УДК 51-7+517.925

В.А. Савва, проф., д-р физ.-мат. наук; С. Банжак, асп.
(БГТУ, г. Минск)

РОЛЬ ДИСКРЕТНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ В ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ В ПОЛЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В настоящее время все больший интерес вызывает создание квантовых когерентных состояний сред (атомов, молекул, центров в кристаллах) с целью применения их для квантовых вычислений, лазерного управления химическими реакциями, создания квантовых линий связи. Изучение когерентных свойств сред, управление ими предполагает, в частности, решение и анализ квантовых уравнений когерентной динамики, как численное, так и аналитическое.

В работе представлен и реализован алгоритм построения аналитического решения соответствующих дифференциальных уравнений, в котором использованы преобразование Фурье и ортогональные полиномы дискретной переменной в пространстве Фурье. С использованием как известных, так и специально построенных полиномов приводятся полученные решения уравнений когерентной динамики некоторых квантовых систем, возбуждаемых лазерным излучением.

Модель квантовой системы, взаимодействующей с излучением, представляет собой набор уровней энергии $E_0, E_1 ..., E_N$. Излучение вызывает переходы между соседними уровнями, система возбуждается, заселяются более высокие уровни. Энергия кванта $\hbar\omega_\ell$ излучения может не вполне совпадать с энергией $E_n - E_{n-1}$ перехода, что учитывается введением частотной отстройки ε_n для каждого n-го перехода $n-1 \leftrightarrow n$, характеризуемого матричным элементом $\mu_{n-1,n} = \mu_{0,1} f_n$, $(f_1 = 1)$, который учитывает количественно взаимодействие излучения на n-м переходе квантовой системы. Таким образом, эта система описывается величинами f_n, ε_n, а также числом N переходов, взаимодействующих с излучением, имеющим амплитуду E_ℓ и несущую частоту ω_ℓ.

В безразмерных переменных система $N+1$ дифференциальных уравнений имеет вид

$$-i\frac{da_n(t)}{dt} = f_{n+1}e^{-i\varepsilon_{n+1}t}a_{n+1}(t) + f_n e^{+i\varepsilon_n t}a_{n-1}(t); \quad a_n(t=0) = \delta_{n,0}; \quad n = 0,1,...,N. \tag{3}$$

Здесь $a_n(t)$ – искомые функции безразмерного времени, дающие полное описание динамики. Измеряемые величины $\rho_n(t) = a_n(t)a_n^*(t)$ – населенности уровней. Решение уравнений (1) ищем в виде дискретного преобразования Фурье:

$$a_n(t) = e^{i s_n t} \sum_{\omega=0}^{N} F_n(\omega) e^{i r \omega t}; \quad F_n(\omega) = \sigma(\omega) \hat{p}_0 \hat{p}_n(\omega); \quad \omega = 0,1,\dots,N \qquad (4)$$

Спектры Фурье $F_n(\omega)$, т. е. Фурье-образы амплитуд вероятности $a_n(t)$ квантовой системы выражаются, как показано в (2), через некоторую последовательность ортонормированных полиномов $\{\hat{p}_n(\omega)\}_{n=0}^{N}$ дискретного аргумента ω и их весовую функцию $\sigma(\omega)$. Дискретность пространства Фурье искомых функций времени продиктована физическими соображениями, а полиномы в этом пространстве в качестве своего аргумента имеют эквидистантно расположенный набор частот. Сказанное выше доказано подстановкой (2) в уравнения (1).

Учитывая, что любая последовательность ортогональных полиномов удовлетворяет трехчленному рекуррентному соотношению, которое мы записываем в нетрадиционном, но удобном для задачи виде

$$\bar{f}_{n+1}\hat{p}_{n+1}(\omega) + \bar{f}_n \hat{p}_{n-1}(\omega) = \{r\omega + s_n\}\, \hat{p}_n(\omega); \quad n,\omega = 0,1,\dots,N; \quad \bar{f}_0 = 0, \ \bar{f}_1 = 1, \qquad (5)$$

где коэффициенты $\bar{f}_n, r, s_n$ предполагаются известными. Подстановка приводит к заключению, что (2) является решением системы уравнений (1) при условиях

$$f_n = \bar{f}_n, \quad \varepsilon_n = s_n - s_{n-1}\,. \qquad (6)$$

Это выражение устанавливает взаимно-однозначную связь характеристик полиномов с коэффициентами динамических уравнений (1), т.е. со свойствами соответствующей им квантовой системы: расположением уровней энергии, матричными элементами радиационных переходов, отстройками собственных частот переходов от несущей частоты излучения.

Выполнение обратного преобразования Фурье (2) дает искомое решение $\{a_n(t)\}_{n=0}^{N}$ и позволяет найти населенности уровней $\rho_n(t)$, т. е. дискретную функцию распределения квантовых систем по уровням энергии в зависимости от времени, характеристик системы и от частоты излучения.

Рассмотрено три примера, где на основе каждой из выбранных весовых функций $\sigma(\omega)$ и построенных ортогональных полиномов получены аналитические решения уравнений (1) и найдены населенности уровней $\rho_n(t)$, т.е. функция распределения квантовых частиц по уровням в любой момент времени в процессе возбуждения квантовых систем когерентным излучением.

Изложенный алгоритм позволяет, используя разнообразные весовые функции дискретного аргумента и соответствующие им структуры ортонормированных полиномов, строить аналитическое описание когерентной динамики разнообразных квантовых систем в лазерных полях.