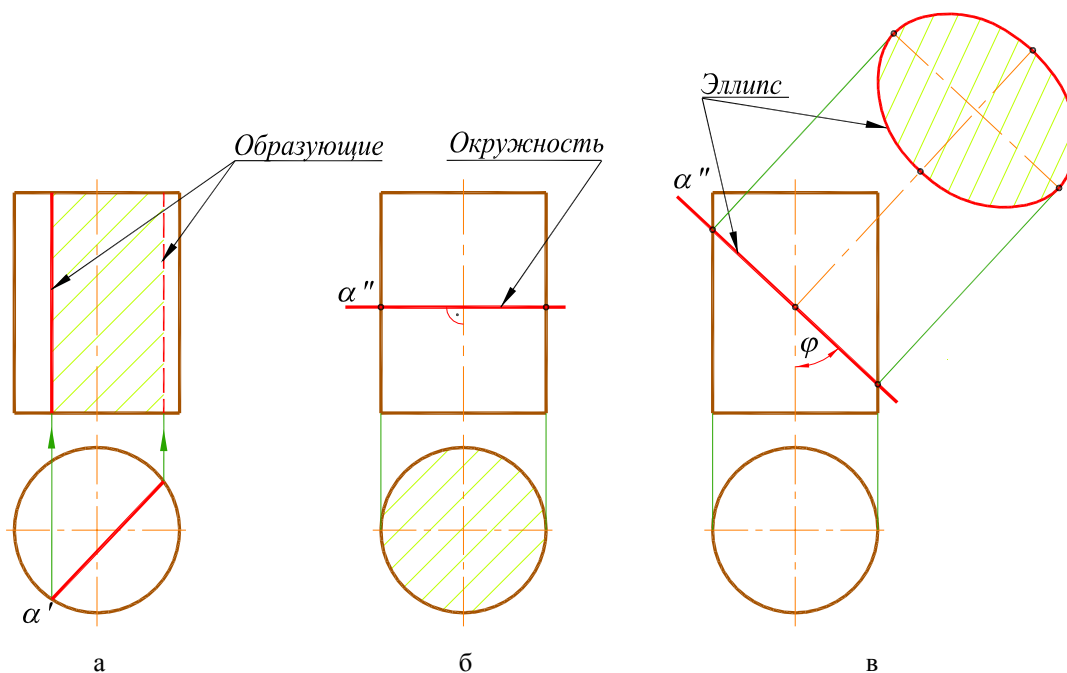


Рис. 8.2

На рис. 8.3 показано построение проекций цилиндра вращения, усеченного плоскостями частного положения α , β , γ .

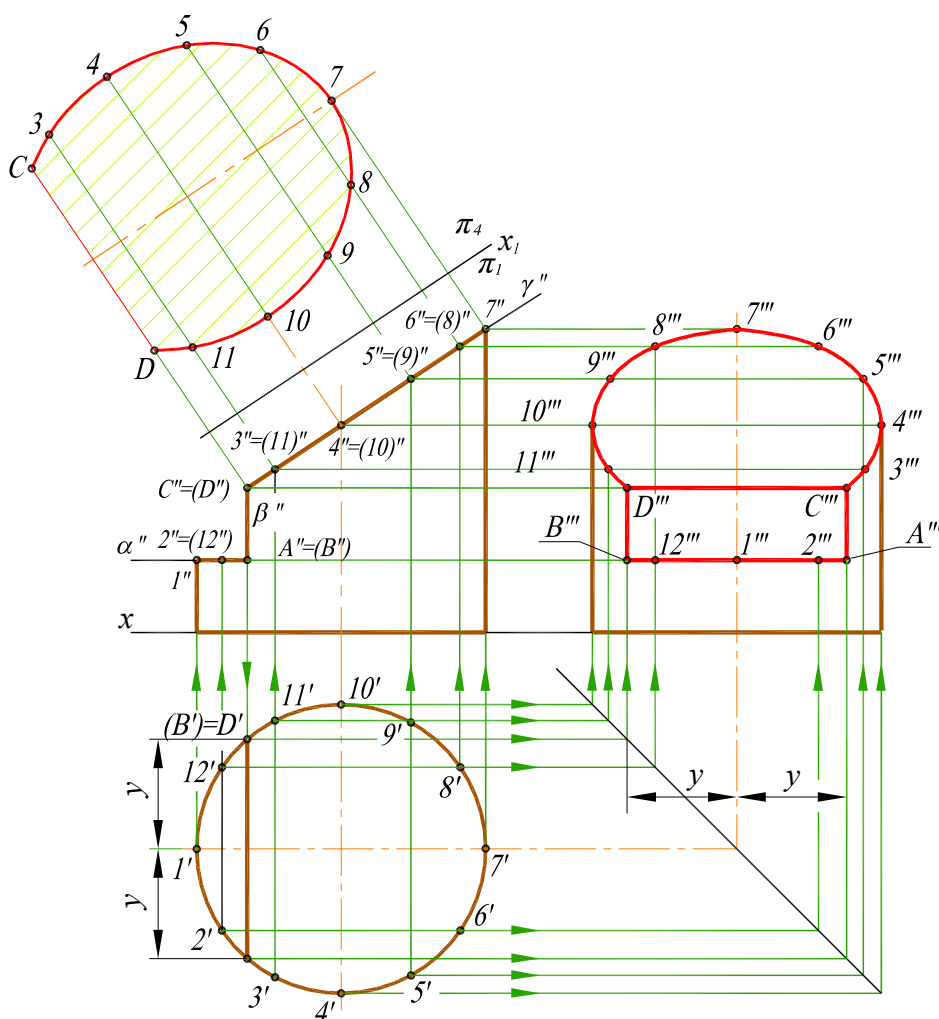


Рис. 8.3

Горизонтальная плоскость α (α'') пересекает поверхность цилиндра по части окружности, профильная плоскость β (β'') по прямым AB и CD (образующим цилиндра), фронтально-проецирующая плоскость γ (γ'') – по части эллипса. Фронтальная проекция линий пересечения совпадает со следами – проекциями секущих плоскостей (α'' , β'' , γ''), а горизонтальная – с окружностью оснований цилиндра.

Построение профильной проекции сводится к построению профильных проекций точек по двум заданным, направление построений линий связи указано стрелками). Вместо ломаных линий связи при построении профильных проекций точек можно использовать координаты y , которые откладываются на горизонтальных линиях связи по разные стороны оси цилиндра (см. построение точек A , B , C , D).

Обычно для построения точек линий сечения пользуются образующими, равноотстоящими друг от друга. Поэтому горизонтальная проекция цилиндра (окружность) разделена на 12 частей (точки 1, 2...12). Этой равномерной «разметкой» удобно пользоваться не только для построения проекций сечений, но и для построения развертки.

Действительный вид фигуры сечения плоскостью γ построен способом перемены плоскостей проекций. Новая ось проекций x_1 проведена параллельно следу – проекции γ'' . Выполнив соответствующие построения на плоскости π_4 , получим натуральную величину сечения цилиндра плоскостью γ .

На рис. 8.4. приведено построение полной развертки усеченного цилиндра.

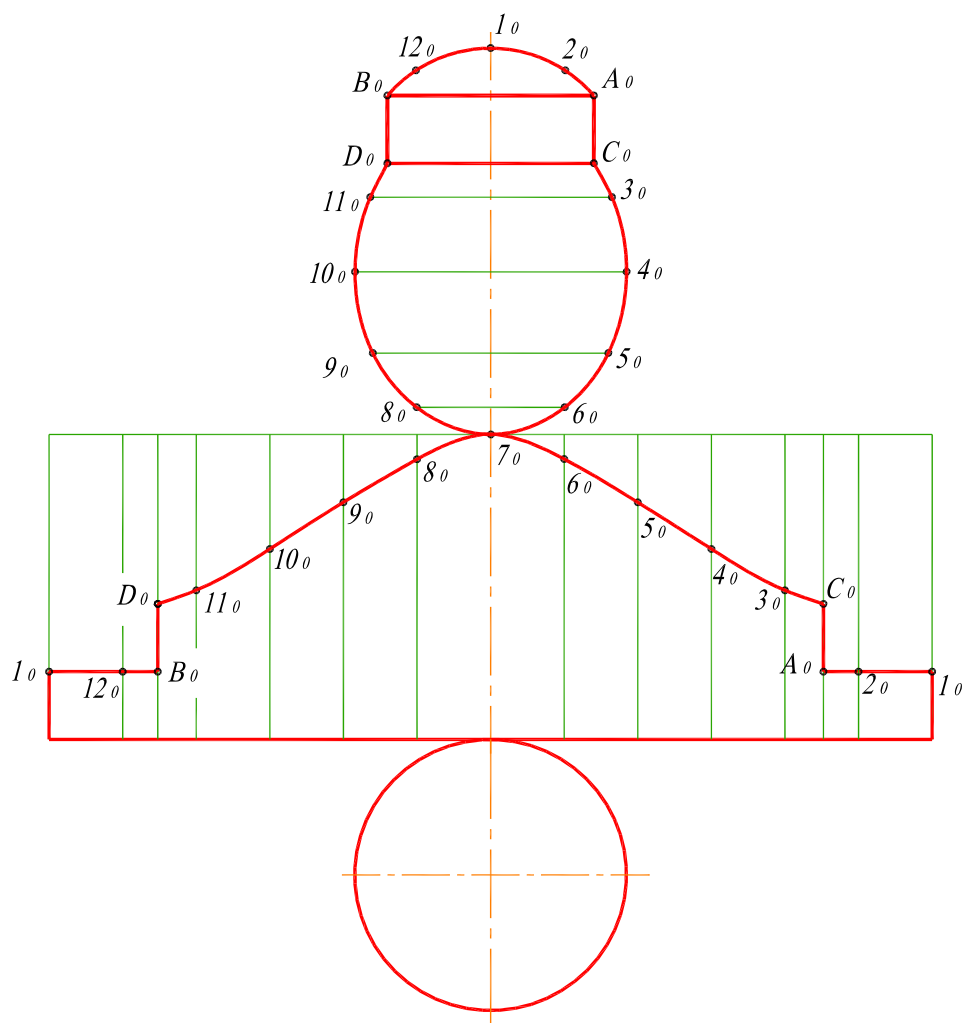


Рис. 8.4

Для построения развертки боковой поверхности на горизонтальной прямой откладывают длину окружности основания πd и делят ее на 12 равных частей (с определенной степенью точности вместо $1/12$ длины окружности можно откладывать длину соответствующей хорды). Из точек деления проводят перпендикуляры к отрезку πd и на них откладывают длины образующих от основания до секущих плоскостей α, β, γ . Для построения точек A, B, C, D на развертке использовано расположение этих точек на горизонтальной проекции цилиндра (от точек деления откладывают длины дуг $2A$ и $12B$). Точки $1, A, C$ и $1, B, D$ соединены прямыми линиями. Точки $C, 3 \dots 11, D$ соединяют плавной линией.

К прямой линии πd (развертка нижнего основания цилиндра) присоединяют окружность основания, а к верхней части боковой развертки натуральные фигуры сечения плоскостями (часть эллипса, прямоугольник, сегмент окружности).

8.3 Пересечение конуса плоскостью. Построение развертки

При пересечении конуса вращения получают различные виды кривых второго порядка (конические сечения). Рассмотрим возможные случаи пересечения конуса фронтально-проецирующими плоскостями (угол между следом – проекцией и осью конуса – α , половина угла конуса при вершине – φ).

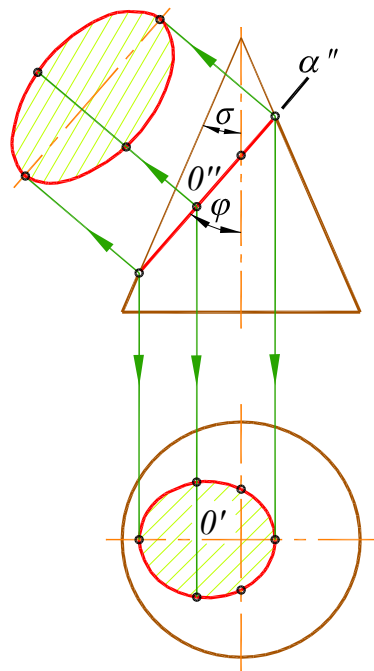


Рис. 8.5

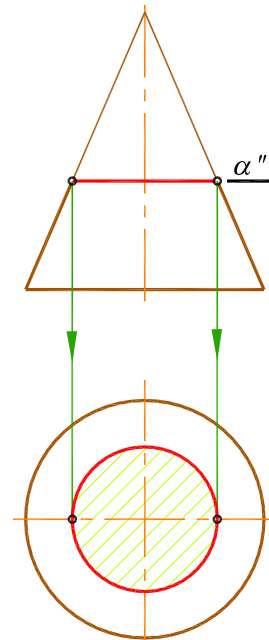


Рис. 8.6

1. Секущая плоскость α (α'') пересекает все образующие конуса (не параллельные ни одной из образующих конуса) – в сечении получается эллипс ($\varphi > \delta$) (рис. 8.5).
2. В частности, если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса, то получается окружность (рис. 8.6).
3. Секущая плоскость α (α'') параллельная одной образующей конуса в сечении получается парабола ($\varphi = \delta$) (рис.8.7).
4. Секущая плоскость α_1 (α_1'') параллельна двум образующим конуса – в сечении получается гипербола ($\varphi < \delta$) (рис. 8.8). Профильная плоскость α_2 (α_2'') образует с осью конуса угол равный 0, что не противоречит вышеуказанному неравенству.

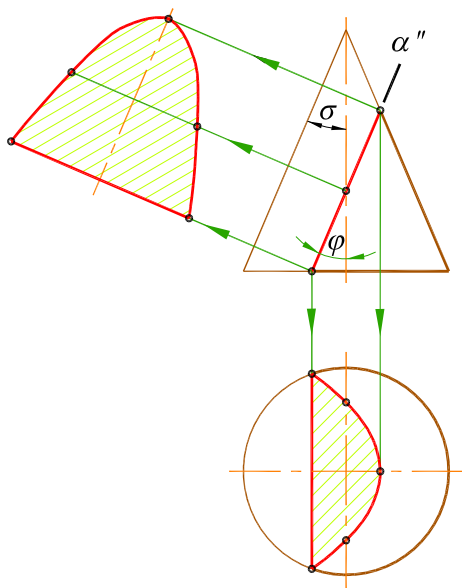


Рис. 8.7

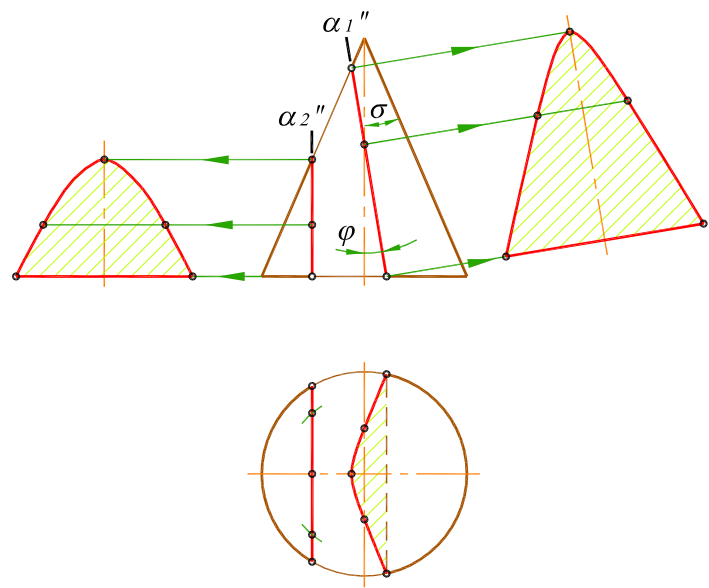


Рис. 8.8

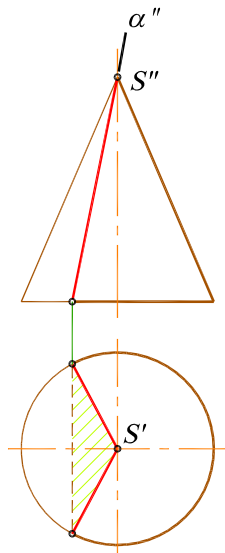


Рис. 8.9

В частном случае, если секущая плоскость проходит через вершину конуса, то в сечении получается пара пересекающихся в вершине прямых (образующих) (рис.8.9).

Если конус вращения пересекается плоскостью общего положения, то о линии пересечения можно судить, преобразовав плоскость общего положения в проецирующую. Преобразование рационально выполнить переменной плоскостей проекций.

На рис. 8.10 показано построение проекций усеченной части конуса вращения плоскостями частного положения α и β .

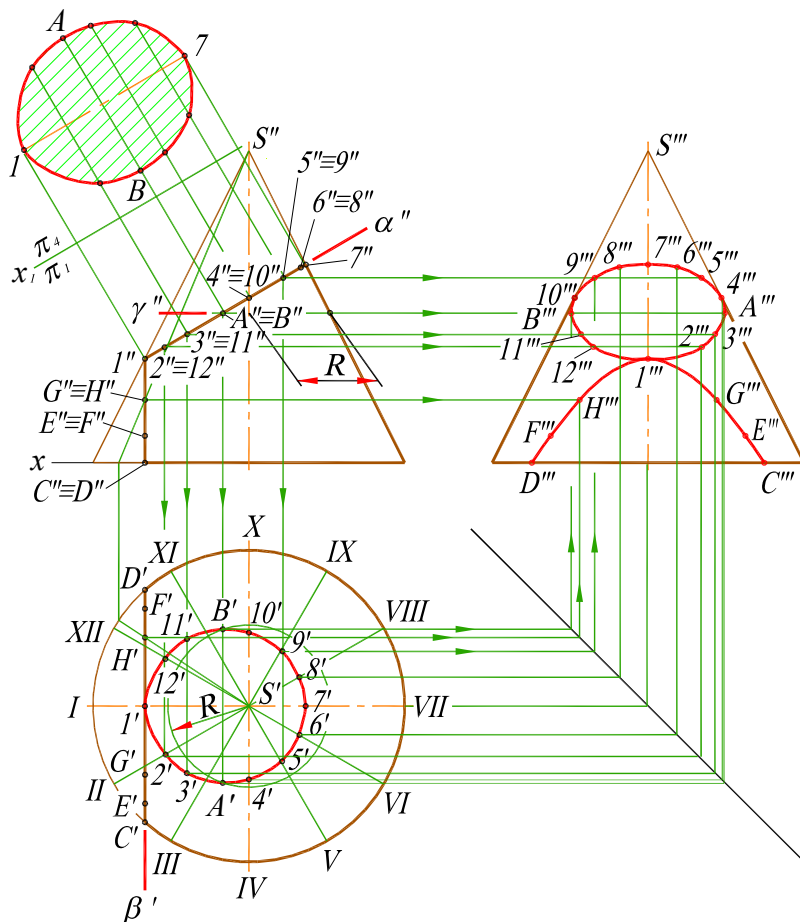


Рис. 8.10

Фронтально-проецирующая плоскость α (α'') пересекает поверхность конуса по эллипсу (см. рис.8.5), профильная плоскость β (β') – по гиперболе (см. рис. 8.8).

Фронтальная проекция линий пересечения совпадает со следами – проекциями секущих плоскостей (α'' , β''). Горизонтальная проекция сечения конуса плоскостью α – эллипс, а горизонтальная проекция сечения плоскостью β совпадает со следом – проекцией β' .

Для построения точек линий сечения использованы образующие, равностоящие друг от друга. Поэтому горизонтальная проекция основания конуса (окружность) разделена на 12 равных частей (точки I, II...XII). Это позволяет использовать равноотстоящие образующие для построения развертки конуса.

Фронтальные проекции образующих пересекают след проекции α в точках 1, 2...12. Эти точки по линиям связи находятся на горизонтальных проекциях образующих, причем точки 4 и 10 определяются на профильной проекции (на очерковых образующих), а затем на горизонтальной. Малая ось эллипса AB определена при помощи горизонтальной плоскости χ (χ), которая проведена через середину отрезка 1 – 7 (фронтальную проекцию линии сечения плоскостью α).

Вспомогательная плоскость χ (χ) пересекает плоскость α по фронтально-проецирующей прямой, а конус по окружности радиуса R . В пересечении прямой и дуги радиуса R определим горизонтальные проекции A и B .

Построения профильных проекций точек эллипса (1, 2...12) сводится к построению проекций точек по двум заданным (направлений линий связи указано стрелками).

Для построения точек, принадлежащих гиперболе использованы точки G и H , находящихся на образующих II и XII, а также точки E и F , принадлежащие вспомогательной горизонтальной плоскости δ (δ).

На рис. 8.11 приведено построение полной развертки усеченного конуса, приведенного на рис. 8.10.

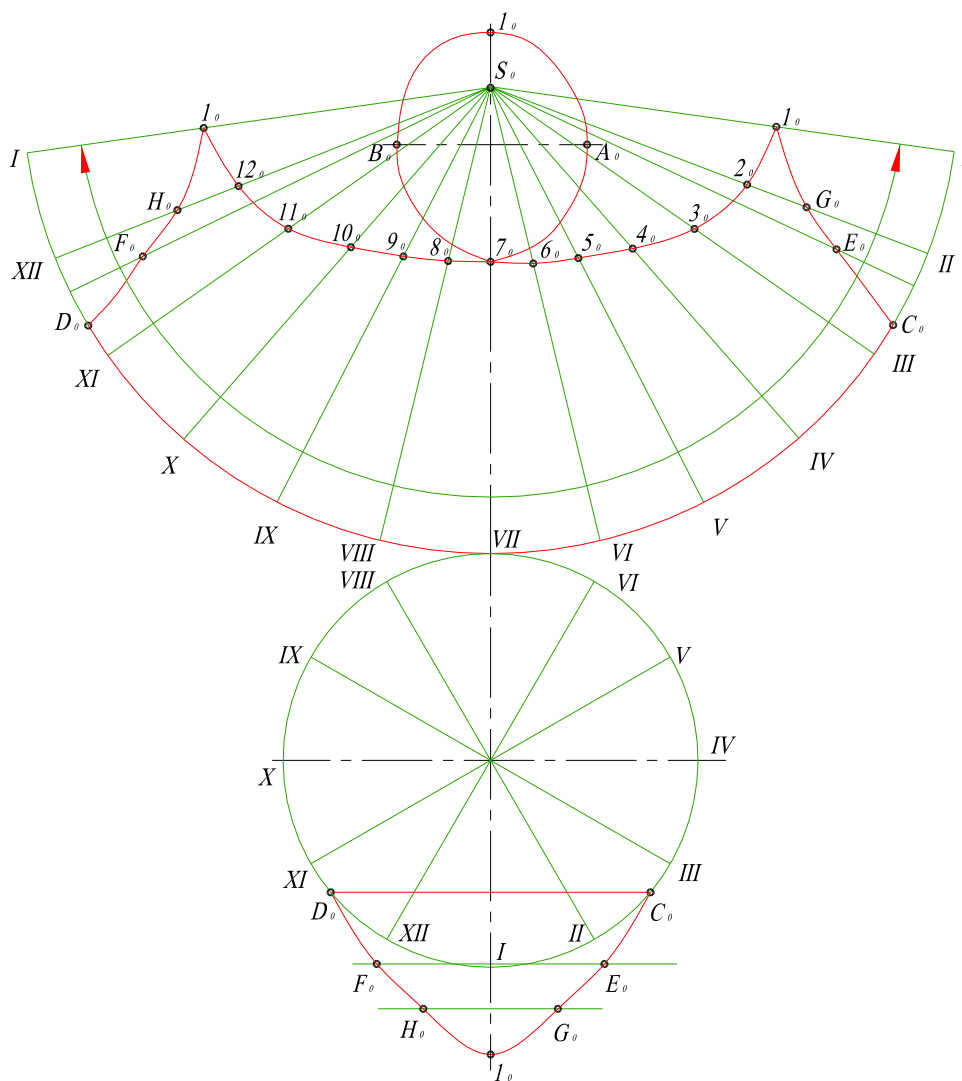


Рис. 8.11

Полная развертка состоит из боковой развертки, части основания конуса и натуральных величин сечений.

