УДК 532.517

А. М. Волк, доц., канд. техн. наук;
А. И. Вилькоцкий, доц., канд. техн. наук;
(БГТУ, г. Минск)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛЕНОЧНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КОНУСНОЙ НАСАДКЕ

Введение. Гидродинамика пленочных течений имеет важное значение при изучении ряда физико-химических процессов, для расчета оптимальных режимов работы технических.

Математическая модель. Исследуем стационарное осе симметричное ламинарное движение пленки вязкой жидкости по внутренней стенке вертикального конуса, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω. Ось z цилиндрической системы координат направим вверх по оси конуса (рис. 1). При малых углах β наклона образующей конуса к его оси элементарные участки поверхности рассматриваем как цилиндры.

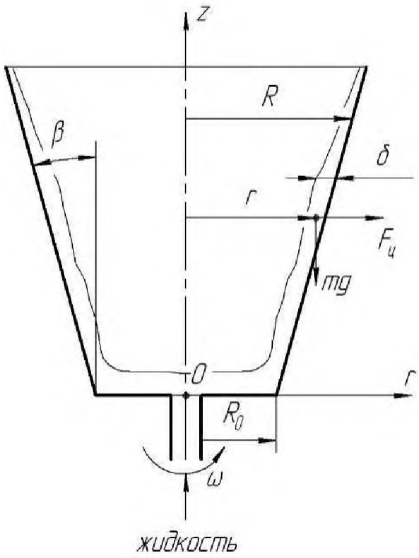

Рисунок 1 – Схема течения вязкой жидкости

Рассмотрим автомодельное решение $U = U(r)$ уравнений Навье – Стокса в цилиндрической системе координат. В этом случае уравнения Навье Стокса для касательной и продольной составляющих скорости принимают вид:

$$\mu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU\varphi)\right) = 0, \tag{1}$$

$$\mu\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU_i}{dr}\right)\right) + \rho(a_l - g_l) = 0. \tag{2}$$

Из внешних действующих сил рассматриваем проекции на образующую конуса центробежной силы и силы тяжести, которые обуславливаются центробежным ускорением и ускорением свободного падения (рис. 1):

$$a_l = a_r \sin\beta;\ g_l = g\cos\beta.$$

Считаем, что выполняется условие прилипания на стенке цилиндра и отсутствуют касательные напряжения на поверхности пленки. Тогда граничными условиями будут:

$$U_\varphi\Big|_{r=R} = \omega R, \quad U_z\Big|_{r=R} = 0. \tag{3}$$

$$\frac{dU_\varphi}{dr}\Bigg|_{r=R-\delta} = 0, \quad \frac{dU_l}{dr}\Bigg|_{r=R-\delta} = 0. \qquad 4)$$

Находим общие решения уравнений (1) и (2) при выполнении граничных условий (3)-(4):

$$U_\varphi = \frac{\omega R^2}{R^2 + (R-\delta)^2}\left(r + \frac{(R-\delta)^2}{r}\right); \tag{5}$$

$$U_l = \frac{a_l - g_l}{4\nu}\left[R^2 - r^2 + 2\,(R-\delta)^2 \ln\frac{r}{R}\right]. \tag{6}$$

В зависимости от длины образующей l находим радиус в сечении конуса $R = R_0 + l\sin\beta$

Анализ результатов. Толщина пленки δ величина достаточно малая по сравнению с радиусом конуса R, поэтому для анализа можем ограничиться первыми слагаемыми разложения средних значений скоростей (5) и (6) в степенные ряды. В этом случае получаем:

$$\bar{U}_\varphi = \omega R, \quad \bar{U}_l = \frac{(a_l - g_l)\delta^2}{3\nu}, \quad a_r = \frac{\bar{U}_\varphi^2}{r} = \omega^2 R.$$

Отсюда получаем зависимость для средней скорости пленки по направляющей цилиндрической поверхности:

$$\bar{U}_l = \frac{(\omega^2 R\sin\beta - g\cos\beta)\delta^2}{3\nu}.$$

При заданном удельном расходе $q = \bar{U}_l\delta$ жидкости на единицу периметра конуса вычисляем толщину пленки жидкости в сечении конуса радиуса R:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3q\nu}{\omega^2 R\sin\beta - g\cos\beta}}.$$