УДК 539.357

С. С. Макаревич, профессор (БГТУ);
А. В. Дорожко, кандидат технических наук, доцент (БГТУ)

ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ВНЕЦЕНТРЕННОМ РАСТЯЖЕНИИ

Предложена методика определения остаточных напряжений при упруго-пластическом внецентренном растяжении. Получены зависимости, позволяющие определить смещение нейтральной линии, величину растягивающей силы и остаточные напряжения, соответствующие заданным границам пластических деформаций

The method of determination of elasto-plastic tension stresses at non-central tension is offered. The dependencies for determining the displacement of the neutral line, the value of tensile strength and residual stress corresponding to the given boundaries of plastic deformation

Введение. В настоящее время при проектировании и изготовлении деталей машин и элементов конструкций приходится довольно часто рассматривать их деформации за пределом упругости. Такие расчеты необходимы при разработке технологических операций по повышению несущей способности деталей конструкций методами предварительного пластического деформирования. В литературе достаточно полно освещены вопросы упруго-пластического деформирования при плоском изгибе, но недостаточно изучено упруго-пластическое внецентренное растяжение.

Основная часть. Как известно [1], при внецентренном растяжении напряжение в произвольном сечении стержня (рисунок, *а*) определяется по формуле

$$\sigma = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{x_F x}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_x^2}\right), \qquad (1)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня; x_F, y_F – координаты точки приложения силы F; i_x, i_y – главные центральные радиусы инерции; x, y – координаты точки, в которой определяется напряжение.

Приравняв напряжение к нулю, получим уравнение нейтральной линии, т. е. геометрического места точек, где нет напряжений:

$$1 + \frac{x_F x}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_x^2} = 0.$$

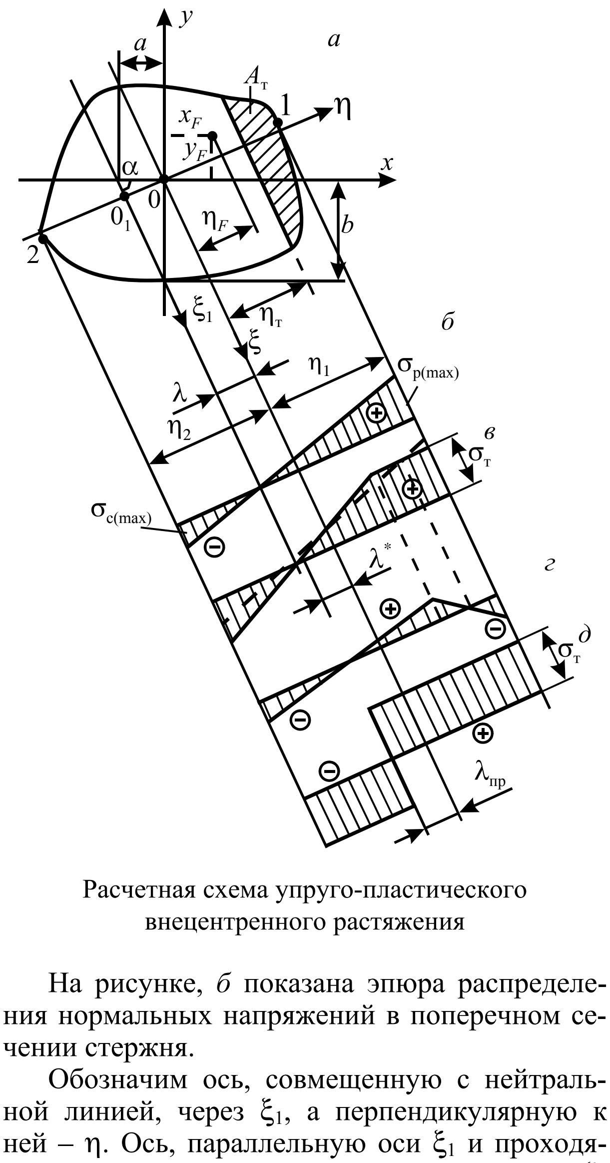
Это уравнение прямой, не проходящей через начало координат. Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях y, x, можно рассчитать из отношений:

$$a = -\frac{i_y^2}{x_F}; \; b = -\frac{i_x^2}{y_F}.$$

Запишем тангенс угла наклона нейтральной линии к оси:

$$\text{tg}\alpha = -\frac{x_F}{y_F}\frac{I_x}{I_y}, \qquad (2)$$

где I_x, I_y – главные центральные моменты инерции поперечного сечения стержня.



Расчетная схема упруго-пластического внецентренного растяжения

На рисунке, *б* показана эпюра распределения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня.