Построение развертки боковой поверхности начинают с проведения из точки S дуги окружности радиусом, равным длине образующей конуса, Длина дуги определяется центральным углом φ :

$$\varphi = 180 \cdot l/d;$$

где d – диаметр окружности основания конуса; l – длина образующей.

Дугу делят на 12 частей и полученные точки соединяют с точкой S (с определенной степенью точности вместо $1/12$ длины окружности основания конуса можно откладывать длину хорды).

От вершины S на образующих откладывают действительные длины отрезков образующих от вершины конуса до секущих плоскостей. Действительные длины этих отрезков находят способом вращения вокруг оси конуса. Для этого достаточно из фронтальных проекций точек фигур сечений провести горизонтальную прямую до пересечения с контурной образующей конуса, являющейся действительной ее длиной.

Для построения точек C и D , лежащих на основании конуса следует отложить от точек III и XI соответствующих дуг (эти дуги на рис. 8.10 и 8.11 отмечены одной черточкой).

Для построения точек E и F на развертке находят положения образующих, на которых находятся эти точки, откладывая от точек II и XII соответствующие дуги (эти дуги отмечены двумя черточками). Положение точек E и F на образующих находим, используя действительные длины отрезков SE и SF .

Для получения полной развертки пристраивают к развертке боковой поверхности часть основания конуса и натуральные величины сечений.

Натуральная величина эллипса построена по его осям (использован способ перемены плоскостей проекций), натуральная величина сечения профильной плоскостью β находится на профильной проекции (рис. 8.10).

8.4 Пересечение сферы и тора плоскостью

При пересечении сферы плоскостью всегда получается окружность, которая в зависимости от положения секущей плоскости по отношению к плоскостям проекций, проецируется в виде прямой, в виде эллипса или в виде окружности.

На рис. 8.12 показано построение проекций усеченной сферы плоскостями частного положения α , β , γ . Фронтальная проекция линий пересечения совпадает со следами – проекциями секущих плоскостей (α , β , γ).

Горизонтальная проекция сечения сферы плоскостью α – окружность радиуса R , а профильная – прямая.

Профильная проекция сечения плоскостью β – окружность радиуса R , а горизонтальная – прямая.

Плоскость γ пересекает сферу по окружности, которая на плоскости π и π' проецируется в виде эллипса. Две вершины этого эллипса (точки A и B) являются нижней и верхней точками сечения. Точки 1 и 2, лежащие на экваторе и профильном меридиане, определяют видимые части горизонтальной и профильной проекций от невидимой (точки обозначены только на одной симметричной части сечения). Вершина эллипса D (конец большой оси) определена при помощи горизонтальной плоскости δ (δ). Плоскость δ пересекает заданную плоскость γ на фронтально проецирующей прямой, а сферу – по окружности радиуса R , проецирующейся на плоскость π в натуральную величину. Профильная проекция D''' точки D строится по линиям связи. Аналогичным способом находят промежуточные точки 3, используя вспомогательную плоскость δ_2 .

Видимость горизонтальной и профильной проекций линий сечений определяется в зависимости от расположения их относительно экватора и профильного меридиана сферы.

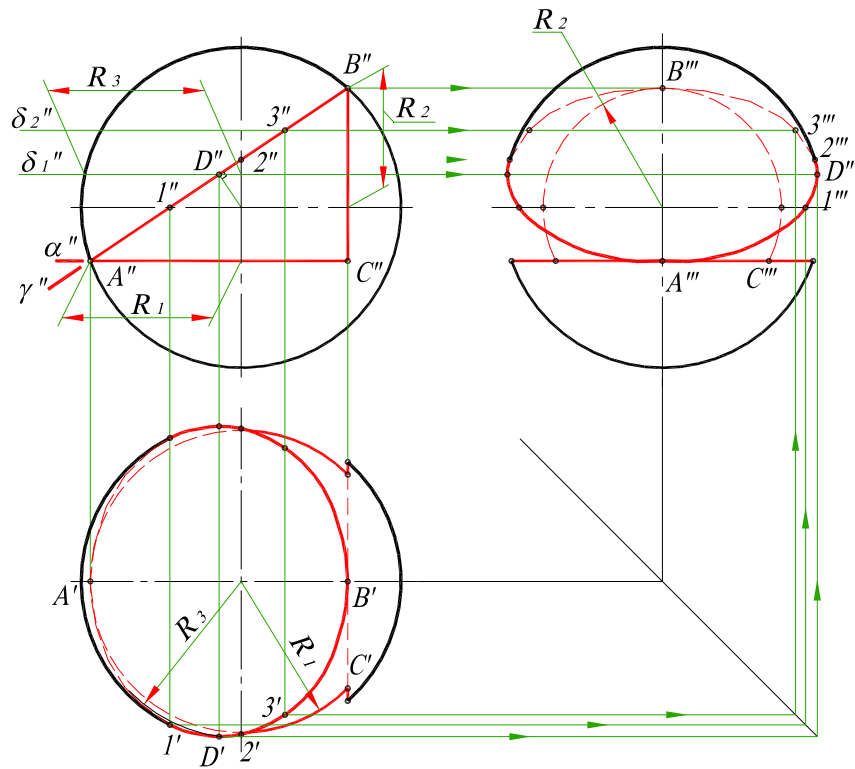


Рис. 8.12

При пересечении тора плоскостью в общем случае получается кривая 4-го порядка, в частных случаях она может распадаться на две кривые 2-го порядка.

На рис. 8.13 показано построение проекций усеченной части открытого тора фронтально-проецирующей плоскостью α (α'').

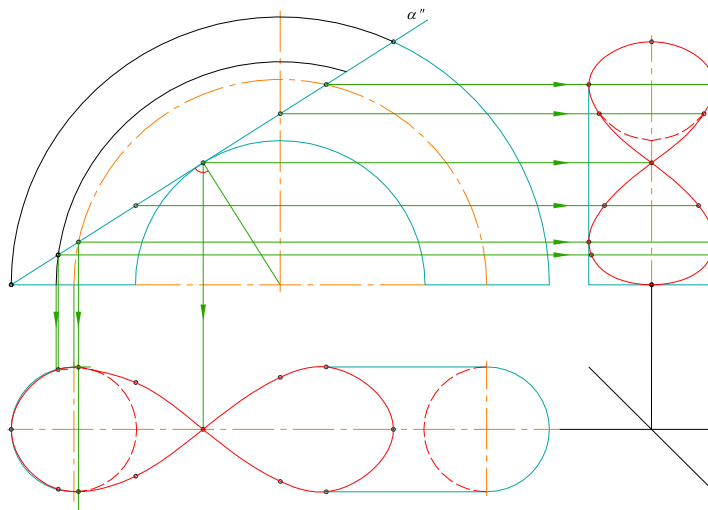


Рис. 8.13

Фронтальная проекция линии пересечения совпадает со следом – проекцией секущей плоскостью α .

Для построения кривой пересечения определены точки A, B, C, D, E и промежуточные 1, 2, 3, 4.

Точки A и B лежат на экваторе (наибольшей параллели) тора, точка C на горле (наименьшей параллели). Точки D и E лежат на крайних параллелях (точки обозначены только на одной симметричной части сечения).

Промежуточные точки 1 и 2 расположены на параллелях m , точки 3, 4 – на параллелях n . Построение горизонтальных проекций показано стрелками.

Профильные проекции точек кривой пересечения построены при помощи линий связи.

8.5 Построение условной развертки сферы

Так как сферическая поверхность принадлежит к числу неразвертывающихся, то возможна лишь ее приближенная (условная) развертка. Способ построения состоит в том, что сферу разбивают с помощью меридианов на узкие равные между собой доли (клинья). Каждую такую долю заменяют описанной цилиндрической поверхностью, которая касается сферы по среднему меридиану доли. Этот средний меридиан будет нормальным сечением цилиндрической поверхности. Границами цилиндрической поверхности будут плоскости меридианов, ограничивающих рассматриваемую долю.

На рис. 8.14 показано построение условной развертки сферы.

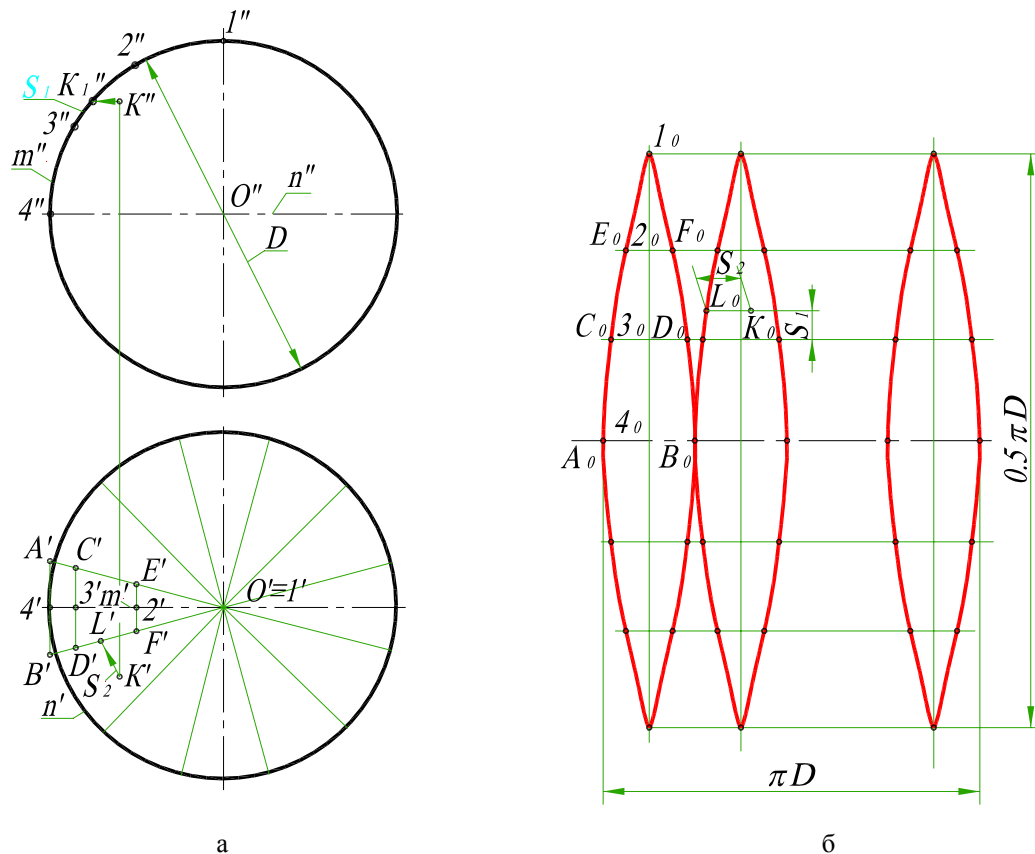


Рис. 8.14

Горизонтальную проекцию n экватора n разбиваем на 12 равных частей и через полученные точки проводим горизонтальные проекции меридианов (рис. 8.14, а).

Рассмотрим построение приближенной развертки 1/12 части (доли) сферы, средним меридианом которой является меридиан m ($m' m''$).

Заменяем часть сферы цилиндрической поверхностью, описанной около нее. Образующие этой поверхности будут фронтально-проецирующими прямыми. Для построения развертки элемента цилиндрической поверхности половину фронтального меридиана разбиваем на 6 равных частей (отмечены точками 1, 2, 3, 4 только половина симметричной части). На горизонтальной прямой (рис. 8.14, б) откладываем отрезок A_0B_0 равный 1/12 окружности диаметра D . Через середину A_0B_0 проводим перпендикуляр и

откладываем на нем отрезки 4_0-3_0 , 3_0-2_0 , 2_0-1_0 , равные длине дуг меридиана m . Через полученные точки проводим горизонтальные прямые, на которых откладываем отрезки C_0D_0 , E_0F_0 , соответственно равные длине образующим цилиндрической поверхности $C - D$, $E - F$. Отрезки $A - B$, $C - D$, $E - F$ представляют собой спрямленные дуги соответствующих параллелей сферической доли. Соединив найденные точки лекальной кривой, получим плоскую фигуру, являющейся приближенной разверткой 1/12 части сферы.

Для придания каждой доли развертки сферической поверхности кроме изгибания производят растяжение и сжатие материала.

Положение произвольной точки K принадлежащей поверхности сферы, может быть определено на развертке с помощью двух “координат” – длин дуг S_1 и S_2 . Дуга S_1 определяет смещение точки K от одной из параллелей по меридиану, а дуга S_2 – смещение ее от одного из меридианов по параллели сферы.

8.6 Примеры решения задач к главе 8

Пример 1. Построить линию пересечения конуса вращения плоскостью общего положения, заданной пересекающимися прямыми AB и BC (рис. 8.15).

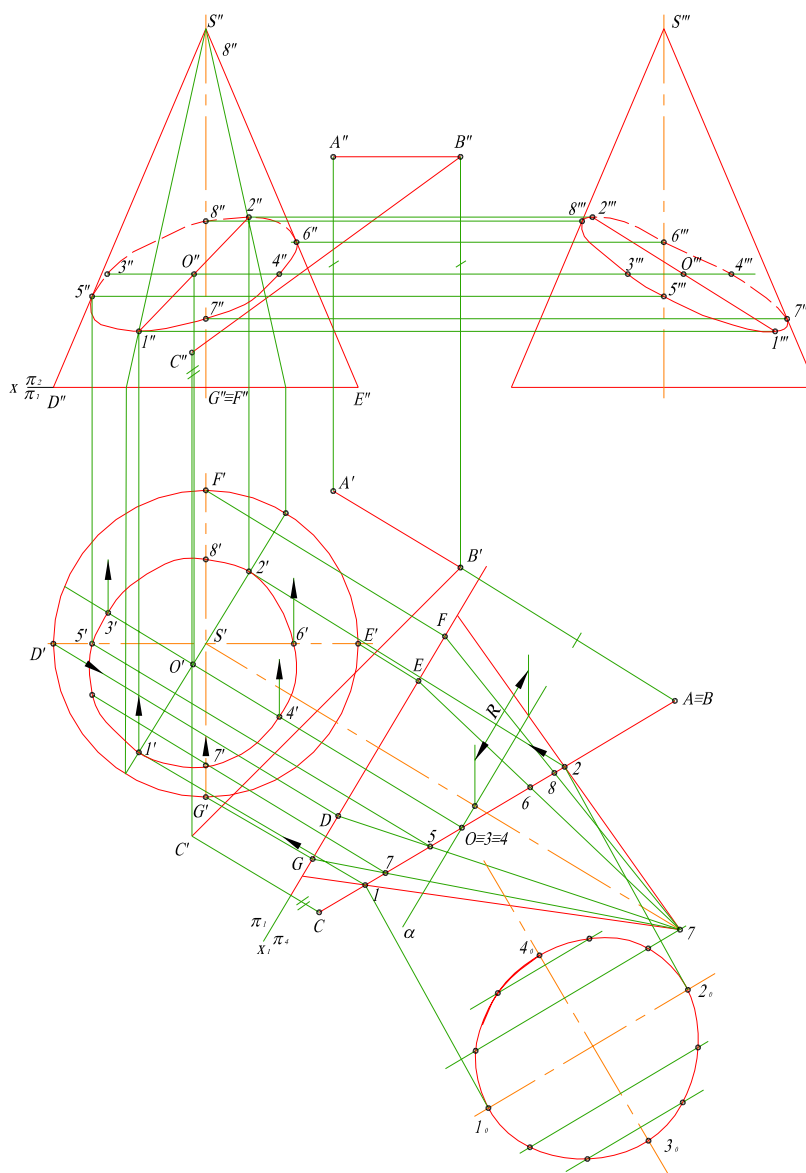


Рис. 8.15

Для построения использован способ перемены плоскостей проекций. Сделаем секущую плоскость проецирующей, сведем задачу к построению ряда точек на поверхности конуса.

Расположим дополнительную плоскость проекций π_4 перпендикулярно горизонтали AB , секущей плоскости при этом, ось x_1 расположим перпендикулярно проекции AB . Горизонталь AB преобразуется в проецирующую прямую ($A'B'$), а секущая плоскость ($AB \cap BC$) в плоскость перпендикулярную плоскости π_4 . След – проекция секущей плоскости – пересекает проекцию конуса на плоскость π_4 в точках 1 и 2, которые являются концами большой оси эллипса. В точке O , делящей отрезок 1 2 пополам, находится проекция центра эллипса. По линиям связи на горизонтальной проекции конуса найдены проекции 0 1 2. Для нахождения проекций 3 и 4 (концов малой оси эллипса) использована плоскость α (α''), проведенная перпендикулярно к оси конуса. В пересечении окружности радиуса R , проведенной из точки S , с линией связи, проведенной из проекций O , находятся проекции 3 и 4. Для определения положения точек 5 и 6, в которых эллипс на фронтальной проекции разделяется на «видимую» и невидимую» части, построены проекции SD , SE образующих SD и SE , найдены точки 5 и 6, по ним проекции 5 и 6. Образующие SF и SG использованы для нахождения точек 7 и 8, расположенных на ближней и дальней образующих конуса. Фронтальные проекции точек 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0 находятся из того, что расстояния проекций на плоскость π от оси x_1 равно расстоянию проекций на плоскость π_2 от оси x . Профильная проекция линии пересечения конуса плоскостью строится, используя линии связи.

Натуральная величина фигуры сечения эллипса по его большой оси ($1_0 2_0 = 1' 2'$) и малой оси ($3_0 4_0 = 3' 4'$).

Пример 2. Построить линию пересечения тела вращения фронтальной плоскостью α (рис. 8.16).

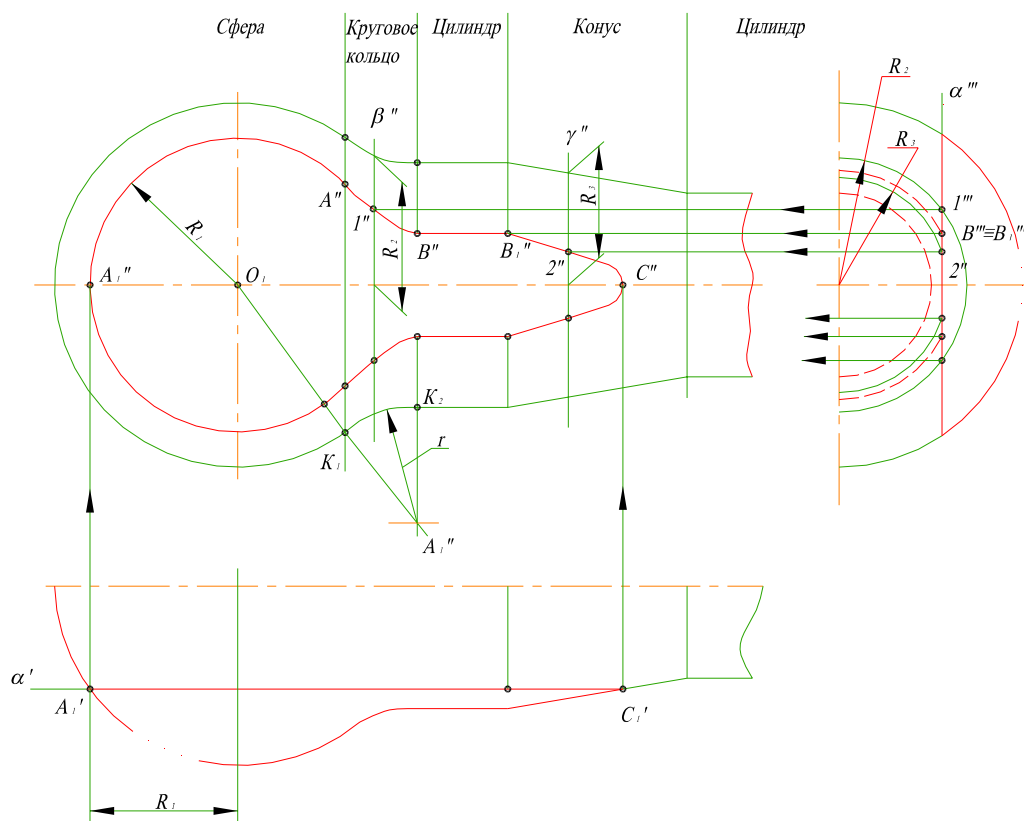


Рис. 8.16

В практике линии, получающиеся при плоском срезе заготовки детали, поверхность которой ограничена соосными поверхностями вращения, называют линиями среза. На рис. 8.16 изображено тело вращения, ограниченное сферической поверхностью, поверхностью кругового кольца, конической и двумя цилиндрическими поверхностями, а также двумя фронтальными плоскостями (α) (на чертеже даны лишь половины горизонтальной и профильной проекций).

Вначале устанавливаются участки поверхностей вращения, ограничивающих рассматриваемое тело. Цилиндр и конус разделяют окружности (их проекции вертикальные линии), а для определения граничных окружностей, разделяющих круговое кольцо со сферой и цилиндром, выполняется сопряжение очерковых линий сферы и цилиндра. Точки сопряжения K_1 и K_2 найдены на линии центров O_1O_2 и на перпендикуляре к образующей цилиндра. Через точки сопряжения и граничные окружности проведены профильные плоскости – границы участков тела вращения (участки надписаны над фронтальной проекцией).

Линия среза сферы – параллель радиуса R_1 , построенная по горизонтальной проекции точки A_1 , линия среза цилиндра BB_1 построена по профильной проекции ($B B_1$). Линия среза конуса – гипербола, ее вершина точки C построена по горизонтальной проекции C . Точки A, B, B_1, C – характерные точки.

Для нахождения промежуточных точек линий среза кругового кольца и конуса использованы вспомогательные профильные плоскости β (β) и χ (χ). Плоскости β и χ пересекают тело вращения по окружностям радиусов R_2 и R_3 , которые на профильной проекции, пересекаясь с плоскостью α (α), дают промежуточные точки 1 и 2.

