

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

В. П. Ставров

**МЕХАНИКА
КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

*Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений
по специальностям «Конструирование и производство изделий
из композиционных материалов», «Оборудование и технологии
высокоэффективных процессов обработки материалов»*

Минск 2008

УДК 678.0:620.1+539.3(075.8)

ББК 35.719я7

С 76

Рецензенты:

кафедра сопротивления материалов
Белорусского национального технического университета
(заведующий кафедрой профессор,
доктор физико-математических наук *Ю. В. Василевич*);
заведующий кафедрой строительной механики
Белорусского государственного университета транспорта
профессор, доктор физико-математических наук *Э. И. Старовойтов*

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или ее части не может быть осуществлено без разрешения учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет».

Ставров, В. П.

С 76 **Механика композиционных материалов** : учеб. пособие для студентов специальностей «Конструирование и производство изделий из композиционных материалов», «Оборудование и технологии высокоэффективных процессов обработки материалов» / В. П. Ставров. – Минск : БГТУ, 2008. – 262 с.
ISBN 978-985-434-834-6

В пособии излагаются теоретические основы и практические приложения методов прогнозирования свойств композиционных материалов с учетом неоднородной и анизотропной структуры, особенности механического поведения композитов, обусловленные структурными факторами; приводятся методы расчета механических характеристик материалов различной структуры.

Предназначено для студентов, специализирующихся в области конструирования и производства изделий из композиционных материалов.

УДК 678.0:620.1+539.3(075.8)

ББК 35.719я7

ISBN 978-985-434-834-6

© УО «Белорусский государственный технологический университет», 2008

© Ставров В. П., 2008

Учебное издание

Ставров Василий Петрович

МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Редактор *И. О. Гордейчик*
Компьютерная верстка *А. Д. Бычко*

Подписано в печать 17.10.2008. Формат 60×84¹/₁₆.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 15,2. Уч.-изд. л. 15,0.
Тираж 300 экз. Заказ .

Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет»
220006. Минск, Свердлова, 13а.
ЛИ № 02330/0133255 от 30.04.2004.

Отпечатано в лаборатории полиграфии учреждения образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13.
ЛП № 02330/0056739 от 22.01.2004.

Переплетно-брошюровочные процессы
произведены в ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Колоса».
220600. Минск, Красная, 23. Заказ .

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов, специализирующихся в области конструирования и производства изделий из композиционных материалов (КМ). При отборе материала учитывались особенности учебного плана и программ дисциплин соответствующей специальности. По этой причине по содержанию данное пособие существенно отличается от пособий для будущих специалистов материаловедческого профиля. В частности, практически отсутствуют сведения о компонентах, их свойствах и технологии получения КМ, обычно включаемые в аналогичный курс: они изучаются в специальных курсах «Композиционные материалы», «Физикохимия и технология полимеров», «Композиционные материалы с металлической и керамической матрицей». Немногочисленные справочные данные о компонентах и КМ некоторых типов, включенные в пособие, предназначены лишь для использования в качестве исходных данных при решении задач, иллюстрирующих изучаемые здесь методы.

В механике КМ широко используют понятия и методы, являющиеся предметом изучения в курсе механики материалов и конструкций (сопротивления материалов). С учетом задач, решаемых в механике КМ, они изложены в более общем виде. Методы расчета элементов конструкций из КМ, часто включаемые в курсы механики КМ для студентов с конструкторской специализацией, в данном пособии присутствуют в весьма ограниченном объеме, поскольку они изучаются в отдельном курсе «Конструирование и расчет изделий из композиционных материалов».

При написании пособия автор учитывал инженерный профиль подготовки студентов и стремился оставаться в рамках учебных программ общенаучных, специальных и профилирующих дисциплин специальности «Конструирование и производство изделий из композиционных материалов». Данное обстоятельство важно в связи с тем, что при наличии значительного числа изданий по механике КМ (они приведены в библиографическом списке) практически отсутствуют такие, которые в полной мере соответствовали бы программе дисциплины и были доступны студентам этой специальности. В то же время нельзя не отметить, что на отбор материала, включенного в пособие, и на способ его изложения оказал влияние собственный научный, инженерный и педагогический опыт автора.

Для адекватного описания структуры и свойств КМ требуются методы, учитывающие их неоднородность, анизотропию и нестабильность. Применяемый с этой целью математический аппарат часто выходит за рамки стандартного курса высшей математики для студентов инженерных специальностей, что, безусловно, накладывает определенные ограничения на способ изложения материала. В необходимых случаях приведены дополнительные сведения математического характера. Это, в частности, элементы тензорного исчисления и теории вероятностей.

Курс механики КМ закладывает теоретические основы ряда профилирующих дисциплин, поэтому в пособии даются сведения из механики сплошной среды и механики деформируемого твердого тела, не рассматриваемые обычно в общенаучных и общинженерных дисциплинах. Включены также некоторые задачи технологической механики КМ, относящиеся к стадиям совмещения компонентов (перколяция жидкости через волокнистую поровую среду) и формообразования изделий (вязкое течение анизотропных препрегов), для решения которых применяют модели, типичные для механики КМ. Соответствующие решения используются в дальнейшем в курсе «Формообразование изделий из композиционных материалов».

Попытка одновременно учесть несколько факторов, влияющих на свойства КМ, например стохастическое расположение и дефекты элементов структуры, температурно-временную зависимость свойств компонентов и т. п., приводит к так называемым связанным задачам. Решение их оказывается обычно громоздким и труднообозримым. К тому же часто обнаруживается, что усложнение модели не приводит к ожидаемому соответствию результатов расчета экспериментальным данным. Упрощенные модели могут дать более точные значения показателей свойств в каком-то конкретном случае, особенно при прогнозировании прочности материала по прочности компонентов. Однако данный факт не может служить достаточным основанием для перехода к чисто рецептурным методам, которые всегда имеют ограниченную область применения, или для отказа от построения таких моделей. Поэтому во всех случаях, когда это возможно, приведены достаточно подробные описания применяемых моделей и необходимые математические выкладки.

Данное учебное пособие может быть полезно также студентам других машиностроительных специальностей, интересующимся особенностями структуры и свойств КМ, конструирования изделий

из композитов, при выполнении ими учебно- и научно-исследовательских работ, курсовых и дипломных проектов.

Автор благодарен рецензентам – заведующему кафедрой сопротивления материалов Белорусского национального технического университета профессору Ю. В. Василевичу и его коллегам, а также заведующему кафедрой строительной механики Белорусского государственного университета транспорта профессору Э. И. Старовойтову, замечания и советы которых способствовали улучшению рукописи. Замечания и предложения читателей по содержанию пособия, его построению и способу изложения материала также будут приняты с благодарностью.

ВВЕДЕНИЕ

Композиционные материалы – материалы конструкционного назначения, состоящие из двух и более компонентов, один из которых – *матрица (связующее)* – объединяет частицы *наполнителей*, фиксируя структуру материала, причем частицы наполнителей имеют относительно малые характерные размеры и придают материалу особые свойства – высокую жесткость и прочность, тепло- или электропроводность, износостойкость и т. п. КМ называют также *композитными материалами* или *композитами*, при этом часто имея в виду только высокопрочные материалы конструкционного назначения.

Известно, что КМ берут начало «от природы», от материалов растительного и животного происхождения, а их ранние искусственно созданные представители – саманный кирпич и т. п. – человек применяет с незапамятных времен. Историю современных КМ связывают с созданием стеклопластиков в конце 30-х годов XX столетия. Благодаря своим преимуществам перед традиционными материалами стеклопластики уже в 40-х годах нашли применение в конструкции самолетов.

Зависимость удельной (отнесенной к массе конструкции) жесткости и прочности от структуры материала, широкие возможности управления структурой с учетом геометрии изделия и приложенной к нему нагрузки стали побудительным мотивом для детального изучения связи между структурой и механическими свойствами КМ.

Значительные научные силы, привлеченные в разных странах для обеспечения военно-технического превосходства в целом и разработки необходимых для этого материалов, новых конструктивных и технологических решений в частности, обеспечили формирование методологии и основного содержания нового научного направления механики деформируемого твердого тела – *механики КМ*.

В монографиях, справочных и учебных изданиях по механике КМ, которые начали издаваться с середины 60-х годов, обобщены результаты исследований, изложены различные подходы и методы механики КМ, содержатся многочисленные приложения результатов к расчетам элементов конструкций и к оптимизации структуры материала в изделиях. Дальнейшему развитию механики КМ способствовало расширение номенклатуры компонентов и КМ, появление многочисленных новых областей их применения и новых технологий получения изделий. Но несмотря на значительные успехи в развитии и примене-

нии методов механики КМ, надо признать, что задачи прогнозирования свойств КМ, в первую очередь прочности, задачи управления структурой материала в изделиях, которые ставили перед собой исследователи еще в 60-е годы, далеки от окончательного решения.

Различают КМ с полимерной, металлической и керамической матрицей, с волокнистыми, дисперсными и иными типами наполнителей. От типа и свойств матрицы зависят способ получения изделия, поведение материала в условиях эксплуатации. В еще большей мере механические свойства КМ определяются типом, объемной долей и расположением частиц наполнителей.

Одна из наиболее важных особенностей КМ, отличающих их от традиционных материалов, состоит в том, что КМ как конструкционный материал образуется обычно одновременно с изделием. Отсюда вытекают широкие возможности управления структурой КМ, а также различие структуры КМ, получаемых из одних и тех же компонентов и даже в одном и том же изделии – в зависимости от геометрии изделия и условий его формообразования.

КМ с полимерной матрицей составляют более 95% общего объема композитов, применяемых в технике. Особенность полимеров – склонность к проявлению реологических свойств не только при формообразовании изделий, но и в условиях эксплуатации.

С учетом изложенного, характеризуя структуру и свойства КМ в изделиях, следует принимать во внимание неоднородность, анизотропию и нестабильность, т. е. зависимость структуры и свойств от координат, от направления по отношению к осям координат, связанным с изделием, и от времени. Это обуславливает необходимость изучения закономерностей влияния структуры КМ и определяющих ее факторов на свойства материала в изделии как одного из важнейших условий успешного конструирования изделий, разработки технологии их формообразования и конструкции оборудования и формообразующей оснастки.

Ввиду малости характерных размеров элементов структуры механику КМ, предметом которой является изучение связи между структурой и свойствами, называют также микромеханикой или структурной механикой КМ. При этом предполагается, что механическое поведение элементов структуры (на микроуровне) соответствует поведению, регистрируемому в эксперименте. Анализ поведения на более низком уровне (субмикро- или нано-) требует привлечения методов физики конденсированных сред и выходит за рамки традиционной механики КМ.

С другой стороны, изделие может включать разнородные материалы, структурные элементы или слои с различными свойствами, т. е. иметь неоднородность на макроуровне. Анализ напряженного и деформированного состояния материала таких изделий обычно выходит за рамки микромеханики КМ и проводится при конструировании изделий, а соответствующие задачи расчета относятся к механике конструкций, в частности к механике неоднородных, анизотропных и вязкоупругих стержней, пластин и оболочек.

Закономерности связи между структурой и свойствами КМ, устанавливаемые методами механики КМ, используются при разработке новых материалов, но еще в большей мере они необходимы при конструировании изделий с оптимальной структурой КМ и для расчетов изделий на жесткость и прочность.

Ввиду существенной зависимости структуры и свойств КМ от геометрии изделия, способа его изготовления и нагружения в условиях эксплуатации показатели свойств, определяемые с целью контроля исходных композиций или полуфабрикатов КМ и процесса изготовления изделий, оказываются недостаточными для успешного решения задач проектирования. Изготовление и испытание макетов изделий, экспериментальная отработка технологии и оптимальной структуры материала обходятся слишком дорого. Наличие адекватных моделей материала и методов прогнозирования его свойств в конкретном изделии позволяет сократить затраты на разработку конструкции. Создание таких моделей и методов, прогнозирование на их основе свойств материала в различных условиях эксплуатации – одна из основных задач механики КМ.

1. НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

1.1. Векторы и тензоры

Векторы. В механике КМ, как и в механике вообще, рассматривается движение (перемещение, деформирование) материальной среды, происходящее в пространстве и времени. Параметры внешних воздействий и параметры состояния среды инвариантны относительно выбора системы отсчета. Наряду со скалярными величинами – временем и температурой – они включают векторы: радиус-вектор точки, силу, давление, момент силы относительно точки, скорость точки, угловую скорость тела и др.

В дальнейшем используется прямоугольная декартова система координат, ее оси обозначаются как x , y , z или как x_i ($i = 1, 2, 3$), а единичные векторы (орты) координатных осей x_i – как \mathbf{i}_i (рис. 1.1).

Радиус-вектор точки P выражается через ее координаты x_i : $\mathbf{r} = \mathbf{i}_\alpha x_\alpha$. Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам, обозначаемым греческими буквами, выполняется суммирование от 1 до 3.

При фиксированном значении индекса i величина $\mathbf{r}_i = \mathbf{i}_i x_i$ представляет собой составляющую вектора \mathbf{r} по оси x_i .

Аналогично в виде суммы составляющих по координатным осям, называемых также компонентами, может быть записан произвольный вектор, например $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, где $\mathbf{a}_i = \mathbf{i}_i a_i$ – составляющая вектора по оси x_i , а a_i – проекция вектора \mathbf{a} на эту ось. Вектор \mathbf{a} выражается через проекции как $\mathbf{a} = \mathbf{i}_\alpha a_\alpha$.

Проекция вектора на ось x_i равна скалярному произведению этого вектора на единичный вектор оси: $a_i = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{a}$.

Скалярное произведение двух единичных векторов равно

$$\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (1.1)$$

Величины δ_{ij} называют символами Кронекера. В силу коммутативного свойства скалярного произведения они симметричны

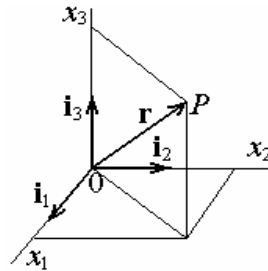


Рис. 1.1

относительно перестановки индексов: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Скалярное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} равно

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}), \quad (1.2)$$

где $a = |\mathbf{a}|$ и $b = |\mathbf{b}|$ – модули векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} ; $\cos(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ – косинус угла между их направлениями.

Очевидно, что $a_i = a \cos(\mathbf{a} \wedge x_i)$, а $\delta_{ij} = \cos(x_i \wedge x_j)$. С другой стороны,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{i}_\alpha a_\alpha) \cdot (\mathbf{i}_\beta b_\beta) = a_\alpha b_\beta (\mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\beta) = a_\alpha b_\beta \delta_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\alpha. \quad (1.3)$$

Векторное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} – это вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, равный по модулю $c = ab \sin(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$, перпендикулярный плоскости, в которой лежат векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , и направленный в ту сторону, откуда совмещение первого вектора (\mathbf{a}) со вторым (\mathbf{b}) кажется происходящим против часовой стрелки (рис. 1.2).

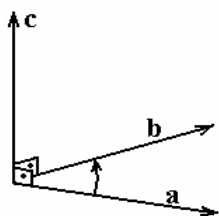


Рис. 1.2

Из данного определения следует, что при четной циклической перестановке индексов единичные векторы координатных осей образуют правую систему (например, $\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2$), а при нечетной – левую ($\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_3$).

Скалярное произведение векторного произведения двух единичных векторов на единичный вектор равно

$$\varepsilon_{ijk} = \mathbf{i}_i \cdot (\mathbf{i}_j \times \mathbf{i}_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } i, j, k \text{ различны и образуют} \\ & \text{четную перестановку;} \\ -1, & \text{если } i, j, k \text{ различны и образуют} \\ & \text{нечетную перестановку;} \\ 0, & \text{если хотя бы два индекса равны.} \end{cases} \quad (1.4)$$

Векторное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} определяется через проекции этих векторов по формуле

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \mathbf{i}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \\ + \mathbf{i}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1). \quad (1.5)$$

Величины ε_{ijk} называют символами Леви-Чивита. Их введение упрощает запись векторного произведения. В частности, векторное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} записывается как

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma, \quad (1.6)$$

где, как и ранее, по повторяющимся индексам, обозначенным греческими буквами, выполняется суммирование от 1 до 3.

С использованием символов Леви-Чивита смешанное произведение трех произвольных векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} запишется в виде

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta c_\gamma. \quad (1.7)$$

Геометрический смысл этого произведения – объем параллелепипеда, сторонами которого служат векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} , исходящие из одной точки – вершины параллелепипеда.

Наряду с исходной системой координат x_i , заданной ортами \mathbf{i}_i , рассмотрим систему осей x'_i , повернутых относительно x_i (рис. 1.3). Их орты \mathbf{i}'_i .

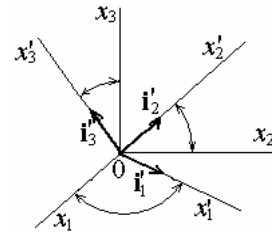


Рис. 1.3

В «новых» осях вектор \mathbf{a} задан как $\mathbf{a} = \mathbf{i}'_\alpha a'_\alpha$. Проекции вектора \mathbf{a} на «новые» оси найдем, умножив вектор скалярно на единичный вектор оси:

$$a'_i = \mathbf{i}'_i \cdot \mathbf{i}_\alpha a_\alpha = l_{i\alpha} a_\alpha, \quad (1.8)$$

где $l_{ij} = \cos(x'_i \wedge x_j)$.

Совокупность величин $\mathbf{i}'_i \cdot \mathbf{i}_j = l_{ij}$ может быть представлена матрицей косинусов углов между осями координат:

$$(l_{ij}) = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Формула (1.8) устанавливает связь между проекциями вектора в «старых» и «новых» осях. Отсюда следует, что при повороте системы координат проекции вектора изменяются по определенному закону.

Этот закон является основным свойством вектора и может быть принят в качестве определения вектора.

Из условия ортогональности единичных векторов, задающих прямоугольную систему координат, следует

$$l_{i\alpha}l_{j\alpha} = \delta_{ij}. \quad (1.10)$$

В частности, сумма квадратов косинусов углов между осью x'_1 и координатными осями x_i равна единице: $l_{11}^2 + l_{12}^2 + l_{13}^2 = 1$.

Тензоры. Скаляр задан одним числом, вектор $\mathbf{a} = (a_i)$ – тремя (по числу проекций на координатные оси), т. е. число составляющих скалярной величины 3^0 , а векторной – 3^1 . По аналогии будем рассматривать также величины $\mathbf{A} = (A_{ij})$, заданные матрицей $3 \times 3 = 3^2$ составляющих, $\mathbf{C} = (C_{ijmn})$, заданные 3^4 составляющих, и т. д. Круглые скобки здесь означают совокупность (матрицу) составляющих (компонентов) тензора. Запись составляющих без скобок, например C_{ijmn} , будем применять для обозначения некоторой произвольной составляющей.

Составляющие тензора (элементы задающей его матрицы) при повороте координатных осей преобразуются по законам

$$A'_{ij} = l_{i\alpha} l_{j\beta} A_{\alpha\beta}; \quad (1.11)$$

$$C'_{ijmn} = l_{i\alpha} l_{j\beta} l_{m\gamma} l_{n\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (1.12)$$

В этом состоит принципиальное отличие тензора от обычной матрицы, элементы которой заданы фиксированными числами, не связанными с координатными осями.

Тензоры $\mathbf{A} = (A_{ij})$ и $\mathbf{C} = (C_{ijmn})$, компоненты которых преобразуются по формулам (1.11) и (1.12), называются тензорами второго и четвертого ранга соответственно. С учетом введенного правила можно определить скаляр как тензор нулевого, а вектор – как тензор первого ранга. Если некоторая величина задана матрицей из 3^k составляющих, которые при повороте координатных осей изменяются согласно закону, имеющему вид, аналогичный (1.11) или (1.12), то эта величина – тензор ранга k . И только в этом случае матрица из 3^k составляющих задает тензор ранга k .

Тензорные величины широко используются в механике. В числе известных тензоров второго ранга – тензор напряжений, тензор деформаций, тензор моментов инерции. Тензором второго ранга

является и единичный тензор $\mathbf{I} = (\delta_{ij})$, заданный единичной матрицей, составленной из символов Кронекера:

$$(\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Как и вектор, тензор любого ранга может быть записан через составляющие (компоненты), например $\mathbf{A} = \mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta A_{\alpha\beta}$. Здесь используется формальное (не скалярное и не векторное, а так называемое диадное) произведение единичных векторов.

Действия над тензорами, как и известные действия над векторами, предполагают определенные преобразования составляющих. Так, сложение или вычитание тензоров одинакового ранга предполагает сложение или вычитание соответствующих составляющих по правилу $A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$. Умножение на скаляр дает тензор того же ранга: $D_{ij} = qC_{ij}$.

Скалярное умножение вектора на единичный тензор слева и справа дает тот же вектор: $\mathbf{I} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{a} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{a}$.

Скалярное умножение вектора и тензора при расположении вектора слева выполняется по правилу

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = a_\alpha (\mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\beta) \mathbf{i}_\gamma A_{\beta\gamma} = a_\alpha \delta_{\alpha\beta} \mathbf{i}_\gamma A_{\beta\gamma} = a_\alpha \delta_{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} \mathbf{i}_\gamma = (a_\alpha A_{\alpha\gamma}) \mathbf{i}_\gamma.$$

При умножении справа имеем $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = A_{\beta\gamma} \mathbf{i}_\beta \mathbf{i}_\gamma \cdot \mathbf{i}_\alpha a_\alpha = \mathbf{i}_\beta (A_{\beta\alpha} a_\alpha)$, т. е. составляющие вектора, получаемые умножением матрицы (A_{ij}) на вектор (a_i) , оказываются иными. Индексы суммирования обозначены одинаковыми буквами.

По аналогичному правилу скалярно перемножаются и два тензора. Например, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{\alpha\beta} \mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta \cdot \mathbf{i}_\gamma \mathbf{i}_\delta B_{\gamma\delta} = \mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\delta (A_{\alpha\beta} B_{\beta\delta})$. Ранг получаемого тензора оказывается на 2 меньше суммы рангов сомножителей. Так, умножение двух тензоров второго ранга дает тензор тоже второго ранга. Поэтому операцию скалярного умножения называют свертыванием тензоров, а ее результат – сверткой.

Возможно свертывание тензора второго и более высокого ранга внутренним образом. При этом ранг получаемой величины также на 2 меньше ранга свертываемого тензора. В частности, свертывание внутренним образом тензора второго ранга дает скаляр. Например, $\mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\beta A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\alpha} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$; $\mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\beta \delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\alpha} = 3$. Величину $A_{\alpha\alpha}$ называют сверткой или «следом» матрицы (A_{ij}) .

Формальное умножение тензоров, напротив, дает тензор, ранг которого на 2 больше суммы рангов сомножителей. Например, $\mathbf{AB} = \mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta \mathbf{i}_\gamma \mathbf{i}_\delta (A_{\alpha\beta} B_{\gamma\delta}) = \mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta \mathbf{i}_\gamma \mathbf{i}_\delta (D_{\alpha\beta\gamma\delta})$.

Тензор второго ранга называют симметричным, если $A_{ij} = A_{ji}$, и антисимметричным (или кососимметричным), если $A_{ij} = -A_{ji}$. Любой тензор второго ранга может быть представлен в виде суммы связанных с ним симметричного и антисимметричного тензоров:

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}). \quad (1.14)$$

Первое слагаемое здесь задает симметричный тензор, его выделение называют симметрированием, а второе слагаемое – антисимметричный тензор. С учетом этого определения можно сказать, что совокупность введенных выше символов Леви – Чивита ε_{ijk} задает единичный антисимметричный тензор третьего ранга.

Любой тензор второго ранга в результате поворота координатных осей может быть преобразован так, что матрица его составляющих будет диагональной:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_1^\circ & 0 & 0 \\ 0 & A_2^\circ & 0 \\ 0 & 0 & A_3^\circ \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Величины A_i° – главные значения, а соответствующие им оси x_i° – главные оси тензора \mathbf{A} . В дальнейшем это преобразование иллюстрируется на примере тензора напряжений.

Тензор второго ранга может быть представлен в виде суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_o + \mathbf{A}_d \text{ или } A_{ij} = A_{oij} + A_{dij}, \quad (1.16)$$

где $\mathbf{A}_o = \frac{1}{3} A_{\alpha\alpha} \mathbf{I}$; $\mathbf{A}_d = \mathbf{A} - \mathbf{A}_o$; $A_{oij} = \frac{1}{3} A_{\alpha\alpha} \delta_{ij}$; $A_{dij} = A_{ij} - A_{oij}$.

Тензор \mathbf{A}_o , заданный диагональной матрицей с равными компонентами на диагонали, называют шаровой частью тензора \mathbf{A} , а тензор \mathbf{A}_d – девиатором тензора \mathbf{A} .

Дифференцирование и интегрирование. Исследуемые в механике сплошной среды скалярные, векторные или тензорные величины

могут быть функциями координат и времени. Их называют соответственно скалярными, векторными или тензорными полями. Различают производные по координатам и времени.

Обозначим частную производную некоторой функции координат $f(x_1, x_2, x_3)$ по координате x_i как $\partial f(x_1, x_2, x_3) / \partial x_i$. Совокупность этих производных образует вектор производной по направлению – градиент соответствующей функции. Градиент скалярного поля $f(\mathbf{r}) = f(x_1, x_2, x_3)$ задан как вектор $\text{grad } f \equiv \nabla f = (\mathbf{i}_\alpha \partial f / \partial x_\alpha)$.

