$$\text{при } b_1 < 0: \quad q_1 > -\frac{a_{11}}{b_1}.$$

Во втором случае при условии $a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0$ коэффициент q_2 будем выбирать так, чтобы $|a_{22} + b_2 q_2| < 1$.

Полученный регулятор обеспечит согласно теореме 1 сильную асимптотическую устойчивость замкнутой системы (3), (4), (5). Таким образом, достаточное условие стабилизируемости можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Для того, чтобы система (3), (4) была стабилизируема (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (5), достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

$$1) \left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < 1; \quad 2) \, a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0.$$

Аналогично проводится построение стабилизирующего регулятора для обеспечения слабой асимптотической устойчивости системы и (α, γ)-устойчивости системы.

УДК 519.626.2

И.Ф. Соловьева, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

К ВОПРОСУ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ С ПОГРАНСЛОЕМ

Теория пограничного слоя была открыта еще в 1904 году американским ученым, президентом и почетным членом общества ГАММ Людвигом Прандтлем. Он сформулировал и обосновал большую часть ее развития. Пограничный слой играет весьма существенную роль даже в нашем организме. Он является ответственным за правильное функционирование организма, за кровообращение, движение лимфы, дыхание, а также за отсутствие в организме болезней. В технике экономичность прибора и его работа часто связана с «хорошим» пограничным слоем. Большой круг задач, с которыми сталкиваются инженеры, физики и специалисты по прикладной механике, описываются математическими моделями, в основе которых лежат обыкновенные дифференциальные уравнения с пограничными или внутренними переходными слоями.

Несмотря на то, что уже много лет прошло с основания теории пограничного слоя, данная тема не потеряла своей актуальности и в наши дни. Причина трудностей решения таких задач заключается не только в нелинейности большинства задач с пограничным слоем, хотя в результате этого тоже возникают определенные проблемы, но и в том, что очень маленький параметр ε часто оказывается стоящим возле самых больших производных.

Рассмотрим систему нелинейных о. д. у. первого порядка с малым параметром при производной, приведенную к нормализованному виду:

$$y' = f(t, y, \varepsilon), \quad a \le t \le b \tag{1}$$

с присоединенным к ней двухточечным граничным условием

$$g(y(a),\ y(b)) = 0, \tag{2}$$

где $y:[a,b] \to R^n$, $y:[a,b] \to R^n \times R \to R^n$, $\varepsilon > 0$, $g: R^n \times R^n \to R$.

Предполагаем, что отображения f и g такие, что задача (1) - (2) имеет единственное решение и обладает необходимой гладкостью.

Функция $f(t, y, \varepsilon)$ зависит от малого параметра ε таким образом, что в граничной задаче возникают пограничные или внутренние переходные слои. Ее численное решение и градиент решения в этом случае начинают расти. Особенно рост решения наблюдается вблизи граничных точек, т. е. вблизи точек $t = a$ и $t = b$. В этом случае возникает пограничный слой.

Для решения такого рода задач предлагается несколько модификаций метода пристрелки. Сравнивая их, останавливаемся на модификации метода множественной двусторонней пристрелки. При использовании метода множественной двусторонней пристрелки к решению задачи вида (1) – (2) улучшаются свойства пристрелочных траекторий; ослабляются условия на локализацию начальных приближений; уменьшается число неизвестных.

Искомое решение $y(t)$ представлено в виде:

$$\underset{a \le t \le b}{y(t)} = \begin{cases} v(t,\ y^*_{2j-1}),\ t \in J^{(-)}_{2j-1}, \\ u(t,\ y^*_{2j-1}),\ t \in J^{(+)}_{2j-1},\ j = \overline{1,m} \end{cases}. \tag{3}$$

Функция $u(t,\ y^*_{2j-1})$ – решение задачи Коши в прямом направлении, а функция $v(t,\ y^*_{2j-1})$ – в обратном направлении. Для решения замыкающей системы

$$u(t_{2j},\ y_{2j-1}) - v(t_{2j},\ y_{2j+1}) = 0,\quad j = \overline{1, m-1},$$
$$g(v(t_0, y_1),\ u(t_{2m}, y_{2m-1})) = 0$$

использовался метод Ньютона.

В методе множественной двусторонней пристрелки заложена возможность произвольного выбора точек пристрелки, точек сшива решений, выбора параметров пристрелки и длин положительных $J^{(+)}_{2j-1}$ и отрицательных $J^{(-)}_{2j-1}$ пристрелочных подинтервалов. При решении системы (1) – (2) осуществляется переход от граничной задачи к совокупности трех задач Коши, благоприятных в вычислительном отношении. Для решения задач Коши в наше время существует целый арсенал хорошо работающих методов. К ним можно отнести методы Адамса, Рунге-Кутта или методы, обладающие В или D-устойчивостью. Параметры пристрелки определяются как решения замыкающей системы (3). А, в свою очередь, конструктивную сторону замыкающей системы удобно характеризовать матрицей Якоби. Рассмотрены свойства матрицы Якоби. Это создает необходимые условия для качественного численного моделирования траектории искомого решения.

Простота реализации и иллюстрация свойств предложенной модификации были подтверждены численным решением конкретной граничной задачи с малым параметром при производной с различными коэффициентами.

УДК 517.948

С.В. Пономарева, доц., канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск);
О.Н. Пыжкова, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);
Н.Б. Яблонская, доц., канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск)

ПОЛУГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Известно [1], что операторы дробного интегрирования в форме Римана-Лиувилля $\left(I^{\alpha}_{a+}\varphi\right)(x)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^x\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad x>a,\quad \alpha>0$ образуют однопараметрическую полугруппу линейных ограниченных операторов (в пространствах непрерывных на отрезке $[a,b]$ или интегрируемых функций). Более того [2], эта полугруппа непрерывна в сильной операторной топологии, т. е., C_0 – полугруппа.

Дробное дифференцирование является операцией, обратной слева для дробного интегрирования $D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f=f$, но не является в общем случае, как и дифференцирование целого порядка, обратной справа операцией. Композиция операторов интегрирования и диф-