8.7 Вопросы для контроля

1. Какие линии получаются при пересечении цилиндра плоскостью?
2. Какие линии получаются при пересечении конуса плоскостью?
3. Какая линия получается при пересечении сферы плоскостью и какими могут быть проекции этой линии?
4. Как должны быть расположены плоскости, рассекающие тор по окружности?
5. Какие поверхности вращения являются развертывающимися?

Глава 9

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С МНОГОГРАННИКАМИ И КРИВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Точки пересечения прямой линии с геометрическими телами называют также точками встречи, одна из них является точкой входа, другая – точкой выхода.

9.1. Частные случаи определения точек пересечения

Частный способ определения указанных точек состоит в том, что одна из проекций точки пересечения принадлежит «вырожденной» проекции поверхностей или прямой, а другая определяется из условия принадлежности точки прямой или поверхности.

На рис. 9.1 показано построение точек пересечения прямых a и b с поверхностью четырехугольной прямой призмы. Боковая поверхность призмы – проецирующая (боковые грани перпендикулярны к горизонтальной плоскости проекций). Поэтому горизонтальные проекции K_1', K_2', K_3' точек пересечения находятся на «вырожденных» проекциях боковых граней. Фронтальные проекции этих точек определяются по линиям связи на фронтальных проекциях прямых a'' и b'' . Вторая точка пересечения (точка K_4) прямой b находится на пересечении с верхним основанием призмы, которое является горизонтальной плоскостью. Сначала отмечаем фронтальную проекцию K_4'' , а затем по линии связи находим горизонтальную K_4' .

Взаимность фронтальных проекций точек пересечения прямых a и b определяется видимостью граней, на которых лежат указанные точки. Так точка K_3 лежит на невидимой грани ABB_1A_1 и поэтому участок прямой b от проекции K_3 до ребра AA_1 – невидим.

На рис. 9.2 показано построение точек пересечения прямых a и b с поверхностью цилиндра вращения.

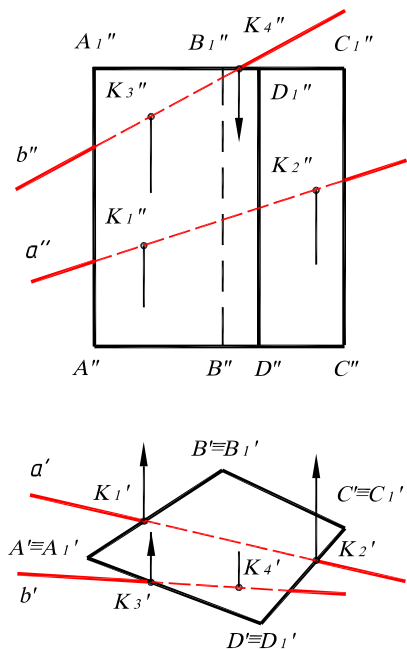


Рис. 9.1

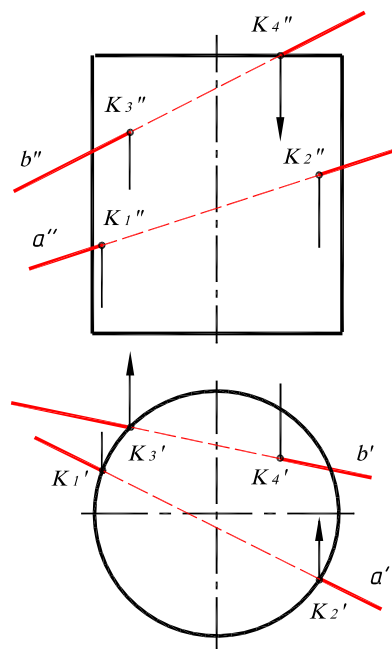


Рис. 9.2

Горизонтальные проекции точек K_1, K_2, K_3 находятся в пересечении окружности (горизонтальной проекции боковой поверхности цилиндра) с проекциями прямых, фронтальная проекция точки K_4 – на пересечении горизонтальной плоскости верхнего основания с проекцией прямой. Точки K_1 и K_3 расположены на невидимой части цилиндра и поэтому участки прямых a и b от проекций K_1 и K_3 до очерковой образующей – невидимы.

На рис. 9.3 показано построение точек пересечения проецирующих прямых a и b с поверхностью пирамиды. Фронтальные проекции K_1 и K_2 точек пересечения фронтально проецирующей прямой a совпадают с «вырожденной» проекцией прямой, а горизонтальные проекции находятся на прямых $S1$ и $S2$ граней SAD и SAB .

Горизонтальные проекции точек пересечения K_3 и K_4 горизонтально проецирующей прямой b совпадают с «вырожденной» проекцией прямой, фронтальная проекция точки K_3 находится на прямой $S3$ грани SCD . Точка K_4 находится на горизонтальной плоскости основания пирамиды.

На рис. 9.4 показано построение точек пересечения проецирующих прямых a и b с поверхностью конуса вращения. Точки K_1 и K_2 определяются с помощью параллели (окружности радиуса R) конуса, точка K_3 – с помощью образующей $S2$. Точка K_4 расположена на горизонтальной плоскости основания конуса.

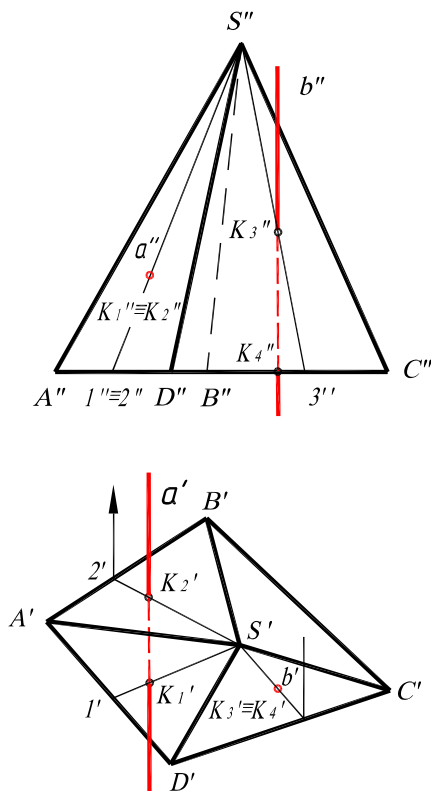


Рис. 9.3

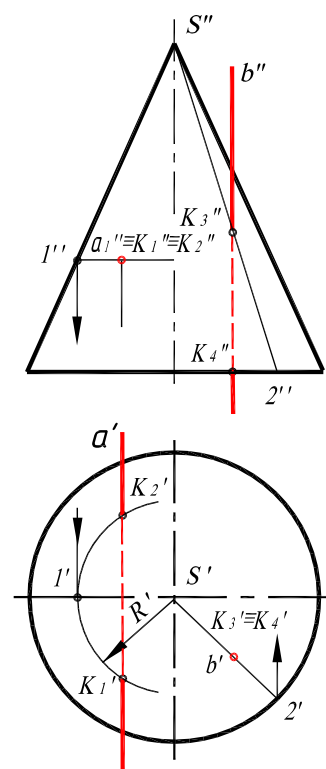


Рис. 9.4

На рис. 9.5 для нахождения точек пересечения K_1, K_2, K_3, K_4 проецирующих прямых a и b с поверхностью сферы использованы параллели (окружности) сферы. Точки K_1 и K_2 находятся на параллели R_1 , а точки K_3 и K_4 – на параллели радиуса R_2 . Точки пересечения K_1, K_2, K_3, K_4 расположены на видимых участках проекций сферы.

9.2. Общий способ определения точек пересечения

В общем случае определение точек пересечения прямой линии с поверхностью геометрических тел аналогично тому, как решается задача на пересечение прямой линии с плоскостью и заключается в следующем:

- 1) через данную прямую проводим вспомогательную плоскость;
- 2) строим линию пересечения вспомогательной плоскостью данного геометрического тела;
- 3) определяем искомые точки пересечения построенной линии с данной прямой;
- 4) определяем видимость участков прямой линии.

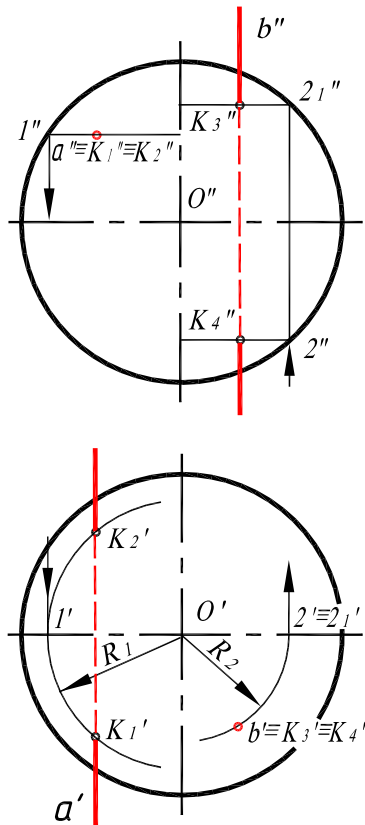


Рис. 9.5

Вспомогательную секущую плоскость выбирают так, чтобы она пересекала поверхность геометрического тела по линии, легко определяемой на чертеже, например, состоящей из прямых или окружностей.

Обычно в качестве вспомогательной плоскости выбирают проецирующую плоскость, проходящую через заданную прямую. В этом случае построение линии пересечения поверхности с проецирующей плоскостью значительно упрощается.

На рис. 9.6 показано нахождение точек пересечения прямой общего положения AB с поверхностью $SCDE$. Через прямую AB проведена вспомогательная фронтально-проецирующая плоскость α , пересекающая поверхность пирамиды по линии 1-2-3. В пересечении этой линии с прямой AB находятся искомые точки пересечения. Видимость участков прямой линии определяются видимостью граней на которых лежат точки пересечения K_1 и K_2 . Так на горизонтальной проекции (рис. 9.6, б) точки K_1 и K_2 расположены на видимых проекциях $S'C'E'$ и $S'C'D'$ граней SCE и SCD , а на фронтальной проекции точка K_2 лежит на невидимой грани SCD . Поэтому участок фронтальной проекции AB от K_2 до ребра SD – невидим.

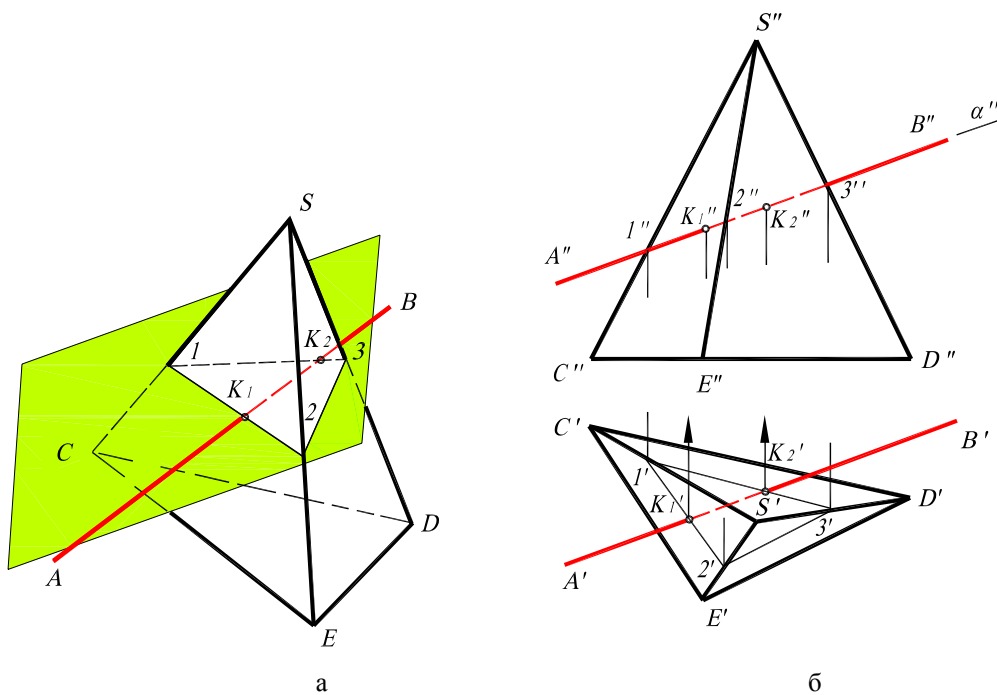


Рис. 9.6

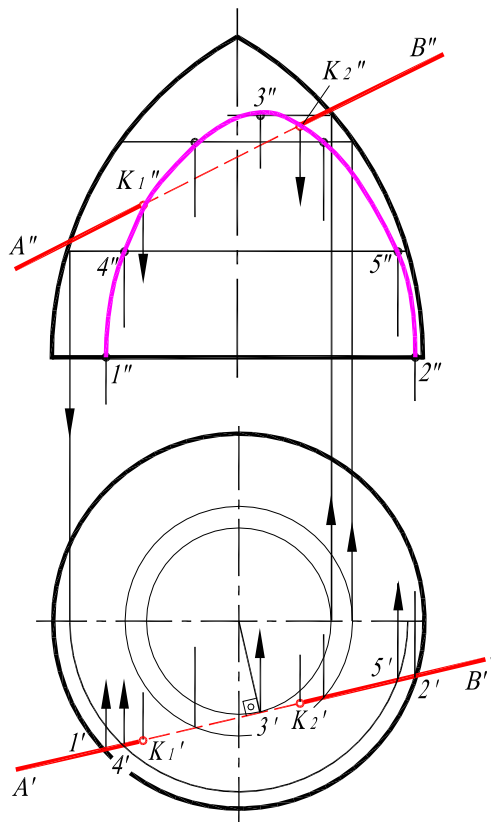


Рис. 9. 7

На рис. 9.7 определены точки пересечения поверхности вращения с прямой AB . Через прямую AB нельзя провести вспомогательную плоскость, пересекающую поверхность по окружности. Плоскость α пересекает поверхность вращения по плоской кривой линии.

Поэтому использована одна из проецирующих плоскостей – горизонтально проецирующая плоскость α . Для построения фронтальной проекции кривой построены опорные точки 1, 2, 3 и промежуточные 4, 5. Точки 1 и 2 находятся на плоскости основания, а точки 3, 4 и 5 на параллелях (окружностях) поверхности вращения.

Фронтальные проекции K_1'' и K_2'' определяются в пересечении полученной кривой и прямой AB . Горизонтальные проекции точек пересечения находятся при помощи линий связи.

Точки пересечения K_1 и K_2 расположены на видимых частях поверхности вращения.

Для нахождения точек пересечения конуса вращения с горизонтальной прямой (рис. 9.8) использована вспомогательная горизонтальная плоскость, пересекающая конус по окружности. Для определения точек пересечения сферы с фронтальной прямой использована фронтальная плоскость (рис. 9.9). При определении видимости участков прямых следует учитывать, что фронтальная проекция точки K_2 расположена на невидимой части конуса, а горизонтальная проекция точки K_2 – на невидимой части сферы.

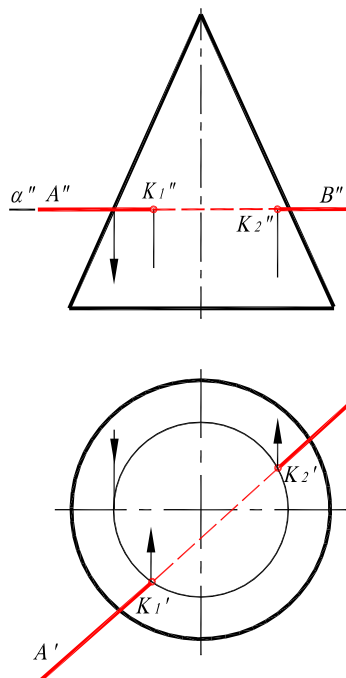


Рис. 9.8

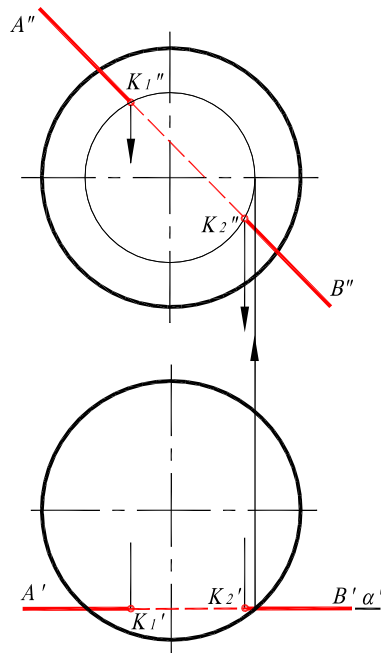


Рис. 9.9

В некоторых случаях при построении точек пересечения прямой с поверхностью целесообразно применять плоскость общего положения. Так при пересечении конуса с прямой общего положения (рис. 9.10) применение проецирующих плоскостей приводит к построению кривых, которые нужно строить по точкам.

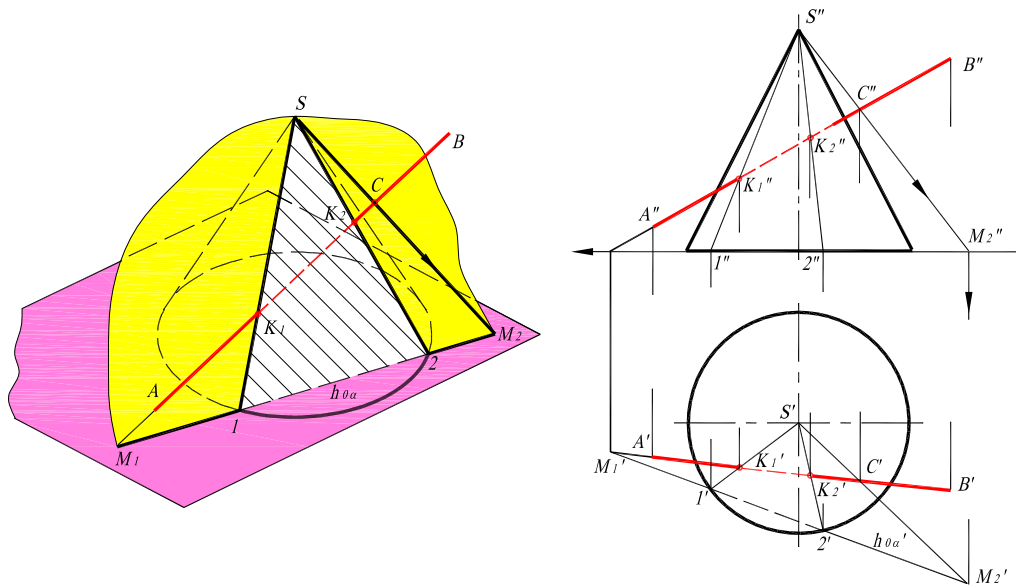


Рис. 9.10

Если же вспомогательную плоскость α провести через прямую AB и вершину конуса S , то она пересечет конус по двум образующим $S1$ и $S2$. Эта плоскость уже не будет проецирующей, она будет плоскостью общего положения. Для определения образующих, по которым вспомогательная плоскость α пересечет конус, находится её горизонтальный следы $h_{0\alpha}$ на плоскости основания конуса. Плоскость основания конуса принята за плоскость проекций π_1 . Для построения следа $h_{0\alpha}$ найден горизонтальный след M_1 прямой AB и горизонтальный след M_2 вспомогательной прямой SC (C – произвольная точка на прямой AB). След $h_{0\alpha}$ пересекает окружность основания конуса в точках 1 и 2, через которые проходят образующие $S1$ и $S2$ с прямой AB находятся искомые точки пересечения K_1 и K_2 .

При нахождении видимости участков прямой линии руководствуются тем, что точки K_1 и K_2 расположены на видимых частях проекций конуса.

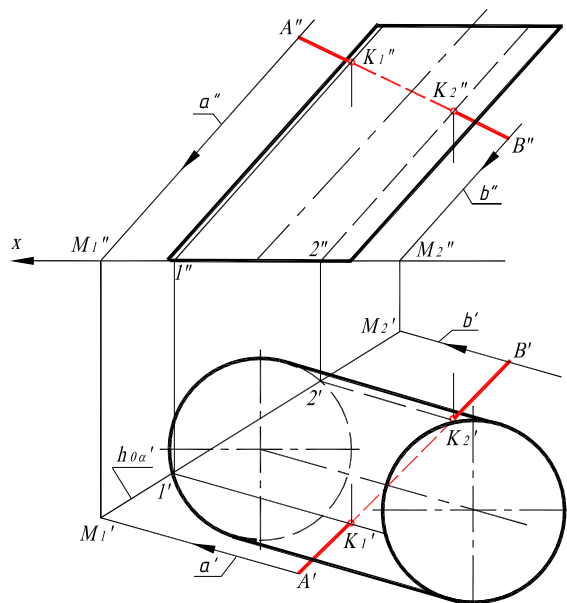


Рис. 9.11

Вспомогательная плоскость α общего положения использована при определении точек пересечения прямой AB общего положения с поверхностью наклонного цилиндра с круговым основанием (рис. 9.11). Плоскость α проводится через прямую AB параллельно образующим цилиндра. Для определения горизонтального следа $h_{0\alpha}$ на плоскости нижнего основания цилиндра проведены прямые a и b , проведенные через точки A и B параллельно образующим цилиндра. Точки пересечения 1 и 2 горизонтального следа $h_{0\alpha}$ с окружностью основания определяют образующие цилиндра, по которым вспомогательная плоскость пересекает поверхность цилиндра.

В пересечении этих образующих с прямой AB находятся искомые точки пересечения K_1 и K_2 . При определении видимости проекций точек пересечения руководствуются видимостью проекций образующих, на которых расположены точки K_1 и K_2 . Точка K_1 находится на образующей, точка K_2 – на невидимой.

На рис. 9.12 показано построение точек пересечения прямой AB общего положения со сферой радиуса R с центром в точке O .

Через прямую AB проведена горизонтально проецирующая плоскость α , которая пересекает сферу по окружности радиуса R . Для того чтобы избежать проецирования этой окружности на фронтальную плоскость проекций π_2 (проекция – эллипс), задача решается с помощью способа перемены плоскостей проекций.

Преобразуем систему π_1/π_2 в новую π_2/π_4 , при этом плоскость π_4 параллельна прямой AB . Проведя новую ось проекций параллельно AB , находим положение прямой AB и центра сферы O на плоскости проекций π_4 – проекции $A^{IV}B^{IV}$ и O^{IV} .