Оператор $\nabla = (\mathbf{i}_\alpha \partial \dots / \partial x_\alpha)$ называется дифференциальным оператором Гамильтона. Градиент векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ представляет собой тензор второго ранга $\nabla \mathbf{F} = \mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta (\partial F_\beta / \partial x_\alpha)$, составляющими которого являются производные по координатам от проекций векторной функции \mathbf{F} на координатные оси. Здесь полезно заметить, что производную по координатам в механике сплошной среды часто обозначают индексом после запятой, например $\partial F_i / \partial x_j = F_{i,j}$.

Скалярное умножение вектора ∇ на вектор $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ дает

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\beta (\partial F_\beta / \partial x_\alpha) = \delta_{\alpha\beta} (\partial F_\beta / \partial x_\alpha) = \partial F_\alpha / \partial x_\alpha. \quad (1.17)$$

Эту свертку ($\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial F_1 / \partial x_1 + \partial F_2 / \partial x_2 + \partial F_3 / \partial x_3$) называют дивергенцией векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ и обозначают также $\text{div} \mathbf{F}(\mathbf{r})$. Аналогично определяют дивергенцию тензорного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ как $\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Скалярное умножение операторов Гамильтона дает

$$\nabla \cdot \nabla \equiv \Delta = \mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\beta (\partial^2 \dots / \partial x_\alpha \partial x_\beta) = \delta_{\alpha\beta} (\partial^2 \dots / \partial x_\alpha \partial x_\beta) = \partial^2 \dots / \partial x_\alpha^2. \quad (1.18)$$

Оператор Δ , заданный формулой (1.18), называется оператором Лапласа. В частности, оператор Лапласа скалярного поля $f(\mathbf{r})$ записывается как

$$\Delta f \equiv \partial^2 f / \partial x_\alpha^2 = \partial^2 f / \partial x_1^2 + \partial^2 f / \partial x_2^2 + \partial^2 f / \partial x_3^2.$$

С помощью оператора Гамильтона и символов Леви-Чивита ротор векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ записывается как

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{i}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial F_\gamma / \partial x_\beta. \quad (1.19)$$

Интегрирование скалярного, векторного и тензорного полей выполняется по правилам интегрирования функций многих переменных. Для обозначения этой операции применяется символическая запись

$$\int_V f(\mathbf{r})dV \equiv \iiint_V f(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3$$

При преобразовании функции $f(x_1, x_2, x_3)$ к координатным осям x'_i , повернутым относительно исходных осей x_i , учитывается связь между координатами: $x'_i = x'_i(x)$, при этом $dx_i = (\partial x_i / \partial x'_a)dx'_a$. Тогда

$$\int_V f(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3 \equiv \iiint_V f(x'_1, x'_2, x'_3) \left| \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right| dx'_1 dx'_2 dx'_3, \quad (1.20)$$

где $J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right|$ – определитель (якобиан) преобразования.

Рассмотрим, например, переход от прямоугольной системы координат x_i к сферической (рис. 1.4). «Старые» координаты x_i связаны с «новыми» (r, θ, φ) соотношениями

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi; \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi; \quad x_3 = r \cos \theta. \quad (1.21)$$

Найдем частные производные от этих функций по r, θ и φ и составим определитель (якобиан преобразования). Вычислив его значение, получим $J = r^2 \sin \theta$. К такому же результату придем, сопоставляя элементарные объемы dV и dV' , вычисленные непосредственно из геометрических соотношений (рис. 1.4).

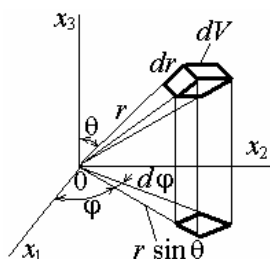


Рис. 1.4

Известно, что интеграл от векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ по объему некоторой области V может быть преобразован в интеграл по поверхности S , ограничивающей эту область, внешняя нормаль к которой задана единичным вектором \mathbf{n} . Соответствующее преобразование задается теоремой Остроградского – Гаусса. В инвариантной форме эта теорема записывается как

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) dS. \quad (1.22)$$

В проекциях на координатные оси соотношение (1.22) имеет вид

$$\int_V \frac{\partial F_\alpha(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} dV = \int_S n_\alpha F_\alpha(\mathbf{r}) dS. \quad (1.23)$$

Функция, стоящая под знаком интеграла в левой части равенств (1.22) и (1.23), представляет собой дивергенцию векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Аналогичные выражения получим, если вместо векторного поля будем рассматривать, например, тензорное поле второго ранга. При это подынтегральные функции будут векторными.

Упражнения

- Для векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} , заданных проекциями на оси координат:
 - проверить условие компланарности;
 - вычислить объем параллелепипеда, построенного на этих векторах;
 - вычислить скалярные и векторные произведения;
 - вычислить $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_1$; $\mathbf{a} \times \mathbf{i}_1$; $\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{b}$; $\mathbf{I} \cdot \mathbf{b}$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{I}$; $a_\alpha \delta_{\alpha i}$; $\delta_{i\alpha} b_\alpha$; $a_\alpha \delta_{\alpha\beta} b_\beta$; $\varepsilon_{i\alpha\beta} a_\alpha b_\beta$; $\nabla \cdot \mathbf{a}$; $\nabla \times \mathbf{b}$.
- Для тензоров второго ранга \mathbf{A} и \mathbf{B} , заданных компонентами:
 - вычислить $B_{\alpha\alpha}$; $\delta_{i\alpha} B_{\alpha j}$; $\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{A}$; $A_{i\alpha} \delta_{\alpha j}$; $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$; $A_{i\alpha} b_\alpha$; $a_\alpha B_{\alpha i}$; $B_{i\alpha} a_\alpha$; $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$; $A_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$;
 - записать шаровую часть и девиаторы.

1.2. Тензор напряжений

Нагрузки, действующие на тело. Причиной напряженного и деформированного состояния тел обычно служат нагрузки, действующие со стороны других тел (внешние силы) на поверхность тела (поверхностные силы) или на элементы внутри тела (массовые или объемные).

Пусть в окрестности точки P , лежащей на поверхности тела, на элементарный участок поверхности ΔS с внешней нормалью, заданной единичным вектором \mathbf{n} , действуют внешние силы. Главный вектор сил равен $\Delta \mathbf{R}_S$, а главный момент относительно этой точки – $\Delta \mathbf{M}_P$ (рис. 1.5).

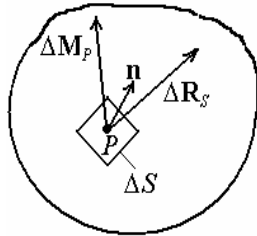


Рис. 1.5

Вектор распределенных на этом участке сил задан как

$$\mathbf{p}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_S}{\Delta S}. \quad (1.24)$$

При этом для главного момента $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}_P}{\Delta S} = 0$.

Если на элемент объема ΔV действуют силы, главный вектор которых $\Delta \mathbf{R}_V$, а главный момент относительно точки $\Delta \mathbf{M}_V$, то интенсивность объемных сил определяется как $\mathbf{f}_V = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_V}{\Delta V}$. Для главного момента также $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}_V}{\Delta V} = 0$. Частный случай объемных (массовых) сил – силы тяжести $\mathbf{f}_g = \rho \mathbf{g}$, где ρ – плотность материала в элементе объема; \mathbf{g} – ускорение силы тяжести.

Главный вектор и главный момент всех поверхностных сил, действующих на тело,

$$\mathbf{R} = \int_S \mathbf{p}_n dS; \quad \mathbf{M}_O = \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{p}_n dS.$$

Аналогично определяются главный вектор и главный момент объемных сил.

Тензор напряжений в точке. Напряженное состояние в точке тела характеризуется интенсивностью внутренних сил. Внутренние силы находят по методу сечений: тело мысленно разделяют на части и заменяют действие одной части на другую силами (рис. 1.6). Эти (внутренние) силы распределены по поверхности сечения, поэтому их интенсивность в заданной точке находится аналогично интенсивности внешних сил (см. формулу (1.24)). В данном случае \mathbf{p}_n – вектор напряжения в точке P . Его значение и направление зависят не только от приложенных к телу внешних сил, но и от положения плоскости сечения, заданного внешней нормалью \mathbf{n} .

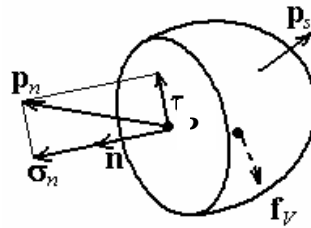


Рис. 1.6

Напряжение в точке определено как результат предельного перехода при стягивании в точку элементарной площадки ΔS . По сути это модель интенсивности внутренних сил, действующих на элементарной площадке. В реальном теле такая площадка может содержать множество структурных элементов материала. Назовем ее площадкой первого порядка малости или макроплощадкой и обозначим как ΔS_I . Напряжения, отнесенные к макроплощадке, будем называть *макронапряжениями*.

Если размеры элементов структуры по крайней мере на порядок меньше характерных размеров тела, то площадку, выделенную на каждом из таких элементов, назовем площадкой второго порядка малости или микроплощадкой и обозначим как ΔS_{II} , а отнесенные к ней (и, следовательно, к элементам структуры) напряжения будем называть структурными или *микронапряжениями* и обозначим \mathbf{p}_{II} .

Вектор макронапряжения \mathbf{p}_I определяется как среднее значение микронапряжений \mathbf{p}_{II} на макроплощадке:

$$\mathbf{p}_I = \frac{1}{\Delta S_I} \int_{\Delta S_I} \mathbf{p}_{II} dS. \quad (1.25)$$

Будем предполагать, что основные свойства напряжений как математического объекта от исследуемого уровня не зависят, поэтому в данном параграфе не уточняется, к какому структурному уровню они относятся.

Разложим вектор \mathbf{p}_n на составляющие:

$$\mathbf{p}_n = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\tau}_n, \quad (1.26)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_n$ – нормальное напряжение (вектор его направлен вдоль вектора \mathbf{n}); $\boldsymbol{\tau}_n$ – касательное напряжение (вектор лежит в плоскости сечения). Касательное напряжение, в свою очередь, может быть разложено на составляющие в плоскости сечения.

Для анализа напряженного состояния в окрестности точки выделяют элементарный прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны осям координат, и указывают компоненты вектора напряжения по этим осям на каждой грани параллелепипеда. Эти компоненты обозначают как σ_{ij} , где первый индекс соответствует обозначению оси, которой перпендикулярна

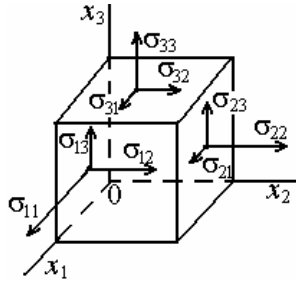


Рис. 1.7

грань, а второй – направление оси, вдоль которой действует составляющая вектора напряжения (рис. 1.7).

Матрица составляющих $\sigma = (\sigma_{ij})$ задает тензор напряжений в точке. Величины σ_{ij} являются компонентами тензора напряжений. Компоненты с одинаковыми индексами – нормальные напряжения, а с различными – касательные.

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Нормальные напряжения расположены на диагонали матрицы (1.27), а касательные симметричны относительно диагонали.

Инвариантность тензора σ относительно преобразования системы координат следует из закона изменения его компонентов σ_{ij} . Найдем связь между компонентами тензора напряжений на элементарных площадках dS_i , перпендикулярных осям x_i , и вектором напряжения \mathbf{p}_n на площадке dS , заданной единичным вектором \mathbf{n} и наклоненной к этим осям (рис. 1.8).

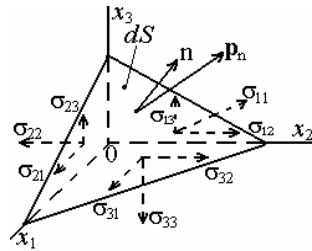


Рис. 1.8

Между размерами этих площадок имеется соотношение

$$dS_i = dS \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_i),$$

где \mathbf{i}_i – единичный вектор оси x_i .

Поскольку $\cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_i) = n_i$, запишем $n_i = dS_i / dS$. Из условия равновесия выделенного элемента в проекциях на ось x_1 следует

$$\sigma_{11}dS_1 + \sigma_{21}dS_2 + \sigma_{31}dS_3 = p_1dS.$$

Записывая проекцию на произвольную ось, имеем $p_i = (dS_\alpha / dS)\sigma_{\alpha i}$, или, после замены отношения площадей, стоящего в

скобках, на соответствующую компоненту вектора внешней нормали \mathbf{n} и перехода к векторной записи,

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.28)$$

Проекцию вектора \mathbf{p}_n на ось x'_i «новой» системы координат, повернутой относительно системы x_i , получим, умножив этот вектор скалярно на \mathbf{i}'_i – единичный вектор оси x'_i : $p'_i = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{i}'_i$. Если «новая» ось x'_1 совпадает с внешней нормалью \mathbf{n} , то $p'_1 = \sigma'_{11}$. Тогда $\sigma'_{11} = \mathbf{i}'_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{i}'_1$, или $\sigma'_{11} = \mathbf{i}'_1 \cdot \mathbf{i}_\alpha \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{i}_\beta \cdot \mathbf{i}'_1 = l_{1\alpha} l_{1\beta} \sigma_{\alpha\beta}$, где $l_{1i} = \cos(x'_1 \wedge x_i)$.

Вычисление других составляющих приводит к следующей формуле преобразования компонентов тензора напряжения при повороте осей координат:

$$\sigma'_{ij} = l_{i\alpha} l_{j\beta} \sigma_{\alpha\beta}, \quad (1.29)$$

где $l_{ij} = \cos(x'_i \wedge x_j)$ – косинусы углов между новыми и старыми осями.

Формула (1.29) совпадает с формулой (1.11), принятой в качестве определения тензора второго ранга. Впрочем, само понятие «тензор» произошло от латинского «*tendere*» – напрягать, натягивать.

Как и любой тензор второго ранга, тензор напряжений может быть приведен к главным осям, в которых матрица составляющих принимает диагональный вид (1.15). На гранях, перпендикулярных главным осям x°_i , действуют только нормальные напряжения σ°_i , которые называют главными напряжениями. Покажем возможность такого преобразования.

Пусть σ_{ij} – компоненты тензора напряжения, заданные в осях x_i . Главная площадка наклонена под некоторыми углами к осям x_i , n°_i – косинусы этих углов. Вектор напряжения на главной площадке связан с напряжениями σ_{ij} соотношением (1.28) и равен $\mathbf{p}^\circ = \mathbf{n}^\circ \cdot \boldsymbol{\sigma}$. С другой стороны, этот вектор направлен вдоль одной из осей x°_i и потому равен $\mathbf{p}^\circ = \sigma^\circ \mathbf{n}^\circ$, где σ° – одно из главных напряжений (его проекция на ось x°_i).

Приравнивая правые части этих выражений и учитывая, что $\mathbf{n}^\circ = \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}^\circ$, получаем, переходя к компонентам, следующие уравнения:

$$n_\alpha (\sigma_{\alpha i} - \sigma^\circ \delta_{\alpha i}) = 0. \quad (1.30)$$

Система уравнений (1.30) содержит четыре неизвестных σ° и n°_i ($i = 1, 2, 3$), соответствующих каждому главному направлению. При этом косинусы n°_i связаны условием ортогональности осей x°_i :

$n^\circ_\alpha n^\circ_\alpha = 1$. Нетривиальное решение системы существует, если определитель, составленный из коэффициентов, заключенных в круглые скобки в уравнениях (1.30), равен нулю:

$$|\sigma_{ij} - \sigma^\circ \delta_{ij}| = 0.$$

Раскрывая данный определитель, получаем кубическое уравнение

$$\sigma^{\circ 3} - I^{(1)}_\sigma \sigma^{\circ 2} + I^{(2)}_\sigma \sigma^\circ - I^{(3)}_\sigma = 0, \quad (1.31)$$

где

$$I^{(1)}_\sigma = \sigma_{\alpha\alpha}; \quad I^{(2)}_\sigma = 1/2 (\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}); \quad I^{(3)}_\sigma = |\sigma_{ij}| \quad (1.32)$$

являются коэффициентами, определяемыми через компоненты σ_{ij} тензора напряжений. Они называются соответственно первым, вторым и третьим инвариантом тензора напряжений (это отражено в индексах).

Уравнение (1.31) имеет три корня σ°_k ($k = 1, 2, 3$) – три главных напряжения. Их индексы присваивают обычно в соответствии с правилом $\sigma^\circ_1 \geq \sigma^\circ_2 \geq \sigma^\circ_3$. Данное правило связано с физическим смыслом тензора напряжений и его ролью в процессах деформирования и разрушения тела.

Матрица, задающая тензор напряжений в главных осях, имеет диагональный вид:

$$\left(\sigma^\circ_{ij} \right) = \begin{pmatrix} \sigma^\circ_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^\circ_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^\circ_3 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Инварианты тензора напряжений в главных осях, определяемые согласно формулам (1.33), равны

$$\begin{aligned} I^{(1)}_\sigma &= \sigma^\circ_1 + \sigma^\circ_2 + \sigma^\circ_3; \\ I^{(2)}_\sigma &= \sigma^\circ_1 \sigma^\circ_2 + \sigma^\circ_2 \sigma^\circ_3 + \sigma^\circ_3 \sigma^\circ_1; \\ I^{(3)}_\sigma &= \sigma^\circ_1 \sigma^\circ_2 \sigma^\circ_3. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Три главные оси x°_i тензора напряжений взаимно перпендикулярны, их положение относительно исходных осей задано матрицей косинусов $n^{\circ(k)}_i$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma^\circ_k &= n^{\circ(k)}_\alpha n^{\circ(k)}_\beta \sigma_{\alpha\beta}; \\ \sigma_{ij} &= n^{\circ(1)}_i n^{\circ(1)}_j \sigma^\circ_1 + n^{\circ(2)}_i n^{\circ(2)}_j \sigma^\circ_2 + n^{\circ(3)}_i n^{\circ(3)}_j \sigma^\circ_3. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Индекс k величин $n^{\circ(k)}_i$ относится к одному из главных направлений, причем по условию ортогональности главных осей $n^{\circ(k)}_1{}^2 + n^{\circ(k)}_2{}^2 + n^{\circ(k)}_3{}^2 = 1$.

Касательные напряжения на главных площадках равны нулю. С положением главных осей связаны положения площадок, на которых действуют наибольшие касательные напряжения. Пусть положения нормалей к этим площадкам заданы единичными векторами $\mathbf{n}^{(m)}$; $n^{(m)}_k$ – косинусы углов между этими векторами и направлением главных осей тензора напряжений.

Вектор полного напряжения на площадке m имеет составляющие $\mathbf{p}^{(m)}_k = \sigma^{\circ}_k \mathbf{n}^{(m)}$. Нормальные напряжения согласно (1.34) равны

$$\sigma^{(m)} = n^{(m)}_1{}^2 \sigma^{\circ}_1 + n^{(m)}_2{}^2 \sigma^{\circ}_2 + n^{(m)}_3{}^2 \sigma^{\circ}_3. \quad (1.36)$$

Касательные напряжения получим по формуле (1.26) как геометрическую разность полного и нормального напряжения. С учетом этого

$$\tau^{(m)2} = (\sigma^{\circ}_1 n^{(m)}_1)^2 + (\sigma^{\circ}_2 n^{(m)}_2)^2 + (\sigma^{\circ}_3 n^{(m)}_3)^2 - [n^{(m)}_1{}^2 \sigma^{\circ}_1 + n^{(m)}_2{}^2 \sigma^{\circ}_2 + n^{(m)}_3{}^2 \sigma^{\circ}_3]^2. \quad (1.37)$$

Экстремальные значения касательных напряжений будем искать по методу неопределенных множителей Лагранжа. Для этого образуем функцию $F = \tau^{(m)2} - \lambda n^{(m)}_{\alpha} n^{(m)}_{\alpha}$, однородную относительно $n^{(m)}_i$, причем $n^{(m)}_{\alpha} n^{(m)}_{\alpha} = 1$; λ – множитель Лагранжа. Дифференцируя функцию F по $n^{(m)}_i$, получаем еще три уравнения, которые могут быть разрешены относительно неизвестных λ и $n^{(m)}_i$. Решение дает минимальные значения, равные нулю, на главных площадках и максимальные значения, равные полуразности главных напряжений, на площадках, наклоненных к главным под углом 45° :

$$\tau'_{12} = (\sigma^{\circ}_1 - \sigma^{\circ}_2) / 2; \tau'_{23} = (\sigma^{\circ}_2 - \sigma^{\circ}_3) / 2; \tau'_{31} = (\sigma^{\circ}_3 - \sigma^{\circ}_1) / 2. \quad (1.38)$$

Здесь индексы касательного напряжения – это индексы главных площадок, между которыми находится площадка с соответствующим касательным напряжением.

Как и любой тензор второго ранга (см. формулу (1.16)), тензор напряжений может быть разложен на шаровую часть и девиатор:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}_d, \text{ или } \sigma_{ij} = \sigma_{0ij} + \sigma_{dij}, \quad (1.39)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_0 = 1/3 \sigma_{\alpha\alpha} \mathbf{I}$; $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0$; $\sigma_{0ij} = 1/3 \sigma_{\alpha\alpha} \delta_{ij}$; $\sigma_{dij} = \sigma_{ij} - \sigma_{0ij}$.

Основываясь на определении девиатора, нетрудно убедиться в том, что первый инвариант девиатора напряжений равен нулю, а второй инвариант выражается через наибольшие касательные напряжения, заданные формулами (1.37). Квадратный корень из него называется интенсивностью касательных напряжений и равен

$$\tau_{\text{н}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\tau_{12}'^2 + \tau_{23}'^2 + \tau_{31}'^2}. \quad (1.40)$$

Девиатор напряжений в механике деформируемого твердого тела используют для записи условия пластичности. Через него выражают напряжения на площадках, равнонаклоненных к главным. Косинусы углов между площадками (и между осями, нормальными к этим площадкам) равны. Такие площадки образуют октаэдр, поэтому их называют *октаэдрическими*, как и напряжения на них.

Чтобы вычислить октаэдрические напряжения, запишем выражения для полного напряжения и нормального напряжения согласно формуле (1.35), подставив значения $n^{(\text{окт})}_i = 1/\sqrt{3}$. Полное напряжение на октаэдрических площадках равно $p'_{\text{окт}} = (\sigma^{\circ}_1 + \sigma^{\circ}_2 + \sigma^{\circ}_3) / \sqrt{3}$, а нормальные напряжения $\sigma_{\text{окт}} = (\sigma^{\circ}_1 + \sigma^{\circ}_2 + \sigma^{\circ}_3) / 3$. Касательные напряжения получим на основании формулы (1.26):

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}'^2 + \tau_{23}'^2 + \tau_{31}'^2}. \quad (1.41)$$

Они отличаются от интенсивности касательных напряжений, заданной формулой (1.40), только множителем.

Заметим также, что интенсивности касательных напряжений и касательные напряжения на октаэдрических площадках связаны с эквивалентными напряжениями, определяемыми согласно третьей теории прочности, в которой ответственной за разрушение принимают энергию формоизменения (см. подразд. 5.1).

Уравнения равновесия. Рассмотрим деформируемое тело, находящееся в равновесии под действием приложенных к нему поверхностных \mathbf{p}_n и объемных \mathbf{f}_V сил. Главный вектор этих сил и главный момент относительно произвольной точки равны нулю. Из первого условия следует уравнение равновесия

$$\int_S \mathbf{p}_n dS + \int_V \mathbf{f}_V dV = 0. \quad (1.42)$$

Подставив в первое слагаемое \mathbf{p}_n из формулы (1.28) и преобразовав его на основании теоремы Остроградского – Гаусса (1.22), получим

$$\int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_V) dV = 0. \quad (1.42')$$

Уравнение (1.42') записано для всего тела. Но из условия равновесия тела следует, что каждый элементарный объем также находится в равновесии, поэтому

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_V = 0. \quad (1.43)$$

При отсутствии объемных сил условие равновесия записывается как

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (1.44)$$

а для компонентов тензора напряжений –

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0. \quad (1.44')$$

Запишем второе уравнение равновесия тела при отсутствии объемных сил (на общность получаемого результат это не влияет):

$$\int_S \mathbf{r} \times \mathbf{p}_n dS = 0. \quad (1.45)$$

Снова введем напряжения согласно формуле (1.28). Тогда подынтегральное выражение равно $\mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{r} \times n_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{i}_{\beta} = n_{\alpha} (\mathbf{r} \times \mathbf{i}_{\beta} \sigma_{\alpha\beta})$, и после преобразования по теореме Остроградского – Гаусса интеграла в левой части уравнения (1.45) имеем

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\mathbf{r} \times \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{i}_{\beta}) dV = \int_V (\mathbf{i}_{\alpha} \times \mathbf{i}_{\beta}) \sigma_{\alpha\beta} dV + \int_V \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{i}_{\beta} \right) dV. \quad (1.46)$$

Подынтегральное выражение во втором слагаемом правой части равно нулю, согласно уравнению (1.44). По условию равновесия тела в целом должна равняться нулю также подынтегральная функция в первом слагаемом, т. е. $(\mathbf{i}_{\alpha} \times \mathbf{i}_{\beta}) \sigma_{\alpha\beta} = \mathbf{i}_{\gamma} \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} = 0$. Приняв во внимание свойства символов Леви-Чивита (1.4), получим три соотношения:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}; \sigma_{23} = \sigma_{32}; \sigma_{31} = \sigma_{13}, \text{ или } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ при } i \neq j, \quad (1.47)$$

выражающих свойство симметрии тензора напряжений, называемое также законом парности касательных напряжений. Таким образом, установлено, что симметрия тензора напряжений вытекает из условия равновесия тела.

Частные случаи напряженного состояния. Если все три компонента тензора напряжений в главных осях отличны от нуля, то напряженное состояние в точке называют *объемным*. Напряженное состояние называется *плоским*, если одно из главных напряжений равно нулю, а другие отличны от нуля. При *одноосном растяжении-сжатии* два главных напряжения равны нулю.