Обозначим ось, совмещенную с нейтральной линией, через ξ_1, а перпендикулярную к ней – η. Ось, параллельную оси ξ_1 и проходящую через центр тяжести сечения, обозначим ξ. Отрезок, отсекаемый нейтральной линией на оси η в системе координат $\xi 0 \eta$,

$$\lambda = -a \sin\alpha.$$

Учитывая линейное распределение напряжений, их можно определить через изгибающий момент относительно нейтральной линии:

$$\sigma = \frac{M_{\xi_1}(\eta - \lambda)}{I_{\xi_1}}. \qquad (3)$$

В формуле (3)

$$M_{\xi_1} = F(\eta_F - \lambda);\ \ \eta_F = y_F \cos\alpha - x_F \sin\alpha;$$
$$I_{\xi_1} = I_\xi + \lambda^2 A;\ \ I_\xi = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha,$$

где η – ордината точки, в которой определяется напряжение, в системе координат $\xi 0 \eta$, угол α определяется из уравнения (2).

Формула (3) дает возможность достаточно просто определять напряжения при внецентренном растяжении в случае наличия упруго-пластических деформаций.

При увеличении внецентренно приложенной растягивающей силы F напряжения будут расти и при некотором значении $F = F_т$ в точке 1, наиболее удаленной от нейтральной линии, они достигнут предела текучести $\sigma_т$. При дальнейшем увеличении силы зона пластических деформаций будет распространяться вглубь сечения. Если стержень выполнен из материала, схематизированная диаграмма которого может быть представлена диаграммой растяжения идеального упруго-пластического тела, то напряжения в зоне пластических деформаций будут оставаться постоянными и равными пределу текучести. При некоторой силе F^* пластические деформации распространятся до границы $\eta_т$ и эпюра напряжений примет вид, показанный на рисунке, *в*. Ввиду наличия пластических деформаций нейтральная линия, а следовательно, и ось ξ_1, будет смещаться, т. е. будет меняться величина λ. Для ее определения запишем уравнения равновесия отсеченной части стержня:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{A_y} \sigma dA + \int_{A_т} \sigma_т dA = F^*, \\ &\int_{A_y} \sigma\left(\eta - \lambda^*\right) dA + \int_{A_т} \sigma_т\left(\eta - \lambda^*\right) dA = \\ &= F^*\left(\eta_F - \lambda^*\right), \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где A_y, $A_т$ – площади поперечного сечения соответственно с упругими и пластическими деформациями.

Напряжение в упругой области может быть определено через радиус кривизны ρ нейтрального слоя:

$$\sigma = \frac{\eta - \lambda^*}{\rho} E, \qquad (5)$$

где E – модуль продольной упругости материала стержня.

С учетом (5) систему уравнений (4) можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{E}{\rho}\int_{A_y}\left(\eta - \lambda^*\right) dA + \sigma_т A_т = F^*, \\ &\frac{E}{\rho}\int_{A_y}\left(\eta - \lambda^*\right) dA + \int_{A_т} \sigma_т\left(\eta - \lambda^*\right) dA = \\ &= F^*\left(\eta_F - \lambda^*\right). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Формула (5) справедлива до границы $\eta_т$, где напряжение равно $\sigma_т$:

$$\sigma_т = \frac{\eta_т - \lambda^*}{\rho} E,$$

откуда

$$\frac{E}{\rho} = \frac{\sigma_т}{\eta_т - \lambda^*}. \qquad (7)$$

Подставив (7) и (6) и произведя интегрирование, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sigma_т}{\eta_т - \lambda^*}\left(S_{\xi y} - \lambda^* A_y\right) + \sigma_т A_т = F^*, \\ &\frac{\sigma_т}{\eta_т - \lambda^*}\left(I_{\xi y} - 2\lambda^* S_{\xi y} + \lambda^{*2} A_y\right) + \\ &+ \sigma_т\left(S_{\xi т} - \lambda^* A_т\right) = F^*\left(\eta_F - \lambda^*\right), \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

где $I_{\xi y}$ – момент инерции относительно оси ξ площади сечения с упругими деформациями; $S_{\xi y}$, $S_{\xi т}$ – статические моменты относительно оси ξ площади сечения соответственно с упругими и пластическими деформациями.

Задавшись границей текучести $\eta_т$, можно определить все геометрические характеристики поперечного сечения стержня, входящие в систему уравнений (8). После этого из системы уравнений (8) можно определить положение нейтральной линии, т. е. λ^*:

$$\lambda^* = -\frac{I_{\xi y} + \eta_т S_{\xi y} - \eta_F S_{\xi y} - \eta_т \eta_F A_т}{\eta_F A}. \qquad (9)$$

При известном λ^* из первого уравнения системы (8) определиться сила F^*, а следовательно, можно будет определить напряжение в любой точке сечения.