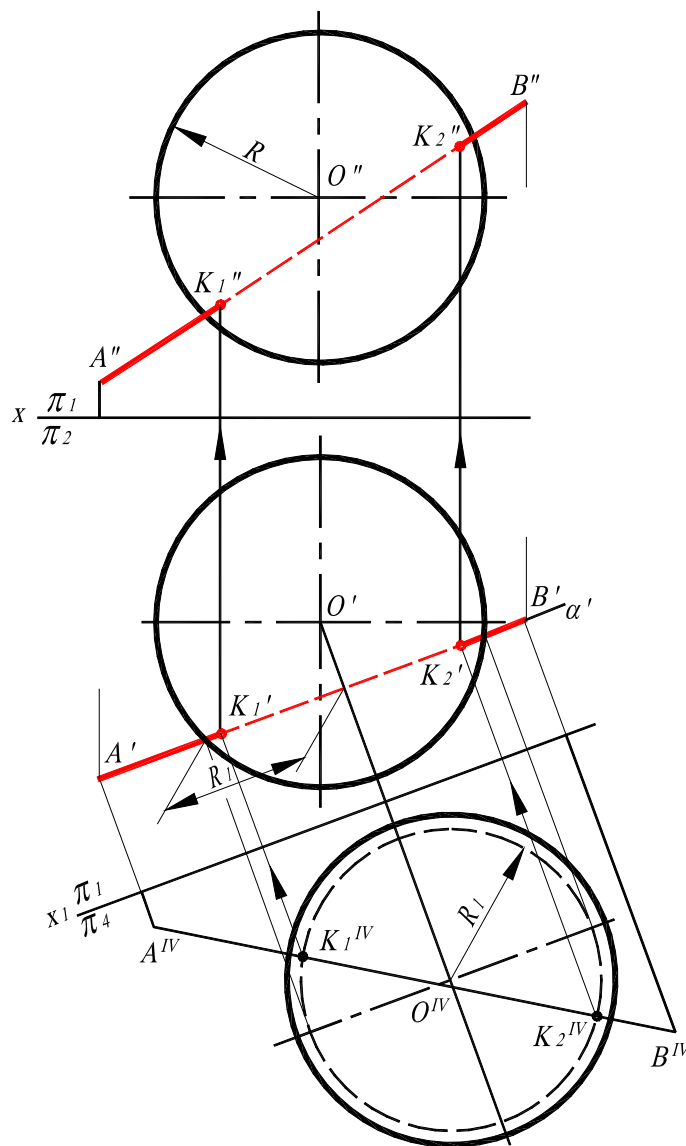


Рис. 9.12

В результате преобразования прямая AB стала параллельной плоскости π_4 и окружность радиуса R_1 проецируется на π_4 без искажения. В пересечении проекции AB и окружности радиуса R_1 определяются проекции точек пересечения K_1 и K_2 .

Проекции точек пересечения на плоскости π_1 и π_2 находятся при помощи линий связи. При определении видимости участков прямой AB следует учитывать, что проекция K_1^{IV} точки K_1 расположена на невидимой части сферы.

9.3. Примеры решения задач к главе 9

Пример 1. Построить точки пересечения прямой AB с поверхностью кругового кольца (рис. 9.13).

Решение. Так как прямая AB – горизонтальная, то для построения точек пересечения применим вспомогательную горизонтальную плоскость α (α''). Плоскость α пересекает поверхность кругового кольца по двум параллелям (окружностям) радиусов R_1 и R_2 . В пересечении горизонтальных проекций параллелей с проекцией прямой AB определяются горизонтальные проекции K_1, K_2, K_3, K_4 точек пересечения. Фронтальные проекции точек пересечения находятся при помощи линий связи. Так как поверхность тора представляет собой поверхность 4-го порядка, то прямая имеет в общем случае четыре точки пересечения.

При определении видимости участков проекций прямой руководствуемся тем, что фронтальные проекции точек K_1, K_2, K_3, K_4 расположены на невидимой части поверхности кругового кольца.

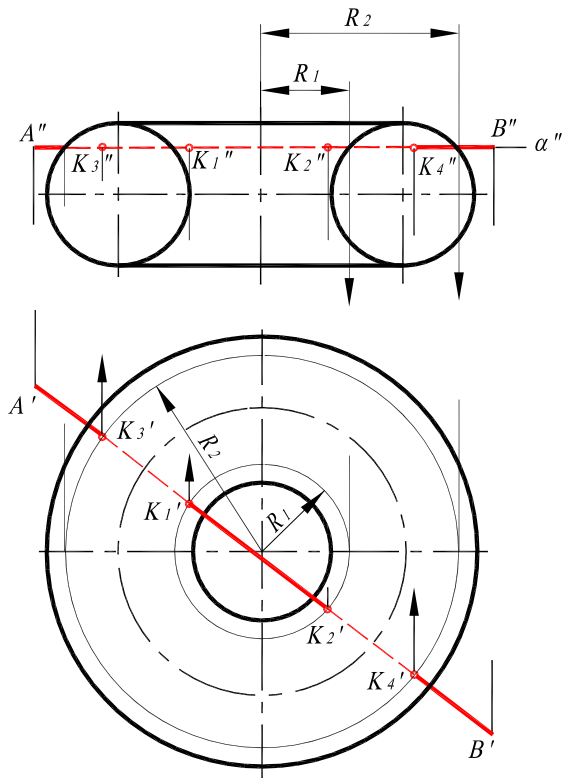


Рис. 9.13

Пример 2. Построить точки пересечения прямой AB с поверхностью усеченного конуса (рис. 9.14).

Решение. Так как фронтальную проекцию вершины конуса нельзя построить (построения выходят за рамки чертежа), то принимаем очерковую образующую конуса за фронтальную проекцию вспомогательной прямой, проходящей через вершину конуса. Обозначив точку ее пересечения с проекцией AB точкой C , находим на горизонтальной проекции AB проекцию C и проводим горизонтальную проекцию SC вспомогательной прямой SC . Пересекающиеся прямые AB и SC образуют плоскость, пересекающую конус по образующим. Находим ее горизонтальный след $h_{0\alpha}$ на плоскости основания конуса, построив горизонтальные следы M_1 и M_2 прямой AB и вспомогательной прямой. След $h_{0\alpha}$ пересекает окружность основания конуса в точках 1 и 2.

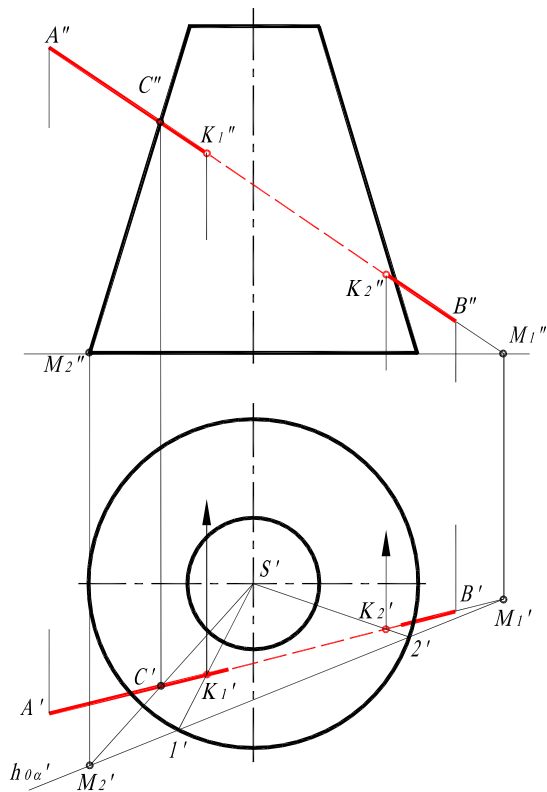


Рис. 9.14

Пересечение проекций образующих S_1 и S_2 с проекцией AB определяет горизонтальные проекции K_1 и K_2 точек пересечения. По линиям связи определяем фронтальные проекции K_1, K_2 .

Видимость участков проекции отрезка AB определяем из того, что точки пересечения расположены на видимых частях проекций конуса.

9.4. Вопросы для контроля

1. При каких условиях рассматриваются частные случаи пересечения прямой поверхностью геометрических тел?
2. Как построить точки пересечения прямой с поверхностью в частном случае?
3. В чем состоит общий способ определения точек пересечения прямой с поверхностью геометрических тел?
4. Как проводится вспомогательная плоскость при пересечении конуса прямой линией общего положения, чтобы получить в сечении конуса прямые линии?
5. С помощью каких преобразований можно упростить задачу построения точек пересечения прямой общего положения со сферой?

Глава 10. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

10.1. Способы построения линий пересечения

При пересечении многогранников может иметь место *проницание* одного многогранника другим (полное пересечение) и *врезание* (неполное пересечение).

При проницании получаются две замкнутые линии пересечения. Они могут быть плоские (при проницании одной грани) и пространственные (при проницании двух и более граней). При врезании получается одна замкнутая пространственная ломаная линия пересечения.

Вершинами ломаной пересечения являются точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого и ребер второго с гранями первого. Звеньями ломаной являются отрезки, по которым грани одного пересекают грани другого.

В соответствии с этим при решении задач используется один из следующих способов:

1) способ ребер, дающий возможность найти вершины ломаной линии пересечения (задачи на пересечение прямой линии с плоскостью);

2) способ граней, дающий возможность определить звенья ломаной линии пересечения (задачи на взаимное пересечение плоскостей).

Преимущество отдается тому из способов, который дает более простое решение. Иногда эти два способа целесообразно комбинировать. Следует отметить, что если проекция ребра одного многогранника не пересекает проекции контура другого, то данное ребро не пересекает другой многогранник. Однако пересечение проекций ребра одного многогранника с проекциями контура другого еще не означает, что ребро пересекает многогранник.

При определении видимости проекции линии пересечения следует учитывать, что видимой является та часть линии пересечения, которая находится на видимых проекциях граней обоих многогранников.

Рассмотрим случай пересечения пирамиды с призмой, боковая поверхность которой – фронтально-проецирующая (рис. 10.1).

Так как фронтальные проекции ребра AA_1 призмы и ребра SF пирамиды не пересекают контур другого многогранника, то при пересечении получается одна пространственная ломаная линия (случай врезания).

Грань AA_1B_1B призмы – горизонтальная плоскость α , пересекающая боковую поверхность пирамиды по ломаной линии, звенья которой параллельны сторонам основания DEF пирамиды. По фронтальной проекции точки $1''$, расположенной на ребре SD пирамиды найдем ее горизонтальную проекцию $1'$ и проведя звенья ломаной линии, определим точки $2', 3', 4'$ ($1'-2' \parallel D'E'$, $2'-3' \parallel E'F'$, $1'4' \parallel D'F'$).

Горизонтальные проекции $5'$ и $6'$ точек пересечения ребер SE и SD находятся с помощью линий связи.

Горизонтальные проекции $7'$ и $8'$ точек пересечения ребра CC_1 призмы с поверхностью пирамиды определим с помощью горизонтальной плоскости β , проведенной через ребро CC_1 призмы.

Плоскость β пересекает поверхность пирамиды по линиям, параллельным сторонам основания пирамиды. Спроецировав точку K , лежащую на ребре SD пирамиды, через проекцию K' проведем линии, параллельные $S'E'$ $S'F'$. Эти линии пересекаются с горизонтальной проекцией ребра CC_1 призмы в точках $7'$ и $8'$.

Последовательно соединяя каждые пары точек пересечения одних и тех же граней отрезками прямых, получим замкнутую пространственную ломаную линию $1'-2'-3'-5'-7'-6'-8'-4'-1'$.

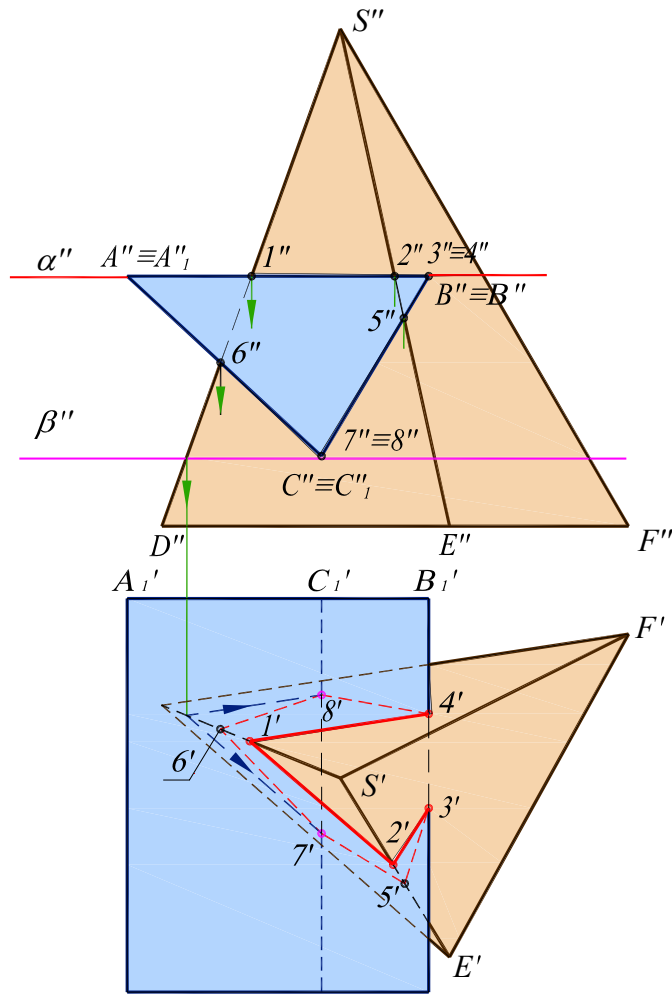


Рис. 10.1.

Видимой будет часть этой линии $3'-2'-1'-4'$, расположенная на видимой грани AA_1B_1B .

На рис. 10.2 показано построение линии пересечения двух призм, боковые поверхности которых проецируются (для призмы $ABCA_1B_1C_1$ - горизонтально-проецирующая, для призмы $DEFD_1E_1F_1$ - профильно-проецирующая).

Рассматривая положение горизонтальных и профильных проекций многогранников отмечаем, что призма $DEFD_1E_1F_1$ пронизывает боковую поверхность призмы $ABCA_1B_1C_1$. Следовательно, при пересечении получают две замкнутые ломаные линии: одна из них – пространственная (пересекаются две грани призмы $ABCA_1B_1C_1$), другая – плоская (пересекается одна грань).

Горизонтальная проекция линий пересечения совпадает с горизонтальной проекцией вертикальной призмы, а профильная – с профильной проекцией горизонтальной призмы.

Отмечая точки пересечения $1'-2'-3'-4'-5'-6'$ горизонтальных проекций ребер $D'D_1', E'E_1', F'F_1'$ с горизонтальной проекцией призмы $ABCA_1B_1C_1$, при помощи линий связи находим их фронтальные проекции.

Фронтальные проекции $7'', 8''$ точек пересечения ребра AA_1 с боковой поверхностью призмы $DEFD_1E_1F_1$ определим по линиям связи, используя их профильные проекции $7'''$ и $8'''$.

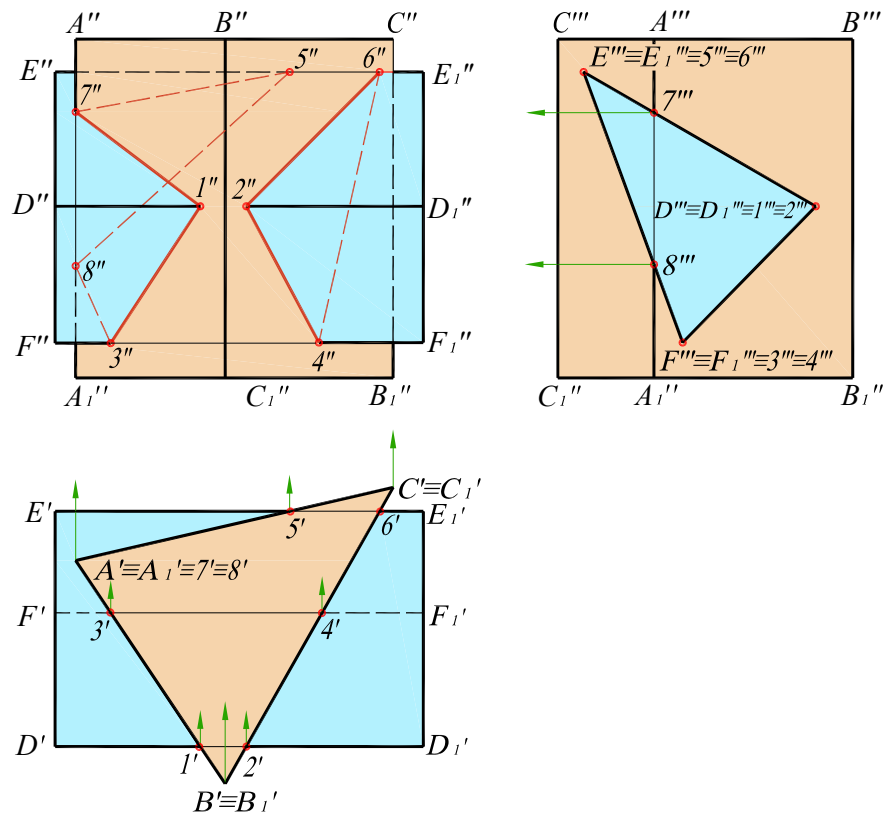


Рис. 10.2

Последовательно соединяя найденные точки пересечения, принадлежащие одним и тем же граням, построим две ломаные линии 1-3-8-5-7-1 и 2-4-6-2.

Видимая часть линий пересечения расположена на видимых гранях обоих многогранников.

10.2. Примеры решения задач к главе 10

Пример 1. Построить линию пересечения пирамиды с прямой призмой (рис. 10.3).

Решение. Рассматривая горизонтальные проекции многогранников, отметим, что имеет место проникание, т.к. все ребра пирамиды пересекаются поверхностью призмы. При этом одна из ломаных линий – плоская (поверхность пирамиды пересекается одной гранью призмы), другая – пространственная (в пересечении с пирамидой участвуют две грани призмы). Т.к. боковая поверхность призмы – горизонтально-проецирующая, то горизонтальные проекции точек пересечения $1', 2', 3', 4', 5', 6'$ определяются в пересечении ребер пирамиды с боковыми гранями призмы.

По горизонтальным проекциям многогранников видно, что только ребро EE_1 призмы пересекает грани пирамиды. Для определения точек пересечения его с пирамидой, через это ребро и вершину S пирамиды проводим вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость α (α'). Она пересекает грани пирамиды по прямым MS и NS . В пересечении фронтальных проекций $M''S''$ и $N''S''$ с проекцией $E''E_1'$ определяются точки пересечения ($7''$ и $8''$) ребра EE_1 призмы с гранями SAB и SBC пирамиды.

Последовательно соединяя точки пересечения, принадлежащие одним и тем же граням, получим линии пересечения 1-2-3 и 4-6-8-5-7-4.

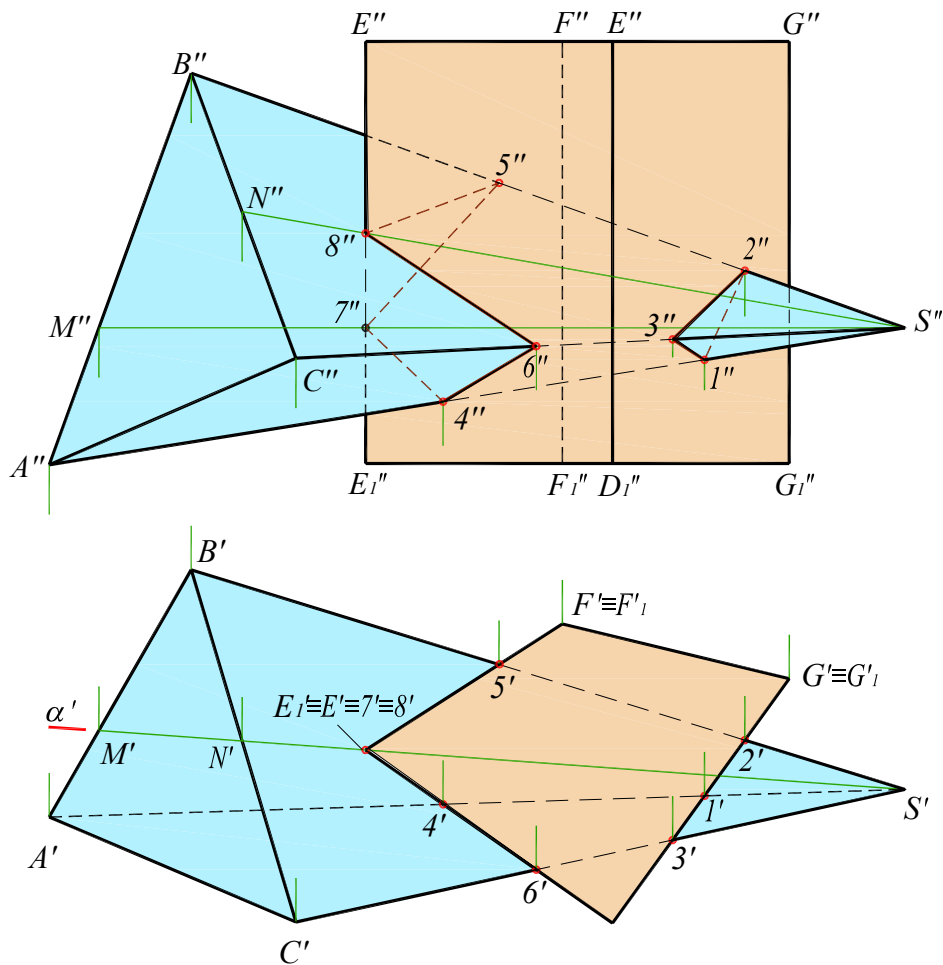


Рис. 10.3.

Видимыми являются только те отрезки ломаных линий, которые принадлежат видимым граням обоих многогранников. Так фронтальные проекции отрезков $1''-3''$, $2''-3''$, $4''-6''$, $6''-8''$ линий пересечения видимы. Отрезки $1''-2''$, $4''-7''$ принадлежат невидимой грани SAB пирамиды, отрезки $5''-7''$, $5''-8''$ расположены на невидимых гранях $E E_1 F_1 F$ призмы и SAB пирамиды.

10.3. Вопросы для контроля

1. Что представляет собой линия пересечения многогранников?
2. В каком случае при пересечении многогранников получается проникание, врезание?
3. В чем заключается способ ребер и способ граней?
4. В какой последовательности соединяются точки пересечения ребер и граней многогранников?
5. Как определяется видимость линии пересечения многогранников?

ГЛАВА 11. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ С МНОГОГРАННИКАМИ

Линия пересечения многогранника с телом вращения в общем случае состоит из отдельных участков кривых линий, получающихся при пересечении граней многогранника с поверхностью вращения. Точки перехода от одного участка к другому находятся в пересечении ребер многогранника с телом вращения и называются точками излома. Участок линии пересечения может быть и прямой линией в случае пересечения линейчатой поверхности вращения гранью многогранника по образующей.

При проницании (полном пересечении) получаются две замкнутые линии пересечения. Они могут быть плоскими (поверхность вращения проницает одну грань) или пространственными, состоящими из нескольких плоских кривых с точками излома в местах пересечения поверхности вращения ребрами многогранника.

При врезании (неполном пересечении) получается одна замкнутая пространственная линия.