При плоском напряженном состоянии систему координат выбирают так, что одна из осей совпадает с главной осью, в направлении которой напряжение равно нулю. Если, например, $\sigma_3^o = 0$ и $x_3 = x_3^o$, то матрица (1.27), задающая тензор напряжений, имеет вид:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

Отличные от нуля компоненты тензора напряжений лежат в плоскости x_1x_2 (рис. 1.9). В этой же плоскости действуют два

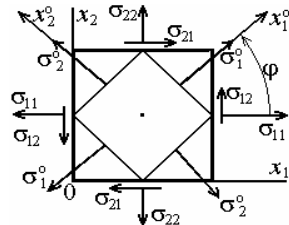


Рис. 1.9

главных напряжения, причем направления главных осей x_1^o и x_2^o отличаются от направления осей x_1 и x_2 . Заметим, что при обозначении главных осей учитывают введенное выше правило присвоения индексов главным напряжениям, согласно которому должно выполняться условие $\sigma_1^o \geq \sigma_2^o \geq \sigma_3^o$.

В случае плоского напряженного состояния, заданного матрицей (1.48), выражения для инвариантов тензора напряжений упрощаются:

$$\begin{aligned} I_{\sigma}^{(1)} &= \sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_1^o + \sigma_2^o; \\ I_{\sigma}^{(2)} &= \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = \sigma_1^o \sigma_2^o; \\ I_{\sigma}^{(3)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Уравнение (1.31) вырождается в квадратное уравнение, из которого находят главные напряжения в плоскости x_1x_2 :

$$\sigma_{1,2} = I_{\sigma}^{(1)} / 2 \pm \sqrt{\left(I_{\sigma}^{(1)} / 2\right)^2 - I_{\sigma}^{(2)}}. \quad (1.50)$$

Для задания главных осей в плоскости x_1x_2 достаточно указать один угол, например угол φ между осями x_1 и x_1° (см. рис. 1.9). Тогда формулы преобразования компонентов тензора напряжений в плоскости x_1x_2 имеют вид (ср. (1.35)):

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1^{\circ} \cos^2 \varphi + \sigma_2^{\circ} \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(\sigma_1^{\circ} + \sigma_2^{\circ}) + \frac{1}{2}(\sigma_1^{\circ} - \sigma_2^{\circ}) \cos 2\varphi; \\ \sigma_{22} &= \sigma_1^{\circ} \sin^2 \varphi + \sigma_2^{\circ} \cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(\sigma_1^{\circ} + \sigma_2^{\circ}) - \frac{1}{2}(\sigma_1^{\circ} - \sigma_2^{\circ}) \cos 2\varphi; \\ \tau &= \sigma_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1^{\circ} - \sigma_2^{\circ}) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Формулы (1.51) могут быть выведены непосредственно из графического представления компонентов тензора напряжений в виде круговой диаграммы Мора в координатах $\sigma - \tau$ (рис. 1.10).

Круговые диаграммы Мора строят и для произвольного (объемного) напряженного состояния в виде трех окружностей, каждая из которых отражает изменение компонентов тензора напряжений при повороте осей координат относительно главных осей тензора напряжений в соответствующей плоскости (рис. 1.11).

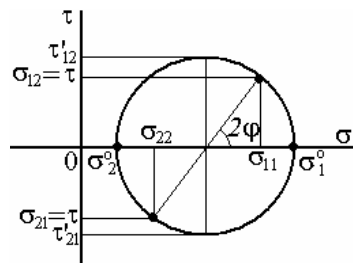


Рис. 1.10

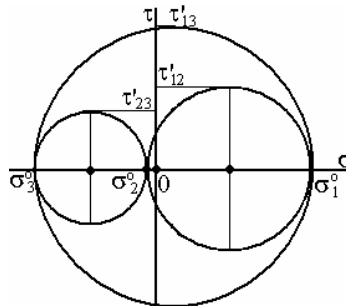


Рис. 1.11

Значения главных напряжений, необходимые для построения окружности Мора при плоском напряженном состоянии, вычисляют по формуле (1.50). Угол φ находят из соотношения, вытекающего непосредственно из формул (1.51):

$$\operatorname{tg}2\varphi = 2\sigma_{12} / (\sigma_{11} - \sigma_{22}). \quad (1.52)$$

Чтобы указать направление, в котором действует наибольшее из главных напряжений в плоскости σ_1° , ось, соответствующую наибольшему нормальному напряжению σ_{11} или σ_{22} , поворачивают на угол φ в направлении касательного напряжения на этой площадке (см. рис. 1.9).

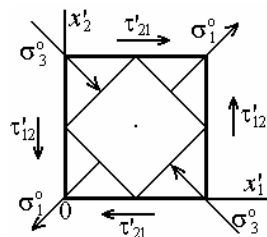


Рис. 1.12

Частный случай плоского напряженного состояния – чистый сдвиг, при котором $\sigma_1^\circ = -\sigma_3^\circ$; $\sigma_2^\circ = 0$, а $\tau_{12}^\circ = \sigma_1^\circ$ (рис. 1.12).

При одноосном растяжении-сжатии только одно из главных напряжений отлично от нуля.

При равномерном всестороннем сжатии касательные напряжения в любой плоскости равны нулю, а нормальные напряжения в любом направлении и главные напряжения $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, где p – давление. Знак «минус» означает, что напряжения сжимающие. Из приведенного выражения следует, что в данном случае тензор напряжений – шаровой тензор.

Упражнение

Для плоского напряженного состояния, при котором $\sigma_{11} = 10$ МПа, $\sigma_{12} = 10$ МПа, $\sigma_{22} = -20$ МПа:

- построить тензор напряжений и указать его компоненты на рисунке;
- вычислить инварианты тензора напряжений;
- найти и указать на рисунке главные напряжения, главные площадки;
- построить круговую диаграмму Мора, указать на ней заданные и главные напряжения;
- вычислить и указать на диаграмме Мора наибольшие касательные напряжения.

1.3. Тензор деформаций

Перемещения и деформации. Под действием внешних и внутренних сил деформируемое тело (сплошная среда) перемещается в пространстве, изменяются положения точек относительно некоторой неподвижной системы координат и расстояния между точками. В общем случае такие изменения называют движением. Если расстояния между точками изменяются непрерывно и необратимо, то

движение сплошной среды называют течением.

Перемещение произвольной точки A за промежуток времени t характеризует вектор перемещения $\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ (рис. 1.13), проекции которого на координатные оси $u_i = x'_i - x_i$, где x_i – координаты точки A в начальный момент, а x'_i – координаты в момент t .

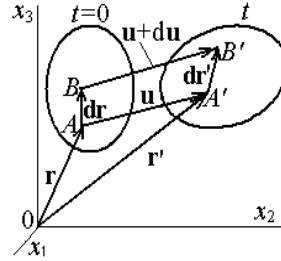


Рис. 1.13

В механике сплошной среды различают два способа задания движения. По одному из них (движение по Лагранжу) указывают переменные во времени координаты фиксированной точки среды (материальной точки). По другому (движение по Эйлери) указывают исходные координаты материальных точек, проходящих последовательно фиксированную точку пространства. Между этими способами задания движения существует взаимно однозначное соответствие. В дальнейшем ограничимся описанием движения по Лагранжу. В этом случае координаты точек в произвольный момент времени t являются функциями их координат в начальный момент: $x'_i = x'_i(x_j, t)$.

Точка B , отстоящая в исходном положении на малом расстоянии от точки A , задана радиусом-вектором $\mathbf{r} + \mathbf{dr}$, а в момент t ее радиус-вектор $\mathbf{r}' + \mathbf{dr}'$, тогда перемещение равно $\mathbf{u} + \mathbf{du}$ (см. рис. 1.13). Рассмотрим в качестве меры деформации среды в окрестности точки A изменение расстояния от нее до точки B . Учитывая, что $dr^2 = \mathbf{dr} \cdot \mathbf{dr} = dx_\alpha dx_\alpha$; $dr'^2 = \mathbf{dr}' \cdot \mathbf{dr}' = dx'_\alpha dx'_\alpha$; $dx'_i = (\partial x'_i / \partial x_\alpha) dx_\alpha$, запишем

$$dr'^2 - dr^2 = \left(\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\gamma} - \delta_{\beta\gamma} \right) dx_\beta dx_\gamma = 2L_{\beta\gamma} dx_\beta dx_\gamma,$$

где

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right) \quad (1.53)$$

являются компонентами тензора второго ранга, называемого тензором конечных деформаций Грина.

Введем в формулы (1.53) вместо координат компоненты вектора перемещения: $x'_i = u_i + x_i$. Тогда

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.54)$$

Отношение $\mathbf{D} = \mathbf{du} / \mathbf{dr}$, заданное матрицей составляющих $(\partial u_i / \partial x_j)$, также представляет собой тензор второго ранга, характеризующий относительное перемещение точек деформируемого тела в пространстве, и называется тензором дисторсии (от латинского «*distortio*» – отклонение, искривление). Тензор дисторсии является транспонированным по отношению к градиенту векторного поля перемещений $\nabla \mathbf{u} = (\partial u_j / \partial x_i)$, поскольку в матрицах, задающих эти тензоры, столбцы и строки переставлены. Следовательно, $\mathbf{du} / \mathbf{dr} = (\nabla \mathbf{u})^*$, где звездочкой обозначено транспонирование.

Разложим, следуя правилу (1.14), тензор дисторсии на симметричную и антисимметричную части: $\mathbf{du} / \mathbf{dr} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})$ – симметричный тензор, называемый тензором малых деформаций; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_{ij})$ – антисимметричный тензор, называемый тензором вращения.

Согласно определению, компоненты тензора малых деформаций и тензора вращения равны

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.55)$$

Таким образом, тензор малых деформаций симметричен по определению. Формулы (1.55), связывающие его компоненты с перемещениями, называют уравнениями Коши. Сравнение их с формулами (1.54) показывает, что здесь учитываются только производные перемещений по координатам, но отсутствуют их произведения. Именно по этой причине деформации, заданные формулами (1.55), называют малыми, а заданные формулами (1.54) – конечными. В дальнейшем будем рассматривать только малые деформации, заданные тензором $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})$.

Связь тензора деформаций, компоненты которого заданы формулами (1.55), с вектором перемещения будем записывать в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{du} / \mathbf{dr} + \nabla \mathbf{u}) \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \text{def} \mathbf{u}, \quad (1.56)$$

где символ *def* обозначает действия над составляющими вектора, предусмотренные первой формулой (1.55).

Выясним геометрический смысл компонентов вектора перемещений и тензора деформаций. Допустим, отрезок AB лежит в плоскости x_1x_2 ; u_1 – перемещение точки A в направлении оси x_1 , а u_2 – в направлении оси x_2 ; du_1 и du_2 – приращения перемещений (рис. 1.14).

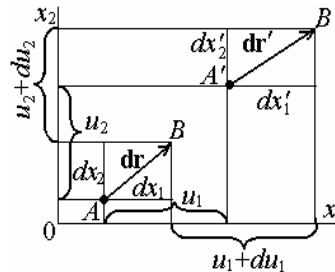


Рис. 1.14

Если отрезок AB имеет длину dx_1 и направлен вдоль оси x_1 , то отношение du_1 / dx_1 , равное ε_{11} , – относительное удлинение отрезка AB . В общем случае диагональные элементы матрицы (ε_{ij}) , т. е. величины ε_{11} , ε_{22} и ε_{33} , – относительные удлинения отрезка AB по осям координат.

Применительно к исследованию деформаций КМ в отношении введенных в данном параграфе перемещений и деформаций необходимо сделать следующее замечание. Деформации, как видно из рис. 1.14, связаны с длиной элементарного отрезка. Если размер отрезка на порядок больше характерного размера элементов структуры, но мал по сравнению с размерами тела, то речь идет о деформациях осредненных участков тела, т. е. о *макродеформациях*. Размер отрезка может быть и на порядок меньше характерных размеров элементов структуры, если необходимо определить деформации, отнесенные к элементам структуры, или *микродеформации*. Свойства тензора деформаций как математического объекта аналогично свойствам тензора напряжений от исследуемого структурного уровня не зависят.

Приращение вектора перемещения записывается как $d\mathbf{u} = (\mathbf{du} / \mathbf{dr}) \cdot \mathbf{dr}$ или в компонентах $du_i = (\partial u_i / \partial x_\alpha) dx_\alpha$. В частности, $du_1 = (\partial u_1 / \partial x_1) dx_1 + (\partial u_1 / \partial x_2) dx_2 + (\partial u_1 / \partial x_3) dx_3$. Если первое слагаемое дает удлинение по оси x_1 , то второе и третье дают смещение точки B в направлении оси x_1 за счет поворота отрезков dx_2 и dx_3 соответственно.

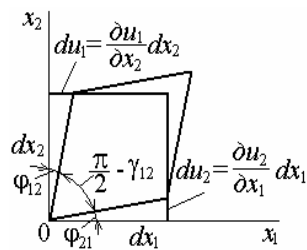


Рис. 1.15

Поскольку перемещения малы, то величины $\partial u_1 / \partial x_2 = \text{tg} \varphi_{12} \cong \varphi_{12}$ и $\partial u_2 / \partial x_1 = \text{tg} \varphi_{21} \cong \varphi_{21}$ характеризуют поворот отрезков dx_2 и dx_1 (рис. 1.15). Их сумма равна $\gamma_{12} = \partial u_1 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_1 = 2\varepsilon_{12}$

и представляет собой изменение первоначально прямого угла между этими отрезками, поэтому величины γ_{ij} – углы сдвига в плоскостях, заданных индексами, а компоненты ε_{ij} при $i \neq j$ равны половине соответствующих углов сдвига.

Разность $\varphi_{12} - \varphi_{21} = \partial u_1 / \partial x_2 - \partial u_2 / \partial x_1 = 2\omega_{12}$ представляет собой угол поворота отрезка AB относительно оси x_3 (см. рис. 1.14). Отсюда очевидно название тензора ω .

При повороте координатных осей компоненты тензора деформаций преобразуются по общему правилу преобразования тензора второго ранга (см. формулы (1.11) и (1.29)). В данном случае

$$\varepsilon'_{ij} = l_{i\alpha} l_{j\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (1.57)$$

где $l_{ij} = \cos(x'_i \wedge x_j)$ – косинусы углов между новыми и старыми осями.

Главные деформации. Тензор деформаций может быть преобразован к главным осям. Эта процедура аналогична процедуре преобразования тензора напряжений. Главные деформации являются корнями кубического уравнения, аналогичного уравнению (1.31):

$$\varepsilon^{\circ 3} - I^{(1)}_{\varepsilon} \varepsilon^{\circ 2} + I^{(2)}_{\varepsilon} \varepsilon^{\circ} - I^{(3)}_{\varepsilon} = 0, \quad (1.58)$$

где

$$I^{(1)}_{\varepsilon} = \varepsilon_{\alpha\alpha}; \quad I^{(2)}_{\varepsilon} = 1/2(\varepsilon_{\alpha\alpha}\varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}); \quad I^{(3)}_{\varepsilon} = |\varepsilon_{ij}| \quad (1.59)$$

являются инвариантами тензора деформаций.

Справедливо также следующее разложение тензора деформаций на шаровую часть и девиатор:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_o + \boldsymbol{\varepsilon}_d, \quad \text{или} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{oij} + \varepsilon_{dij}, \quad (1.60)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_o = 1/3 \varepsilon_{\alpha\alpha} \mathbf{I}$; $\boldsymbol{\varepsilon}_d = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_o$; $\varepsilon_{oij} = 1/3 \varepsilon_{\alpha\alpha} \delta_{ij}$; $\varepsilon_{dij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{oij}$.

Поскольку диагональные компоненты тензора деформаций – относительные удлинения (сокращения) в направлении координатных осей, то их сумма

$$\theta = \varepsilon_{\alpha\alpha} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.61)$$

представляет собой относительное изменение объема элементарного прямоугольного параллелепипеда, построенного на отрезках dx_i . Действительно, если до деформирования объем этого параллелепипеда $\Delta V_0 = dx_1 dx_2 dx_3$, а после деформирования $\Delta V = [1 + (\partial u_1 / \partial x_1)] dx_1 \times [1 + (\partial u_2 / \partial x_2)] dx_2 \times [1 + (\partial u_3 / \partial x_3)] dx_3$, то, пренебрегая произведениями малых величин $\partial u_i / \partial x_j$, имеем

$$\theta = \frac{\Delta V - \Delta V_0}{\Delta V_0} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (1.62)$$

Таким образом, сумма главных деформаций равна относительному изменению объема.

Условия совместности деформаций. При движении сплошная среда последовательно занимает различные положения, поэтому вектор перемещения точки и тензор деформаций в окрестности точки – непрерывные функции. При этом три компоненты вектора перемещений должны однозначно определяться через шесть составляющих тензора деформаций. Формально это означает, что интеграл, задающий перемещение точки из положения A_0 в произвольное положение A ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \int_{A_0}^A \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} \right) \cdot d\mathbf{r}$$

не должен зависеть от пути интегрирования.

Это имеет место, если компоненты тензора деформаций удовлетворяют определенным условиям, называемым условиями совместности деформаций. Данные условия сводятся к равенству нулю тензора второго ранга – тензора несовместности $\boldsymbol{\eta} = -\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^*$.

Записывая компоненты тензора несовместности, получаем шесть соотношений

$$\varepsilon_{i\alpha\gamma} \varepsilon_{j\beta\delta} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} = 0, \quad (1.63)$$

называемых *уравнениями совместности деформаций*.

В частном случае деформирования в плоскости x_1x_2 (см. рис. 1.14) условие совместности деформаций выражается всего лишь одним уравнением

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \quad (1.64)$$

Температурные и усадочные деформации. Изменение температуры тела от естественного (ненапряженного) состояния при температуре T_0 до температуры эксплуатации T вызывает изменения размеров, а в некоторых случаях и формы тела, которые характеризуются температурными деформациями. В общем случае

анизотропного материала эти деформации задаются тензором второго ранга $\alpha = (\alpha_{ij})$ с компонентами

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij} \Delta T, \quad (1.65)$$

где $\Delta T = T - T_0$; α_{ij} – температурные коэффициенты линейного расширения (ТКЛР).

Диагональные элементы матрицы (α_{ij}) – это линейные температурные деформации, т. е. относительные изменения длины отрезков, ориентированных в направлении координатных осей, а другие элементы (при $i \neq j$) – углы сдвига в соответствующей плоскости: $\gamma_{ij}^T = 2\alpha_{ij} \Delta T$.

Если ТКЛР зависят от температуры, то температурные деформации определяют как интеграл:

$$\varepsilon_{ij}^T = \int_{T_0}^T \alpha_{ij}(T) dT. \quad (1.66)$$

Изменения линейных размеров и формы тела могут быть связаны со структурными превращениями материала. Упорядочение структуры приводит к уменьшению объема – усадке, поэтому обусловленные структурными превращениями деформации называют усадочными. Если тело анизотропно, их задают тензором второго ранга $\beta = (\beta_{ij})$, где диагональные элементы представляют собой линейные составляющие усадки, а другие элементы (при $i \neq j$) – деформации сдвига, обусловленные усадкой. Согласно определению усадочных деформаций, $\varepsilon_{ij}^y = -\beta_{ij}$, где величины β_{ij} положительны, тогда как в зависимости от типа анизотропной структуры и ориентации осей углы сдвига, обусловленные усадкой, т. е. величины β_{ij} (при $i \neq j$), могут быть как положительными, так и отрицательными. Сумма диагональных элементов $\beta_V = \beta_{\alpha\alpha}$ дает относительное изменение объема – объемную усадку.

Упражнение

Для деформированного состояния, заданного матрицей компонентов тензора деформаций, найти инварианты тензора деформаций, вычислить и указать на рисунке главные деформации; вычислить относительное изменение объема; разложить тензор деформаций на шаровую часть и девиатор.

1.4. Обобщенный закон Гука

Тензорная и матричная формы записи. Поведение материала характеризуется зависимостью между напряжениями и деформациями, возникающими при нагружении тела. Простейший случай такой зависимости – линейная связь между напряжениями и деформациями при одноосном растяжении-сжатии упругого тела – называется законом Гука. Заметим при этом, что упругость предполагает обратимость деформаций после прекращения действия напряжений, а линейная упругость, отражаемая законом Гука, является лишь одной из моделей поведения материала.

Линейная зависимость между компонентами тензоров напряжений и деформаций при сложном напряженном состоянии упругого тела обозначается как обобщенный закон Гука. Соответствующие соотношения могут быть записаны и для напряжений, и для деформаций:

$$\sigma_{ij} = C_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}; \quad (1.67)$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ij\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}, \quad (1.68)$$

где C_{ijmn} – компоненты тензора четвертого ранга, называемого тензором модулей упругости, а S_{ijmn} – компоненты тензора упругих податливостей; по повторяющимся индексам, обозначенным греческими буквами, производится суммирование от 1 до 3.

Воспользовавшись символической формой представления операции свертывания тензоров как скалярного произведения, уравнения (1.67) и (1.68) представим в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.69)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.70)$$

Общее число компонентов C_{ijmn} и S_{ijmn} каждого из тензоров четвертого ранга \mathbf{C} и \mathbf{S} равно 3^4 . Правда, в связи с симметрией тензоров напряжений и деформаций компоненты, получаемые перестановкой индексов в парах i, j и m, n , равны, в частности $C_{ijmn} = C_{jimn} = C_{ijnm} = C_{jinm}$. Это сокращает число различных компонентов до 36.

Вычислим энергию, накапливаемую в единице объема тела, которое нагружается до напряжений σ_{ij} , как работу на упругой деформации, изменяющейся по мере нагружения:

$$U_1 = \int \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.71)$$

Ввиду линейной зависимости между напряжениями и деформациями (1.67) интеграл (1.71) равен

$$U_1 = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta}. \quad (1.72)$$

Величину U_1 называют упругим потенциалом, а формулу (1.72) – формулой Клапейрона. Согласно этой формуле, упругий потенциал является квадратичной формой компонентов тензоров напряжений или деформаций, вследствие чего компоненты тензоров модулей упругости и упругих податливостей симметричны относительно перестановки пар индексов: $C_{ijmn} = C_{mnij}$, $C_{jinn} = C_{nmji}$ и т. д. В результате число различных компонентов этих тензоров равно 21. Дальнейшее сокращение связано со структурой материала.

Запись тензоров \mathbf{C} и \mathbf{S} через компоненты в наглядном виде затруднена. В связи с этим наряду с тензорными выражениями (1.67) и (1.68) используют матричную запись обобщенного закона Гука.

Введем вместо тензоров напряжений и деформаций $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ векторы $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)$ и $\mathbf{e} = (e_i)$, составляющие которых образованы по следующим правилам:

$$\xi_1 = \sigma_{11}; \xi_2 = \sigma_{22}; \xi_3 = \sigma_{33}; \xi_4 = \sigma_{23}; \xi_5 = \sigma_{31}; \xi_6 = \sigma_{12}; \quad (1.73)$$

$$e_1 = \varepsilon_{11}; e_2 = \varepsilon_{22}; e_3 = \varepsilon_{33}; e_4 = 2\varepsilon_{23}; e_5 = 2\varepsilon_{31}; e_6 = 2\varepsilon_{12}. \quad (1.74)$$

Указанных здесь шести составляющих векторов достаточно, чтобы задать тензоры напряжений и деформаций, поскольку эти тензоры симметричны. Величины e_4 , e_5 и e_6 равны соответствующим углам сдвига: $e_4 = \gamma_{23}$; $e_5 = \gamma_{31}$ и $e_6 = \gamma_{12}$.

Соотношения (1.73) и (1.74) позволяют записать линейную связь между напряжениями и деформациями:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}, \text{ или } \xi_i = c_{i\alpha} e_\alpha, \quad (1.75)$$

либо между деформациями и напряжениями:

$$\mathbf{e} = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\xi}, \text{ или } e_i = s_{i\alpha} \xi_\alpha, \quad (1.76)$$

где $\mathbf{c} = (c_{ij})$ и $\mathbf{s} = (s_{ij})$ – матрицы жесткости и упругих податливостей соответственно; точка обозначает операцию умножения матриц, а по повторяющимся индексам, обозначенным греческими буквами, предполагается суммирование от 1 до 6.

Матрицы \mathbf{c} и \mathbf{s} имеют размеры 6×6 . Например, матрица упругих податливостей записывается как

$$(s_{ij}) = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{pmatrix}. \quad (1.77)$$

Ввиду симметрии матриц \mathbf{c} и \mathbf{s} число различных элементов каждой из них равно 21. Кроме того, эти матрицы взаимно обратные, т. е. $\mathbf{c} = \mathbf{s}^{-1}$ и $\mathbf{s} = \mathbf{c}^{-1}$, где символом « $^{-1}$ » обозначена обратная матрица. По определению, $\mathbf{s} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{I}$, т. е. для элементов выполняются соотношения $c_{i\alpha} s_{\alpha j} = \delta_{ij}$ и $s_{i\alpha} c_{\alpha j} = \delta_{ij}$.

Постоянные упругости изотропного тела. Выясним физический смысл компонентов тензоров и элементов матриц, задающих упругие свойства, на примере изотропного тела, изучаемого в курсе механики материалов и конструкций (сопротивления материалов).

Как известно, при одноосном растяжении напряжением $\xi_1 = \sigma_{11}$ стержня, ось которого совпадает с осью x_1 , относительное удлинение в направлении оси x_1 равно $\varepsilon_{11} = \sigma_{11} / E_1$, где E_1 – модуль Юнга. Индекс у модуля Юнга здесь можно опустить, поскольку модуль упругости изотропного материала не зависит от направления растяжения.

