i) $-a_{110} > |a_{111}|, |a_{112}| \le 1$,

ii) $a_{111} > |a_{110}|, |a_{112}| < 1,\ h < h^*$, (4)

где

$$h^* = \sqrt{\frac{1-a_{112}^2}{a_{111}^2 - a_{110}^2}} \cdot \arccos\left(\frac{a_{110} - a_{111}a_{112}}{a_{111} - a_{110}a_{112}}\right).$$

Для стабилизации системы (1) регулятором вида (2) в рассматриваемом случае необходимо выполнение одного из условий (4).

Далее для всех возможных случаев коэффициентов квазиполинома $a_{230} + a_{231}e^{-\lambda h} + a_{232}\lambda e^{-\lambda h}$:

1. $a_{230} + a_{231}e^{-\lambda h} + a_{232}\lambda e^{-\lambda h} = 0$,
2. $a_{230} + a_{231}e^{-\lambda h} + a_{232}\lambda e^{-\lambda h} = a_{230} \ne 0$,
3. $a_{230} + a_{231}e^{-\lambda h} + a_{232}\lambda e^{-\lambda h} = a_{230} + a_{231}e^{-\lambda h}$, $a_{231} \ne 0$,
4. $a_{230} + a_{231}e^{-\lambda h} + a_{232}\lambda e^{-\lambda h} = a_{230} + a_{231}e^{-\lambda h} + a_{232}\lambda e^{-\lambda h}$, $a_{232} \ne 0$,

указаны достаточные условия стабилизируемости, а также получены в явном виде стабилизирующие систему (1) регуляторы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якименко А. А. Предельное запаздывание в одном уравнении нейтрального типа// Труды БГТУ. 2014. № 6(170): Физ.-мат. науки и информатика. С. 19–21.

УДК 517.444

Л. Д. Яроцкая, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ, СВЯЗАННОМ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ КОНТОРОВИЧА–ЛЕБЕДЕВА, В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ L_2.

В настоящей работе рассматривается интегральное преобразование вида

$$(Cf)(x) = 4\int_0^\infty \frac{\tau}{\operatorname{sh}\pi\tau} C(2x, 2\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad x > 0, \qquad 1)$$

где $C(2x, 2\tau)$ – специальная функция, определенная интегралом

$$C(x,\tau) = \int_0^\infty \cos(x \operatorname{sh} u) \sin(\tau u)\, du. \qquad 2)$$

Установлено, что в силу универсальной структуры ядра (2),

относящегося к функциям гипергеометрического типа, преобразование (1) композиционно связано преобразованием Конторовича – Лебедева [1]

$$[KLf](x)=4\int_0^\infty \tau K_{2i\tau}(2x)f(\tau)d\tau, \qquad 3)$$

где $K_{i\tau}(x)$ – функция Макдональда, для которой справедливо представление [2] $K_{i\tau}(x)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)=\int_0^\infty \sin(x\operatorname{sh}u)\sin(\tau u)du.$

Из теории преобразования Меллина [3] $f^*(s)=\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx,$ $s>\mathbb{C},$ известно: если $x^\gamma f(x)\in L_2\left(\mathbb{R}_+;x^{-1}\right),$ тогда $f^*(s)\in L_2(\gamma+i\infty,\gamma-i\infty)$ и наоборот. Более того, справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 x^{2\gamma-1}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left|f^*(\gamma+it)\right|^2 dt. \qquad 4)$$

Через L_2 обозначено пространство суммируемых с квадратом функций с весом $\omega(x)$, норма которого определяется формулой $\|f\|=\left(\int_0^\infty |f(x)|^2\omega(x)dx\right)^{1/2}$. Равенство (4) позволяет изучать преобразования (1), (3) в пространствах L_2 со степенно-экспоненциальным весом и получать формулы обращения. Так как для ядер гипергеометрического типа справедливо свойство иметь своим преобразованием Меллина отношение произведений гамма-функций Эйлера, асимптотика которых в соответствии с формулой Стирлинга имеет степенно-экспоненциальный характер.

В частности, получено представление функции (2) в виде интеграла Меллина – Барнса

$$C(x,\tau)=\frac{\operatorname{sh}(\pi\tau/2)}{4\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(s+i\tau/2)\Gamma(s-i\tau/2)\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1/2-s)\Gamma(s+1/2)}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{-s}ds,$$

если $0<\gamma<1/2$. Что, в свою очередь, позволяет выразить (2) через преобразование типа Гильберта [3] функции Макдональда

$$C(x,\tau)=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\int_0^\infty \frac{tK_{i\tau}(t)}{t^2-x^2}dt.$$

Теорема 1. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$. Тогда преобразования (1) и (3) существуют, справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty \left|(Cf)(x)\right|^2 dx = \int_0^\infty \left|(KLf)(x)\right|^2 dx$$

и двойственные формулы со сходимостью в среднем квадратичном

$$(Cf)(x) = \frac{2}{\pi} \lim_{N\to\infty} \int_{1/N}^{N} \frac{[KLf](t^{-1})t^{-1}}{1-(xt)^2} dt,$$

$$x^{-1}[KLf](x^{-1}) = \frac{2}{\pi} \lim_{N\to\infty} \int_{1/N}^{N} \frac{(Cf)(t)}{1-(xt)^2} dt.$$

Формулу обращения преобразования (1) получена на основании теоремы типа Планшереля для преобразования Конторовича – Лебедева (3) [1] .

Теорема 2. Произвольная функция $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющая условию $f(\tau) = O(\tau^\alpha)$, $\alpha > 1/2$ при $\tau \to 0$, почти для всех $\tau > 0$ может быть получена при помощи интеграла

$$f(\tau) = -\frac{4\operatorname{ch}(\pi\tau)}{\sqrt{\tau}\pi^2} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \int_0^\tau \sqrt{y}\operatorname{th}(\pi y) S(2x, 2y)(Cf)(x) \frac{dy\,dx}{y},$$

как обращение преобразования (1), где $S(x,\tau) = \int_0^\infty \sin(x\operatorname{sh} u)\cos(\tau u)\,du.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Yakubovich, S. B. Index transforms / S. B. Yakubovich. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1996.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен. М.: Наука, 1974.

3. Титчмарш Е. Введение в теорию интеграла Фурье / Е. Титчмарш. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.