Если при силе F^* стержень разгрузить, то напряжения при разгрузке будут изменяться по линейной зависимости (3), как при упругих деформациях. Подставив в уравнение (3) вместо $M_{\xi 1}$ значение $M_{\xi 1} = F^*(\eta_F - \lambda^*)$, можно определить напряжения разгрузки в любой точке сечения. Эпюра напряжений разгрузки показана на рисунке, *в* пунктирной линией. При разгрузке в стержне появятся остаточные напряжения, которые определяются как разность между напряжениями, возникающими при нагружении, и напряжениями разгрузки. Эпюра остаточных напряжений показана на рисунке, *г*. Если стержень с остаточными напряжениями снова нагрузить силой $F_т < F < F^*$, приложенной в той же точке, то возникающие при этом напряжения накладываются на остаточные напряжения и пластические деформации не возникают. Это явление улучшения упругой способности стержня путем предварительного нагружения и создания подходящих напряжений можно использовать на практике, уменьшив тем самым расход материала на изготовление конструкции.

При достаточно большой силе пластические деформации распространяться по всему сечению стержня. Такое состояние называют предельным. В этом случае эпюра напряжений будет иметь вид, показанный на рисунке, *д*.

Положение нейтральной оси ξ_1 в определенном состоянии и величина предельной растягивающей силы $F_{пр}$ устанавливаются из условия равновесия:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{A_р} \sigma_т dA - \int_{A_с} \sigma_т dA = F_{пр}, \\ &\int_{A_р} \sigma_т \left(\eta - \lambda_{пр}\right) dA - \int_{A_с} \sigma_т \left(\eta - \lambda_{пр}\right) dA = \\ &= F_{пр}\left(\eta_F - \lambda_{пр}\right). \end{aligned}\right\}$$

Учитывая значения интегралов, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_т \left(A_р - A_с\right) = F_{пр}, \\ &\sigma_т \left(S_{\xi р} - S_{\xi с} - \lambda_{пр}\left(A_р - A_с\right)\right) = \\ &= F_{пр}\left(\eta_F - \lambda_{пр}\right), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где $A_р$, $A_с$ – площади поперечного сечения соответственно в растянутой и сжатой зонах, $S_{\xi р}$, $S_{\xi с}$ – статические моменты относительно оси ξ площади сечения соответственно с растягивающими и сжимающими напряжениями.

Исключая из уравнений (10) $F_{пр}$, получим:

$$S_{\xi р} - S_{\xi с} = \left(A_р - A_с\right)\eta_F. \tag{11}$$

Нейтральная линия, которая параллельна оси ξ, в определенном состоянии должна разделить сечение на две части так, чтобы соблюдалось условие (11).

Если при внецентренном растяжении возникают только упругие деформации, то в случаях, когда сила приложена в пределах ядра сечения, в поперечном сечении стержня возникают только растягивающие напряжения. Если же точка приложения силы выходит за пределы ядра сечения, то в поперечном сечении стержня будут возникать как растягивающие, так и сжимающие напряжения.

Что касается предельного состояния, т. е. когда пластические деформации распространяются по всему сечению, то при любом эксцентриситете растягивающей силы в поперечном сечении стержня будут в наличии растягивающие и сжимающие напряжения. Для доказательства этого положения запишем для предельного состояния сумму моментов относительно оси ξ^*, проходящей через точку приложения силы и параллельной нейтральной линии:

$$\sigma_т(S_{\xi^* р} - S_{\xi^* с}) = 0, \tag{12}$$

где $S_{\xi^* р}$, $S_{\xi^* с}$ – статические моменты относительно оси ξ площади сечения соответственно с растягивающими и сжимающими напряжениями.

Если предположить, что сжимающие напряжения отсутствуют, то $S_{\xi^*} = 0$, и из уравнения (12) $S_{\xi^* р} = S_{\xi^*} = 0$, где S_{ξ^*} – статический момент относительно оси ξ^* площади всего сечения, т. е.

$$S_{\xi^*} = A\eta_F = 0. \tag{13}$$

Выводы. Условие (13) может быть выполнено только при $\eta_F = 0$. Следовательно, в предельном состоянии напряжения $\sigma_т$ могут быть одного знака только при $\eta_F = 0$, т. е. когда сила приложена в центре тяжести поперечного сечения стержня.

Литература

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, 1999. – 540 с.

Поступила 15.02.2013