Относительное удлинение вдоль оси, согласно формулам (1.68) и (1.76), равно $\varepsilon_{11} = e_1 = S_{1111}\sigma_{11} = s_{11}\xi_1$. Поперечные деформации составляют $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = (-\mu / E) \sigma_{11}$, где μ – коэффициент Пуассона. По формулам (1.68) и (1.76) имеем $\varepsilon_{22} = S_{2211}\sigma_{11}$; $\varepsilon_{33} = S_{3311}\sigma_{11}$ и $e_2 = s_{21}\xi_1$; $e_3 = s_{31}\xi_1$. Другие компоненты тензора деформаций в данном случае равны нулю.

Очевидно, что аналогичные соотношения могут быть записаны и при растяжении стержня вдоль осей x_2 или x_3 , только при этом изменятся индексы у компонентов тензора и элементов матрицы упругих податливостей. В итоге в случае изотропного тела для отличных от нуля компонентов тензора и элементов матрицы упругих податливостей имеем

$$\begin{aligned} S_{1111} = s_{11} = s_{22} = s_{33} = S_{3333} = S_{2222} &= 1 / E; \\ S_{1122} = s_{12} = s_{13} = s_{23} = S_{2233} = S_{3311} &= -\mu / E. \end{aligned}$$

При чистом сдвиге в плоскости x_1x_2 , когда в ней действуют только касательные напряжения $\tau_{12} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \xi_6$, угол сдвига в этой плоскости равен

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \tau_{12} / G = \sigma_{12} / G,$$

а из уравнений (1.68) и (1.76) получается

$$\varepsilon_{12} = S_{1212}\sigma_{12} + S_{1221}\sigma_{21} = 2S_{1212}\sigma_{12} \text{ и } e_6 = s_{66}\xi_6.$$

Отсюда следует, что $S_{1212} = S_{1221} = S_{2112} = S_{2121} = 1/4G$ и $s_{66} = 1/G$.

Аналогичные соотношения получим и при сдвиге в других координатных плоскостях. В результате матрицу упругих податливостей изотропного тела запишем в виде:

$$(s_{ij}) = \begin{pmatrix} 1/E & -\mu/E & -\mu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/E & 1/E & -\mu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/E & -\mu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{pmatrix}. \quad (1.78)$$

В таком же формате могут быть представлены компоненты тензора упругих податливостей:

$$(S_{ijmn}) = \begin{pmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1123} & S_{1131} & S_{1112} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2231} & S_{2212} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & S_{3323} & S_{3331} & S_{3312} \\ S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & S_{2323} & S_{2331} & S_{2312} \\ S_{3111} & S_{3122} & S_{3133} & S_{3123} & S_{3131} & S_{3112} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1223} & S_{1231} & S_{1212} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E & -\mu/E & -\mu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/E & 1/E & -\mu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/E & -\mu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4G \end{pmatrix}. \quad (1.79)$$

В отличие от матрицы упругих податливостей, записанной в виде (1.78), в матрице (1.79) представлены не все компоненты тензора упругих податливостей. Их нетрудно найти, используя свойства симметрии, например $S_{3122} = S_{1322}$. К тому же компоненты, задающие деформации сдвига, отличаются в 4 раза от соответствующих элементов матрицы упругих податливостей, например $S_{1212} = s_{66} / 4$. Это различие следует из соотношений, приведенных выше при вычислении деформаций сдвига.

Задание постоянных упругости изотропного тела в тензорном или матричном виде позволяет записать компоненты тензора деформаций при любом напряженном состоянии.

Например, при равномерном всестороннем растяжении напряжениями $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p$ объемная деформация равна

$$\theta \equiv \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3(S_{1111}\sigma_{11} + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1133}\sigma_{33}).$$

Подставив значения компонентов тензора упругих податливостей, получим $\theta = 3p(1 - 2\mu) / E$, или $\theta = p / K$, где

$$K = E / 3(1 - 2\mu) \quad (1.80)$$

является модулем объемной деформации.

Напряжения как функции деформаций заданы формулами (1.67) и (1.75). При одноосном растяжении в направлении оси x_1

$$\sigma_{11} = C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1122}\varepsilon_{22} + C_{1133}\varepsilon_{33}, \text{ или } \xi_1 = c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + c_{13}e_3. \quad (1.81)$$

Элементы матрицы жесткости \mathbf{c} получим, обратив матрицу \mathbf{s} :

$$\begin{aligned} c_{11} = c_{22} = c_{33} &= E(1 - \mu) / [(1 - 2\mu) / (1 + \mu)]; \\ c_{12} = c_{23} = c_{31} &= \mu E / [(1 - 2\mu)(1 + \mu)]; \quad c_{44} = c_{55} = c_{66} = G. \end{aligned}$$

Как известно, модуль сдвига изотропного тела связан с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона соотношением

$$G = E / 2(1 + \mu), \quad (1.82)$$

поэтому все компоненты модулей упругости и элементы матрицы жесткости выражаются только через две постоянные.

Примем в качестве таких величин постоянные Ламе $L = C_{1122} = c_{12} = \mu E / [(1 - 2\mu)(1 + \mu)]$ и $G = C_{1212} = c_{66}$. Тогда компоненты тензора модулей упругости вычисляются по формуле

$$C_{ijmn} = L\delta_{ij}\delta_{mn} + G(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}). \quad (1.83)$$

Формула (1.83) задает компоненты тензора \mathbf{C} – изотропного тензора 4-го ранга – через две постоянные. Из нее следует связь между компонентами тензора модулей упругости изотропного тела и постоянными Ламе, например $C_{1111} = C_{1122} + 2C_{1212} = L + 2G$.

В качестве двух независимых постоянных, задающих упругие свойства изотропного тела, может быть принята любая пара: E и μ , K и G , L и G и др. Между ними существует однозначная связь. Некоторые соотношения указаны выше. Запишем также используемые в дальнейшем выражения модуля Юнга и коэффициента Пуассона через модули объемной деформации и сдвига:

$$E = 9KG / (3K + G); \mu = (3K - G) / 2(3K + G). \quad (1.84)$$

Постоянные упругости анизотропных тел. Анизотропное тело характеризуется тем, что параметры его структуры и физико-механических свойств зависят от направления.

Рассмотрим два наиболее типичных представителя анизотропных КМ – ортотропный и трансверсально-изотропный материалы.

Примером *ортотропного материала* служит КМ на основе ткани, имеющей ортогонально расположенные нити основы и утка (рис. 1.16). Свойства в направлениях армирования отличаются от свойств в других направлениях в плоскости ткани и под произвольным углом к этой плоскости.

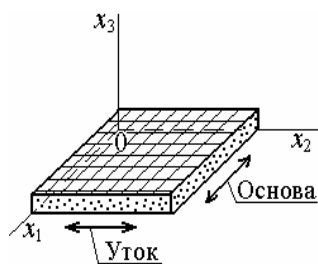


Рис. 1.16

Свяжем с направлениями основы и утка ткани оси координат x_1 и x_2 , а ось x_3 направим перпендикулярно плоскости армирования. Для однородного материала любые направления, параллельные данным осям, эквивалентны. Эти оси называют *главными осями симметрии структуры*. Они являются также *главными осями симметрии упругих свойств*.

Вырезав образцы параллельно введенным осям, определим постоянные упругости для каждого направления – модули Юнга E_1 , E_2 и E_3 , модули сдвига G_{12} , G_{23} и G_{31} и коэффициенты Пуассона μ_{12} , μ_{23} , μ_{31} , μ_{21} , μ_{32} и μ_{13} . Индекс модуля Юнга указывает направление растяжения образца, индексы модуля сдвига – плоскость, в которой производится сдвиг, первый индекс коэффици-

ентов Пуассона – направление сокращения при растяжении в направлении, заданном вторым индексом (иногда используют обратное расположение индексов). Перечисленные здесь постоянные упругости определяют из эксперимента, поэтому их называют техническими.

Применим для записи связи между напряжениями и деформациями матричную форму (1.75). Рассматривая последовательно напряженные состояния, задаваемые в экспериментах, проводимых с целью определения технических постоянных упругости, находим выражения, связывающие их с составляющими матрицы упругих податливостей. В результате запишем эту матрицу как

$$(s_{ij}) = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\mu_{12}/E_2 & -\mu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\mu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{31}/E_1 & -\mu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{pmatrix}. \quad (1.85)$$

Аналогичным образом выглядит матрица, составленная из компонентов тензора упругих податливостей, но при этом $S_{2323} = s_{44} / 4 = 1/4G_{23}$; $S_{3131} = s_{55} / 4 = 1/4G_{31}$; $S_{1212} = s_{66} / 4 = 1/4G_{12}$.

Из симметрии матрицы s_{ij} следует, что $s_{12} = s_{21}$; $s_{13} = s_{31}$; $s_{23} = s_{32}$, поэтому выполняются соотношения

$$\mu_{12}/E_2 = \mu_{21}/E_1; \mu_{13}/E_3 = \mu_{31}/E_1; \mu_{23}/E_3 = \mu_{32}/E_2. \quad (1.86)$$

В результате число постоянных, необходимых для задания всей матрицы упругих податливостей, сокращается до 9. Таким образом, для характеристики упругих свойств ортотропного материала в главных осях симметрии достаточно 9 постоянных.

В случае изотропного тела, рассмотренного выше, все соответствующие постоянные для различных направлений равны. В другом частном случае тело может иметь только одну плоскость, например x_1x_2 , в которой свойства не зависят от направления, т. е. $E_1 = E_2$; $\mu_{12} = \mu_{21}$ и $\mu_{13} = \mu_{23}$. В силу этих соотношений число постоянных, задающих упругие свойства тела, сокращается до 6, но поскольку в плоскости x_1x_2 выполняется также соотношение

$G_{12} = E_1 / 2(1 + \mu_{12})$, то число независимых постоянных равно 5. Такое тело называют *трансверсально-изотропным*, а плоскость x_1x_2 – плоскостью изотропии. Примерами трансверсально-изотропных упругих тел могут служить однонаправленно армированный КМ при условии хаотического расположения волокон в плоскости сечения (рис. 1.17) и КМ с хаотическим армированием в плоскости (рис. 1.18).

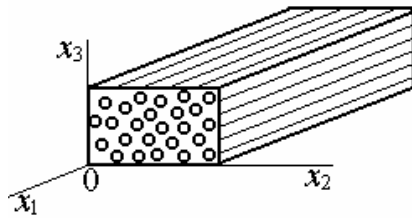


Рис. 1.17

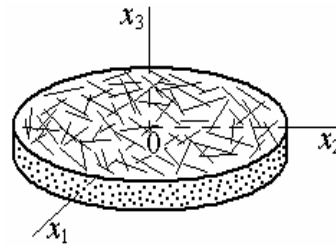


Рис. 1.18

Заметим, что выполнение только соотношений $E_1 = E_2$; $\mu_{12} = \mu_{21}$ и $\mu_{13} = \mu_{23}$ еще не является признаком трансверсальной изотропии. Эти соотношения могут выполняться в частном случае ортотропного тела, когда, например, КМ имеет одинаковое число однонаправленных слоев, уложенных в двух взаимно перпендикулярных направлениях, или получен армированием тканью с равными долями нитей основы и утка.

Элементы матрицы жесткости и компоненты тензора модулей упругости ортотропного и трансверсально-изотропного тел находят по общим правилам, изложенным выше. Число независимых значений этих постоянных в главных осях симметрии также равно 9 и 5 соответственно, поскольку имеют место соотношения, вытекающие из свойств симметрии.

Преобразование постоянных упругости при повороте осей координат. Компоненты тензоров модулей упругости C_{ijmn} и упругих податливостей S_{ijmn} при повороте координатных осей преобразуются в соответствии с общим правилом преобразования компонентов тензора четвертого ранга (1.12), а именно:

$$C'_{ijmn} = l_{i\alpha}l_{j\beta}l_{m\gamma}l_{n\delta}C_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad \text{и} \quad S'_{ijmn} = l_{i\alpha}l_{j\beta}l_{m\gamma}l_{n\delta}S_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (1.87)$$

где $l_{ij} = \cos(x'_i \wedge x_j)$.

Для того чтобы найти значения компонентов тензора модулей упругости C'_{ijmn} или упругих податливостей S'_{ijmn} , заданных в новых осях x'_i , необходимо выполнить действия, предусмотренные формулами (1.87), т. е. просуммировать по повторяющимся индексам произведения соответствующих косинусов углов l_{ij} и отличных от нуля компонентов тензоров модулей упругости C_{ijmn} и упругих податливостей S_{ijmn} , заданных в исходных осях. При этом число слагаемых в правой части равно числу отличных от нуля значений этих компонентов, т. е. зависит от типа симметрии материала в исходных осях. Например, в случае ортотропного КМ, главные оси симметрии структуры которого совпадают с осями x_i , число слагаемых с учетом симметрии тензоров модулей и упругих податливостей и вытекающего из нее равенства компонентов, получаемых перестановкой индексов в паре или пар индексов, равно девяти. В частности, действуя по этому правилу, получаем

$$S'_{1111} = l_{11}^4 S_{1111} + 2l_{11}^2 l_{12}^2 S_{1122} + 2l_{11}^2 l_{13}^2 S_{1133} + \\ + l_{12}^4 S_{2222} + 2l_{12}^2 l_{13}^2 S_{2233} + l_{13}^4 S_{3333} + \\ + 4l_{12}^2 l_{13}^2 S_{2323} + 4l_{11}^2 l_{13}^2 S_{3131} + 4l_{11}^2 l_{12}^2 S_{1212}. \quad (1.88)$$

Число постоянных, которые необходимо записать таким образом, равно в общем случае 21. Далее для получения значений технических постоянных упругости в новых осях следует подставить выражения величин S_{ijmn} через технические постоянные в исходных осях и значения косинусов углов. Нетрудно видеть, что вычисления оказываются весьма громоздкими.

Выражения для постоянных упругости в новых осях значительно упрощаются, если преобразование координат происходит путем поворота осей x_1 и x_2 на угол φ вокруг оси x_3 (рис. 1.19). Тогда матрица, задающая косинусы углов между новыми и старыми осями, имеет вид

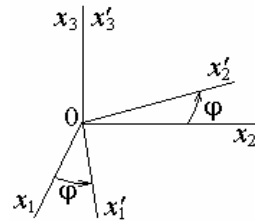


Рис. 1.19

$$(l_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.89)$$

Данное преобразование, в частности, имеет место при повороте главных осей симметрии структуры ортотропного КМ x_1 и x_2 относи-

тельно оси x_3 (см. рис. 1.16). Этот случай представляет наибольший практический интерес, поскольку в плоских изделиях из таких материалов напряжения в плоскости армирования намного больше, чем в перпендикулярном направлении.

При плоском напряженном состоянии компоненты тензора напряжений (см. формулу (1.48)) образуют вектор $\sigma_{пл} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$. Пусть в новых осях x'_i вектор напряжений $\sigma'_{пл} = (\sigma'_{11}, \sigma'_{22}, \sigma'_{12})$. Тогда с учетом формул преобразования (1.29) и соотношений (1.89) имеем

$$\sigma'_{пл} = \mathbf{T} \cdot \sigma_{пл}, \quad (1.90)$$

где \mathbf{T} – матрица преобразования, заданная составляющими

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi \\ -\sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -2\sin\varphi \cdot \cos\varphi \\ -\sin\varphi \cdot \cos\varphi & \sin\varphi \cdot \cos\varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.91)$$

Запишем также вектор деформаций в плоскости x_1x_2 в исходных $\epsilon_{пл} = (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12})$ и в новых $\epsilon'_{пл} = (\epsilon'_{11}, \epsilon'_{22}, \epsilon'_{12})$ осях. Заметим, что введенный здесь вектор деформаций отличается от вектора \mathbf{e} , элементы которого заданы соотношениями (1.74). Для вектора $\epsilon_{пл}$ справедливо преобразование, аналогичное (1.90):

$$\epsilon'_{пл} = \mathbf{T} \cdot \epsilon_{пл}. \quad (1.92)$$

Связь между элементами векторов напряжений $\sigma_{пл}$ и деформаций $\epsilon_{пл}$ при плоском деформированном состоянии задана формулой

$$\sigma_{пл} = \mathbf{Q} \cdot \epsilon_{пл}, \quad (1.93)$$

где \mathbf{Q} – матрица жесткостей, имеющая вид

$$(Q_{ij}) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & \frac{\mu_{12}E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & 0 \\ \frac{\mu_{21}E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{12} \end{pmatrix}. \quad (1.94)$$

Решая уравнения (1.93) относительно деформаций, получаем

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{пл}} = \mathbf{s}_{\text{пл}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{пл}}, \quad (1.95)$$

где $\mathbf{s}_{\text{пл}}$ – матрица упругих податливостей, заданная составляющими

$$(s_{\text{пл}ij}) = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{21} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\mu_{12}/E_2 & 0 \\ -\mu_{21}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{pmatrix}. \quad (1.96)$$

В новых осях координат связь между напряжениями и деформациями задана формулой

$$\boldsymbol{\sigma}'_{\text{пл}} = \mathbf{Q}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'_{\text{пл}}, \quad (1.97)$$

где \mathbf{Q}' – матрица жесткостей в новых координатах, выражаемая через исходную соотношением

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}. \quad (1.98)$$

Здесь \mathbf{T}^{-1} – матрица, обратная по отношению к матрице $\mathbf{T}(\varphi)$, заданной составляющими (1.91). Она может быть получена из матрицы \mathbf{T} заменой угла φ на $-\varphi$, т. е. $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}(-\varphi)$. Преобразование (1.98) дает элементы матрицы жесткостей в новых координатах.

Связь между деформациями и напряжениями в новых координатах задана уравнением

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_{\text{пл}} = \mathbf{s}'_{\text{пл}} \cdot \boldsymbol{\sigma}'_{\text{пл}}, \quad (1.99)$$

где $\mathbf{s}'_{\text{пл}}$ – матрица упругих податливостей в новых координатах.

Уравнение (1.99) относится к плоскому деформированному состоянию, поэтому матрица $\mathbf{s}'_{\text{пл}}$ не совпадает с матрицей \mathbf{s}' . Она не содержит постоянных, характеризующих деформации вне плоскости x_1x_2 . Число элементов матрицы $\mathbf{s}'_{\text{пл}}$, как и матрицы \mathbf{Q}' , равно 9, тогда как число различных значений матрицы \mathbf{s}' в рассматриваемом случае ортотропного тела может быть равно 13. Ниже приводятся формулы для всех отличных от нуля элементов матрицы упругих податливостей \mathbf{s}' ортотропного КМ, полученные в результате применения формул преобразования общего вида (1.87):

$$\begin{aligned}
s'_{11} &= \frac{1}{E'_1} = \frac{\cos^4 \varphi}{E_1} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\mu_{12}}{E_2} \right) \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi + \frac{\sin^4 \varphi}{E_2}; \\
s'_{22} &= \frac{1}{E'_2} = \frac{\cos^4 \varphi}{E_2} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\mu_{12}}{E_2} \right) \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi + \frac{\sin^4 \varphi}{E_1}; \\
s'_{33} &= \frac{1}{E'_3} = \frac{1}{E_3}; \quad s'_{44} = \frac{1}{G'_{23}} = \frac{\cos^2 \varphi}{G_{23}} + \frac{\sin^2 \varphi}{G_{31}}; \\
s'_{12} &= -\frac{\mu'_{21}}{E'_1} = -\frac{\mu_{21}}{E_1} + \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\mu_{21}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi; \\
s'_{66} &= \frac{1}{G'_{12}} = \frac{1}{G_{12}} + \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\mu_{21}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi; \\
s'_{45} &= \left(\frac{1}{G_{23}} - \frac{1}{G_{31}} \right) \sin \varphi \cdot \cos \varphi; \quad s'_{55} = \frac{1}{G'_{31}} = \frac{\cos^2 \varphi}{G_{31}} + \frac{\sin^2 \varphi}{G_{23}}; \\
s'_{13} &= -\frac{\mu'_{31}}{E'_1} = -\left(\frac{\mu_{32}}{E_2} \sin^2 \varphi + \frac{\mu_{31}}{E_1} \cos^2 \varphi \right); \\
s'_{36} &= 2 \left(\frac{\mu_{31}}{E_1} - \frac{\mu_{32}}{E_2} \right) \sin \varphi \cdot \cos \varphi; \\
s'_{23} &= -\frac{\mu_{32}}{E'_{21}} = -\left(\frac{\mu_{32}}{E_2} \cos^2 \varphi + \frac{\mu_{31}}{E_1} \sin^2 \varphi \right); \\
s'_{16} &= \left(\frac{2}{E_2} + \frac{2\mu_{21}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^3 \varphi \cdot \cos \varphi - \left(\frac{2}{E_1} + \frac{2\mu_{21}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi; \\
s'_{26} &= \left(\frac{2}{E_2} + \frac{2\mu_{21}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi - \left(\frac{2}{E_1} + \frac{2\mu_{21}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \cos \varphi \cdot \sin^3 \varphi.
\end{aligned} \tag{1.100}$$

Как видно из приведенных формул, неизменным при повороте осей остается модуль Юнга при растяжении вдоль ось x_3 . Число отличных от нуля постоянных (13) оказывается больше, чем в главных осях (9). В отличие от матрицы, заданной в главных осях (см. формулу (1.85)), не равны нулю элементы s'_{16} , s'_{26} , s'_{45} , и s'_{36} а также симметричные им s'_{61} , s'_{62} , s'_{63} и s'_{54} . Чтобы выяснить смысл этих постоянных, рассмотрим напряженные состояния, при которых они входят в формулы для деформаций.

Пусть на элемент тела действуют только касательные напряжения, параллельные осям x'_1 и x'_2 , т. е. имеет место чистый сдвиг в плоскости

$x'_1x'_2$ (см. рис. 1.12). Тогда $e'_1 = s'_{16}\xi'_6$, где $\xi'_6 = \sigma'_{12}$. Следовательно, s'_{16} характеризует удлинение (укорочение) в направлении оси x'_1 , обусловленное касательными напряжениями, приложенными параллельно осям x'_1 и x'_2 . Аналогичный смысл имеют постоянные s'_{26} и s'_{36} , в чем нетрудно убедиться, записав согласно закону Гука выражения для e'_2 и e'_3 .

Зададим теперь растяжение-сжатие в направлении оси x'_1 (рис. 1.20). Тогда $e'_6 = s'_{61}\xi'_1$, т. е. при растяжении вдоль оси x'_1 может оказаться отличным от нуля угол сдвига в плоскости $x'_1x'_2$. То же самое можно сказать и о растяжении-сжатии в направлении осей x'_2 и x'_3 . Чистый сдвиг в плоскости $x'_3x'_1$ может вызвать деформацию сдвига в плоскости $x'_3x'_2$, если $G_{23} \neq G_{31}$, поскольку в этом случае $s'_{45} \neq 0$. И наоборот, чистый сдвиг в плоскости $x'_3x'_1$ может стать причиной сдвиговых деформаций в плоскости $x'_3x'_2$, пропорциональных s'_{54} .

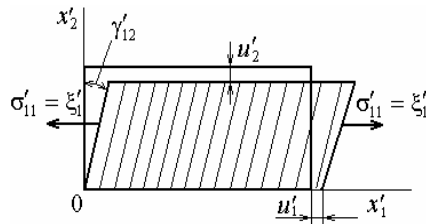


Рис. 1.20

По аналогии с постоянными $s'_{12} = -\mu'_{12} / E'_{22}$; $s'_{13} = -\mu'_{13} / E'_{33}$ и т. п. запишем $s'_{16} = \eta'_{11,12} / G'_{12}$; $s'_{61} = \eta'_{12,11} / E'_{11}$; $s'_{26} = \eta'_{22,12} / G'_{12}$; $s'_{45} = \eta'_{23,31} / G'_{31}$ и т. д. Величины $\eta'_{ij, mn}$ называют коэффициентами влияния. Они определяют составляющие деформаций, обозначенные первой парой индексов, в результате действия напряжений, заданных второй парой. Иногда вместо тензорных используют матричные обозначения компонентов, например $\eta'_{11,12} = \eta'_{1,6}$; $\eta'_{23,31} = \eta'_{4,5}$, или буквенные обозначения осей, например $\eta'_{11,12} = \eta'_{x,xy}$; $\eta'_{23,31} = \eta'_{yz,zx}$. Величины, характеризующие влияние касательных напряжений на углы сдвига, называют также коэффициентами Ченцова.

Описанные выше эффекты возможны только в анизотропных телах. В изотропном теле постоянные упругости, характеризующие влияние нормальных напряжений на сдвиги и касательных напряжений на удлинения или сдвиги в другой плоскости, равны нулю независимо от выбора координатных осей и направления действия напряжений.

Для расчета конструкций, нагруженных только в плоскости армирования (в данном случае в плоскости $x'_1x'_2$), не требуются все постоянные, заданные соотношениями (1.100). Действительно, в этом

случае отличны от нуля только компоненты тензора напряжений σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} , поэтому закон Гука в главных осях задан соотношениями

$$\varepsilon_{11} = S_{1111}\sigma_{11} + S_{1122}\sigma_{22}; \quad \varepsilon_{22} = S_{2211}\sigma_{11} + S_{2222}\sigma_{22}; \quad \gamma_{12} = 4S_{1212}\sigma_{12}. \quad (1.101)$$

При повороте осей элементы матрицы упругих податливостей, соответствующие компонентам тензора, входящим в формулы (1.101), преобразуются согласно (1.100). Технические постоянные упругости, характеризующие деформированное состояние в плоскости $x'_1x'_2$, записываются в виде

$$\begin{aligned} E'_1 &= [1/E_1 - A_s \sin^2\varphi - B_s \sin^2 2\varphi]^{-1}; \\ E'_2 &= [1/E_2 + A_s \sin^2\varphi - B_s \sin^2 2\varphi]^{-1}; \\ \mu'_{21} &= E'_1[\mu_{21}/E_1 - B_s \sin^2 2\varphi]; \\ G'_{12} &= [1/G_{12} + 4B_s \sin^2 2\varphi]^{-1}; \\ \eta'_{11,12} &= -G'_{12}[(A_s/2)\sin 2\varphi - B_s \sin 4\varphi]; \\ \eta'_{22,12} &= -G'_{12}[(A_s/2)\sin 2\varphi + B_s \sin 4\varphi], \end{aligned} \quad (1.102)$$

где $A_s = 1/E_1 - 1/E_2$ и $B_s = (1/E_1 - 1/E_2 + 2\mu_{21}/E_1 - 1/G_{12})/4$.