Таким образом, в соответствии с указанным выше, задачи данной темы решаются по следующему плану:

1. Определяются точки излома линии пересечения, являющиеся точками пересечения ребер многогранника с поверхностью вращения.
2. Находятся точки, принадлежащие линиям пересечения отдельных граней многогранника с телом вращения. При этом сначала следует найти характерные (опорные) точки кривых. Это точки, проекции которых отделяют видимую часть проекции линии пересечения от невидимой, это проекции наивысших и наинизших точек линии пересечения, ближайших и наиболее удаленных, крайних слева и справа на проекциях линии пересечения.
3. Определение видимости линии пересечения поверхностей и их очерков. Видимость проекций участков линии пересечения определяется из условия расположения их на видимой стороне каждой поверхности.

При построении точек линии пересечения многогранников с телами вращения используют вспомогательные секущие плоскости. Их располагают так, чтобы они пересекали данные поверхности по простым для построения линиям (прямым или окружностям).

Рассмотрим линии пересечения поверхности прямой трехгранной призмы с поверхностью цилиндра вращения (рис. 11.1). Боковые грани призмы являются горизонтально-проецирующими плоскостями, а ось цилиндра перпендикулярна профильной плоскости проекций.

По горизонтальной проекции видно, что в данном случае имеем проницание цилиндра призмой и линия пересечения состоит из двух замкнутых симметричных частей (на рисунке приведены обозначения точек только одной ее части).

Грань призмы BB_1C_1 параллельна оси цилиндра и пересекает поверхность цилиндра по прямой 2-3 (образующая цилиндра).

Грани AA_1BB_1 и AA_1CC_1 наклонены к оси цилиндра и пересекают его поверхность по части эллипсов.

Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы, а профильная проекция совпадает с проекцией боковой поверхности цилиндра.

Характерными точками линии пересечения являются точки пересечения 1, 2, 3 ребер призмы с поверхностью цилиндра (фронтальные проекции этих точек определяем с помощью линий связи, проведенных через их профильные проекции). Точки 4 и 5, находящиеся на верхней образующей цилиндра, разграничивают фронтальную проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части (фронтальные проекции этих точек определим с помощью линий связи, проведенных через их горизонтальные проекции).

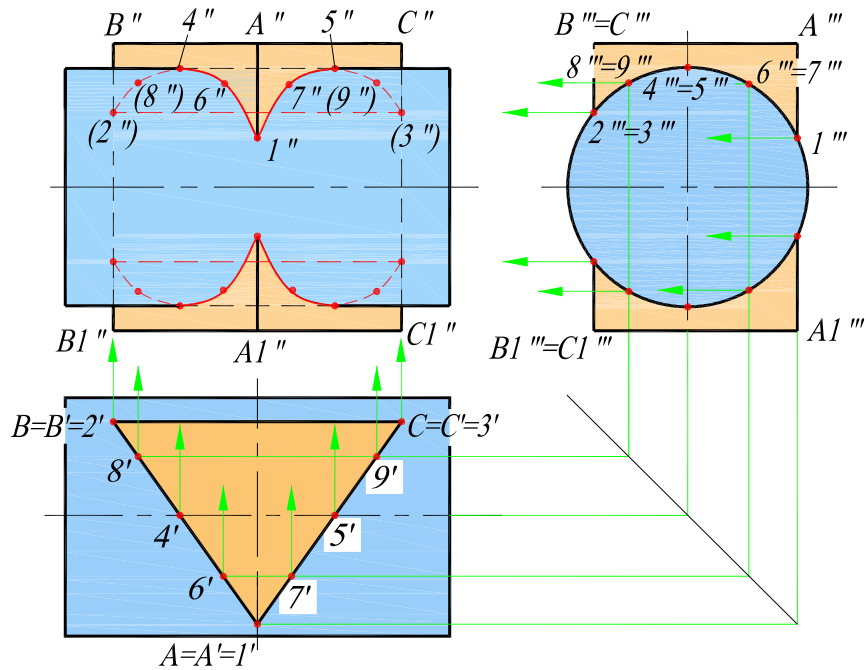


Рис. 11.1

Построение промежуточных точек 6, 7, 8, 9 выполняем следующим образом. На одной из имеющихся проекций линии пересечения (горизонтальной или профильной) намечаем проекции точек и с помощью линий связи строим их другие проекции.

По построенным точкам проводим фронтальную проекцию линии пересечения. Видимой является часть 4''-6''-1''-7''-5'', расположенная на видимой проекции цилиндра. Часть фронтальных проекций ребер BB_1 и CC_1 закрывается очерком цилиндра.

На рис. 11.2 построена линия пересечения поверхности конусом вращения с поверхностью прямой четырехгранной призмы $ABCD A_1 B_1 D_1$. Боковые поверхности призмы являются профильно-проецирующими прямыми, а ось конуса перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций.

Из профильной проекции видно, что имеет место врезание, т.к. ребро BB_1 призмы не пересекает конус. Линия пересечения представляет собой замкнутую пространственную линию и состоит из четырех участков кривых второго порядка. Грань $AA_1 BB_1$ пересекает боковую поверхность конуса по эллипсу, грань $BB_1 CC_1$ - по гиперболе, грань $CC_1 DD_1$ - по окружности, грань $AA_1 DD_1$ - по параболе.

Профильная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы.

Характерными точками линии пересечения являются точки пересечения 3, 7, 8 ребер призмы с поверхностью конуса. Для этого через ребра AA_1 , CC_1 , DD_1 проведены горизонтальные плоскости α и β , пересекающие конус по окружностям (параллелям).

На рис 11.2 приведено обозначение точек лишь одной симметричной части линии пересечения.

Плоскость β позволяет определить также дуги окружности, по которым грань $CC_1 DD_1$ пересекает конус.

Характерными точками эллипса, по которому грань $AA_1 BB_1$ пересекает боковую поверхность конуса, являются точки 1, 2, M , L . Построение этих точек начинается с профильных проекций. Высшая M и низшая 1 определяют малую ось фронтальной проекции эллипса и большую ось горизонтальной. Середина (точка O) отрезка $M1$ является центром эллипса.

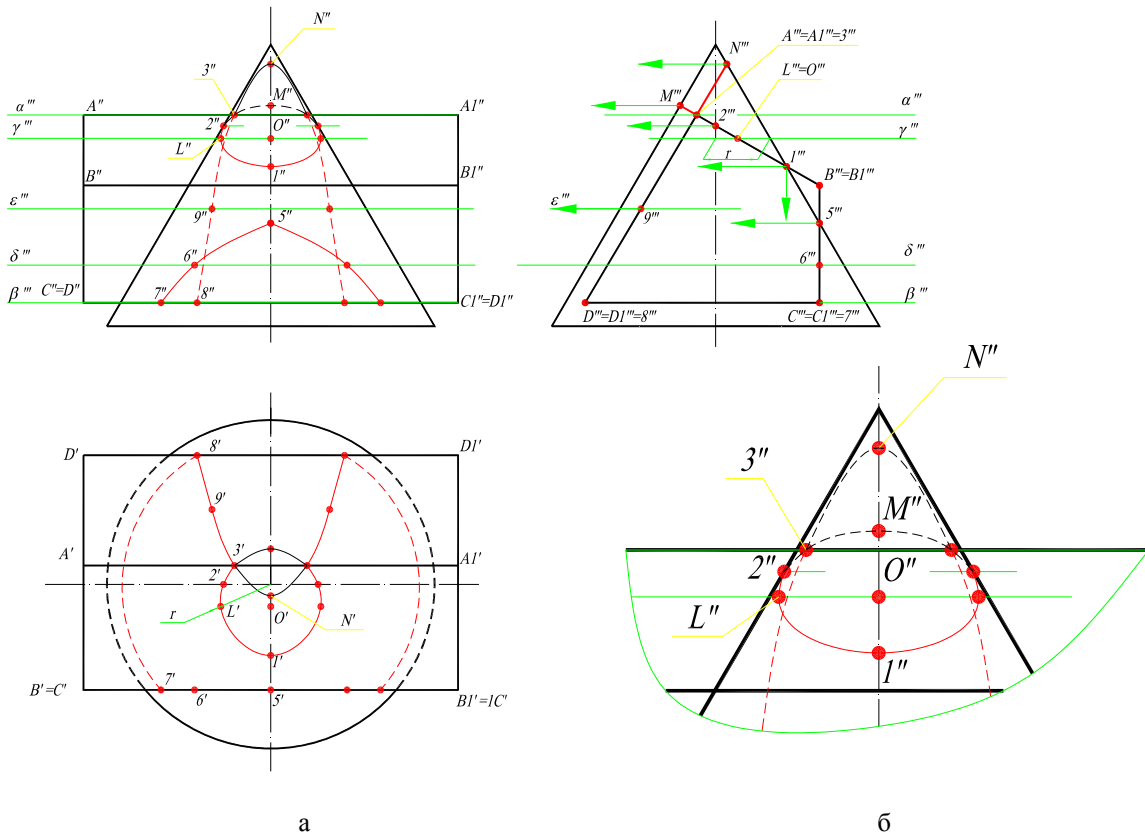


Рис. 11.2

С помощью горизонтальной плоскости γ , проведенной через точку O (параллель радиуса r) находится точка L , определяющая малую ось горизонтальной проекции эллипса и большую ось фронтальной проекции. Проекция $2''$ точки 2, находящейся на фронтальной очерковой образующей конуса разделяет фронтальную проекцию эллипса на видимую и невидимую.

Вершина гиперболы (точка 5), по которой грань BB_1CC_1 пересекает поверхность конуса, определяется по профильной проекции $5'''$.

Построение точки 7, принадлежащей и гиперболе и окружности приведено выше. Промежуточная точка 6 построена с помощью горизонтальной плоскости δ сначала на горизонтальной проекции, а затем на фронтальной.

Вершина параболы (точка N), по которой грань AA_1DD_1 пересекает поверхность конуса, находится за пределами грани и определяется по ее профильной проекции. Построение точек 2 и 8, принадлежащих параболе, а также эллипса и окружности приведены ранее. Промежуточная точка 9 определена сначала на горизонтальной проекции, а затем на фронтальной с помощью горизонтальной плоскости ϵ . Видимость проекций линии пересечения определяется видимостью граней призмы и поверхности конуса. Следует отметить, что часть ребра AA_1 на фронтальной проекции до точки 3 закрывается контуром конуса.

На рис. 11.2, б показано увеличенное изображение части фронтальной проекции.

На рис.11.3 приведено построение линии пересечения сферы с прямой трехгранной призмой. Боковые ребра призмы перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций. Из горизонтальной проекции видно, что в данном случае имеет место проникание сферы призмой. Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы. Характерными точками линии пересечения являются точки 1 и 2 - точки пересечения ребер призмы со сферой (обозначение точек линии пересечения приведено лишь на одной симметричной части). Для построения этих точек использованы фронтальные плоскости α и β , проведенные через ребра призмы и пересекающие сферу по окружностям радиусов R и R_1 .

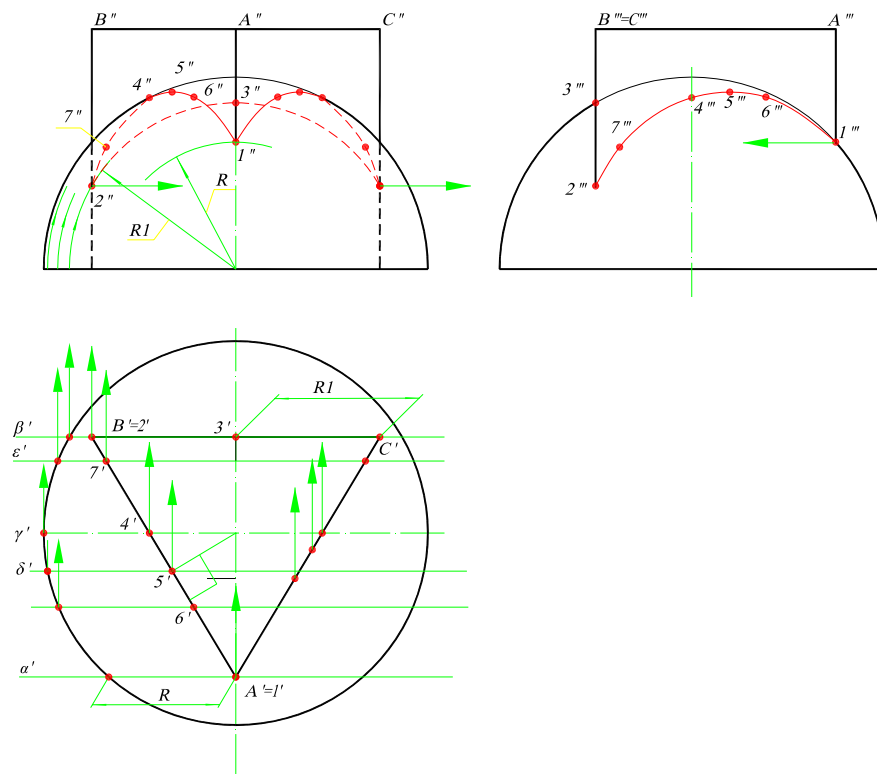


Рис. 11.3

Фронтальную проекцию $1''$ точки 1 можно определить и по профильной проекции. Так как грань призмы BC является фронтальной плоскостью, то плоскость β позволяет определить дугу окружности, по которой она пересекает сферу. Точка 3 – высшая точка этой дуги.

Грани AB и AC призмы пересекают сферу по дугам окружностей, которые на фронтальную и профильную плоскости проекций проецируются в виде частей эллипсов. Фронтальная проекция линии пересечения этих граней представляет собой две симметричные части, а профильные проекции совпадают.

Характерными точками фронтальной проекции линии пересечения являются также точки $4''$ и $5''$. Точка 4 разделяет линию на видимую и невидимую части, точка 5 – высшая точка линии пересечения. Проекция $4''$ находится на очерке сферы – фронтальном меридиане, проекция $5''$ – определим с помощью фронтальной плоскости γ .

Для построения промежуточных точек $6''$ и $7''$ фронтальной проекции использованы фронтальные плоскости δ и ϵ . Каждая из фронтальных плоскостей пересекает сферу по окружности определенного радиуса, а призму – по горизонтально-проецирующим прямым.

Видимой частью фронтальной проекции линии пересечения является часть эллипса $1'' - 6'' - 5'' - 4''$, на профильной проекции симметричные части линии пересечения изображаются видимой линией. На фронтальной проекции части ребер B и C закрываются контуром сферы.

Примеры решения задач к главе 11

Пример 1. Построить линию пересечения поверхности тора с поверхностью трехгранной призмы (рис. 11.4).

Решение. Боковые грани призмы являются фронтально-проецирующими плоскостями и фронтальная проекция линии пересечения совпадают с проекцией боковой поверхности призмы. Из фронтальной проекции видно, что в данном случае имеет место проникание тора призмой (две замкнутые линии пересечения).

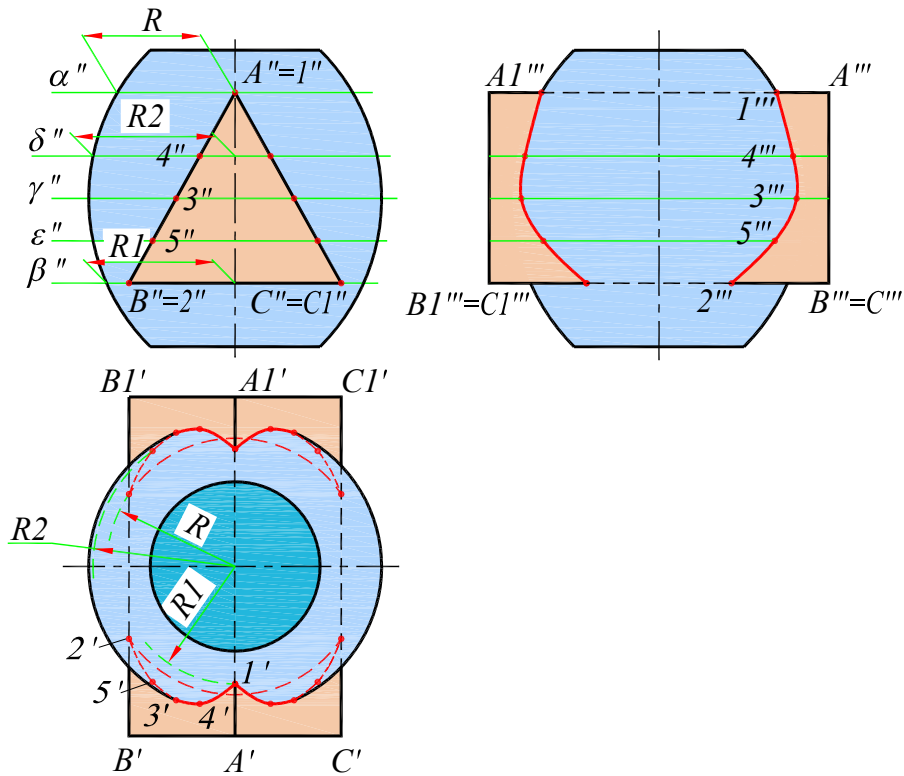


Рис. 11.4

Характерными точками линии пересечения являются точки 1, 2, 3 (обозначение точек линии пересечения приведено для одной симметричной части). Для построения горизонтальных проекций точек 1 и 2, в которых ребра призмы пересекают поверхность тора, использованы горизонтальные плоскости α и β . Эти плоскости пересекают призму по фронтально-проецирующим прямым, а тор – по окружностям радиусов R и R_1 .

Плоскость β позволяет определить дугу окружности, по которой горизонтальная грань BB_1CC_1 пересекает поверхность тора.

С помощью горизонтальной плоскости γ , пересекающей тор по экватору, определим горизонтальную проекцию точки 3. Проекция $3'$ разделяет горизонтальную проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части.

Для нахождения горизонтальных проекций точек 4 и 5 использованы горизонтальные плоскости δ и ϵ . Эти плоскости пересекают поверхность призмы по фронтально-проецирующим прямым, а тор – по окружностям одинакового радиуса R_2 .

Профильная проекция линии пересечения строится по точкам, определяемым с помощью линий связи.

Видимой частью горизонтальной проекции линии пересечения является часть кривой $1'' - 4'' - 3''$, расположенная на верхней части тора и видимых гранях призмы. На профильной проекции симметричные части линии пересечения совпадают и изображаются видимой линией.

Пример 2. Построить линию пересечения правильной треугольной пирамиды и цилиндра вращения (рис. 11.5).

Решение. Из горизонтальной проекции видно, что в данном примере имеет место проникание цилиндром поверхности пирамиды. Одна часть линии пересечения состоит из трех плоских кривых (частей эллипсов), по которым грани пирамиды пересекают боковую поверхность цилиндра. Вторая часть линии пересечения вырождается в точку S , т.к. вершина пирамиды находится на верхнем основании цилиндра. Поскольку пирамида является

ся правильной и ее высота совпадает с осью цилиндра, то все участки линии пересечения одинаковы.

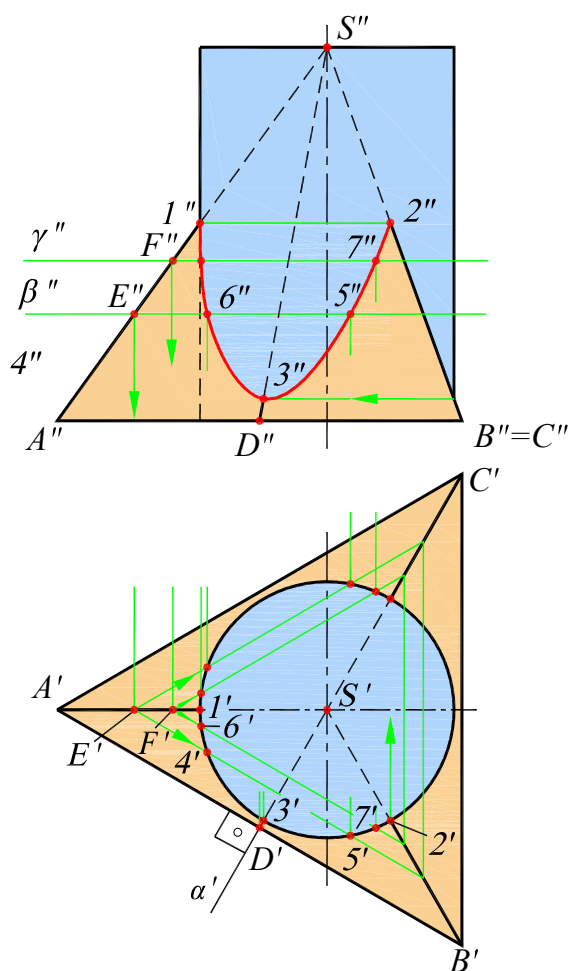


Рис. 11.5

Так, для построения фронтальной проекции точки 3 использована плоскость α , пересекающая пирамиду по прямой SD , а цилиндр – по образующей. Проекция $3''$ находится на одной горизонтальной прямой с точкой пересечения фронтально-проецирующей грани SBC и очерковой образующей цилиндра.

Для нахождения фронтальных проекций промежуточных точек 4, 5, 6, 7 использованы горизонтальные плоскости β и γ , пересекающие цилиндр по окружностям, а пирамиду – по треугольникам. В пересечении их горизонтальных проекций получают горизонтальные проекции $4'$, $5'$, $6'$, $7'$ этих точек. Фронтальные проекции определяются с помощью линий связи на фронтальных проекциях вспомогательных плоскостей.

Вопросы для контроля

1. Что представляет собой линия пересечения тела вращения с многогранником?
2. Какие точки являются характерными при построении линии пересечения?
3. Как определяется видимость участков линии пересечения?

Боковая поверхность цилиндра вращения – горизонтально-проецирующая, поэтому горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра.

Грани пирамиды SAB и SAC являются плоскостями общего положения с совпадающими фронтальными проекциями. Поэтому фронтальные проекции линии пересечения этих граней с цилиндром (части эллипсов) совпадают. Грань SBC является фронтально-проецирующей плоскостью и фронтальная проекция линии пересечения совпадает со следом-проекцией этой грани.

Характерными точками линии пересечения являются точки пересечения ребер пирамиды с поверхностью цилиндра. Ребро SA пересекает очерковую образующую цилиндра в точке 1, так как ребра расположены в одной фронтальной плоскости. Фронтальные проекции точек пересечения ребер SB и SC с поверхностью цилиндра совпадают с $2''$ и находятся на одной горизонтальной прямой с проекцией $1''$. Фронтальная проекция точки 2 может быть построена и с помощью линии связи по горизонтальной $2'$.

К другим характерным точкам относятся самые низшие точки, в которых грани пирамиды пересекают поверхность цилиндра. Эти точки находятся с помощью вспомогательных плоскостей, проходящих через ось цилиндра и пересекающих грани по линии наибольшего ската.

Глава 12

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Линия пересечения двух поверхностей вращения в общем случае представляет пространственную кривую, которая может распадаться на две и более части. Эти части могут быть, в частности, и плоскими кривыми и даже прямыми линиями.

