УДК 336.781.5

М.В. Чайковский, доц., канд. физ.-мат.наук
(БГТУ, г. Минск)

ЭЛЕМЕНТЫ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ФИНАНСОВОГО РЫНКА

Финансовая математика имеет сугубо практическое назначение. Она предназначена для решения задач явно или неявно присутствующих в любой банковской операции. Целью представленной работы является демонстрация применения аппарата дифференциального исчисления функции двух переменных для анализа поведения коэффициентов наращивания в случае начисления простых и сложных процентов.

Если рассматривать T (период начисления) и i (процентную ставку) как изменяющиеся независимые неотрицательные величины (другими словами не фиксировать одну из них, как в методе сечений), то анализ поведения коэффициентов наращения сведется к анализу поведения функции двух переменных. Для графического изучения поведения функций двух переменных можно изучать линии уровня этой функции (то есть линии, в каждой точке которой функция принимает одно и тоже постоянное значение). Удобство использования линий уровня заключается в том, что есть возможность в любой точке такой линии построить вектор градиент, который и дает направление наибольшего возрастания функции двух переменных. Что удобно для клиента финансовой организации. Для финансовой организации более заманчивым является направление, противоположное градиенту. В экономике линии уровня имеют достаточно много названий (линии равного выпуска, изоквантили, изокванты и т. д.), но используются в основном описательно, без привлечения математического аппарата для их исследования.

Проанализируем первоначально случай начисления простых процентов. Коэффициент наращения представляет собой функцию $\varphi(i,T)=1+iT$. Линии уровня этой функции задаются уравнением $1+iT=C$, где C - произвольная постоянная, большая единицы. Если изображать линии уровня в координатах (T,i), уравнением этих линий будет семейство гипербол $i=\dfrac{C-1}{T}$, точнее их положительных ветвей (так как $C>1$). Каждой линии уровня для коэффициента наращения соответствуют вполне определенные значения переменных T и i. Другими словами, имея график линии уровня можно определить комбинацию переменных (соответствующую процентную ставку и период времени) необходимую для получения заданного уровня коэффициента наращения Если формально продифференцировать уравнение линии уровня $i = \frac{C-1}{T}$ по переменной T (то есть предположить $i = i(T)$), то получим выражение $\frac{di}{dT} = -\frac{C-1}{T^2}$, которое является отрицательной величиной для всех значений $C > 1$. О скорости убывания функции можно судить по ее второй производной $\frac{d^2 i}{dT^2} = \frac{2(C-1)}{T^3}$, которая является положительной величиной для всех положительных значений аргумента T. Следовательно, график функции вогнут, то есть с возрастанием аргумента скорость убывания увеличивается.

В случае начисления сложных процентов, график линий уровня будет иметь вид $(1+i)^T = e^C$, или, так как $C > 0$, $i = e^{\frac{C}{T}} - 1$. Анализ полученной функции средствами дифференциального исчисления показывает, что убывать она будет значительно скорее, чем функция в случае простых процентов.

При экономико-математическом анализе, наряду с предельными значениями функции $z = f(x, y)$ (определяются через частные производные первого порядка) рассматриваются предельные нормы замещения аргумента x аргументом y (или наоборот), которые представляют собой отношение частных производных $R_{xy} = \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial x}$ и выражают прирост y, замещающий единицу переменной x. В случае начисления простых процентов предельная норма замещения $R_{Ti}^{пр} = \frac{T}{i}$ численно равна отношению $\frac{T}{i}$. Для случая сложных процентов $R_{Ti}^{сл} = \frac{T}{(1+i)\ln(1+i)}$. Сравнение этих норм замещения сводится к анализу знаменателей в выражениях, то есть к тому знаменатель какой из них больше. Так как производная разности $\frac{d}{di}(i - (1+i)\ln(1+i)) = -\ln(1+i)$ является отрицательной величиной для всех $i > 0$. то эта разность является строго убывающей функцией для положительных значений аргумента, из чего заключаем, что норма замещения аргумента T аргументом i для случая начисления сложных процентов всегда меньше, чем оная для случая начисления простых процентов.