Если исходные оси обозначены иными индексами, то формулы преобразования постоянных упругости получают из формул (1.102) простой заменой обозначений соответствующих осей. Например, чтобы записать постоянные упругости однонаправленно армированного материала (см. рис. 1.17) при повороте осей координат x_1 и x_3 , задающих одну из плоскостей армирования, вокруг оси x_2 , необходимо вместо индекса 2 в формулах (1.102) записать индекс 3.

На рис. 1.21–1.24 в качестве примера показаны зависимости от угла поворота осей координат постоянных упругости ортотропного стеклопластика (при повороте осей в плоскости x_1x_2 на рис. 1.16) и однонаправленного стеклопластика (при повороте оси x_1 в плоскости x_1x_3 на рис. 1.17). Принято, что ортотропный стеклопластик получен путем укладки равного числа слоев однонаправленного материала в двух взаимно перпендикулярных направлениях (вдоль осей x_1 и x_2), поэтому его структура обозначена как 1 : 1, а структура однонаправленного материала обозначена как 1 : 0.

Модуль Юнга однонаправленного стеклопластика при растяжении вдоль оси x'_1 , первоначально направленной вдоль волокон, убывает с увеличением угла φ , достигая минимума при $\varphi = \pi/2$ (см. рис. 1.21), т. е. когда ось x'_1 совпадает с осью x_2 , лежащей в трансверсальной плоскости. Модуль ортотропного материала достигает минимума при $\varphi = \pi/4$ (при

этом его значение в 2 раза меньше, чем E_1 , и совпадает с модулем Юнга однонаправленного материала при том же угле отклонения оси от направления армирования), а затем снова возрастает до исходного значения, поскольку при принятой схеме армирования $E_1 = E_2$.

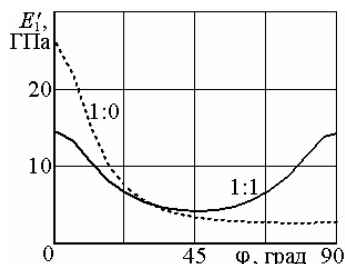


Рис. 1.21

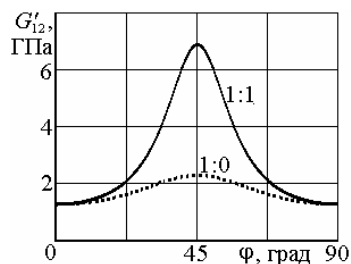


Рис. 1.22

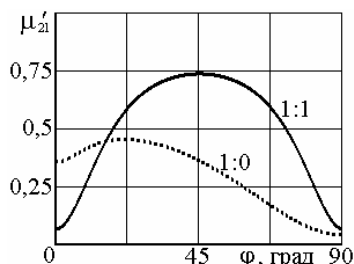


Рис.1.23

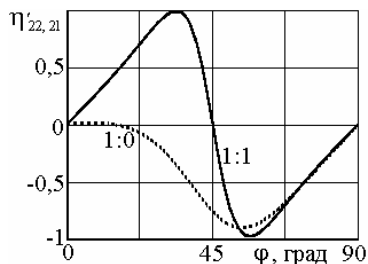


Рис. 1.24

Модуль сдвига как однонаправленного, так и ортотропного материала имеет максимум при $\varphi = \pi/4$, но при этом у ортотропного стеклопластика его значение намного выше (см. рис. 1.22).

Коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении, перпендикулярном поворачиваемой оси x'_1 , у однонаправленного материала сначала возрастает, а затем снижается до значения, соответствующего растяжению перпендикулярно волокнам (вдоль оси x_2). У ортотропного материала изменение носит симметричный характер: после возрастания коэффициента до значений, превышающих 0,5 при углах более 30° , затем наблюдается снижение до исходного значения (см. рис. 1.23). Непосредственным вычислением с помощью формул (1.102) можно показать, что модуль сдвига G_{12} ортотропного материала со структурой 1:1 (когда $E_1 = E_2$) связан

с модулем Юнга E_{45} при растяжении в плоскости x_1x_2 под углом 45° к направлениям армирования и с соответствующим этому углу коэффициентом Пуассона μ_{45} соотношением

$$G_{12} = E_{45} / 2(1 + \mu_{45}), \quad (1.103)$$

аналогичным соотношению (1.82) между этими постоянными для изотропного тела. Его иногда используют при экспериментальном определении модуля сдвига такого материала.

По-разному выглядят и графики изменения коэффициентов влияния материалов с различной анизотропной структурой (см. рис. 1.24). Значения коэффициентов для ортотропного стеклопластика могут быть как положительными (при углах менее 45°), так и отрицательными (при углах более 45°). Это означает, что в зависимости от ориентации плоскости сдвига возможно как увеличение длины образца, так и ее уменьшение.

Сдвиг в плоскости армирования однонаправленного стеклопластика вызывает укорочение образца, причем максимальное значение имеет место, когда касательные напряжения приложены под углом $\sim 60^\circ$ к направлению армирования.

Приведенные примеры свидетельствуют о том, что поведение анизотропных КМ может существенно отличаться от поведения изотропных материалов. Отсюда вытекает необходимость определения всего комплекса постоянных упругости и их учета при конструировании и расчете изделий из КМ.

Термоупругость. При изменениях температуры деформируемого тела и (или) структурных превращениях наряду с деформациями, вызванными действием внешних силовых факторов и удовлетворяющими закону Гука, появляются дополнительные температурные $\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\alpha_{ij}\Delta T)$ и (или) усадочные $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{ij})$ деформации. Полные деформации $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})$ определяются как суммы указанных составляющих. В этом случае физические уравнения, связывающие напряжения с упругими деформациями, записывают в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ij\alpha\beta} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \alpha_{\alpha\beta}\Delta T - \beta_{\alpha\beta}). \quad (1.104)$$

Соотношения (1.104) называют уравнениями Дюамеля – Неймана.

Упражнения

1. По техническим постоянным упругости ортотропного КМ в главных осях:

- а) построить матрицы упругих податливостей и жесткости;
 - б) найти компоненты тензоров модулей упругости и упругих податливостей;
 - в) охарактеризовать изменение модулей Юнга, коэффициентов Пуассона и модулей сдвига при повороте координатных осей;
 - г) построить матрицы жесткостей и упругих податливостей в системе координат, повернутой к главным осям на угол 30, 45 и 60°;
 - д) найти коэффициенты влияния и охарактеризовать эффекты, обусловленные анизотропией материала.
2. Для плоского напряженного состояния ортотропного и трансверсально-изотропного КМ с заданными постоянными упругости:
- а) вычислить и указать на рисунке компоненты тензора деформаций;
 - б) найти и указать на рисунке главные деформации;
 - в) вычислить относительное изменение объема.

1.5. Задачи теории упругости

Система уравнений статической задачи. Если ускорения точек нагруженного тела малы, то инерционные силы можно не учитывать, поэтому имеем *статическую задачу*.

Компоненты тензора напряжений в каждой точке тела связаны с действующими на тело объемными силами уравнениями равновесия (1.43), а с деформациями – уравнениями (1.67). В свою очередь, деформации определяются через перемещения в окрестности точки геометрическими соотношениями (1.55). Таким образом, для определения всех 15 неизвестных функций координат, задающих напряженное и деформированное состояние тела, необходимо решить полную систему из 15 уравнений, которые в тензорном виде записываются как

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_V = 0; \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}; \boldsymbol{\varepsilon} = \text{def } \mathbf{u}. \quad (1.105)$$

Для решения этой системы необходимо задать *граничные условия* – перемещения на границе S тела $\mathbf{u}|_S = \mathbf{u}_S$ или напряжения $\mathbf{p}_n|_S = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. В первом случае получаем *краевую задачу теории упругости в перемещениях*, а во втором – *в напряжениях*. Возможна также смешанная задача, когда на одной части границы заданы перемещения, а на другой – напряжения. В теории упругости доказываются теоремы, утверждающие, что решение поставленной задачи существует и оно единственное.

Уравнения краевой задачи в перемещениях для однородного упругого тела ($\mathbf{C} = \text{const}$ относительно координат) получим, исключив

из уравнений системы (1.105) напряжения и деформации. Подставим для этого геометрические соотношения в закон Гука, а затем – в уравнения равновесия. Тогда с учетом симметрии тензора деформаций уравнения в перемещениях имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{f}_V = 0. \quad (1.106)$$

Символическая запись (1.106) предусматривает следующие дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных относительно проекций вектора перемещений:

$$C_{i\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma} = -f_{Vi}. \quad (1.107)$$

Система (1.107) включает 3 уравнения (по числу неизвестных составляющих вектора перемещения \mathbf{u}). Вид этих уравнений зависит от вида тензора \mathbf{C} , т. е. от характера анизотропии упругих свойств тела. В случае изотропного тела тензор \mathbf{C} задан двумя постоянными согласно формуле (1.83). Подставив это выражение в уравнения (1.107), получим уравнения теории упругости изотропного тела в перемещениях (уравнения Ламе):

$$(L + G) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + G \Delta u_i + f_{Vi} = 0, \quad (1.108)$$

где, согласно формуле (1.62), $\partial u_\alpha / \partial x_\alpha = \theta$ – объемная деформация.

Уравнения в напряжениях получим, записав закон Гука для деформаций в форме (1.68) и подставив его в уравнения совместности деформаций (1.63). При отсутствии объемных сил имеем

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{6(L + G)}{3L + 2G} \frac{\partial^2 \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (1.109)$$

– шесть уравнений, называемых уравнениями Бельтрами – Митчела.

Аналогичные уравнения для анизотропных тел оказываются более громоздкими, поэтому здесь не приводятся.

Методы решения. Решение каждой конкретной задачи зависит от геометрии и симметрии упругих свойств тела, от заданных граничных условий, и потому число решенных в конечном виде задач даже для тел из изотропных материалов весьма ограничено. Они относятся к телам

правильной формы – стержневым, плоским или осесимметричным, нагруженным равномерно распределенными или сосредоточенными силами. При этом предполагается, что конкретный характер распределения сил в зоне приложения нагрузки оказывает влияние на напряжения и деформации лишь вблизи этой зоны (принцип Сен-Венана).

При расчетах стержней, пластин и оболочек вводят дополнительные гипотезы относительно распределения напряжений и деформаций, упрощающие решение.

К общим методам решения задач теории упругости относятся *вариационные методы*, основанные на минимизации функционалов, включающих потенциальную энергию упругой деформации тела.

Потенциальная энергия, накопленная упруго деформированным телом, равна половине произведения внешних сил на вызванные ими перемещения (теорема Клапейрона).

Образует функционал (в данном случае – функцию, зависящую от перемещений \mathbf{u})

$$\Pi = \int_V \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} dV - \int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{u} dS - \int_V \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{u} dV, \quad (1.110)$$

называемый потенциальной энергией тела (первое слагаемое – удвоенная потенциальная энергия упругой деформации частиц). Согласно принципу возможных перемещений действительным перемещениям соответствует минимальное значение вариации этой величины, т. е. $\delta\Pi = 0$.

Применение вариационных принципов позволяет свести нахождение неизвестных перемещений к решению системы алгебраических уравнений. Такой прием используют, в частности, при численном решении задач теории упругости (и других задач механики сплошной среды) по методу конечных элементов.

В некоторых случаях удается найти распределение перемещений в упругом теле при действии в некоторой точке сосредоточенной силы. При этом уравнение (1.106) принимает вид

$$\nabla \cdot \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.111)$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))$ – тензор второго ранга, называемый тензором Грина и равный перемещению в точке $P(\mathbf{r})$ в направлении оси x_i при действии в точке $P'(\mathbf{r}')$ сосредоточенной силы в направлении оси x'_j ; $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ – δ -функция, равная нулю всюду, кроме точки $P(\mathbf{r})$, где она уходит в бесконечность, или при более строгом определении $\delta(x)$ как обобщенной функции заданная интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x')dx = f(x').$$

Если перемещения на границе тела равны нулю (влиянием силы, точка приложения которой достаточно удалена от границы, можно пренебречь), то перемещения в точке $P(\mathbf{r})$ от заданной силы $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$ определяются интегралом

$$u_i(\mathbf{r}) = \int_V G_{i\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') F_\alpha(\mathbf{r}') dV'. \quad (1.112)$$

Данный метод решения называют методом функций Грина. Его применяют для решения контактных задач теории упругости, в теории дислокаций и трещин, в статистической механике композитов, т. е. в тех случаях, когда можно считать тело бесконечным или полубесконечным и использовать известные для этих тел функции Грина. Так, тензор Грина неограниченной изотропной среды задан компонентами

$$G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G' \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + G'' \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (1.113)$$

где

$$G' = \frac{L + 3G}{8\pi G(L + 2G)}; \quad G'' = \frac{L + G}{8\pi G(L + 2G)}, \quad (1.114)$$

L и G – постоянные Ламе.

В иных случаях применение метода ограничено, поскольку построение функций Грина эквивалентно по сложности решению соответствующей краевой задачи.

Плоская задача. Если одно из главных напряжений или одна из главных деформаций равны нулю, то получается плоская задача в напряжениях в первом случае (плоское напряженное состояние) или относительно деформаций – во втором (плоское деформированное состояние). Система уравнений при этом упрощается. Упрощается и ее решение. В частности, к простейшим плоским задачам относятся задачи о растяжении и чистом сдвиге анизотропных пластинок, рассмотренные в подразд. 1.4 с целью иллюстрации особенностей поведения анизотропных материалов. Ниже рассматриваются некоторые более общие случаи.

Допустим, $\sigma_{33} = 0$ и существует функция $\Phi(x_1, x_2)$ такая, что

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (1.115)$$

Функцию $\Phi(x_1, x_2)$ называют функцией напряжений или функцией Эри. Нетрудно убедиться, что напряжения, вычисляемые по формулам (1.115), удовлетворяют уравнениям равновесия (1.44), которые для рассматриваемого частного случая имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad (1.116)$$

и в том, что функция $\Phi(x_1, x_2)$ является бигармонической, т. е. удовлетворяет уравнению $\Delta \Delta \Phi(x_1, x_2) = 0$. Знание функции напряжений обеспечивает определение напряжений как функций координат.

Рассмотрим в качестве примера изгиб консоли (рис. 1.25). Прямоугольное сечение $b \times h$ постоянно по длине, $I_3 = bh^3 / 12$ – момент инерции относительно нейтральной оси x_3 .

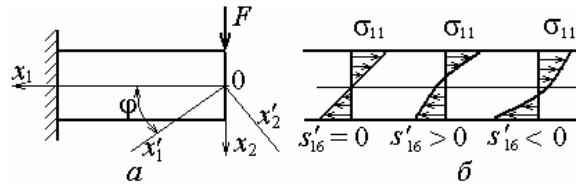


Рис. 1.25

Из курса механики материалов и конструкций (сопротивления материалов) известно, что зависимости нормальных и касательных напряжений от координат в такой консоли заданы уравнениями

$$\sigma_{11} = -\frac{Fx_1x_2}{I_3}; \quad \sigma_{12} = \frac{F}{2I_3} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right). \quad (1.117)$$

Если принять

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{F}{2I_3} \left(x_1x_2 - \frac{4x_1x_2^2}{3h^2} \right), \quad (1.118)$$

то, подставив эту функцию в уравнения (1.115), получим формулы (1.117) для напряжений. Легко убедиться, что они удовлетворяют уравнениям равновесия (1.116).

Функция напряжений в виде (1.118) пригодна и для анизотропного (ортотропного) стержня, если оси x_i – главные оси симметрии упругих свойств. Если главные оси симметрии упругих свойств ортотропного стержня x'_1 и x'_2 составляют угол φ с осями x_1 и x_2 соответственно (см. рис. 1.25), то функция напряжений записывается в виде

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{F}{2I_3} \left[x_1 x_2 - \frac{4x_1 x_2^2}{3h^2} + \frac{s_{16}}{3s_{11}} \left(\frac{h^2 x_2^2}{4} - \frac{x_2^4}{2} \right) \right], \quad (1.119)$$

где s_{11} и s_{16} – элементы матрицы упругих податливостей в осях x_i . Заметим, что постоянная s_{16} характеризует влияние касательных напряжений на удлинения в направлении оси x_1 .

Дифференцирование согласно формулам (1.115) дает, как и в главных осях симметрии упругих свойств, равные нулю напряжения σ_{22} , формулу (1.117) для касательного напряжения и нормальные напряжения вдоль продольной оси, зависящие от ориентации главных осей:

$$\sigma_{11} = \frac{F}{I_3} \left[-x_1 x_2 + \frac{s_{16}}{3s_{11}} \left(\frac{h^2}{4} - 3x_2^2 \right) \right]. \quad (1.120)$$

В зависимости от знака постоянной упругости s_{16} , связанного с направлением оси x'_1 , могут быть различными вид функции $\sigma_{11}(x_2)$ и ордината ее экстремума (см. рис. 1.25).

Плоское напряженное состояние в полярных координатах (r, φ) характеризуется нормальными радиальным $\sigma_{11} = \sigma_r$ и окружным $\sigma_{22} = \sigma_t$ напряжениями и касательным напряжением $\sigma_{12} = \sigma_{rt}$ (рис. 1.26).

Компоненты тензора деформаций в полярных координатах обозначим как $\varepsilon_r, \varepsilon_t, \varepsilon_{rt} = 1/2\gamma_{rt}$; u – радиальное, v – окружное перемещение. Кроме того, при плоском напряженном состоянии перемещение в направлении оси z ,

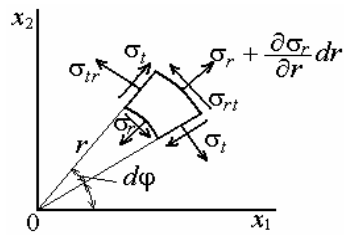


Рис. 1.26

перпендикулярной плоскости x_1x_2 , $w \neq 0$ и соответствующая ему деформация $\varepsilon_z \neq 0$.

С учетом соотношений между координатами $x_1 = r \cos \varphi$ и $x_2 = r \sin \varphi$ уравнения равновесия (1.116) примут вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rt}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rt}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rt}}{r} = 0, \quad (1.121)$$

формулы (1.54) для деформаций –

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi}; \quad \gamma_{rt} = \frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \quad (1.122)$$

а уравнение совместности деформаций вместо (1.64) запишется как

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_t)}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 r \varepsilon_{rt}}{\partial r \partial \varphi} - r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = 0. \quad (1.123)$$

Функция напряжений в полярных координатах $\Phi(r, \varphi)$ в результате дифференцирования также дает компоненты тензора напряжений

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}; \quad \sigma_t = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}; \quad \sigma_{rt} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right). \quad (1.124)$$

В осесимметричной задаче она зависит только от одной переменной – r и для изотропного тела может быть представлена в виде

$$\Phi(r) = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D, \quad (1.125)$$

где A, B, C и D – постоянные, зависящие от граничных условий.

Напряженное состояние трубы, нагруженной внутренним и внешним давлением. Применим метод функций напряжений для расчета напряженного состояния изотропной трубы, нагруженной внутренним p_b и внешним p_n давлением (рис. 1.27).

Согласно формулам (1.124) выразим напряжения через функцию напряжений (1.125) и, учитывая симметрию напряженного состояния и условия на границе $\sigma_r(r = r_0) = -p_b$; $\sigma_r(r = R) = -p_n$, получим две постоянные

$$A = \frac{(p_n - p_b)r_0^2 R^2}{R^2 - r_0^2}; \quad B = \frac{p_b r_0^2 - p_n R^2}{2(R^2 - r_0^2)}. \quad (1.126)$$

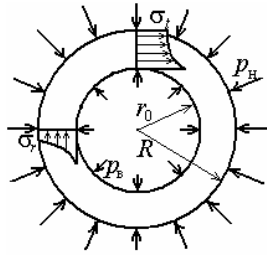


Рис. 1.27

Подставив эти постоянные в выражения для напряжений, получим известное решение задачи Ламе относительно напряжений.

Пусть труба выполнена из ортотропного материала, структура которого симметрична относительно оси z , т. е. материал имеет цилиндрическую анизотропию; E_r и E_t – модули Юнга в радиальном и окружном направлениях, при этом $E_t > E_r$.

Функция напряжений для той же задачи в случае анизотропной трубы имеет иной вид, чем (1.125), а именно:

$$\Phi(r) = A + Br^2 + Cr^{1+k} + Dr^{1-k}, \quad (1.127)$$

где A , B , C и D – постоянные, зависящие от граничных условий; $k = \sqrt{E_t/E_r} > 1$.

Подстановка функции (1.127) в соотношения (1.124) дает напряжения. Из условий на границе находим постоянные A , B , C и D . В результате, обозначив $c = r_0/R$, получим формулы для радиального и окружного напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_в c^{1+k} - p_н}{1 - c^{2k}} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} - \frac{p_в - p_н c^{k-1}}{1 - c^{2k}} c^{k+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}; \\ \sigma_t &= \frac{p_в c^{1+k} - p_н}{1 - c^{2k}} k \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} + \frac{p_в - p_н c^{k-1}}{1 - c^{2k}} k c^{k+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}. \end{aligned} \quad (1.128)$$

При $k = 1$ распределение напряжений, задаваемое формулами (1.128), совпадает с полученным для изотропной трубы. В то же время следует отметить, что с увеличением параметра k , характеризующего степень анизотропии, как и с уменьшением параметра c , характеризующего относительную толщину стенки трубы, возрастает неоднородность распределения окружных напряжений.

Помимо радиального и окружного напряжений, заданных формулами (1.128), в трубе, нагруженной внутренним давлением, действуют осевые напряжения σ_z . В сечениях, достаточно удаленных от мест соединения трубы с крышками, они равномерно рас-

пределены по сечению, и находятся непосредственно из уравнения равновесия в проекциях на ось z , а от структуры и свойств материала не зависят.

В частном случае при $c = 0$ и $p_v = 0$ формулы (1.128) дают распределение напряжений в диске, равномерно сжимаемом по ободу. Если $k > 1$, то абсолютные значения обоих главных напряжений σ_r и σ_t уменьшаются по мере приближения к оси. В изотропном диске ($k = 1$) напряжения постоянны и равны $-p_n$. Из формул (1.128) следует также, что при $k < 1$ и $r \rightarrow 0$ радиальные и окружные напряжения неограниченно возрастают по модулю (рис. 1.28).

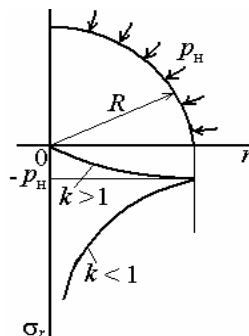


Рис. 1.28

Задачи линейной термоупругости. Если деформирование тела обусловлено или сопровождается изменениями температуры и структурными превращениями, то вместо уравнений (1.69) в систему (1.105) входят уравнения Дюамеля – Неймана (1.104). Для решения этой системы помимо граничных условий должны быть заданы поля температуры $T(\mathbf{r})$ и структурных деформаций $\beta(\mathbf{r})$.

Если постоянные упругости материала зависят от температуры, а распределение температуры в процессе деформирования изменяется (нестационарная задача), то в систему уравнений дополнительно вводятся дифференциальные уравнения теплопроводности с соответствующими граничными и начальными условиями. В результате возникает *связанная задача* термоупругости.

Уравнение теплопроводности однородной и анизотропной среды при отсутствии внутренних источников тепла имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla T = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.129)$$

где $\mathbf{k} = (k_{ij})$ – тензор коэффициентов теплопроводности в системе осей x_i , зависящих от структуры материала и в общем случае от координат; $T(x_i, t)$ – температура как функция координат и времени; c_p – удельная теплоемкость; ρ – плотность материала; t – время.

Уравнения (1.129) и (1.104), как и задача термоупругости в целом, могут относиться и к телу с осредненной и условно однородной структурой материала, и к отдельным элементам структуры (к мик-

роуровню). В последнем случае находят напряженное и деформированное состояние элементов структуры (отдельных компонентов материала) и обнаруживают эффекты, обусловленные неоднородностью структуры КМ.

Динамическая задача. При движении тела ускорения точек могут быть настолько большими, что ими нельзя пренебречь. В этом случае формулируется динамическая задача теории упругости, а в систему уравнений (1.105) вместо уравнения равновесия (1.43) записывают уравнение движения. Уравнение движения получают по аналогии с уравнением равновесия путем введения наряду с объемными силами \mathbf{f}_V (согласно принципу Даламбера) дополнительных объемных сил $-\rho\mathbf{w}$ в виде

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}_V = \rho\mathbf{w}, \quad (1.130)$$

где $\mathbf{w} = d\mathbf{v} / dt$ – ускорение точки.

Динамические задачи теории упругости возникают при ударном и периодическом нагружении деформируемых тел. В результате их решения находят скорости распространения и затухания ударных волн, законы распределения обусловленных ими напряжений и деформаций, частоты и амплитуды свободных и вынужденных колебаний. Специфичной динамической задачей теории упругости микронеоднородных (в частности, композиционных) материалов является установление зависимости от свойств компонентов и структуры КМ дисперсии (рассеяния) упругих волн, возникающих при ударном нагружении тела.