Линию пересечения поверхностей обычно строят по ее отдельным точкам. Точки подразделяются на характерные (опорные) и промежуточные (случайные).

Общим способом построения этих точек является способ *вспомогательных секущих поверхностей – посредников*. При пересечении данных поверхностей вспомогательной поверхностью определяются линии пересечения ее с данными поверхностями, в пересечении этих линий получают точки, принадлежащие искомой линии пересечения.

Наиболее часто в качестве поверхностей-посредников применяются плоскости или сферы.

12.1. Способ вспомогательных секущих плоскостей

В качестве вспомогательных секущих плоскостей чаще всего используют плоскости, параллельные одной из плоскостей проекций. Положение их выбирают таким, чтобы они пересекали заданные поверхности по простейшим линиям – прямым или окружностям.

Если одна из поверхностей является цилиндрической проецирующей поверхностью, то построение линии пересечения упрощается, так как в этом случае одна проекция линии пересечения совпадает с окружностью – проекцией цилиндра на перпендикулярную плоскость проекций.

На рис. 12.1, *а* показано построение линии пересечения двух цилиндров вращения, оси которых скрещиваются. Ось горизонтального цилиндра – профильно-проецирующая, а ось вертикального – горизонтально-проецирующая.

Линией пересечения цилиндров является пространственная кривая, горизонтальная проекция которой совпадает с окружностью – горизонтальной проекцией вертикального цилиндра. Отметим на этой окружности точки, принадлежащие линии пересечения: опорные 1, 2, 3, 4, лежащие на крайних образующих цилиндров, и промежуточную 5. Точки обозначены только на одной симметричной части линии пересечения.

Фронтальные проекции точек 1, 3, 3₁, лежащие на ближней верхней и нижней образующих горизонтального цилиндра, определяем с помощью линий связи.

Для построения фронтальных проекций точек 2, 2₁, 4, 4₁, 5, 5₁ использованы вспомогательные фронтальные плоскости α , β , γ , пересекающие оба цилиндра по образующим. Положение образующих вертикального цилиндра найдем по их горизонтальным проекциям при помощи вертикальных линий связи. Для построения образующих горизонтального цилиндра использована его профильная проекция.

На рис. 12-1, *б* приведено наглядное изображение пересекающихся цилиндров и вспомогательная плоскость γ , используемая для построения промежуточных точек 5, 5₁.

Видимой частью горизонтальной проекции линии пересечения является линия 2''- 5''- 1''- 5₁''- 2₁'' , принадлежащая видимым частям обоих цилиндров.

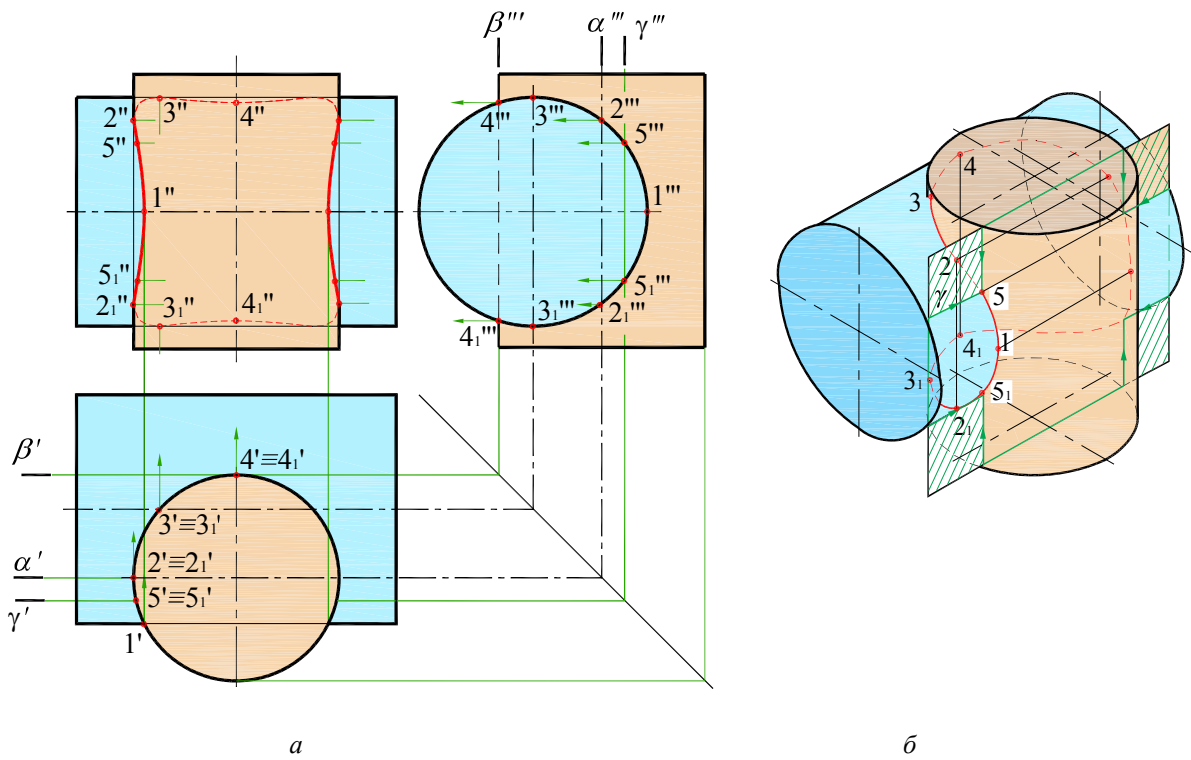


Рис.12.1

На рис.12.2, *a* показано построение линии пересечения конуса вращения и цилиндра вращения, у которых оси скрещиваются под прямым углом.

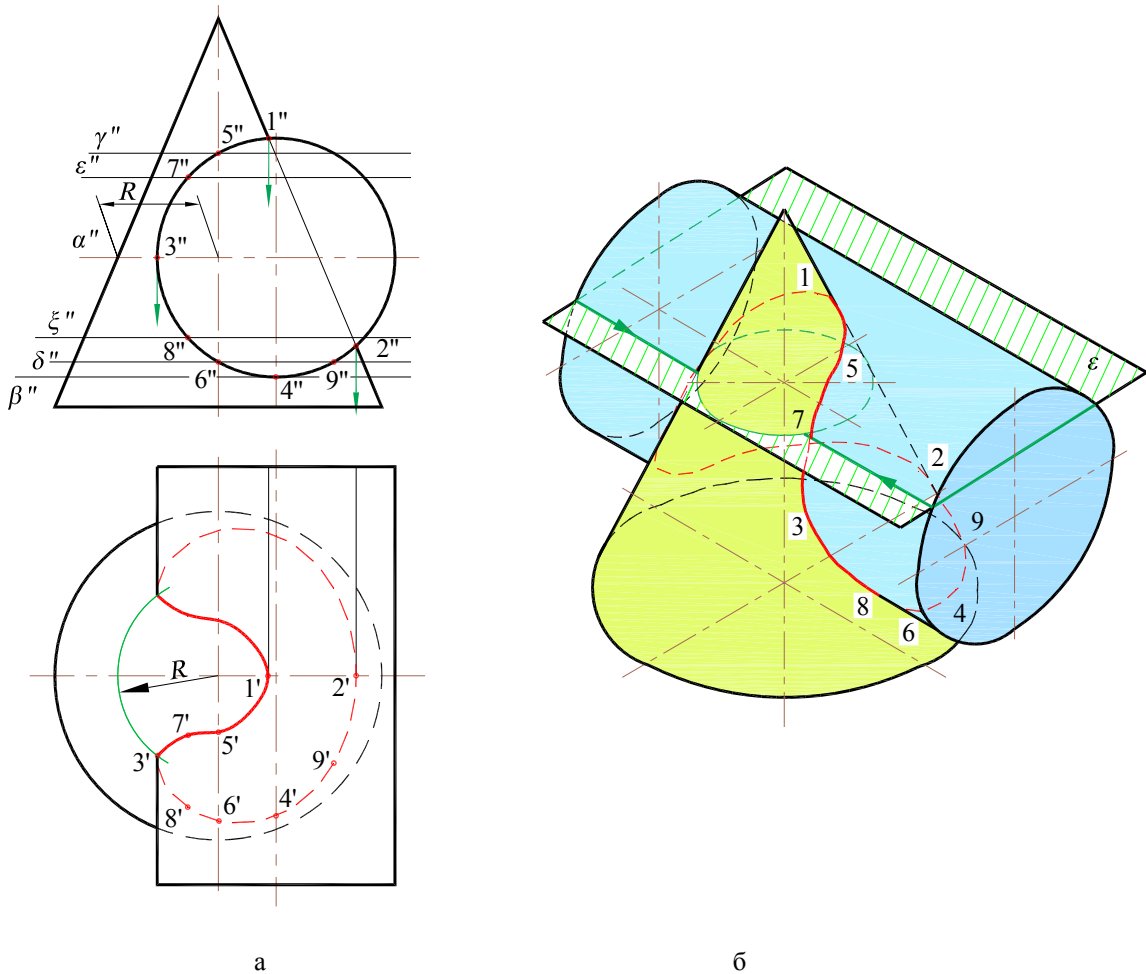


Рис.12.2

Линией пересечения указанных тел является пространственная кривая, фронтальная проекция которой совпадает с окружностью - фронтальной проекцией цилиндра. Отметим на этой окружности точки линии пересечения: опорные (1, 2, 3, 4, 5, 6) и промежуточные (7, 8, 9). Точки обозначены только на одной симметричной части линии пересечения. Горизонтальные проекции точек 1 и 2, лежащие на кривой очерковой образующей конуса, определим с помощью линий связи. Для построения горизонтальных проекций точек 3 и 4 использованы вспомогательные плоскости α и β .

Плоскость α пересекает цилиндр по крайней левой образующей, а конус по окружности (параллели) радиуса R , пересечение которых определяет горизонтальную проекцию 3' точки 3.

Плоскость β , касающаяся цилиндра в его нижней образующей и пересекающей конус по окружности соответствующего радиуса, позволяет построить горизонтальную проекцию 4' точки 4.

Подобным образом с помощью горизонтальных плоскостей γ , δ , ϵ и ξ находятся горизонтальные проекции точек 5 и 6, расположенных на ближней и дальней образующих конуса, а также горизонтальные проекции промежуточных точек 7, 8, 9.

Видимой частью горизонтальной проекции линии пересечения является линия 1'-7'-3', принадлежащая видимой (верхней) части цилиндра.

На рис. 12.2, б приведено наглядное изображение взаимно пересекающихся цилиндра и конуса и вспомогательная плоскость δ , используемая для построения промежуточной точки 7.

На рис. 12.3, а показано построение линии пересечения полусферы с цилиндром вращения. Поскольку ось цилиндра перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с окружностью - горизонтальной проекцией цилиндра. Отметим на этой окружности опорные точки линии пересечения A, B, C, D, G, H, K, L и промежуточные M, N, P .

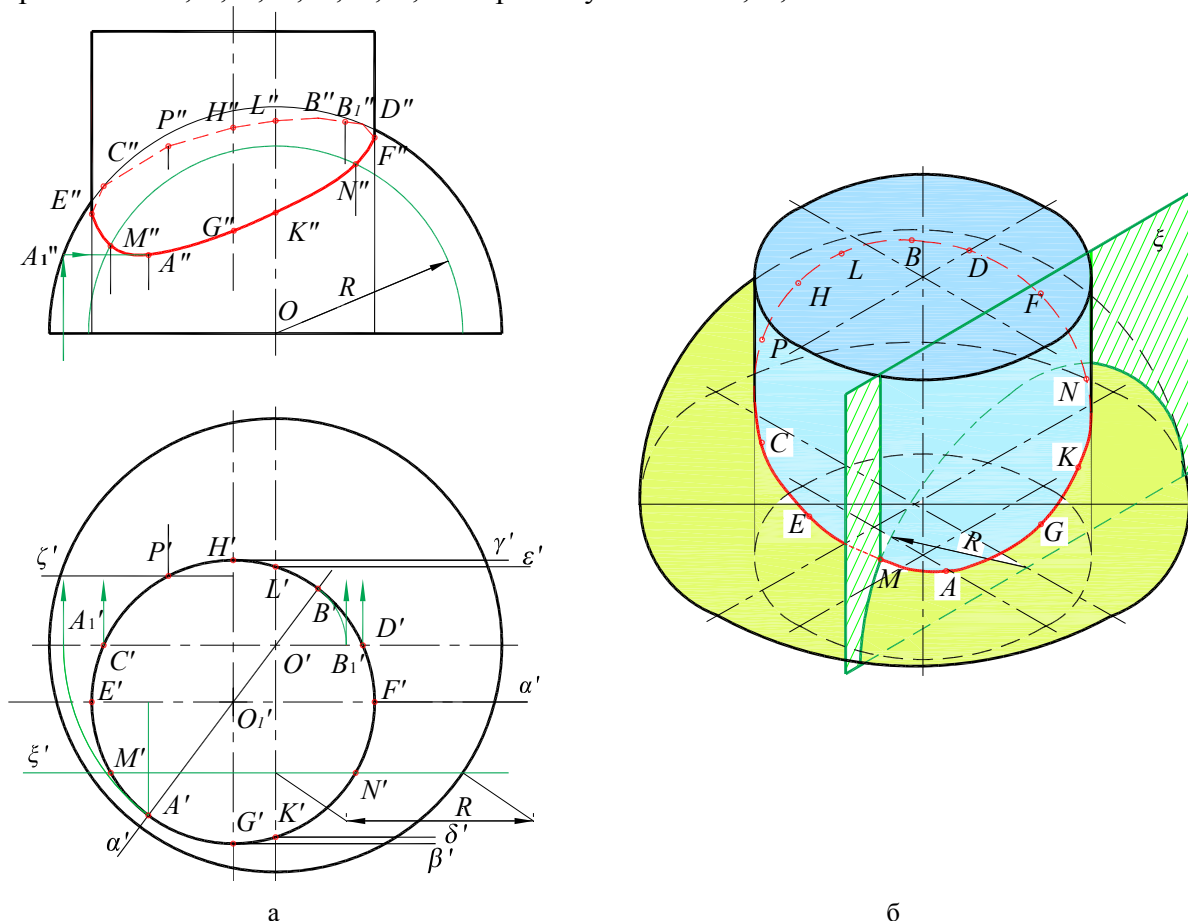


Рис.12.3

Точки A и B (низшая и высшая точки) расположены в горизонтально-проецирующей плоскости α , горизонтальный след - проекция α' которой пройдет через горизонтальные проекции D' и D_1' осей тел вращения. Чтобы определить фронтальные проекции A'' и B'' этих точек, повернем плоскость α с лежащими на ней линиями сечения сферы и цилиндра вокруг оси сферы до фронтального положения. Пересечение нового положения, образующих цилиндра и контура сферы на Πz , с которым совпадает проекция сечения сферы плоскостью α после поворота, дает точки A_1'' и B_1'' , по которым определяем проекции A'' и B'' .

Фронтальные проекции точек C и D , расположенных на фронтальном меридиане сферы, определим с помощью линий связи.

Для построения фронтальных проекций опорных точек E, F, G, H , расположенных на крайних образующих цилиндра, и точек K, L , находящихся на профильном меридиане сферы, использованы вспомогательные фронтальные плоскости $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$. Фронтальные проекции промежуточных точек M, N, L построим с помощью фронтальных плоскостей – пересекают (касаются) цилиндр по образующим, а полусферу – по полуокружности. Так, вспомогательная плоскость ξ пересекает цилиндр по соответствующим образующим, а полусферу – по дуге радиуса R . Пересечение фронтальных проекций указанных линий сечения и дает точки M'' и N'' .

Найденные фронтальные проекции опорных и промежуточных точек соединяем лекальной кривой, обводя точки в порядке их расположения на поверхности цилиндра.

Видимой частью фронтальных проекции является $E' - M' - A' - G' - K' - F'$, принадлежащая видимой (передней) части цилиндра.

На рис. 12.3, б представлено наглядное изображение пересекающихся цилиндра и полусферы и вспомогательная плоскость ξ , используемая для построения промежуточных точек M и N .

12.2. Особые случаи пересечения

При пересечении между собой кривых поверхностей линиями пересечения в общем случае являются пространственные кривые, которые в ряде случаев могут распаться на более простые линии. Рассмотрим некоторые из этих случаев.

1. Два цилиндра с параллельными осями, два конца с общей вершиной пересекаются по образующим.

На рис. 12.4, а изображены пересекающиеся между собой цилиндры вращения с параллельными осями. Линиями пересечения являются общие образующие L_1 и L_2 .

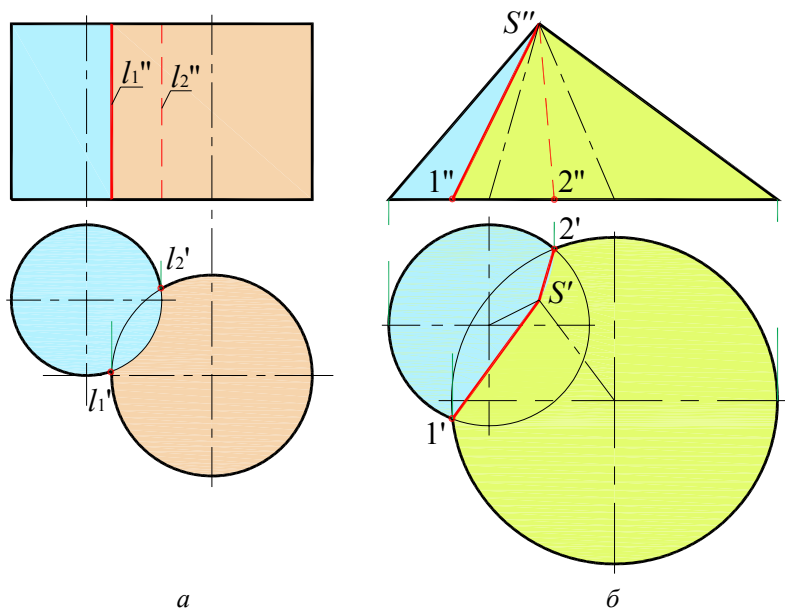


Рис.12.4

На рис. 12.4, б изображены пересекающиеся между собой наклонные конусы с круговыми основаниями и общей вершиной S . Линиями пересечения являются общие образующие S_1 и S_2 .

2. Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

На рис. 12.5 изображены пересекающиеся между собой цилиндр и конус, касающиеся сферы радиуса R . Линии касания – окружности, плоскости которых параллельны фронтальной и профильной плоскостям проекций.

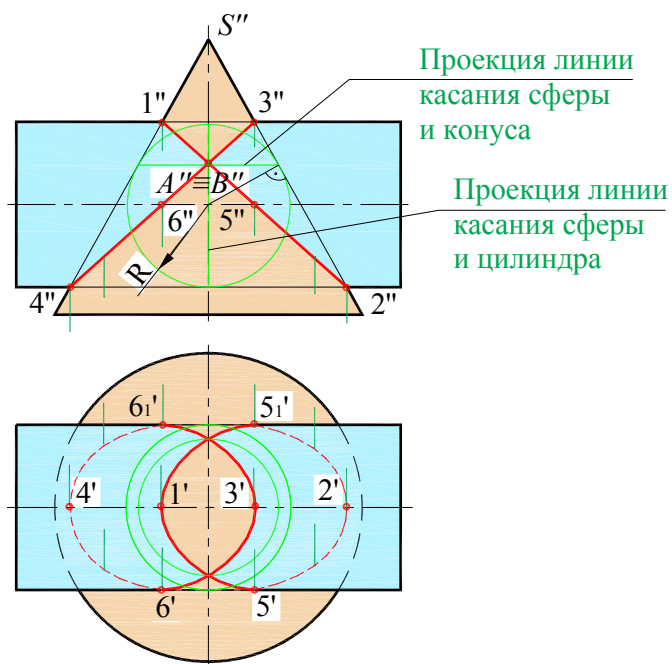


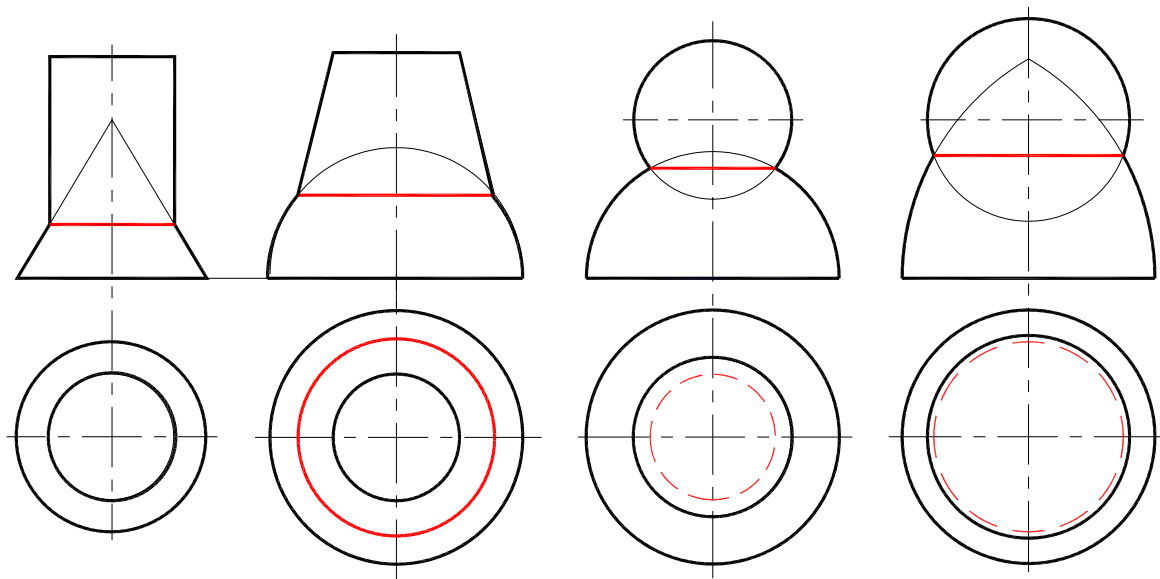
Рис. 12.5

Плоскости касания пересекаются между собой по фронтально-проецирующей прямой AB . Фронтальная проекция линии пересечения – два эллипса, плоскости которых проходят через прямую AB и являются фронтально-проецирующими плоскостями. Большие оси эллипсов – отрезки 1-2 и 3-4, а малые равны диаметру цилиндра. Горизонтальная проекция линии пересечения находится из условия принадлежности ее точек поверхности конуса.

3. Соосные поверхности вращения (т.е. поверхности с общей осью) пересекаются по окружностям.

Если ось вращения соосных поверхностей перпендикулярна к какой либо плоскости проекций, то линия их пересечения проецируется на эту плоскость в виде окружности, а на другую плоскость проекций – в прямую линию.

На рис. 12.6 даны примеры пересечения соосных поверхностей вращения (ось вращения перпендикулярна плоскости π_1). На рис. 12.6, а приведены цилиндр и конус, б – конус и сфера, в – две сферы, г – сфера и тор.



