возможность произвольного выбора точек пристрелки, точек сшива решений, выбора параметров пристрелки и длин положительных $J_{2j-1}^{(+)}$ и отрицательных $J_{2j-1}^{(-)}$ пристрелочных подинтервалов. При решении системы (1) – (2) осуществляется переход от граничной задачи к совокупности трех задач Коши, благоприятных в вычислительном отношении. Для решения задач Коши в наше время существует целый арсенал хорошо работающих методов. К ним можно отнести методы Адамса, Рунге-Кутта или методы, обладающие B или D-устойчивостью. Параметры пристрелки определяются как решения замыкающей системы (3). А, в свою очередь, конструктивную сторону замыкающей системы удобно характеризовать матрицей Якоби. Рассмотрены свойства матрицы Якоби. Это создает необходимые условия для качественного численного моделирования траектории искомого решения.

Простота реализации и иллюстрация свойств предложенной модификации были подтверждены численным решением конкретной граничной задачи с малым параметром при производной с различными коэффициентами.

УДК 517.948

С.В. Пономарева, доц., канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск);
О.Н. Пыжкова, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);
Н.Б. Яблонская, доц., канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск)

ПОЛУГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Известно [1], что операторы дробного интегрирования в форме Римана-Лиувилля $\left(I_{a+}^{\alpha}\varphi\right)(x)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\dfrac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad x>a,\quad \alpha>0$ образуют однопараметрическую полугруппу линейных ограниченных операторов (в пространствах непрерывных на отрезке $[a,b]$ или интегрируемых функций). Более того [2], эта полугруппа непрерывна в сильной операторной топологии, т. е., C_0 – полугруппа.

Дробное дифференцирование является операцией, обратной слева для дробного интегрирования $D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}f=f$, но не является в общем случае, как и дифференцирование целого порядка, обратной справа операцией. Композиция операторов интегрирования и дифференцирования дробного порядка задается формулой (см. [1]):

$$\left(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} \varphi\right)(t) = \varphi(t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{n-\alpha}^{(n-i)}(\alpha)}{\Gamma(\alpha - i + 1)} (t-a)^{\alpha - i}, \qquad (1)$$

где $\varphi_{n-\alpha}(t) = \left(I_{a+}^{n-\alpha} \varphi\right)(t)$.

Теорема. Пусть $\alpha > 0$ и $n = [\alpha] + 1$.

1) Если $\varphi(t) \in L_1(a,b)$ и $\varphi_{n-\alpha}(t) \in AC^n[a,b]$, то формула (1) выполняется для почти всех точек $t \in [a,b]$.

2) Если $\varphi(t) \in C(a,b)$ и $\varphi_{n-\alpha}(t) \in C^n[a,b]$, то формула (1) выполняется для любых $t \in (a,b]$.

Заметим также, что при $\alpha = 0$, $I_{a+}^{0}\varphi = \varphi = D_{a+}^{0}\varphi$. Обратным справа дифференцирование дробного порядка является только для функций из класса $I_{a+}^{\alpha,0}(L_1)$ функций, представимых интегралом порядка $\alpha > 0$ и обращающихся в нуль в точке a вместе со всеми своими производными $\left(D_{a+}^{\alpha-k} f\right)(x) = 0$, где $k = 0, 1, \ldots, [\alpha]$.

Заметим, что при комплексных значениях параметра оператор I_{a+}^{α} является голоморфной функцией переменной α на полуплоскости $\mathrm{Re}\alpha > 0$. Особый интерес представляет случай чисто комплексного порядка операторов дробного интегрирования и дифференцирования, так как в этом случае (см. [1]) исчезает разница между интегрированием и дифференцированием как «обратными операциями». В самом деле, сравним определения дробной производной и интеграла чисто комплексного порядка:

$$D_{a+}^{i\theta} f = \frac{1}{\Gamma(1 - i\theta)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-i\theta} f(t)dt; \quad I_{a+}^{i\theta} f = \frac{1}{\Gamma(1 + i\theta)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{i\theta} f(t)dt$$

Таким образом, в случае чисто комплексного порядка, с учетом равенства $I_{a+}^{0}\varphi = \varphi = D_{a+}^{0}\varphi$, операторы дробного интегрирования в форме Римана-Лиувилля образуют абелеву группу с тождественным оператором в качестве единицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1962. – 830 с.