Упражнения

1. Используя формулу (1.120), проанализировать зависимость распределения нормального напряжения в изгибаемом стержне из ортотропного КМ от соотношения модулей Юнга в главных направлениях армирования и от угла φ , задающего ориентацию главной оси симметрии структуры материала относительно направления продольной оси стержня.

2. Охарактеризовать зависимость распределения окружных, радиальных и осевых напряжений в трубе из ортотропного КМ, нагруженной внутренним давлением, от относительной толщины стенки и степени анизотропии материала E_t / E_r .

1.6. Вязкоупругие деформации

Простейшие механические модели. Предположение о линейной упругости задает лишь одну из возможных моделей реального материала. На самом деле характер деформирования более сложный.

Одна из важных особенностей многих материалов, в частности полимерных, – зависимость напряжений и деформаций от времени, которая характеризует *реономные* (от греческих слов *рео* – течение и *номос* – закон) свойства.

Для иллюстрации поведения материалов часто используют упрощенные механические модели. Так, модель линейно-упругого материала изображают пружиной (рис. 1.29). Удлинение пружины пропорционально приложенной нагрузке, поэтому связь между усилием F и удлинением Δl , а также между напряжением σ и деформацией ε такой модели соответствует закону Гука: $F = c\Delta l$ и $\sigma = E\varepsilon$, где c – жесткость пружины, а E – модуль Юнга материала.

Модель линейно-вязкой среды иллюстрирует демпфер (рис. 1.30), при растяжении (сжатии) которого усилие F пропорционально скорости перемещения поршня v , а напряжения пропорциональны скорости деформирования: $F = kv$ и $\sigma = \lambda\dot{\varepsilon}$, где k – коэффициент пропорциональности; λ – продольная вязкость; $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$ – скорость растяжения (сжатия).

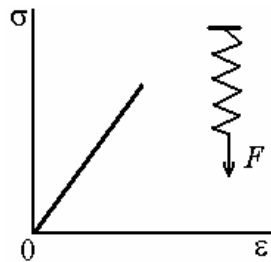


Рис. 1.29

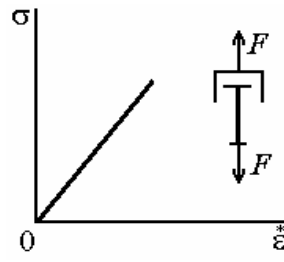


Рис. 1.30

Комбинации этих моделей дают различные модели вязкоупругого тела, обладающего свойствами как упругости, так и вязкости (рис. 1.31). В упругом и вязком элементах модели Максвелла, изображенной на рис. 1.31, *a*, усилия и соответственно напряжения равны, а удлинения и деформации складываются, поэтому можно записать $\sigma_y = E\varepsilon$; $\sigma_b = \lambda\dot{\varepsilon}$; $\sigma_y = \sigma_b = \sigma$; $\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_b$. Отсюда следует

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \sigma/\lambda. \quad (1.131)$$

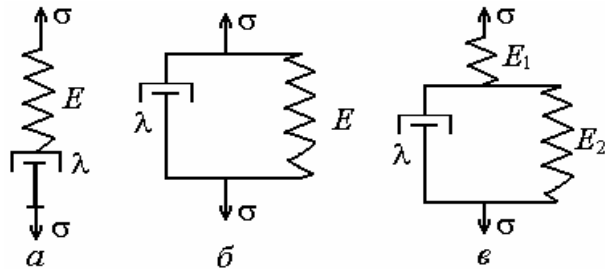


Рис. 1.31

Если $\sigma = \text{const}$, то скорость деформации данной модели также постоянна, значит, сама деформация может быть сколько угодно большой. При заданной постоянной деформации ($\varepsilon|_{t=0} = \varepsilon_0 = \text{const}$ относительно t) интегрирование уравнения $\dot{\sigma} + \sigma/t_p = 0$, где $t_p = \lambda / E$ – время релаксации, дает уравнение, описывающее уменьшение (релаксацию) напряжения с течением времени (рис. 1.32):

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-t / t_p). \quad (1.132)$$



Рис. 1.32

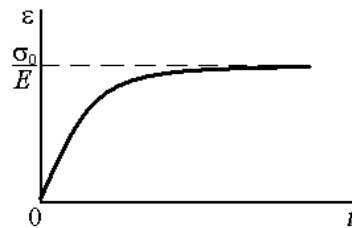


Рис. 1.33

При параллельном соединении упругого и вязкого элементов (модель Фохта), показанном на рис. 1.31, б, складываются усилия в элементах и поэтому $\sigma = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon}$. Отсюда следует, что при постоянном напряжении деформация, получаемая в результате интегрирования этого уравнения (рис. 1.33), возрастает согласно закону

$$\varepsilon = (\sigma_0 / E)[1 - \exp(-t / t_3)], \quad (1.133)$$

где $t_3 = \lambda / E$ – время запаздывания.

Этот режим деформирования называется ползучестью. Согласно формуле (1.133), с течением времени деформация стремится к значению $\varepsilon|_{t \rightarrow \infty} = \sigma_0 / E$.

Более сложные модели, лучше описывающие законы деформирования реальных материалов, получают, комбинируя упругие и вязкие элементы. Одна из наиболее распространенных моделей (модель «стандартного» вязкоупругого тела, или тела Кельвина) показана на рис. 1.31, в. Основные соотношения для этой модели: $\varepsilon_1 = \sigma / E_1$; $\sigma = E_2 \varepsilon_2 + \lambda \dot{\varepsilon}_2$. Выразим отсюда ε_1 и ε_2 и запишем полное удлинение $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Получим дифференциальное уравнение, связывающее напряжения и деформации:

$$\sigma + t_p \dot{\sigma} = E\varepsilon + Ht_p \dot{\varepsilon} \quad (1.134)$$

где $t_p = \lambda / (E_1 + E_2)$ – время релаксации; $E = E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$ – длительный, а $H = E_1$ – мгновенный модули.

Растяжение вязкоупругого стержня. Исследуем особенности поведения стандартного вязкоупругого тела при растяжении, основываясь на уравнении (1.134). Пусть $\sigma|_{t=0} = \sigma_0 = \text{const}$, следовательно, $\dot{\sigma} = 0$. В момент приложения нагрузки возникает упругая деформация $\varepsilon_0 = \varepsilon|_{t=0} = \sigma_0 / H$. Отсюда ясны смысл и название параметра H .

Для определения деформаций имеем неоднородное дифференциальное уравнение, частное решение которого $\varepsilon = \sigma_0 / E$. Решение уравнения (1.134) при данном начальном условии имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \frac{H - E}{H} \exp\left(-\frac{Et}{Ht_p}\right) \right]. \quad (1.135)$$

Из уравнения (1.135) следует, что деформация с течением времени возрастает и при $t \rightarrow \infty$ равна $\varepsilon_\infty = \sigma_0 / E$ (рис. 1.34), поэтому параметр E называют длительным модулем.

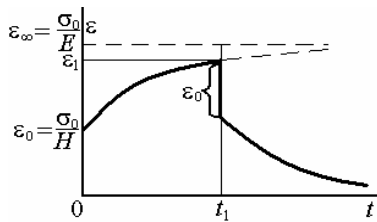


Рис. 1.34

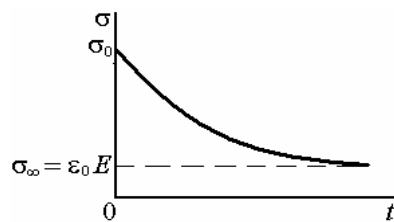


Рис. 1.35

Если в некоторый момент времени $t = t_1$, к которому деформация достигла значения ε_1 , нагрузка снимается, то после мгновенного уменьшения на $\varepsilon_0 = \sigma_0 / H$ деформация в дальнейшем продолжает уменьшаться согласно закону

$$\varepsilon = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \exp\left(-\frac{E(t-t_1)}{Ht_p}\right), \quad (1.136)$$

приближаясь к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Режим релаксации напряжений получим, приняв, что в момент $t = 0$ деформация мгновенно достигает значения ε_0 и далее остается неизменной, т. е. $\dot{\varepsilon} = 0$. Интегрируя при этих условиях уравнение (1.134), получаем закон изменения напряжений

$$\sigma(t) = \varepsilon_0(E + (H - E) \cdot \exp(-t/t_p)) \quad (1.137)$$

При $t \rightarrow \infty$ напряжение уменьшается до значения $\sigma_\infty = \varepsilon_0 E$ (рис. 1.35).

Чистый изгиб вязкоупругого стержня. Закономерности деформирования могут быть получены и при изгибе вязкоупругого стержня в режимах ползучести и релаксации напряжений. Ограничимся только случаем чистого изгиба (рис. 1.36).

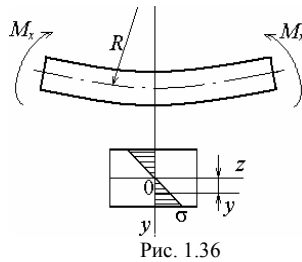


Рис. 1.36

Деформация слоя, отстоящего от нейтрального на расстоянии y , равна $\varepsilon = y / R$ (здесь R – радиус кривизны нейтрального слоя). Напряжения в этом слое $\sigma = Ey / R$. При малых прогибах кривизна нейтрального слоя $k = 1 / R \cong y''$, где штрих означает производную по z .

Подставим эти соотношения в уравнение (1.134) и проинтегрируем по площади сечения стержня. Учитывая, что

$$M_x = \int_A \sigma y dA; \quad \dot{M}_x = \int_A \dot{\sigma} y dA; \quad I_x = \int_A y^2 dA, \quad (1.138)$$

вместо (1.134) получаем уравнение относительно изгибающего момента и кривизны стержня

$$M_x + t_p \dot{M}_x = EI_x k + HI_x t_p \dot{k}, \quad (1.139)$$

решение которого при $M_x = \text{const}$ дает кривизну стержня как функцию времени:

$$k = \frac{M_x}{EI_x} \left[1 - \frac{H-E}{H} \exp\left(-\frac{Et}{Ht_p}\right) \right]. \quad (1.140)$$

В результате интегрирования уравнения (1.134) могут быть получены законы изменения напряжений и деформаций для иных режимов нагружения, в частности при возрастающих с постоянной скоростью напряжениях, при периодическом нагружении, когда напряжения или деформации изменяются по гармоническому закону.

Допустим, $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$. Тогда решение уравнения (1.134) относительно деформаций ищется в виде $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где φ – сдвиг по фазе, или $\varepsilon = A_\varepsilon \sin \omega t + B_\varepsilon \cos \omega t$, где $A_\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \varphi$; $B_\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \varphi$. Подставив эти соотношения в уравнение (1.134) и приравняв члены, содержащие $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, получим выражения для постоянных

$$A_\varepsilon = \frac{\sigma_0(E + Ht_p^2 \omega^2)}{E^2 + H^2 t_p^2 \omega^2}; \quad B_\varepsilon = \frac{-\sigma_0(H-E)t_p \omega}{E^2 + H^2 t_p^2 \omega^2} \quad (1.141)$$

или

$$\varepsilon_0 = \sqrt{A_\varepsilon^2 + B_\varepsilon^2}; \quad \text{tg} \varphi = B_\varepsilon / A_\varepsilon. \quad (1.142)$$

Определение параметров стандартного вязкоупругого тела.

Соотношения, полученные выше в результате исследования ползучести и релаксации напряжений, используют при экспериментальном определении параметров уравнения (1.134). При этом в случае стабильных значений трех неизвестных параметров иногда можно минимизировать объем эксперимента.

Перепишем формулу (1.135) для деформаций ползучести в виде

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_\infty - (\varepsilon_\infty - \varepsilon_0) \exp(-t/t_3), \quad (1.143)$$

где $t_3 = t_p H / E$ – время запаздывания.

Примем $t_0 = 0$; $\varepsilon_0 = \sigma_0 / H$; $t_2 = 2t_1$; $t_4 = 2t_2$; $t_{2i} = 2t_i$ и т. д. Тогда $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$; $\varepsilon_2 = \varepsilon(t_2) = \varepsilon(2t_1)$; $\varepsilon_{2i} = \varepsilon(t_{2i}) = \varepsilon(2t_i)$ и т. д., что позволяет исключить t_1 и получить формулы для определения ε_∞ :

$$\varepsilon_\infty = \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_\infty = \frac{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_{2i}}{2\varepsilon_i - \varepsilon_0 - \varepsilon_{2i}}, \quad (1.144)$$

а затем вычислить длительный модуль как $E = \sigma_0 / \varepsilon_\infty$.

При $t = t_3$ из формулы (1.143) имеем $\varepsilon(t_3) = \varepsilon_\infty - (\varepsilon_\infty - \varepsilon_0)(1 - e^{-1})$, где $1 - e^{-1} = 0,632$. Отмерив $\varepsilon_\infty - 0,632(\varepsilon_\infty - \varepsilon_0)$, получим на оси времени время запаздывания t_3 , а по нему найдем время релаксации $t_p = t_3 E / H$.

Обобщенные модели вязкоупругости. При нагружении стержня усилием, являющимся известной функцией времени, напряжение $\sigma = \sigma(t)$, а общее решение уравнения (1.134) имеет вид

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{Et}{t_p H}\right) + \frac{1}{t_p H} \int_0^t [\sigma(\tau) - t_p \dot{\sigma}(\tau)] \exp\left(-\frac{E\tau}{t_p H}\right) d\tau. \quad (1.145)$$

После интегрирования по частям зависимость деформации от времени записывают в виде интегрального уравнения Вольтерра

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{H} \left(\sigma(t) + \int_0^t \sigma(\tau) K(t-\tau) d\tau \right), \quad (1.146)$$

где $K(t-\tau) = \frac{H-E}{t_3 H E} \exp\left(-\frac{t-\tau}{t_3}\right)$ – ядро ползучести; $t_3 = t_p H / E$ – время запаздывания.

Если задана деформация как функция времени $\varepsilon = \varepsilon(t)$, решение относительно напряжений может быть представлено в виде

$$\sigma(t) = H\varepsilon(t) - \int_0^t \varepsilon(\tau) R(t-\tau) d\tau, \quad (1.147)$$

где $R(t-\tau) = \frac{E-H}{t_p} \exp\left(-\frac{t-\tau}{t_p}\right)$ – ядро релаксации (резольвента ядра ползучести); t_p – время релаксации.

Различные возможности учета особенностей поведения вязкоупругих материалов возникают за счет выбора вида и параметров ядер ползучести и релаксации (ядра Больцмана, Бронского, Слонимского, Ржаницына и др.) или их представления в виде произведения экспонент путем введения спектра времен

ползучести и релаксации. Заметим, что во всех этих случаях напряжения и деформации связаны линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Дальнейшее обобщение предусматривает введение нелинейных моделей деформирования вязкоупругих сред.

Выше рассмотрены только одномерные задачи. Расчеты при сложном напряженном состоянии представляют значительную проблему даже в рамках линейной вязкоупругости. Один из применяемых для этой цели подходов называют принципом Вольтерра. Согласно принципу Вольтерра, задачи линейной вязкоупругости решают, как задачи линейной упругости, подставляя затем вместо постоянных упругости операторы вида (1.146) и (1.147), задающие временную зависимость напряжений и деформаций.

Упражнения

1. По заданной кривой кратковременной ползучести стержня из КМ при изгибе в течение промежутка времени t : рассчитать параметры стандартного вязкоупругого тела; оценить прогиб через промежуток времени $2t$; вычислить прогиб в момент $2t$, если в момент t нагрузка была снята.

2. По параметрам стандартного вязкоупругого тела, найденным согласно заданию 1, построить зависимость удлинения такого же стержня, растягиваемого неизменным во времени усилием, через промежуток времени t как функцию напряжения.

1.7. Вязкое течение

Напряжения. Формула (1.39) дает представление тензора напряжений в виде суммы шарового тензора и девиатора. При движении вязкой жидкости шаровая часть тензора напряжения обусловлена гидростатическим сжатием (давлением), а девиатор – вязким сопротивлением движению:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (1.148)$$

где p – давление, а знак «минус» означает, что соответствующие компоненты тензора напряжения направлены внутрь рассматриваемого элемента (см. рис. 1.7); τ_{ij} – касательные напряжения ($i \neq j$).

В покоящейся жидкости давление равно среднему напряжению $p = -\sigma_{\alpha\alpha} / 3$, а $\tau_{ij} = 0$.

Скорости деформации. Полная, или материальная, производная по времени от вектора перемещения $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = d\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) / dt$ – скорость точки $P(\mathbf{r})$ в момент t . На основании первой из формул (1.55) тензор скоростей деформации $\dot{\epsilon}$ задан компонентами

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_i}{dx_j} + \frac{dv_j}{dx_i} \right). \quad (1.149)$$

Диагональные компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ii}$ – скорости удлинения элемента вдоль координатных осей, а их сумма $\dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} = \dot{\Theta}$ – скорость относительного изменения объема. При $i \neq j$ имеем $2\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\gamma}_{ij}$ – скорости сдвига в плоскости $x_i x_j$.

Уравнения неразрывности. Пусть M – масса вещества в области V движущейся среды (см. рис. 1.13). Масса единицы объема $\rho(\mathbf{r}, t)$ – это плотность вещества (композиции, материала) в данной точке $P(\mathbf{r})$ области в момент времени t . В общем случае среда, заполняющая область V , неоднородна, поэтому ρ – функция координат. Тогда масса вещества в объеме V и средняя плотность среды в области V равны соответственно

$$M(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV; \quad \bar{\rho}(t) = \frac{1}{V} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV.$$

Пусть M_0 – начальное, а M – текущее или конечное значение массы вещества в объеме V . Изменение массы вещества в объеме V связано с изменением средней плотности соотношением

$$M_0 - M = \Delta \rho V, \quad (1.150)$$

которое выражает закон сохранения массы в интегральной форме.

Если через элемент области dV со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ протекает вещество, имеющее плотность $\rho(\mathbf{r}, t)$, то изменение плотности вещества в этом элементе связано с его скоростью соотношениями

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1.151)$$

где символом d обозначена полная производная, называемая материальной, а символом ∂ – локальная, или местная, производная.

Неизменность массы вещества в элементарном объеме пространства означает, что $d\rho(\mathbf{r}, t) / dt = 0$. Тогда, согласно первому уравнению (1.151),

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (1.152)$$

Данное соотношение, как и уравнения (1.151), выражает закон сохранения массы в дифференциальной форме, т. е. для элементарного объема вещества. Уравнение (1.152) называют также уравнением неразрывности, поскольку оно задает условие неизменности объема деформируемой среды в дифференциальной форме. Действительно, с учетом (1.151) из уравнения (1.152) следует, что скорость изменения объема элемента равна нулю, значит, этот объем в процессе движения среды остается неизменным.

Физические уравнения. По аналогии с законом Гука (1.67) записывают уравнения состояния анизотропной линейно-вязкой среды:

$$\sigma'_{ij} = \mu_{ij\alpha\beta} \dot{\varepsilon}'_{\alpha\beta}, \quad (1.153)$$

где $\mu = (\mu_{ijmn})$ – тензор коэффициентов вязкости; штрихами обозначены компоненты девиаторов соответствующих тензоров. Для изотропной жидкости $\mu_{ijmn} = \mu (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})$.

Из уравнений (1.153) следует закон течения изотропной ньютоновской жидкости

$$\tau_{ij} = \mu \dot{\gamma}_{ij}, \quad (1.154)$$

где τ_{ij} и $\dot{\gamma}_{ij}$ – касательные напряжения и скорости сдвига в плоскости $x_i x_j$.

Уравнения движения. Подставив в уравнение (1.143) напряжения, заданные соотношениями (1.148) и (1.154), и приняв условие (1.152), получим уравнение движения изотропной несжимаемой линейно-вязкой жидкости, называемое уравнением Навье – Стокса:

$$\rho \mathbf{w} = \mathbf{f}_V - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}, \quad (1.155)$$

где $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа.

Частным случаем уравнения (1.155) является уравнение Эйлера $\rho \mathbf{w} = \mathbf{f}_V - \nabla p$, характеризующее движение так называемой идеальной

жидкости, вязкость которой равна нулю. Если движение происходит в поле сил тяжести и $\mathbf{f}_V = \rho \mathbf{g}$, то интегрирование уравнения (1.155) приводит к известному уравнению Бернулли

$$p + \rho g H + \rho v^2 / 2 = \text{const},$$

где H – высота, отсчитываемая от некоторого уровня.

Закон сохранения энергии. Кинетическая энергия элемента единичного объема, движущегося со скоростью \mathbf{v} , равна $T_1 = \rho v^2 / 2$, а ее дифференциал $dT_1 = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$. Если на гранях элемента действуют напряжения σ_{ij} , то элементарная работа внутренних сил $\delta R_1 = -\sigma_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}$. Знак минус здесь поставлен согласно правилу знаков для напряжений: положительное направление соответствует внешней нормали к грани элемента. С учетом работы δA_1 внешних сил, действующих на элемент, закон сохранения механической энергии для рассматриваемого элемента записывают в виде

$$dT_1 = \delta R_1 + \delta A_1. \quad (1.156)$$

Внутренняя энергия элемента U_1 изменяется также за счет подвода (отвода) тепла или за счет других внутренних источников энергии, например химических. Обозначим эту часть энергии как δQ . Тогда закон сохранения энергии элемента запишется как

$$dU_1 + dT_1 = \delta A_1 + \delta Q. \quad (1.157)$$

Если δQ_1 – приток тепловой энергии, то соотношение (1.157) выражает закон сохранения энергии, известный как первый закон термодинамики. Приток тепловой энергии через поверхность элемента S равен

$$\delta Q = -\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS, \quad (1.158)$$

где \mathbf{q} – плотность теплового потока (тепловой поток, отнесенный к единице площади); \mathbf{n} – вектор внешней нормали; скалярное произведение под знаком интеграла – проекция вектора \mathbf{q} на направление \mathbf{n} .

Интеграл по поверхности тела (1.158), согласно теореме Остроградского – Гаусса (1.22), преобразуется в интеграл по объему $\delta Q = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV$. С учетом этого скорость изменения внутренней энергии в единице объема равна

$$\frac{dU_1}{dt} = \sigma_{\alpha\beta} d\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{j}, \quad (1.159)$$

где \mathbf{j} – интенсивность внутренних источников энергии (энергия, выделяемая единицей объема в результате химических реакций или физических превращений).

Уравнение (1.159) выражает закон сохранения энергии в дифференциальной форме. Первое слагаемое в правой части уравнения учитывает изменение внутренней энергии в результате деформации элемента. При вязком течении деформации необратимы, а работа деформирования превращается в энергию, рассеиваемую в элементе. Эту часть энергии, отнесенную к единице объема и обозначаемую как $U^* = \tau_{\alpha\beta} \dot{\gamma}_{\alpha\beta}$, называют диссипативной функцией.

Законы течения. Вязкое течение среды характеризуется сопротивлением сдвигу, зависящим от скорости относительного перемещения слоев. Соотношение между касательными напряжениями и скоростями сдвига называют законом течения, а его графическое изображение – кривой течения (рис. 1.37).

Частным случаем является линейная связь между этими величинами, или закон течения ньютоновской жидкости, заданный уравнением (1.154).

В законе течения изотропных сред при простом сдвиге индексы напряжений и скоростей сдвига обычно опускают:

$$\tau = \mu \dot{\gamma}, \quad (1.160)$$

где μ – вязкость; $\dot{\gamma}$ – скорость сдвига.

Вязкость расплавов и растворов полимеров зависит от молекулярной массы, температуры и давления. С увеличением молекулярной массы вязкость возрастает. Температурную зависимость вязкости обычно принимают в форме закона Аррениуса

$$\mu(T) = \mu_0 \exp(E_b / R_g T), \quad (1.161)$$

где μ_0 – параметр, имеющий размерность вязкости; E_b – энергия активации вязкого течения; R_g – универсальная газовая постоянная; T – термодинамическая температура.

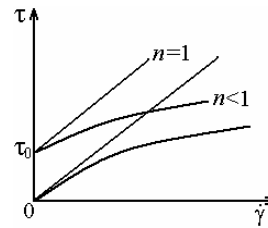


Рис. 1.37

Для описания процессов вязкого течения полимерных расплавов и композиций часто используют нелинейные законы. Наибольшее распространение получил степенной закон Оствальда – де-Вила, согласно которому зависимость между касательным напряжением τ и скоростью сдвига $\dot{\gamma}$ записывают в виде степенной функции

$$\tau = \mu \dot{\gamma}^n, \quad (1.162)$$

где μ – коэффициент консистенции; n – параметр среды ($n \leq 1$).

Иногда по аналогии с (1.160) уравнение (1.162) записывают как

$$\tau = \mu_e \dot{\gamma}, \quad (1.163)$$

где μ_e – эффективная (кажущаяся, структурная) вязкость, заданная соотношением

$$\mu_e(\dot{\gamma}) = \mu \dot{\gamma}^{n-1}. \quad (1.164)$$

Параметры μ и n зависят от природы и структуры полимера, а также условий течения. Температурную зависимость коэффициента консистенции представляют в форме закона Аррениуса (1.161). Параметр n тоже зависит от температуры: с увеличением температуры он возрастает, приближаясь к единице.

Согласно экспериментальным данным, в области малых скоростей сдвига (обычно менее 10 с^{-1}) расплавы термопластичных полимеров ведут себя как линейно-вязкие, а при более высоких скоростях сдвига – как нелинейно-вязкие (рис. 1.38). Эту особенность учитывают, задавая эффективную вязкость в форме закона Керри:

$$\mu_e = [1 + (\lambda_v \dot{\gamma})^2]^{(n-1)/2}. \quad (1.165)$$

Параметр λ_v отражает вид зависимости эффективной вязкости при различных скоростях сдвига. При малых скоростях сдвига эффективная

вязкость не зависит от скорости сдвига, поэтому вторым слагаемым в квадратной скобке можно пренебречь. При больших скоростях сдвига, напротив, это слагаемое велико по сравнению с единицей и формула (1.165) преобразуется в формулу (1.164).