а) цилиндр и конус,

б) конус и сфера,

в) две сферы,

г) сфера и тор

Рис.12.6

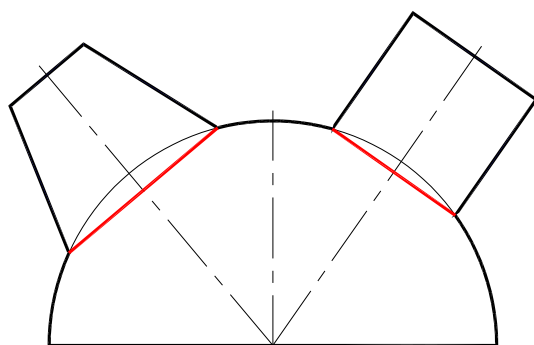


Рис. 12.7

За ось сферы можно принять любой ее диаметр. Поэтому сфера, центр которой находится на оси поверхности вращения, пересекается с этой поверхностью по окружности. На рис. 12.7 показана сфера, пересекающаяся с цилиндром и конусом, оси которых параллельны фронтальной плоскостью проекций.

Плоскости окружностей, по которым пересекаются поверхности вращения, перпендикулярны осям поверхностей вращения, вследствие чего окружности на фронтальную плоскость проекций проецируются в виде отрезков прямых линий.

12.3. Способ вспомогательных сфер

При построении линии пересечения поверхностей вращения не всегда удается подобрать секущие плоскости так, чтобы они пересекали поверхности по линиям, проекции которых были бы прямыми или окружностями. В некоторых таких случаях в качестве секущих поверхностей (посредников) целесообразно применять сферы. Этот способ основан на свойстве сферы пересекаться с любой поверхностью вращения, ось которой проходит через центр сферы по окружности.

Чтобы сфера одновременно пересекала две поверхности по окружностям, проецирующимся в прямые линии, необходимо выполнить следующие условия:

- 1) Оси поверхностей вращения должны пересекаться (точку пересечения принимают за центр вспомогательных концентрических сфер).
- 2) Оси поверхностей вращения должны располагаться параллельно какой-либо плоскости проекций.

На рис.12.8 показано построение линии пересечения двух конусов с пересекающимися осями, параллельными плоскости π_2 .

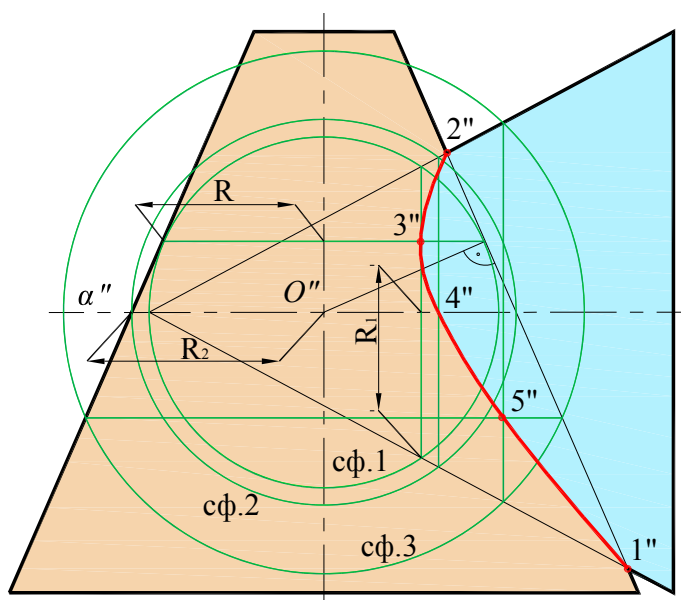


Рис. 12.8

Анализ графического условия показывает, что для решения задачи нельзя выбрать секущие плоскости, пересекающие поверхности по простым линиям (прямым или окружностям). Так горизонтальные или профильные плоскости пересекают один конус по окружностям, а другой в общем случае пересекают по гиперболам. Вместе с тем в задаче выполняются все условия, позволяющие применить способ сфер.

Линия пересечения – пространственная кривая – симметрична относительно плоскости, образованной пересекающимися осями конусов. Фронталь – проекции симметричных половин совпадают и образуют кривую 2-ого порядка. Точки 1 и 2, образующиеся в пересечении очерков конусов очевидны. Остальные точки определены с помощью вспомогательных сфер с центром в точке O'' - точке пересечения осей конусов.

С помощью сферы Сф.1 (наименьшей из всех возможных) построена самая левая точка фронтальной проекции линии пересечения. Эта сфера касается поверхности конуса с вертикальной осью по окружности радиуса R и пересекает другой конус по окружности радиуса R_1 . В пересечении этих окружностей получается фронтальная проекция $3''$.

Для определения фронтальной проекции точки 4, расположенной на ближайшей образующей конуса с горизонтальной осью, использована сфера Сф.2. Радиус этой сферы подобран так, чтобы окружность пересечения ее с поверхностью конуса с вертикальной осью лежала в плоскости α (α'').

С помощью сферы Сф.3 определена фронтальная проекция $5''$ точки 5. Радиус вспомогательных сфер не должен превышать отрезка $O''1''$, т.к. получаются точки вне проекций конусов.

Применение способа сфер позволяет построить линию пересечения поверхностей вращения, пользуясь только одной проекцией.

12.4. Примеры решения задач

Пример 1. Построить линию пересечения поверхности конуса вращения и сферы (рис. 12.9).

Решение. Линия пересечения заданных поверхностей представляет собой пространственную кривую линию, имеющую фронтальную плоскость симметрии δ (δ'), образованную пересекающимися осями конуса и сферы.

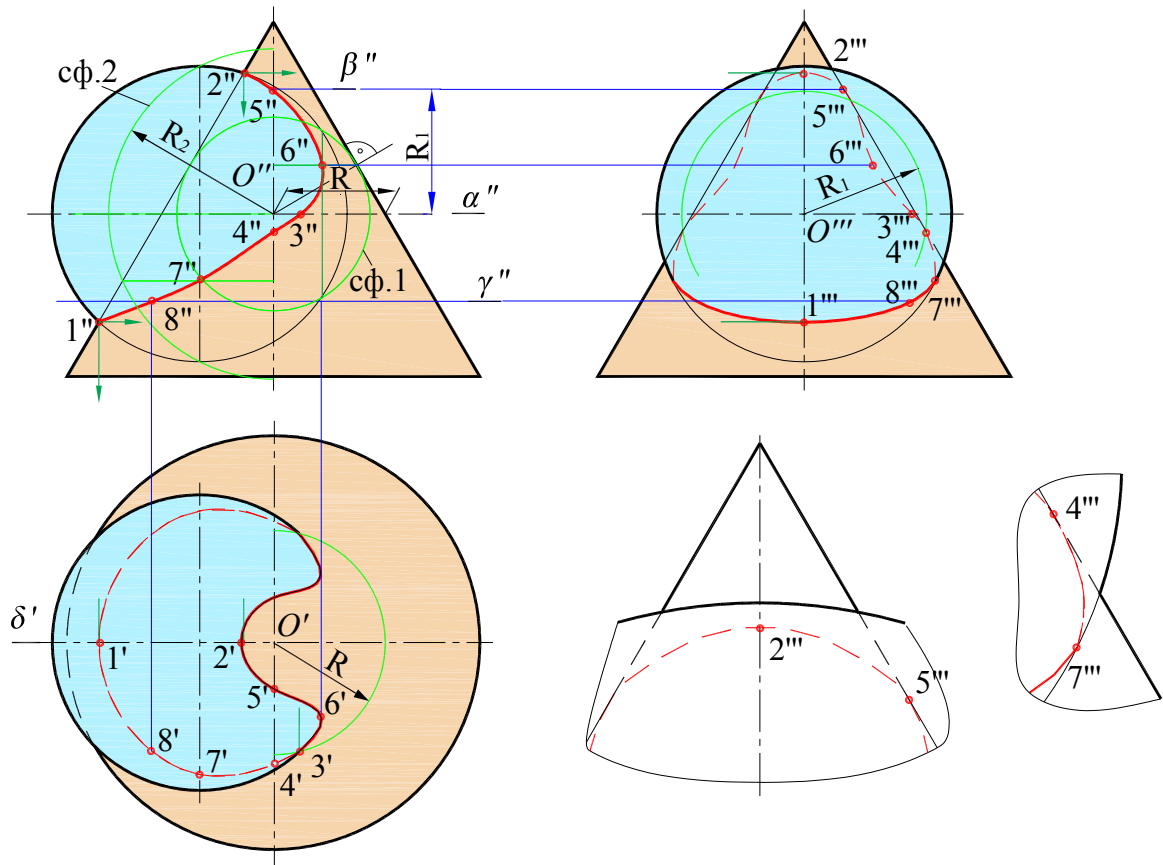


Рис.12.9

Ее горизонтальная проекция симметрична относительно δ' , а фронтальные проекции симметричных половин совпадают (обозначение точек приведено лишь на одной симметричной половине кривой пересечения).

Точки 1 и 2, расположенные на очерках фронтальных проекций конуса и сферы, очевидны и определяются без дополнительных построений.

Точка 3 на экваторе сферы построена с помощью горизонтальной плоскости α (α''), пересекающей конус по окружности радиуса R . В пересечении горизонтальных проекций этой окружности и экватора находится горизонтальная проекция $3'$ точки 3 и профильную $3'''$ проекции точки 3 определим с помощью линии связи. Точка 3 на горизонтальной проекции разделяет кривую на видимую и невидимую части.

Точки 4 и 5, расположенные на очерковых образующих фронтальных проекций конуса, определим с помощью профильной плоскости β (β''), пересекающей сферу по окружности радиуса R_1 . В пересечении профильных проекций этой окружности и очерковых образующих конуса находятся профильные проекции $4'''$ и $5'''$ точек 4 и 5.

С помощью линий связи определим фронтальные и горизонтальные проекции этих точек.

Так как пересекающиеся оси конуса и сферы образуют плоскость, параллельную плоскости π_2 , то наряду с секущими плоскостями можно применять и секущие сферы с центром в точке O . Так для построения крайней правой точки кривой использована вспомогательная сфера Сф.1, вписанная в конус (т.е. имеющая наименьший радиус). В пересечении фронтальной проекции окружности касания и фронтальной проекции окружности пересечения со сферой находится фронтальная проекция $6''$ точки 6.

Подобным образом определена точка 7, расположенная на профильном меридиане сферы. Радиус R_2 этой сферы взят таким, чтобы она пересекала сферу по профильно-

му меридиану. Точка 7 на профильной проекции разделяет кривую на видимую и невидимую части.

Все построенные выше точки являются опорными.

Промежуточная точка 8 построена с помощью горизонтальной плоскости γ (γ'').

На рис. 12.9 также изображены в масштабе увеличения фрагменты профильной проекции.

Пример 2. Построить линию пересечения поверхности тора с цилиндром вращения (рис.12.10).

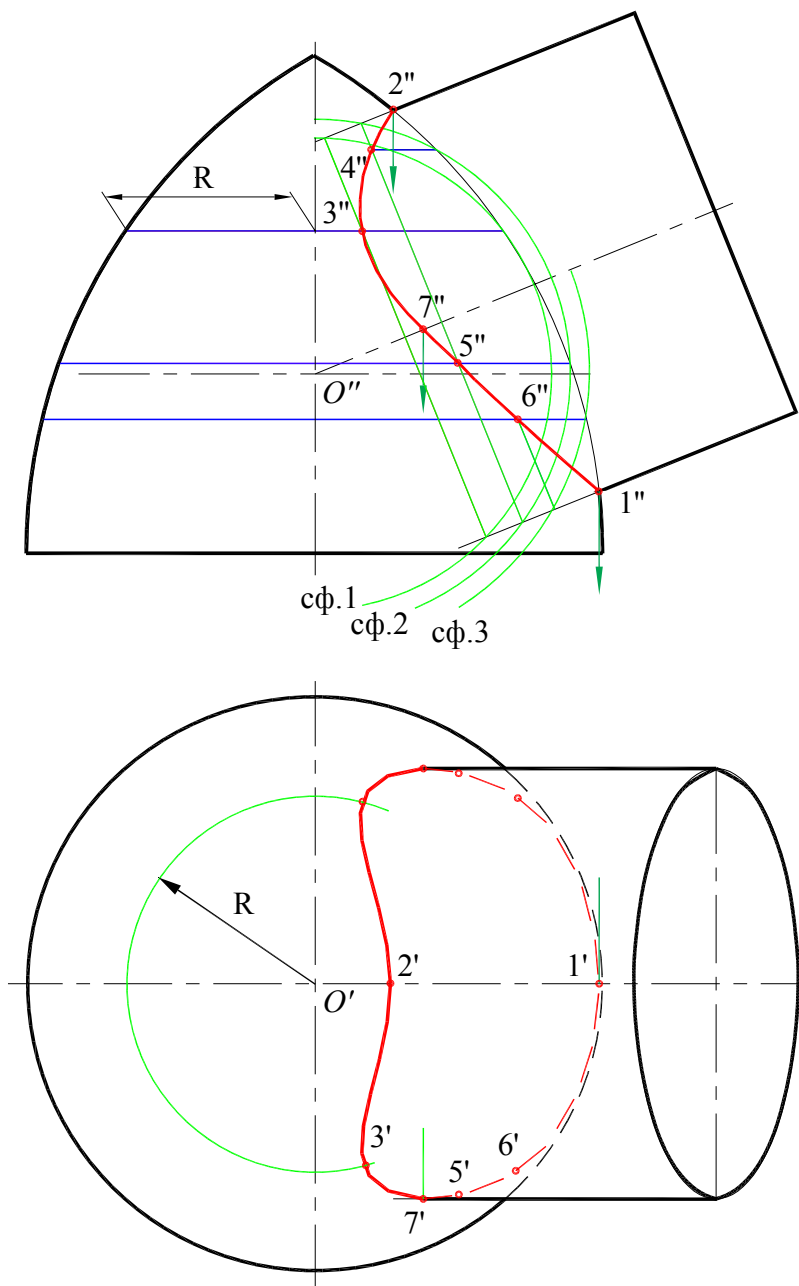


Рис. 12. 10

Решение. Анализ графического условия задачи показывает, что применение способа вспомогательных секущих плоскостей в данном примере нерационально, т.к. нельзя в общем случае подобрать секущие плоскости так, чтобы они пересекали заданные поверхности по простым линиям (прямым или окружностям).

Так как оси тора или цилиндра пересекаются и параллельны фронтальной плоскости проекций, то для решения задачи применим способ вспомогательных концентрических сфер с центром в точке O . Кривая линия пересечения симметрична относительно плоскости, образованной пересекающимися осями заданных поверхностей, а фронтальные проекции симметричных половин совпадают.

Точки 1 и 2, расположенные на пересечении очерков фронтальных проекций тора и цилиндра, очевидны.

С помощью сферы Сф.1, вписанной в тор (т.е. имеющий наименьший радиус), построена фронтальная проекция точки 3 – левой точки кривой пересечения. Вспомогательная сфера Сф.1 касается поверхности тора по окружности радиуса R и пересекает поверхность цилиндра по окружности, определяемой точками пересечения образующих цилиндра сферой. В пересечении этих окружностей получается фронтальная проекция точки 3 (обозначение точек приведено лишь на симметричной половине кривой). С помощью вспомогательных сфер Сф.2 и Сф.3 построены фронтальные проекции точек 4, 5, 6.

Полученные фронтальные проекции точек соединяем плавной кривой и отмечаем точку $7''$ пересечения ее с осью цилиндра.

Горизонтальные проекции точек кривой пересечения построены из условия принадлежности их соответствующим параллелям (окружностям) тора. Так точка 3 находится на окружности радиуса R .

Горизонтальная проекция $7'$, расположенной на очерковой образующей цилиндра, разделяет проекцию кривой на видимую и невидимую части.

Эллипс – горизонтальная проекция основания цилиндра – построен по двум ее осям с помощью вспомогательных окружностей.

12.5. Вопросы для контроля

1. В чем сущность общего способа пересечения одной поверхности другою?
2. Как подбирают положение вспомогательных секущих плоскостей при пересечении поверхностей вращения?
3. Какие точки пересечения называются опорными (характерными)?
4. По каким линиям пересекаются между собой: а) цилиндры с параллельными осями; б) конусы с общей вершиной?
5. Какие линии получаются при взаимном пересечении двух поверхностей вращения, описанных вокруг общей для них сферы или вписанных в сферу?
6. По каким линиям пересекаются между собой соосные поверхности вращения?
7. Какие условия должны быть выполнены для применения способа вспомогательных концентрических сфер?

Глава 13. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

13.1 Общие сведения

АксонOMETРИЧЕСКАЯ проекция, или аксонOMETрия, дает наглядное изображение предмета на одной плоскости. Слово аксонOMETрия означает осеизмерение.

Способ аксонOMETрического проецирования состоит в том, что данную фигуру вместе с осями прямоугольных координат, к которым она отнесена в пространстве, параллельно проецируют на некоторую плоскость, принятую за плоскость аксонOMETрических проекций (ее называют также картинной плоскостью). При различном взаимном расположении осей координат в пространстве и плоскости аксонOMETрической проекции, а также при разном направлении проецирования можно получить множество аксонOMETрических проекций, отличающихся одна от другой направлением аксонOMETрических осей и масштабами по ним.

В конструкторской документации аксонOMETрические проекции стандартизованы в ГОСТ 2.317-69. Он предусматривает три частных вида аксонOMETрических проекций:

- ортогональная изометрия,
- ортогональная диметрия,
- фронтальная (косоугольная) диметрия.

Рассмотрим, как будут направлены аксонOMETрические оси, а также как будет осуществляться масштабирование по ним в случае направления проецирования, перпендикулярного аксонOMETрической плоскости проекций, т.е. для прямоугольной аксонOMETрической проекции.

На рис. 13.1 изображена пространственная система ортогональных координат Ox , Oy , Oz , а также единичные отрезки e на осях координат и их проекции в направлении S на некоторую (картинную) плоскость ε , являющуюся аксонOMETрической плоскостью проекций.

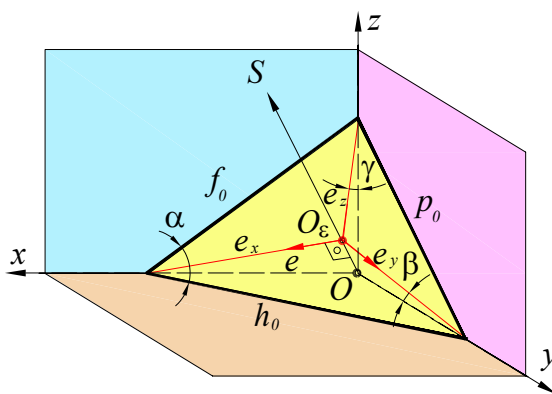


Рис. 13.1

Проекции e_x , e_y , e_z отрезка e на соответствующих аксонOMETрических осях Oe_x , Oe_y , Oe_z в общем случае не равны отрезку e и не равны между собой. Эти проекции являются единицами измерения по аксонOMETрическим осям – аксонOMETрическими масштабами.

Отношения: $e_x / e = k$; $e_y / e = m$; $e_z / e = n$ называют коэффициентами искажения по аксонOMETрическим осям.

В частном случае положение картинной плоскости можно выбрать таким, что аксонOMETрические единицы – отрезки e_x , e_y , e_z – будут равны между собой или будет равна между собой пара этих отрезков.

При $e_x = e_y = e_z$ ($k = m = n$) аксонометрическую проекцию называют изометрической, искажения по всем осям в ней одинаковы.

При равенстве аксонометрических единиц по двум осям, обычно при $e_x = e_y \neq e_z$ ($k = m \neq n$), имеем диметрическую проекцию.

Если $e_x \neq e_y \neq e_z$ ($k \neq m \neq n$), то проекцию называют триметрической.

Отрезки $O_\varepsilon x$, $O_\varepsilon y$, $O_\varepsilon z$ являются аксонометрическими проекциями отрезков Ox , Oy , Oz . Обозначим углы между осями координат и их проекциями на плоскости ε через α , β , γ .

Тогда $O_\varepsilon x / Ox = \cos\alpha$; $O_\varepsilon y / Oy = \cos\beta$; $O_\varepsilon z / Oz = \cos\gamma$. Эти отношения являются коэффициентами искажения, т.е. $k = \cos\alpha$; $m = \cos\beta$; $n = \cos\gamma$. Поскольку треугольники $O_\varepsilon xO$, $O_\varepsilon yO$ и $O_\varepsilon zO$ прямоугольные, то сумма квадратов направляющих косинусов равна единице:

$$\cos^2(\pi/2-\alpha) + \cos^2(\pi/2-\beta) + \cos^2(\pi/2-\gamma) = 1.$$

Отсюда $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$, или $1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta + 1 - \cos^2\gamma = 1$, следовательно, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

Таким образом: $k^2 + m^2 + n^2 = 2$, т.е. сумма квадратов коэффициентов искажения равна 2.

13.2 Ортогональная изометрическая проекция

Ортогональная (прямоугольная) изометрическая проекция образуется при прямоугольном проецировании предмета и связанных с ним координатных осей на плоскость аксонометрических проекций, одинаково наклоненную к каждой координатной оси.

При таком проецировании все три коэффициента искажений будут равны между собой: $k = m = n$; $k^2 + m^2 + n^2 = 2$, тогда $3k^2 = 2$,

откуда $k = \sqrt{2/3} \approx 0,82$. Углы между аксонометрическими осями будут равны 120° .

При построении изометрической проекции размеры предмета, откладываемые по аксонометрическим осям, необходимо умножать на 0,82. Поскольку такой перерасчет размеров неудобен, изометрическую проекцию для упрощения выполняют без уменьшения размеров (искажения) по осям x , y , z , т.е. принимают приведенный коэффициент искажения равным единице. При этом увеличение изображения предмета составляет 22% ($1/0,82 = 1,22$). Каждый отрезок, направленный по осям x , y , z или параллельно им, сохраняет свою величину.

Расположение осей изометрической проекции показано на рис. 13.2, а. Аксонометрические оси изометрической проекции, а также отрезки прямых, параллельные этим осям, удобно строить с помощью угольника с углами 30° и 60° .