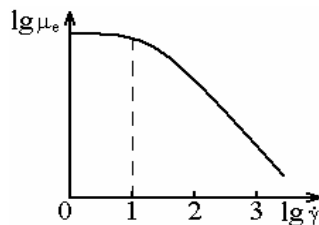


Рис. 1.38

Иногда вязкое течение начинается лишь после превышения касательными напряжениями определенного значения τ_0 – *предела текучести* (см. рис. 1.37). Такие среды называют вязкопластичными. Простейший закон течения вязкопластичных сред представляют в форме Бингама – Шведова:

$$\tau = \tau_0 + \mu \dot{\gamma}. \quad (1.166)$$

Если вязкое течение подчиняется степенному закону, то закон течения вязкопластичной среды выражают в форме Балкли – Гершеля:

$$\tau = \tau_0 + \mu \dot{\gamma}^n. \quad (1.167)$$

Закон течения вязкопластичных сред при произвольном напряженном состоянии имеет вид

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\left(\tau_0/H_\varepsilon + \mu H_\varepsilon^{n-1}\right)\dot{\varepsilon}'_{ij}, \quad (1.168)$$

где $\dot{\varepsilon}'_{ij}$ – компоненты девиатора деформации; $H_\varepsilon = \sqrt{2\dot{\varepsilon}'_{\alpha\beta}\dot{\varepsilon}'_{\alpha\beta}}$ – интенсивность скоростей деформации, связанная со вторым инвариантом тензора $\dot{\varepsilon}$. При простом сдвиге в плоскости x_1x_2 касательное напряжение равно $\sigma_{12} = \tau$, а скорость сдвига $2\dot{\varepsilon}'_{12} = \dot{\gamma}$, тогда из уравнения (1.168) следует закон течения (1.167).

Течение в плоской щели. Рассмотрим случай затекания несжимаемой нелинейно-вязкой жидкости в щель, образованную двумя плоскопараллельными пластинами, зазор между которыми равен h (рис. 1.39, а).

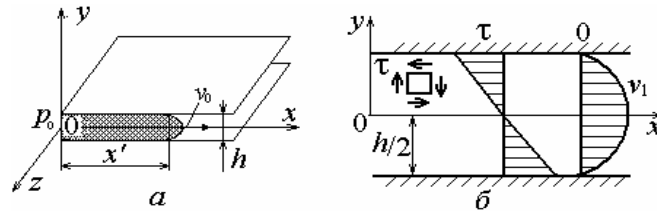


Рис. 1.39

Пусть на входе в щель давление равно p_0 , а на выходе $p_b < p_0$, т. е. имеется отрицательный градиент давления в направлении оси x (x_1).

Пренебрегая инерционными силами, из уравнения движения (1.43) получаем $\tau \equiv \tau_{12} = x_2(dp/dx_1)$. Для упрощения записи

индексы компонентов тензора напряжений в дальнейшем опускаем.

Скорость сдвига в плоскости x_1x_2 равна $\dot{\gamma} \equiv \dot{\gamma}_{12} = dv_1/dx_2$. Подставим это выражение в закон течения (1.162) и выразим касательные напряжения через градиент давления. Интегрируя полученное дифференциальное уравнение при условии прилипания жидкости к стенкам $v_1(\pm h/2) = 0$, находим распределение скоростей в поперечном сечении щели:

$$v_1(x_2) = v_0[1 - (2x_2/h)^{s+1}], \quad (1.169)$$

где $v_0 = \frac{h^{s+1}}{2^{s+1}(s+1)\mu^s} \left| \frac{dp}{dx_1} \right|^s$ – скорость жидкости в срединной плоскости щели; $s = 1/n$.

Распределение касательных напряжений и скоростей показано на рис. 1.39, б. Для ньютоновской жидкости ($s = 1$) распределение скоростей задается параболой. С уменьшением показателя степени n в законе течения (1.162) профиль скорости в средней части щели становится более плоским и вырождается в конечном счете в равномерный, типичный для так называемого пробкового, или стержневого, режима течения.

Объемный расход жидкости через щель единичной ширины получим, проинтегрировав уравнение (1.169) по x_2 . Расход ньютоновской жидкости задается формулой

$$Q_1 = \frac{h^3}{12\mu} \left(-\frac{dp}{dx_1} \right). \quad (1.170)$$

Если длина щели L и давление на выходе из щели равно p_b , градиент давления равен $|dp/dx_1| = (p_0 - p_b)/L$ по всей длине щели, тогда расход жидкости со степенным законом течения составляет

$$Q_1 = \frac{h^{s+2}}{2^{s+1}(s+2)\mu^s} \left| \frac{dp}{dx_1} \right|^s. \quad (1.171)$$

При затекании жидкости в щель глубина затекания x' – переменная величина, а расход зависит от x' . Подставив выражения для расхода и градиента давления в формулу (1.171)

и проинтегрировав полученное уравнение, найдем глубину затекания как функцию времени, определяющую кинетику этого процесса.

Течение в канале круглого сечения. При течении несжимаемой нелинейно-вязкой жидкости в канале круглого сечения радиусом R (с прилипанием к стенкам) распределение скорости аналогично заданному формулой (1.169):

$$v_z(r) = v_0 [1 - (r/R)^{s+1}], \quad (1.172)$$

где z – ось канала; $v_0 = \frac{R^{s+1}}{2^s (s+1) \mu^s} \left| \frac{dp}{dz} \right|^s$ – скорость жидкости на оси канала (рис. 1.40).

Интегрирование скорости по площади сечения канала дает объемный расход жидкости.

Пусть L – длина мерного участка; p_0, p_b – давление на входе и на выходе мерного участка соответственно. Градиент давления равен $dp/dz = (p_0 - p_b)/L$, а объемный расход

$$Q = \frac{\pi R^{s+3}}{2^s (s+3) \mu^s} [(p_0 - p_b)/L]^s. \quad (1.173)$$

Касательные напряжения у стенки канала $\tau(R) = \frac{R}{2} \frac{dp}{dz}$, а скорость сдвига $\dot{\gamma}(R) = Q(s+3)/\pi R^3$. Зависимость между этими величинами,

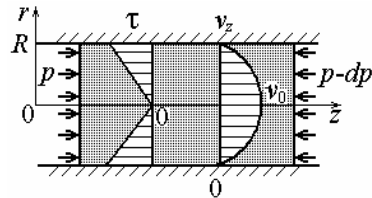


Рис. 1.40

определяемыми по результатам эксперимента, используют для характеристики реологических свойств исследуемой жидкости.

В случае линейно-вязкой жидкости из формулы (1.173) следует известная формула Пуазейля

$$Q = \pi R^4 (p_0 - p_b) / (8\mu L). \quad (1.174)$$

Ее используют при экспериментальном определении вязкости ньютоновских жидкостей по капиллярному методу.

Для нахождения ньютоновской вязкости достаточно из одного наблюдения (при заданных параметрах капилляра R и L и гра-

диенте давления) определить расход жидкости. В случае неллинейно-вязкой жидкости необходимы по крайней мере два опыта при различных значениях параметров капилляра или градиентов давления. При этом должны быть обеспечены условия прилипания жидкости, в противном случае вычисленные по результатам измерений параметры жидкости могут существенно отличаться от фактических. К другим источникам погрешностей относятся потери давления на входе в капилляр, ориентационные эффекты и вязкоупругие деформации. Чтобы их учесть, вводят соответствующие поправки.

Течение при продольном сдвиге между цилиндрическими поверхностями. Пусть жидкость находится между двумя коаксиальными цилиндрами, причем наружный цилиндр радиусом R_n

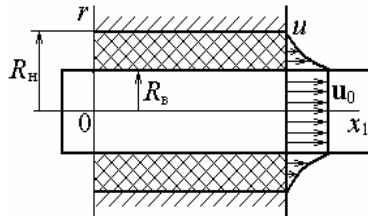


Рис. 1.41

неподвижен, а внутренний радиусом R_b ($R_n / R_b = c_R$) перемещается вдоль оси со скоростью u (рис. 1.41). Из уравнения (1.44'), записанного в цилиндрических координатах,

следует: $\frac{\partial}{\partial z}(r\tau_{rz}) = 0$. Подставив

касательное напряжение из закона течения (1.162), также за-

писанного в цилиндрических координатах, и дважды проинтегрировав при условиях на границах цилиндров $v_z(R_b) = u$ и $v_z(R_n) = 0$, найдем распределение скоростей:

$$\frac{v_z}{u} = \frac{\ln(R_n/r)}{\ln c_R} \text{ при } n = 1 \text{ и } \frac{v_z}{u} = \frac{c_R^{1-s} - (r/R_b)^{1-s}}{c_R^{1-s} - 1} \text{ при } n \neq 1. \quad (1.175)$$

Скорости сдвига как производные от скоростей по r равны соответственно

$$\dot{\gamma}_{rz}(r) = -\frac{u}{R_b \ln c_R} \text{ и } \dot{\gamma}_{rz}(r) = \frac{u}{R_b} \frac{(s-1)c_R^{s-1}}{1-c_R^{s-1}} (R_b/r)^s. \quad (1.176)$$

Подстановка этих выражений в закон течения (1.162) дает касательные напряжения как функции радиуса. Их наибольшие значения соответствуют $r = R_b$. Если зазор между цилиндрами

мал по сравнению с их радиусами, то исследуемое течение вы- рождается в течение при сдвиге между плоскопараллельными плитами.

Сжатие нелинейно-вязкого диска между плоскопараллель- ными плитами. Пусть диск объемом V из несжимаемой нели- нейно-вязкой жидкости деформируется между плоскопарал- лельными плитами, сближающимися под действием силы F (рис. 1.42).

Радиус R и толщина диска h связаны условием не- изменности объема $V = \pi R^2 h = \text{const}$.

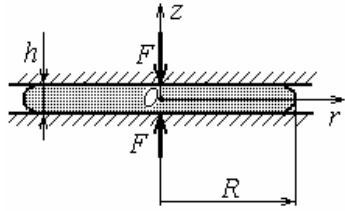


Рис. 1.42

Из этого условия следует так- же связь между скоростью изме- нения толщины диска, равной ско- рости сближения плит $v_z = -dh / dt$, и радиальными скоростями v_r в произвольном окружном сечении радиусом r :

$$\pi r^2 v_z = 2\pi r \int_{-h/2}^{h/2} v_r(z) dz. \quad (1.177)$$

Касательные напряжения связаны с радиальным градиентом давления (от координат r и z давление не зависит) соотношением $\tau_{rz} = z(dp/dr)$. Подставив это выражение в закон течения (1.162) и проинтегрировав по z при условии идеального прилипания $v_r(\pm h/2) = 0$, получим распределение радиальной скорости по толщине диска

$$v_r = \frac{h^{s+1}}{(s+1)\mu^s} \left| \frac{dp}{dr} \right|^s \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^{1+s} \right]. \quad (1.178)$$

Подставив далее это выражение в уравнение неразрывно- сти (1.177) и проинтегрировав, найдем градиент давления, а за- тем, проинтегрировав по радиусу, – распределение давления вдоль радиуса:

$$p = p(R) + \frac{(2+s)^n v_z^n R^{n+1} \mu}{2^n (n+1) h^{1+2n}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{1+n} \right]. \quad (1.179)$$

Интегрирование по площади диска при $p(R) = 0$ дает формулу, связывающую приложенное усилие и параметры течения:

$$F = \frac{\pi(2+s)^n v_z^n R^{n+3} \mu}{2^n (n+3) h^{1+2n}}. \quad (1.180)$$

Выведенные соотношения используют при экспериментальном определении параметров полимерных расплавов и композиций, моделируемых нелинейно-вязкими жидкостями. Возможны два варианта испытаний:

1) сжатие плоского слоя между плитами радиусом R , при этом объем вещества, находящегося между плитами, по мере их сближения уменьшается (метод Лауна);

2) сжатие диска заданного объема $V_0 = \pi R^2 h = \text{const}$ между плитами, радиус которых больше R , при этом деформируемый объем остается неизменным.

Пусть во время испытаний по первому варианту (при $R = \text{const}$) усилие F также поддерживается постоянным. Выразим из формулы (1.180) скорость сближения плит v_z как функцию расстояния между ними:

$$v_z = \left[\frac{(3+n)F}{2\pi\mu(2+s)^n R^{3+n}} \right]^{1/n} h^{(1+2n)/n}. \quad (1.181)$$

Значение величин, заключенных в квадратные скобки, остается в течение опыта постоянным, если свойства испытываемого вещества (μ и n) неизменны. Прологарифмировав (1.181), получим:

$$\lg v_z = A_v + \frac{1+2n}{n} \lg h, \quad (1.182)$$

где $A_v = \frac{1}{n} \lg \frac{(3+n)F}{2\pi\mu(2+s)^n R^{3+n}}$.

Из соотношения (1.178) найдем производную функции $\lg v_z$ по переменной $\lg h$:

$$\frac{d \lg v_z}{d \lg h} = \frac{1+2n}{n}. \quad (1.183)$$

Отсюда следует, что в процессе деформирования диска зависимость между скоростью и толщиной в двойных логарифмических координатах $\lg v_z - \lg h$ должна получаться линейной, а наклон прямой зависит только от параметра n . Определив на некотором участке кривой $h(t)$ приращения $\lg h$ и $\lg v_z$ и разделив их согласно (1.183), получим уравнение для искомой константы n . Подставив это значение в формулу (1.180), найдем коэффициент консистенции μ .

Если $h(t)$ – толщина диска, сжимаемого силой F , в момент t , v_z – скорость ее изменения, то при испытаниях по второму варианту (при неизменном объеме образца) имеет место соотношение

$$\frac{d \lg v_z}{d \lg h} = \frac{5(1+n)}{2n}. \quad (1.184)$$

Из формулы (1.184) следует выражение для параметра n :

$$n = 5 / [2 d(\lg v_z) / d(\lg h) - 5]. \quad (1.185)$$

Вместо формулы (1.180) в данном случае ($V_0 = \pi R^2 h = \text{const}$) получаем для усилия сжатия диска следующее выражение:

$$F = \frac{2^{1+n} (2+s)^n \sqrt{V_0^{3+n}} \mu}{(3+n)(3+5s)^n \sqrt{\pi^{1+n} t^n}} \left[h^{\frac{3+5s}{2}} - h_0^{\frac{3+5s}{2}} \right]^n, \quad (1.186)$$

где h_0 – начальная толщина диска.

Для коэффициента консистенции μ при тех же условиях имеем

$$\mu = \frac{\pi^{(1+n)/2} (3+n) h^{5(1+n)/2} F}{2(2+s)^n v_z^n V_0^{(3+n)/2}}. \quad (1.187)$$

Таким образом, оба параметра (μ и n) могут быть определены по одной зависимости толщины диска от времени. Однако в расчетные соотношения входят мгновенные значения скорости изменения толщины диска и их приращения, поэтому даже малые

погрешности оценки толщины диска могут привести к большим погрешностям оценки искомым параметров. Чтобы исключить случайные погрешности измерения h , для оценки текущих скоростей и приращений их логарифмов целесообразно строить уравнения линейной регрессии $\lg v_z - \lg h$, а параметр n находить через угловой коэффициент этого уравнения, оцениваемый по методу наименьших квадратов.

Из формулы (1.186) следует зависимость толщины диска от продолжительности действия усилия:

$$h(t) = \left[h_0^{-(3+5s)/2} + \left(\frac{(3+n)^s F^s}{(2+s) 2^s \mu^s} \frac{\pi^{(1+s)/2}}{V_0^{(3s+1)/2}} \frac{3+5s}{2} t \right) \right]^{-2/(3+5s)}. \quad (1.188)$$

Дисперсия относительных отклонений экспериментальных значений h_i от значений, вычисленных согласно формуле (1.188), характеризует адекватность модели.

При деформировании диска между плоскопараллельными плитами наибольшие касательные напряжения и скорости сдвига возникают на периферии диска (при $r = R$) и равны соответственно:

$$\tau(R) = \frac{3+n}{2} \frac{hF}{\pi R^3}; \quad \dot{\gamma}(R) = \frac{1+2n}{n} \frac{v_z}{h^2} R. \quad (1.189)$$

Зависимость $\tau(R) - \dot{\gamma}(R)$, построенная с использованием формул (1.189), служит аналогом кривой течения. Вычисляя отношение $\tau / \dot{\gamma}$, находят эффективную вязкость как

$$\mu_{\text{э}} \equiv \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{(3+n)n}{2(1+2n)} \frac{F}{\pi R^4} \frac{h^3}{v_z}.$$

При этом заметим, что параметры испытываемого вещества в изложенных вариантах метода считались неизменными. Если исследуемое вещество в процессе деформирования претерпевает структурные превращения, то для определения параметров закона течения требуются дополнительные уравнения. Их можно, в частности, получить, измеряя помимо толщины диска давление в центре как функцию времени.

Упражнения

1. Охарактеризовать распределение скоростей нелинейно-вязкой жидкости (полимерного расплава), скоростей сдвига и касательных напряжений при течении в плоской щели и в трубе, а также зависимость этих параметров от градиента давления, коэффициента консистенции и показателя степени в законе течения.

2. Построить зависимости толщины диска из нелинейно-вязкой жидкости, сжимаемого между плоскопараллельными плитами, и распределения давления на его поверхности как функции времени и показателя степени в законе течения.

3. ЖЕСТКОСТЬ

3.1. Задачи и методы прогнозирования

Постановка задачи. Одно из важнейших достоинств КМ, обеспечивших им эффективное применение в различных отраслях техники, – возможность управления структурой материала в зависимости от конфигурации и характера нагружения конкретного изделия. При этом управление структурой материала в изделии включает выбор подходящих компонентов, задание оптимальной степени наполнения, взаимного расположения и ориентации армирующих наполнителей в соответствии с полями напряжений, действующих в изделии при эксплуатации.

Поскольку сам материал и его структура формируются только при изготовлении изделия, а изготовление изделий с различными вариантами структуры сопряжено со значительными затратами времени и средств, то неизбежно возникает задача определения свойств материала, необходимых для расчета изделия и оптимизации структуры материала в нем, еще до того, как будет изготовлено само изделие. Поэтому проблема прогнозирования свойств КМ в изделиях возникла уже на ранних стадиях промышленного применения КМ.

Первоначально для прогнозирования свойств КМ по свойствам компонентов и заданной структуре материала в изделии использовали методы, разработанные ранее для прогнозирования упругих свойств и прочности поликристаллических (металлических) материалов. В связи с особенностями структуры и поведения КМ были предложены и развиты многочисленные новые методы решения этой задачи, обеспечивающие более точный учет особенностей поведения компонентов, формы и взаимного расположения элементов структуры, несовершенств структуры КМ, в том числе повреждений, возникающих на стадии формообразования изделий и в условиях эксплуатации. Накоплены экспериментальные данные, позволяющие оценить адекватность применяемых моделей КМ и методов прогнозирования свойств. Выяснилось, в частности, что далеко не всегда усложнение модели материала и увеличение объемов вычислений приводят к желаемому уточнению результата.

Типичная задача прогнозирования постоянных упругости КМ формулируется следующим образом: по заданным характеристикам упругих свойств компонентов и параметрам структуры материала найти показатели его упругих свойств. Методы прогнозирования

различаются в зависимости от типа анизотропии упругих свойств компонентов, моделей структуры и от применяемых математических средств.

Прогнозирование постоянных упругости КМ относится к более простым задачам, ее решению посвящено наибольшее число работ. Намного сложнее оценивать показатели вязкоупругих свойств, характеристики поврежденности и прочности КМ при сложных напряженных состояниях и с учетом внешних воздействий в условиях эксплуатации.

Задача прогнозирования постоянных упругости остается актуальной в связи с расширением номенклатуры применяемых компонентов и изделий. Именно в области преимущественно упругих деформаций эксплуатируются нагруженные элементы конструкции из КМ.

Основные гипотезы. Модель материала, используемая с целью прогнозирования свойств, задается системой гипотез относительно свойств компонентов, структуры КМ и взаимодействия ее элементов при деформировании. Чтобы учесть определенные особенности или оценить влияние каких-либо параметров структуры КМ, необходимо непременно ввести их в модель.

Обычно предполагают, что частицы наполнителя и матрица деформируются как линейно-упругие тела. При этом компоненты могут быть изотропными или анизотропными. Предположение об изотропии упругих свойств элементов структуры на микроуровне часто вводят лишь ввиду отсутствия соответствующих экспериментальных данных. Действительно, не так просто измерить, скажем, поперечный модуль упругости, модули сдвига и коэффициенты Пуассона углеродного, полимерного или иного анизотропного волокна, диаметр которого менее 10 мкм.

Обычно предполагают, что размеры частиц наполнителя и матричного вещества малы по сравнению с размерами представительного объема (например, с размерами стандартного образца для определения показателей упругих свойств), элементы структуры заполняют представительный объем сплошным образом, а между частицами наполнителя и матричным веществом существует идеальная связь (отсутствуют поры, микротрещины и т. п.).

В простейших регулярных моделях структуры КМ частицы наполнителя имеют правильную форму и одинаковые размеры, упорядоченно расположены в сечениях, например в виде квадратной или гексагональной решетки (см. рис. 2.9).

Статистические модели учитывают неоднородность структуры КМ – разброс размеров и параметров формы частиц, их стохастиче-

ское расположение и другие несовершенства, но при этом предполагается, что микроструктура статистически однородна относительно соответствующих параметров и известны распределения этих параметров как случайных величин или функций.

Критерием адекватности модели служит соответствие результатов прогнозирования результатам эксперимента. Но при изготовлении образцов могут наблюдаться отклонения от параметров структуры и свойств, задаваемых в модели. Поэтому отличие результатов эксперимента от расчетных не всегда является признаком только «плохой» модели. Весьма часто эти отклонения являются следствием «плохого» изготовления образцов или погрешностей, допущенных при испытаниях и интерпретации их результатов.

Методы прогнозирования. Методы прогнозирования упругих свойств КМ различают по виду величин или функций, характеризующих модель структуры и параметры напряженного и деформированного состояния; по способу учета взаимодействия элементов структуры и методам решения задачи о взаимодействии элементов при деформировании КМ.

К классическим (*детерминистическим*) относятся методы, в которых используют регулярные модели структуры КМ, а взаимодействие элементов структуры учитывают путем решения задач, типичных для классической механики материалов (сопротивления материалов) или теории упругости. Так, предположение о равных деформациях элементов структуры при растяжении приводит к оценке модулей Юнга однонаправленного волокнистого КМ по схеме Фойгта (W. Voigt). Полагая равными напряжения в слоистом КМ, растягиваемом или сжимаемом в перпендикулярном направлении, оценивают модули Юнга по схеме Ройсса (A. Reuss). Эти простейшие модели и методы рассматриваются ниже.

Многие методы прогнозирования постоянных упругости КМ по свойствам компонентов основаны на очевидном предположении, что наличие частиц наполнителя обуславливает изменение напряженного и деформированного состояния окружающей его матрицы при нагружении. Чаще всего предполагают, что частицы наполнителя прочно связаны с матрицей. Возмущение напряженного и деформированного состояния матрицы зависит от формы, взаимного расположения и содержания частиц наполнителя и определяет вклад наполнителя в упругие свойства КМ. Постоянные упругости, получаемые с учетом этого вклада, называют *эффективными*.

Для характеристики упругих свойств изотропного КМ достаточно определить любые две независимые постоянные упругости. Чаще других находят эффективные модули объемной деформации и сдвига, которые являются коэффициентами пропорциональности при разложении тензора напряжений на шаровую часть и девиатор (см. подразд. 1.2 и 1.4).

Метод оценки модулей объемной деформации и сдвига изотропного КМ, наполненного изометричными частицами, на основе анализа взаимодействия упругого шара с окружающей его однородной упругой матричной средой при малых концентрациях наполнителя предложили М. А. Кривоглаз и А. С. Черевко. Напряженное и деформированное состояние шарового включения считается при этом однородным.

При оценке постоянных упругости по *методу самосогласования* предполагается, что матричный слой имеет малую толщину, а окружающая среда обладает упругими свойствами КМ – эффективными постоянными упругости. По этому методу получены оценки эффективных модулей поликристаллов (Э. Крёнер), среды с эллиптическими включениями (Дж. Эшелби), волокнистых КМ (Р. Хилл) и др.

Для оценки границ эффективных модулей упругости наполненных КМ задачу теории упругости решают с помощью энергетических (*вариационных*) *методов*. Предполагается, что реальному напряженному и деформированному состоянию элементов структуры соответствует минимум дополнительной энергии, обусловленной взаимодействием элементов. Вычисление экстремума функционала, зависящего от свойств компонентов и структуры КМ, дает верхнюю и нижнюю границы эффективных постоянных упругости КМ – «вилку Хашина – Штрикмана».

Решая плоскую задачу теории упругости, находят эффективные постоянные упругости однонаправленных волокнистых КМ, а также компоненты напряжений и деформаций в элементах структуры регулярных моделей КМ. Известны решения для моделей, включающих достаточно большое число волокон, в том числе имеющих различные диаметры и малые отклонения от регулярного положения, а также дефекты связи на границе с матрицей (Г. А. Ванин).

Статистические методы позволяют ввести параметры структуры и показатели свойств компонентов КМ как случайные величины или функции координат. В качестве эффективных постоянных упругости принимают значения, получаемые в результате применения оператора математического ожидания к случайным величинам

или функциям, содержащим соответствующие постоянные упругости компонентов, параметры формы, расположения и пространственной ориентации элементов структуры. Однако простейший из статистических методов – метод осреднения – при оценке компонентов тензора модулей упругости или компонента тензора упругих податливостей не позволяет учесть взаимодействие элементов структуры.