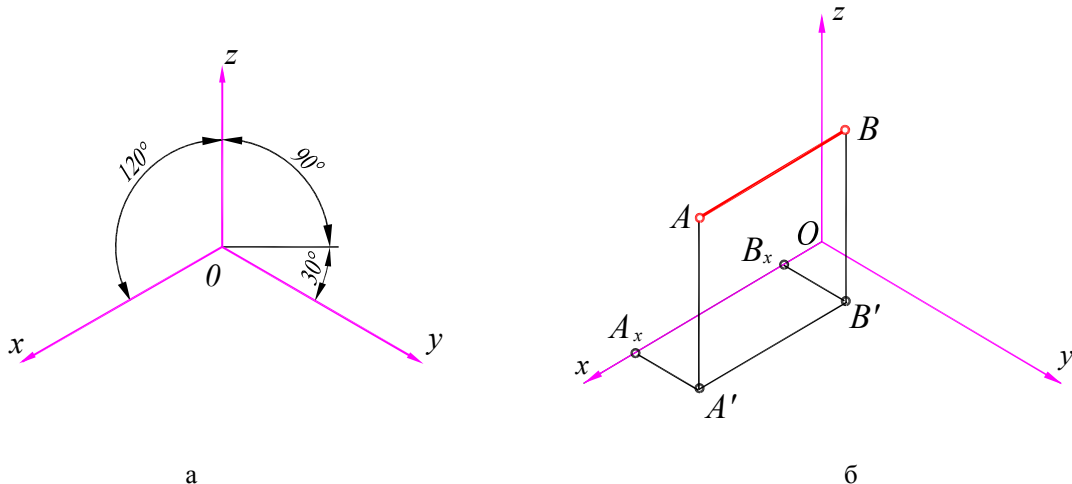


Рис. 13.2

Все отрезки прямых, которые были параллельны осям x , y и z на комплексном чертеже, останутся параллельными соответствующим осям в изометрической проекции (рис. 13.2, б).

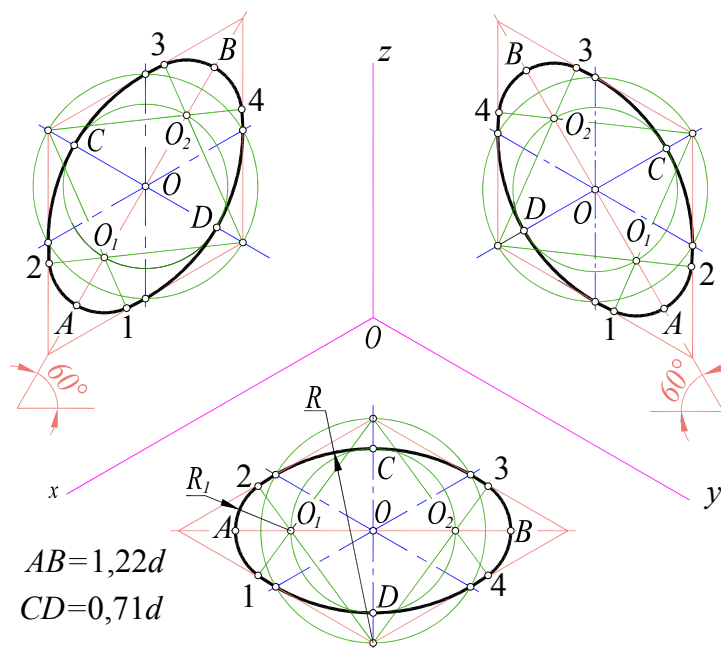


Рис. 13.3

На рис. 13.3 показано построение эллипсов, в которые проецируются окружности, лежащие в плоскостях проекций или в плоскостях, параллельных им. Размер большой оси эллипса равен $1,22d$, малой – $0,71d$, где d – диаметр окружности. В учебных чертежах рекомендуется вместо эллипсов применять овалы, очерченные дугами окружностей. На этом же рисунке показано расположение осей овалов и один из способов построения овалов в прямоугольной изометрической проекции.

На рис. 13.4 приведен пример изометрической проекции цилиндрической детали, усеченной несколькими плоскостями.

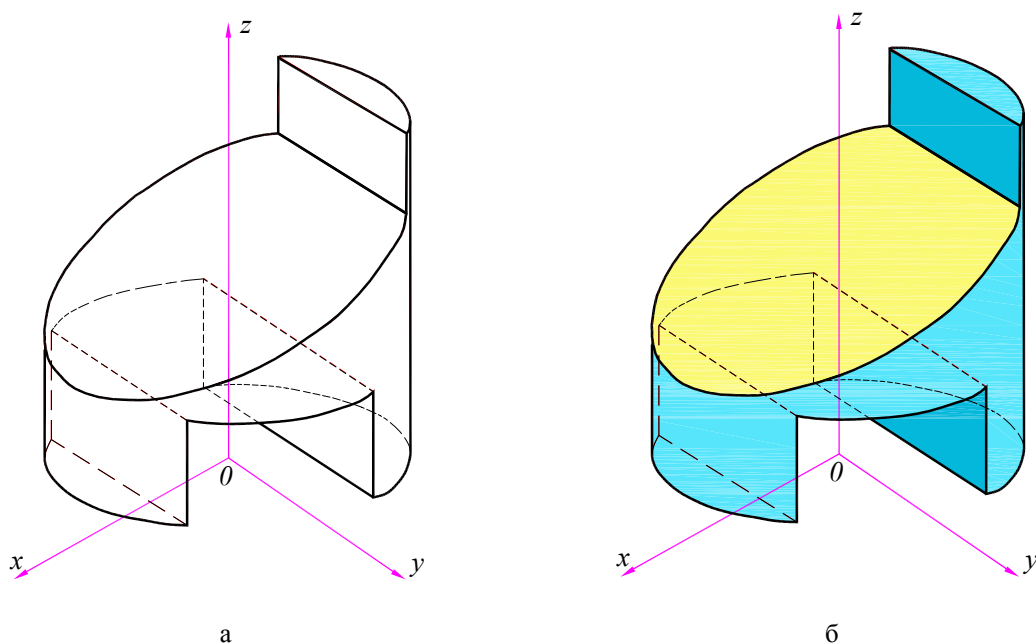


Рис. 13.4

13.3. Ортогональная диметрическая проекция

Ортогональная диметрическая проекция образуется при прямоугольном проецировании предмета и связанных с ним координатных осей на плоскость аксонометрических проекций, одинаково наклоненную к двум координатным осям.

Коэффициенты искажений в диметрической проекции имеют следующие значения: $k = n$; $m = 1/2k$. Тогда $2k^2 + 1/4k^2 = 2$; $k = \sqrt{8/9} \approx 0,94$; $m \approx 0,47$.

В целях упрощения построений в соответствии с ГОСТ 2.317 – 69, как и в изометрических проекциях, приведенные коэффициенты искажений по осям x и z принимают равным единице; а по оси y коэффициент искажения равен 0,5. Следовательно, по осям x и z или параллельно им все размеры откладывают в натуральную величину, а по оси y размеры уменьшают вдвое. Увеличение в этом случае составляет 6% (выражается числом $1,06 = 1/0,94$).

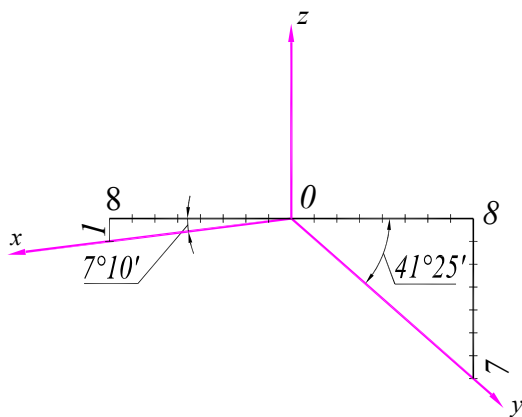


Рис. 13.5

Расположение осей x и y в диметрической проекции, полученное расчетным путем, показано на рис. 13.5. Ось x наклонена по отношению к горизонтальной линии под углом $7^\circ 10'$, а ось y – под углом $41^\circ 25'$.

С достаточной для практических целей точностью в прямоугольной диметрии оси x и y можно строить по тангенсам углов:

$$\operatorname{tg} 7^\circ 10' \approx 1/8; \quad \operatorname{tg} 41^\circ 25' \approx 7/8.$$

Продолжение оси y за центр O_x (рис. 13.1) является биссектрисой угла xO_xz , что также может быть использовано для построения оси y .

В диметрической проекции изображения геометрических тел строят так же, как в изометрической, с учетом коэффициента искажений по оси y , вдоль которой размеры уменьшаются вдвое. Все отрезки прямых, которые были параллельны осям x , y и z на комплексном чертеже, останутся параллельными соответствующим осям в диметрической проекции. На рис. 13.6 приведены окружности в диметрической проекции с указанием соответствующих значений величин осей эллипсов.

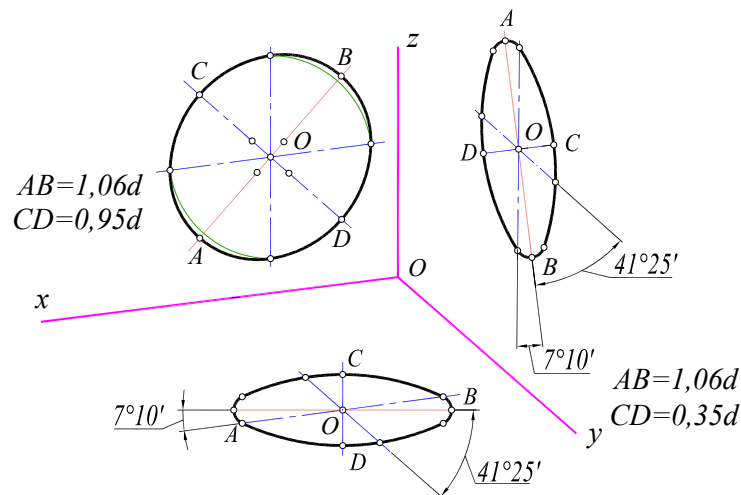


Рис. 13.6

Большая ось AB эллипсов во всех случаях равно $1,06d$, где d – диаметр окружности. Малые оси CD эллипсов, расположенных на плоскостях, параллельных плоскостям проекций π_1 и π_3 , равны $0,35d$, а на плоскости, параллельной фронтальной плоскости π_2 , – $0,95d$.

13.4. Косоугольная фронтальная диметрия

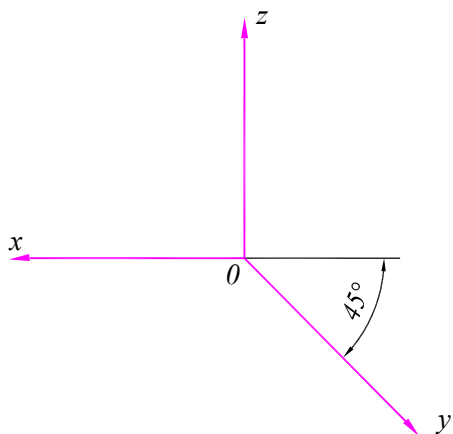


Рис. 13.7

На практике часто бывает полезным построение такой аксонометрической проекции, в которой хотя бы одна из координатных плоскостей не искажалась. Очевидно, что для выполнения этого условия плоскость проекций должна быть параллельна одной из координатных плоскостей. При этом нельзя пользоваться ортогональным проецированием, так как координатная ось, перпендикулярная указанной координатной плоскости, изобразится точкой и изображение будет лишено наглядности. Поэтому пользуются косоугольным проецированием, при котором направление оси y выбирают так, чтобы углы между ней и осями x и z равнялись бы 135° (рис. 13.7), а показатель искажения $0,5$.

Такую косоугольную аксонометрию называют *фронтальной диметрией*. Коэффициенты искажений по осям x и z равны 1 , а по оси y коэффициент искажений равен $0,5$.

На рис. 13.8 показаны проекции окружностей, расположенных в плоскостях, параллельных координатным.

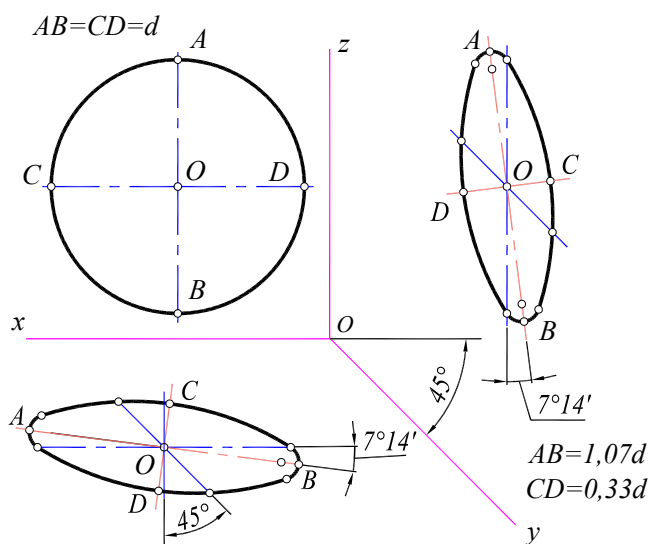


Рис. 13.8

Окружность, расположенная в плоскости xOz , проецируется на плоскость проекций без искажения, а окружности, расположенные в плоскостях, параллельных координатным плоскостям xOy и xOz , спроецируются в виде эллипсов. Эти эллипсы обычно строят по сопряженным диаметрам. Большая ось эллипсов равна $1,07d$, а малая ось – $0,33d$ (d – диаметр окружности).

13.5. Примеры решения задач к главе 13

Пример 1. Построить изометрическую проекцию точки A , представленной ортогональными проекциями A' и A'' (рис. 13.9, а).

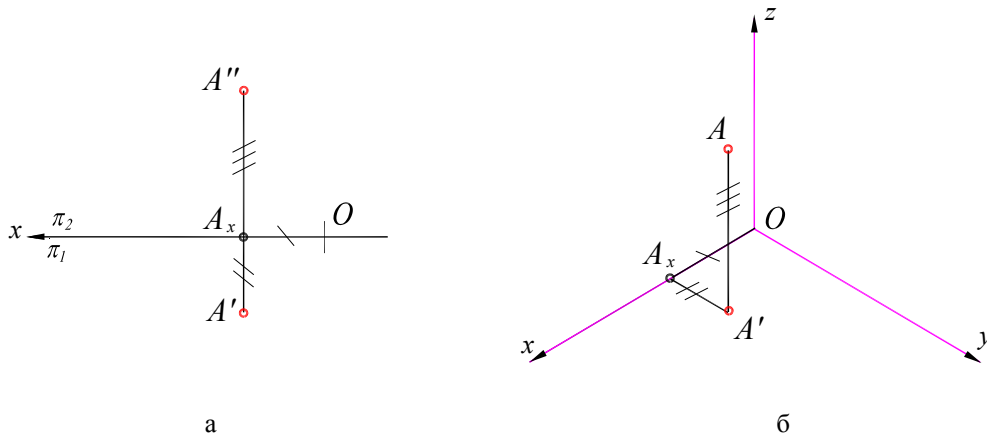


Рис. 13.9

Решение задачи приведено на рис. 13.9, б. Если даны ортогональные проекции точки, то это значит, что известны все три координаты x , y и z , позволяющие построить изометрическую проекцию. Построение начинают с изометрических осей, которые проводят под углом 120° друг к другу. Далее от начала координат O по оси x откладывают отрезок OA_x . Из полученной точки A_x проводят прямую, параллельную оси y , и на ней откладывают отрезок A_xA' . Из точки A' проводят прямую, параллельную оси z , на которой откладывают отрезок, равный координате z точки $A - A_xA''$. Полученная точка A – искомая изометрическая проекция точки A .

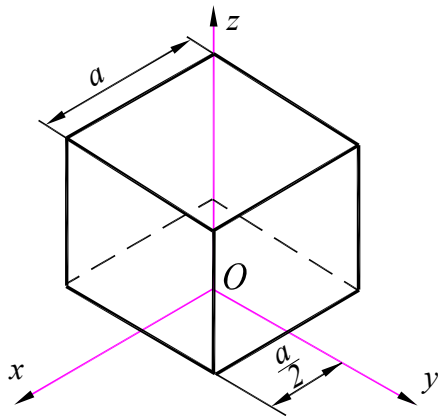


Рис. 13.10

Пример 2. Построить изометрическую проекцию куба.

Решение задачи представлено на рис. 13.10. Центр нижнего основания куба размещен в точке O пересечения изометрических осей. В направлении осей x , y откладываются расстояния, равные половине длины стороны куба $a/2$. Из полученных точек проводятся стороны основания куба, равные полной длине a . Линии проводят параллельно осям. Затем из точки O вдоль оси z вверх откладывается расстояние a и строится верхнее основание куба. Вершины нижнего и верхнего оснований соединяют вертикальными линиями.

Пример 3. Построить изометрическую проекцию правильного шестиугольника (рис. 13.11).

Решение. На рисунке 13.11, а за оси координат приняты оси симметрии шестиугольника – x и y . Для построения изометрической проекции от начала аксонометрических осей O по оси x отложены отрезки ΔX (влево и вправо). Коэффициенты искажений по всем осям приняты равными единице. Замечая, что оставшиеся вершины симметричны относительно осей координат, откладываем вдоль оси y отрезки ΔY (вверх и вниз).

Затем через точки 1 и 2 проводят отрезки, параллельные оси x . Длина каждого отрезка равна удвоенной величине X_6 , которая замеряется по исходному шестиугольнику. Полученные точки A, B, C, D, E, F соединяют отрезками прямых линий.

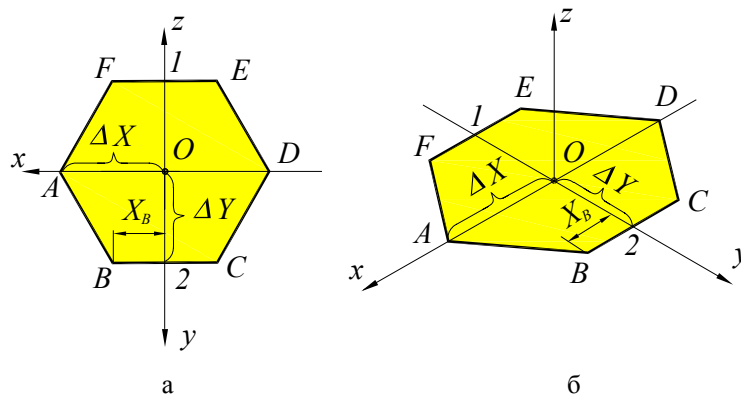


Рис. 13.11

Пример 4. По заданным прямоугольным проекциям построить изометрическую проекцию цилиндра и точки M , лежащей на его боковой поверхности. Начало координат находится в центре нижнего основания (рис. 13.12).

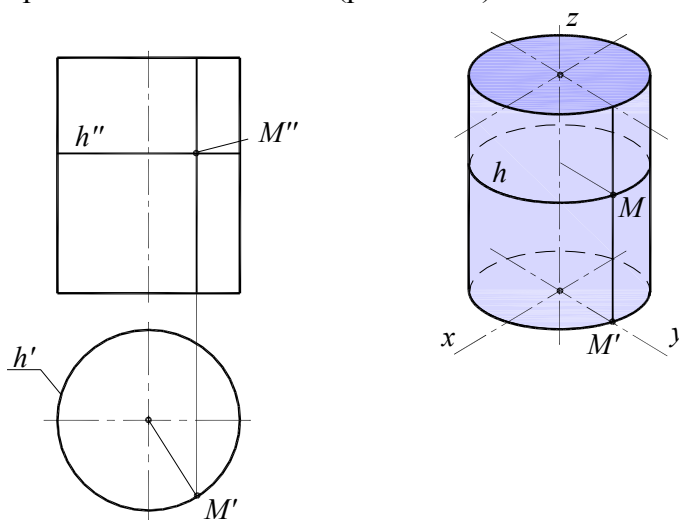


Рис. 13.12

Решение. Проводим изометрические оси x , y и строим эллипс нижнего основания (расчет длин осей и порядок построения эллипсов приведены на рис. 13.3). Затем определяем центр верхнего основания цилиндра и строим второй эллипс. Оба эллипса соединяем вертикальными образующими. Для построения точки M отмечаем точку M' на нижнем основании цилиндра (например, на пересечении с осью y), затем на заданной высоте проводим линию h на боковой поверхности цилиндра (строим эллипс) и на пересечении с вертикальной образующей, проходящей из точки M' , отмечаем точку M .

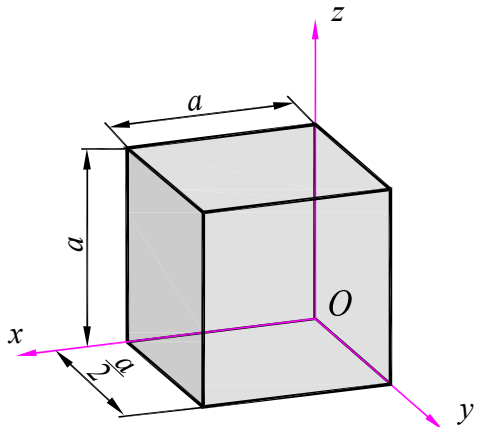


Рис. 13.13

Пример 5. Построить прямоугольную диметрическую проекцию куба со стороной, равной a . Решение задачи представлено на рис. 13.13. Расположение осей прямоугольной диметрической проекции приведено на рис. 13.4. Нижнее основание куба размещено в плоскости xOy . В направлении оси x откладывается расстояние, равное полной длине куба a . В направлении оси y откладывается расстояние, равное половине длины стороны куба $a/2$. Из полученных точек проводятся стороны основания куба параллельно осям x и y .

Затем из точки O вдоль оси z вверх откладывается расстояние a и строится верхнее основание куба аналогично нижнему. Вершины нижнего и верхнего оснований соединяют вертикальными линиями.

Пример 6. Построить фронтальную косоугольную диметрическую проекцию шестигранника. Решение задачи представлено на рис. 13.14.

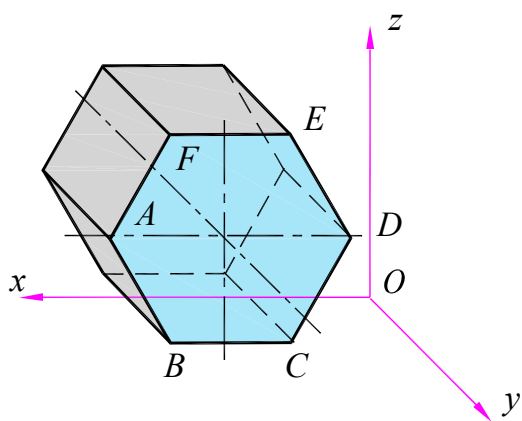


Рис. 13.14

Расположение осей косоугольной диметрической проекции приведено на рис. 13.7. Разместим основание шестиугольной призмы A, B, C, D, E, F параллельно плоскости xOz . В этом случае шестиугольник проецируется на аксонометрическую плоскость проекций без искажений. Затем из вершин шестиугольника A, B, C, D, E, F проводим прямые, параллельные оси y . На этих прямых откладываем отрезки, равные половине высоты призмы. Соединив полученные точки, получаем второе основание призмы. В заключении определяем видимые и невидимые линии призмы. Невидимые линии изображаются штриховыми линиями.

13.6. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое аксонометрия?
2. Как получается аксонометрический чертёж?
3. Что такое показатель (коэффициент) искажения?
4. Какие виды аксонометрии вы знаете?
5. Как располагаются оси прямоугольной изометрии?
6. Чему равны натуральные и приведенные показатели искажения в прямоугольной изометрии?
7. Каков масштаб изображения в стандартной прямоугольной изометрии?
8. Постройте в прямоугольной диметрии шестигранную призму.