Учет взаимодействия элементов структуры и тем более несовершенств структуры и связи между матрицей и наполнителями, обусловленных технологическими факторами, – наиболее сложная задача при прогнозировании постоянных упругости КМ. Но именно от правильного учета этих особенностей в значительной мере зависит точность оценки постоянных упругости КМ. Отсутствие необходимой информации о структуре КМ, громоздкость вычислений при введении в модель материала даже простых параметров, отражающих несовершенство структуры и взаимодействия элементов, затрудняет достоверную оценку показателей упругих свойств реальных материалов. Поэтому получили широкое распространение *регрессионные методы*, которые позволяют учесть влияние тех или иных факторов путем введения коэффициентов, определяемых для каждого конкретного типа материала из эксперимента.

Ниже более детально рассматриваются некоторые простейшие методы прогнозирования постоянных упругости КМ.

Схема Фойгта. Требуется определить модуль Юнга однонаправленного волокнистого КМ при растяжении вдоль волокон. Из модели КМ (см. рис. 1.17) вырежем слой единичной толщины и рассмотрим одноосное растяжение полученной пластины (рис. 3.1).

Исследуемая модель КМ содержит участки армирующих волокон (а) и матрицы (м). Если общая площадь сечения, перпендикулярного направлению волокон и приложенной растягивающей силе F , равна A , то площади сечений участков, занимаемых волокнами и матрицей, равны $A_a = AP_a$ и $A_m = AP_m$ соответственно, где P_a – относительная площадь сечения волокон; P_m – относительная площадь сечения матрицы, причем в отсутствие пор $P_a + P_m = 1$. Модули Юнга армирующих волокон и матрицы равны E_a и E_m .

Допустим, что элементы структуры имеют равные деформации, т. е. $\epsilon_a = \epsilon_m = \epsilon$, где ϵ – относительное удлинение пластины. Напряжения в элементах различны, поскольку различаются модули Юнга компонентов: σ_a

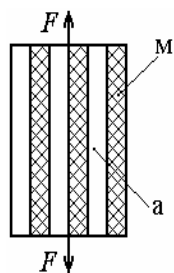


Рис. 3.1

$= E_a \varepsilon_a$; $\sigma_m = E_m \varepsilon_m$. Напряжения, отнесенные ко всей модели (макронапряжения в КМ), равны $\sigma = F/A$, причем сила F , согласно условиям равновесия, равна $F = F_a + F_m$, где $F_a = \sigma_a A_a$ и $F_m = \sigma_m A_m$. Переходя к напряжениям и выражая напряжения в компонентах через деформации, имеем $\sigma = E \varepsilon = E_a \varepsilon_a A_a / A + E_m \varepsilon_m A_m / A$.

Далее вводим относительные доли компонентов и в результате деления на $\varepsilon_a = \varepsilon_m = \varepsilon$ получаем выражение для модуля упругости по Фойгту:

$$E_V = E_a P_a + E_m + P_m \quad (3.1)$$

Согласно формуле (3.1), модуль Юнга по Фойгту пропорционален модулям упругости компонентов и их объемным концентрациям.

Заметим, что взаимодействие компонентов отражает предположение о равенстве продольных деформаций. Связь между элементами структуры и поперечные деформации при этом не учитываются.

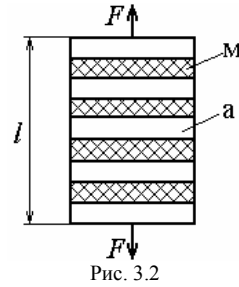
Схема Ройсса. Представим модель КМ в виде системы параллельных слоев армирующего (а) и матричного (м) материалов, нагруженной растягивающей силой в направлении, перпендикулярном плоскости слоев (рис. 3.2).

Слои прочно связаны между собой. Полная толщина пакета $l = l_a + l_m$, где l_a – суммарная толщина слоев из армирующего материала с модулем Юнга E_a ; l_m – суммарная толщина слоев из матричного материала с модулем Юнга E_m . Площадь сечения слоев в направлении растяжения одинакова. По условию равновесия напряжения во всех слоях также одинаковы: $\sigma = \sigma_a = \sigma_m$.

Удлинение пакета при растяжении равно сумме удлинений армирующих и матричных слоев: $\Delta l = \Delta l_a + \Delta l_m$. Среднюю деформацию модели получим, разделив полное удлинение на толщину пакета:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \left(\frac{\Delta l_a}{l_a} \right) \left(\frac{l_a}{l} \right) + \left(\frac{\Delta l_m}{l_m} \right) \left(\frac{l_m}{l} \right).$$

Учитывая, что относительная толщина слоев каждого вида равна объемной доле соответствующего компонента в модели,



т. е. $l_a/l = P_a$ и $l_m/l = P_m$, записываем деформацию $\varepsilon = \varepsilon_a P_a + \varepsilon_m P_m$.

Введем в полученное выражение напряжения в соответствии с законом Гука:

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{P_a \sigma_a}{E_a} + \frac{P_m \sigma_m}{E_m}.$$

Отсюда, учитывая равенство напряжений в слоях, выводим формулу для упругой податливости рассматриваемой модели:

$$\frac{1}{E_R} = \frac{P_a}{E_a} + \frac{P_m}{E_m}. \quad (3.2)$$

Решая относительно модуля Юнга, находим

$$E_R = E_m E_a (E_m P_a + E_a P_m)^{-1}. \quad (3.3)$$

В результате деления числителя и знаменателя формулы (3.3) на E_a получим следующую запись формулы для модуля Юнга по Ройссу:

$$E_R = E_m [1 - P_a (1 - E_m / E_a)]^{-1}. \quad (3.4)$$

Метод осреднения. Предположим, что изотропные частицы армирующего наполнителя КМ случайным образом распределены в матричном веществе и вместе с ним непрерывным и статистически однородным образом заполняют некоторый представительный объем. Пусть P_a – относительный объем частиц наполнителя; P_m – относительный объем матричного вещества. Из условия непрерывности (при отсутствии пор) следует, что $P_a + P_m = 1$.

Форма, размеры и ориентация частиц здесь не учитываются, а потому могут быть произвольными. Согласно статистической модели КМ, модуль Юнга, заданный на множестве реализаций микроструктуры КМ, в определенной точке равен модулю Юнга наполнителя с вероятностью, равной объемной доле наполнителя P_a , и равен модулю Юнга матричного вещества с вероятностью P_m . Следовательно, математическое ожидание модуля Юнга как дискретной случайной величины

$$\langle E \rangle = E_a P_a + E_m P_m. \quad (3.5)$$

Формула (3.5) определяет модуль Юнга композита как средневзвешенный модуль компонентов материала по их объемным долям, поэтому ее называют «правилом смеси».

Математическое ожидание упругой податливости модели равно

$$\left\langle \frac{1}{E} \right\rangle = \frac{P_a}{E_a} + \frac{P_m}{E_m}. \quad (3.6)$$

Сравнивая формулы (3.5) и (3.6) с формулами (3.1) и (3.2) соответственно, видим, что полученное выражение для среднего значения модуля Юнга в точности совпадает с модулем Юнга, вычисленным по схеме Фойгта, а среднее значение упругой податливости – с выражением для упругой податливости, найденным по схеме Ройсса. Заметим, что в оригинальных работах Фойгта и Ройсса, посвященных нахождению постоянных упругости поликристаллов по свойствам составляющих их кристаллитов, применялись операции осреднения напряжений при постоянных деформациях и осреднения деформаций при постоянных напряжениях, что эквивалентно выполненным выше операциям осреднения модулей и упругих податливостей.

В отличие от упрощенных механических моделей КМ, названных схемами Фойгта и Ройсса, осреднение модулей упругости и упругих податливостей является формальной процедурой и ее применение не связано с какими-либо гипотезами относительно геометрии элементов структуры и характера их взаимодействия. А это означает, что метод осреднения не учитывает данные факторы.

Будучи формальным, метод осреднения может быть применен для оценки не только постоянных упругости, но и любых других характеристик свойств КМ. Однако адекватность такого метода прогнозирования каждый раз нуждается в специальном обосновании и экспериментальном подтверждении.

Соответствие результатов расчета по формулам вида (3.5) или (3.6) экспериментальным данным для конкретных типов материалов иногда улучшают путем введения в эти формулы дополнительных (по сути своей регрессионных) коэффициентов, определяемых по результатам эксперимента и учитывающих особенности структуры и взаимодействия ее элементов.

Сеточная модель. В числе немногих частных случаев, когда простейшие модели прогнозирования постоянных упругости дают достаточно точные результаты, – оценка по схеме Фойгта продольного модуля Юнга однонаправленных волокнистых композитов. Более того,

если объемная доля волокон велика ($P_a > 0,5$), а модули Юнга волокон по крайней мере на порядок больше модулей упругости матрицы, то второе слагаемое в правой части формулы (3.1) мало по сравнению с первым. Например, для однонаправленного стеклопластика при $P_a = 0,6$, $E_a = 70$ ГПа и $E_m = 3$ ГПа вклад матрицы в модуль Юнга при растяжении вдоль волокон не превышает 3%. При этих условиях, пренебрегая вторым слагаемым в формуле (3.1), запишем модуль Юнга в направлении армирования (по оси x_1) как

$$E_1 \cong E_a P_a. \quad (3.7)$$

Это означает, что нагрузку в таком КМ воспринимают только волокна. Если действующую на КМ растягивающую нагрузку передают только волокна, то материал работает как система нитей, т. е. как сетка, отсюда и название модели.

Считают, что в сеточной модели волокна непрерывны и нагрузка между ними не перераспределяется; отсутствует сопротивление сжимающей нагрузке, сдвигу и растягивающей нагрузке, приложенной перпендикулярно волокнам. Кроме того, предполагается, что волокна деформируются линейно упруго вплоть до разрушения. Эти предположения позволяют построить упрощенную модель КМ, содержащих непрерывные волокна, в частности слоистых КМ. Число слоев может быть конечным. В этом случае задают счетное множество направлений их ориентации. Углы, задающие ориентацию слоев, могут быть также заданы как непрерывно распределенные случайные величины. Постоянные упругости КМ в плоскости рассчитывают путем осреднения по ориентациям постоянных упругости отдельных слоев или иных структурных элементов (с учетом сформулированных выше гипотез).

Предположение о хрупком характере разрушения позволяет использовать сеточную модель для оценки разрушающих напряжений при нагружении КМ в плоскости слоев.

Методы статистической теории упругости. Пусть $\lambda(\mathbf{x})$ – индикаторная функция подмножества точек, заданных радиусом-вектором \mathbf{x} и принадлежащих частицам наполнителя двухкомпонентного материала (см. подразд. 2.2). Напряжения и деформации в произвольной точке $P(\mathbf{x})$, отнесенные к элементам микроструктуры (поэтому они обозначены индексом II), связаны законом Гука:

$$\sigma_{II} = \theta \cdot \varepsilon_{II} \text{ и } \varepsilon_{II} = \Pi \cdot \sigma_{II}. \quad (3.8)$$

Напряжения на площадке ΔA , пересекающей достаточно большое число элементов структуры, определяются путем осреднения напряжений, отнесенных к элементам структуры, а деформации макроэлемента – осреднением деформаций элементов структуры по линейному участку Δl :

$$\sigma_I = \frac{1}{\Delta A} \int_{\Delta A} \sigma_{II} dA, \quad \epsilon_I = \frac{1}{\Delta l} \int_{\Delta l} \epsilon_{II} dl \quad (3.9)$$

Пусть тензоры модулей упругости компонентов равны θ_n и θ_m соответственно. Тогда тензор модулей упругости в законе Гука (3.8), отнесенный к элементам микроструктуры, выражается формулой

$$\theta(\mathbf{x}) = \theta_n \lambda(\mathbf{x}) + \theta_m (1 - \lambda(\mathbf{x})), \quad (3.10)$$

а тензор упругих податливостей –

$$\Pi(\mathbf{x}) = \Pi_n \lambda(\mathbf{x}) + \Pi_m (1 - \lambda(\mathbf{x})). \quad (3.11)$$

Если случайные поля структуры и свойств статистически однородны, то средние по площадкам значения напряжений и средние по линейным участкам значения деформаций, заданные формулами (3.9), практически совпадают с соответствующими средними статистическими значениями, заданными на множестве реализаций образцов (изделий с однотипной структурой): $\sigma_I = \langle \sigma_{II} \rangle$ и $\epsilon_I = \langle \epsilon_{II} \rangle$. Зависимость между этими величинами выражается обобщенным законом Гука в форме (1.67) или (1.68) и имеет такой же вид, как и для любой макроскопически однородной среды.

Формулы (1.69) или (1.70) следуют из закона Гука для компонентов. Действительно, применив операцию осреднения к левым и правым частям уравнений (3.8), получим

$$\langle \sigma_{II} \rangle = \langle \theta \cdot \epsilon_{II} \rangle; \quad \langle \epsilon_{II} \rangle = \langle \Pi \cdot \sigma_{II} \rangle \quad (3.12)$$

Математическое ожидание $\langle \theta \cdot \epsilon_{II} \rangle$ равно произведению математических ожиданий сомножителей только в случае статистической независимости величин θ и ϵ_{II} . Поскольку деформации в окрестности точки зависят от того, какой компонент находится в

этой области, т. е. от модуля упругости θ , то математическое ожидание произведения $\langle \theta \cdot \varepsilon_{II} \rangle$ отличается от произведения $\langle \theta \rangle \cdot \langle \varepsilon_{II} \rangle$ на некоторую величину, зависящую от характера взаимодействия частиц. Эту величину назовем поправкой и найдем, приняв, что

$$\theta = \langle \theta \rangle + \theta^\circ, \text{ а } \varepsilon_{II} = \langle \varepsilon_{II} \rangle + \varepsilon_{II}^\circ,$$

где θ° и ε_{II}° – флуктуации модулей упругости и деформаций соответственно.

Поскольку очевидно, что $\langle \theta^\circ \rangle = 0$ и $\langle \varepsilon_{II}^\circ \rangle = 0$, записываем

$$\sigma_I \equiv \langle \sigma_{II} \rangle = \langle \theta \rangle \cdot \langle \varepsilon_{II} \rangle + \langle \theta^\circ \cdot \varepsilon_{II}^\circ \rangle. \quad (3.13)$$

Полагаем, что флуктуации деформаций в точке пропорциональны среднему значению деформаций в этой точке, т. е.

$$\varepsilon_{II}^\circ = \Phi \cdot \varepsilon_I, \quad (3.14)$$

где Φ – случайный функционал, зависящий от структуры КМ и характера взаимодействия компонентов.

Аналогично для флуктуации напряжений запишем

$$\sigma_{II}^\circ = \Psi \cdot \sigma_I. \quad (3.15)$$

С учетом формулы (3.14) связь между средними напряжениями и деформациями, заданную формулой (3.13), запишем, опуская индекс I, указывающий, что эти напряжения и деформации совпадают с заданными на макроскопических площадках, как

$$\sigma = \left(\langle \theta \rangle + \langle \theta^\circ \cdot \Phi \rangle \right) \cdot \varepsilon. \quad (3.16)$$

Сравнивая правые части формул (1.69) и (3.16), находим

$$C = \langle \theta \rangle + \langle \theta^\circ \cdot \Phi \rangle. \quad (3.17)$$

Второе слагаемое в правой части определяет поправку к среднему значению тензора модуля упругости, учитывающую особенности структуры и взаимодействия компонентов.

Аналогичным образом для тензора упругих податливостей КМ получаем

$$\mathbf{S} = \langle \mathbf{\Pi} \rangle + \langle \mathbf{\Pi}^\circ \cdot \cdot \mathbf{\Psi} \rangle, \quad (3.18)$$

где $\mathbf{\Pi}^\circ = \mathbf{\Pi} - \langle \mathbf{\Pi} \rangle$ – флуктуация упругих податливостей, а $\langle \mathbf{\Pi}^\circ \cdot \cdot \mathbf{\Psi} \rangle$ – поправка, учитывающая структуру и взаимодействие компонентов.

Величины $\langle \mathbf{\theta} \rangle$ и $\langle \mathbf{\Pi} \rangle$ получают, применяя к формулам (3.10) и (3.11) оператор математического ожидания. Если свойства компонентов в системе координат x_i – случайные величины, статистически не зависящие от λ , то

$$\langle \mathbf{\theta} \rangle = \langle \mathbf{\theta}_n \rangle P_n + \langle \mathbf{\theta}_m \rangle (1 - P_n), \quad (3.19)$$

где $P_n = \langle \lambda(x) \rangle$ – среднее значение λ , равное объемной доле наполнителя при условии статистической однородности и эргодичности случайного поля структуры.

Как следует из формул (3.17) и (3.18), для нахождения постоянных упругости КМ помимо средних значений модулей или упругих податливостей необходимо вычислить соответствующие поправки к ним. Эти поправки также вычисляются путем осреднения по множеству реализаций. Вычисления оказываются весьма громоздкими, тем более если учитывать моменты высших порядков распределения $\lambda(\mathbf{x})$, $\mathbf{\theta}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x})$.

Относительный вклад поправок к модулям Юнга и модулям сдвига тем больше, чем больше различаются свойства компонентов и чем меньше концентрация наполнителя.

Естественно, что при осреднении теряется информация об индивидуальных особенностях взаимодействия частиц. Более того, для упрощения вычислений чаще всего ограничиваются учетом локального взаимодействия, т. е. учитывают лишь влияние близко расположенных частиц. Это, с одной стороны, позволяет получить более простые расчетные формулы, но с другой – существенно снижает точность оценки постоянных упругости.

По компонентам тензоров модулей, рассчитанных по формулам (3.17), или тензоров упругих податливостей – по формулам (3.18), находят технические постоянные упругости. Их значения зависят от способа вычисления. Как правило, расчет модулей Юнга и модулей сдвига по компонентам тензора модулей упругости C_{ijmn} дает более высокие значения, чем по компонентам упругих податливостей S_{ijmn} .

Упражнения

1. Сравнить модули Юнга стекло- и углепластика, вычисленные путем осреднения по Фойгту и Ройссу и по сеточной модели.
2. Оценить по методу осреднения модули Юнга, модули сдвига и коэффициенты Пуассона трехкомпонентного КМ, содержащего наполнители двух типов и матричное вещество.

3.2. Однонаправленно армированные волокнистые композиты

Технические постоянные упругости. Однонаправленно армированные КМ обычно относят к трансверсально-изотропным материалам. Их упругие свойства в главных осях симметрии структуры (см. рис. 1.17) характеризуют пять независимых технических постоянных упругости: E_1 – модуль Юнга в направлении волокон; $E_2 = E_3$ – модуль Юнга при растяжении-сжатии перпендикулярно волокнам (в трансверсальной плоскости); $G_{12} = G_{31}$ – модуль сдвига параллельно волокнам; коэффициенты Пуассона $\mu_{31} = \mu_{21}$ и $\mu_{23} = \mu_{32}$ или модуль сдвига в трансверсальной плоскости $G_{23} = E_2 / 2(1 + \mu_{23})$. Через эти технические постоянные выражаются компоненты тензоров модулей упругости C_{ijmn} или упругих податливостей S_{ijmn} , элементы матриц жесткости c_{ij} или упругих податливостей s_{ij} .

В зависимости от метода прогнозирования постоянных упругости сначала рассчитывают одну какую-либо из перечисленных выше совокупностей постоянных, а затем, используя известные соотношения (см., например, (1.85)), переходят к техническим постоянным или наоборот к тензорным или матричным величинам. При использовании упрощенных методов прогнозирования предпочитают оценивать технические постоянные, что наиболее удобно для установления соответствия между результатами расчета и эксперимента.

В случае квадратной модели расположения волокон (см. рис. 2.9, а) число различных постоянных увеличивается до 6, поскольку для этой модели не справедливо условие изотропии в трансверсальной плоскости.

Модуль Юнга при растяжении вдоль волокон. В первом приближении для оценки используют схему Фойгта («правило смеси»). Формула (3.1) дает

$$E_1 = E_a P_a + E_m P_m. \quad (3.20)$$

Если волокна анизотропны, то в качестве E_a в формулу (3.20) следует подставить модуль Юнга волокна в продольном направлении (вдоль его оси).

Пористость может быть учтена путем подстановки в формулу (3.20) значений P_a и P_m , удовлетворяющих условию $P_a + P_m + \Pi = 1$, где Π – объемная доля пор. Отсюда следует, что снижение модуля Юнга пропорционально пористости.

Для оценки снижения модуля Юнга E_1 вследствие отклонений и обрывов волокон, их неравномерного нагружения требуются иные модели.

Снижение модуля упругости трансверсально-изотропного КМ при наличии отклонений волокон иллюстрирует рис. 1.21, построенный согласно формулам (1.100) и (1.102). Влияние случайных отклонений волокон на модули Юнга однонаправленного КМ оценивается в подразд. 3.3 с помощью модели слоистого композита и в подразд. 3.5 на основе модели КМ, наполненного частицами, ориентированными преимущественно в одном направлении (имеющего текстуру вращения).

При наличии обрывов волокон, ориентированных в направлении армирования (оси x_1), модуль Юнга снижается вследствие того, что вблизи концов растягивающие напряжения меньше, чем в непрерывном волокне. Относительное снижение зависит от доли разорванных волокон и от средней длины волокна. Приближенную оценку снижения модуля упругости при растяжении вдоль волокна дает элементарная модель, показанная на рис. 3.3. Здесь $D/d = P_a^{-1/2}$.

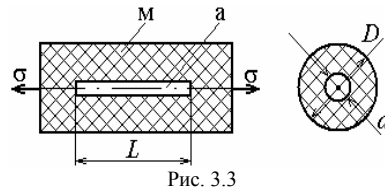


Рис. 3.3

Анализ растягивающих напряжений в волокне, прочно связанном с матрицей (см. подразд. 4.1), приводит к следующей формуле для относительного снижения эффективного модуля волокна:

$$E_{aэ} = E_a [1 - (\text{th} \beta L) / (\beta L)], \quad (3.21)$$

где $\beta = [2\pi G_m / d^2 E_a \ln(P_a^{-1/2})]^{1/2}$; G_m – модуль сдвига матрицы.

Степень наполнения влияет на относительное снижение модуля только при малых длинах волокон. Снижение эффектив-

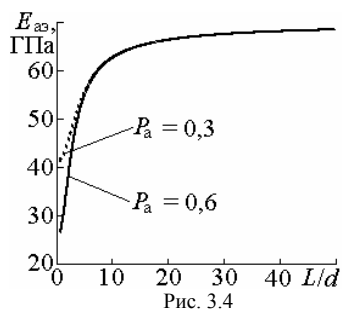


Рис. 3.4

ного продольного модуля стекловолокна в однонаправленном стеклопластике при длине волокон более $20d$ не превышает 5% (рис. 3.4).

Модуль Юнга при сжатии вдоль волокон равен модулю упругости при растяжении. Различие жесткости может наблюдаться только при больших напряжениях, когда в сжимаемом материале во-

локна начинают терять устойчивость, но тогда уже не справедлив закон Гука (см. подразд. 4.3).

Модуль Юнга при растяжении в трансверсальной плоскости.

Стохастичность структуры КМ (см. рис. 2.5) и сложный характер взаимодействия волокон и матрицы даже при идеальном заполнении промежутков между волокнами и отсутствии дефектов типа пор и трещин существенно затрудняют оценку модуля Юнга в трансверсальной плоскости.

Простейшую модель деформирования получают, вырезая полоску единичной ширины (см. рис. 3.2). Если относительная длина участков волокон и матрицы равна средним значениям P_a и P_m , то для модуля упругости получается формула (3.3). Но эта формула дает значения модулей, более низкие по сравнению с получаемыми в эксперименте. Так, для стеклопластика на основе эпоксидной смолы модули, вычисленные по формуле (3.3), меньше экспериментальных на 30–40%. Причина различия состоит в том, что модель плохо отражает взаимодействие элементов структуры.

Для лучшего соответствия эксперименту модифицируют формулу (3.3) или эквивалентную ей формулу (3.4). Так, по предложению К. Чамиса (С. С. Chamis) вместо формулы (3.4) выражение для трансверсального модуля записывают в виде

$$E_{2C} = E_m \left[1 - \sqrt{P_a} (1 - E_m / E_a) \right]^{-1}. \quad (3.22)$$

Согласно предложению Цая и Хана и (S. W. Tsai, G. T. Hahn), вместо формулы (3.3) выражение для модуля представляют как

$$E_{2T} = E_m E_a (P_a + \eta_E P_m) (E_m P_a + \eta_E E_a P_m)^{-1}, \quad (3.23)$$

где η_E – эмпирический поправочный коэффициент.

На базе формулы (3.4) Хэлпин и Цай (J. C. Halpin, S. W. Tsai) записали выражение для трансверсального модуля в виде

$$E_{2H} = E_M (1 + \xi_E P_a E') (1 - P_a E')^{-1}, \quad (3.24)$$

где ξ_E – поправочный коэффициент; $E' = \left[(E_a / E_M - 1)(E_a / E_M + \xi_E)^{-1} \right]$.

Для стеклопластиков принимают $\xi_E = 2$.

Основываясь на результатах экспериментального исследования концентрационной зависимости трансверсального модуля эпоксидного стеклопластика, А. Пук (А. Puck) предложил уравнение регрессии в виде

$$E_{2P} = E'_M E_a (1 + 0,85 P_a^2) (E'_M P_a + E_a P_a^{1,25})^{-1}, \quad (3.25)$$

где $E'_M = E_M (1 - \mu_M^2)^{-1}$ (μ_M – коэффициент Пуассона матрицы).

Выбирая подходящую формулу и значения поправочных коэффициентов, получают зависимости трансверсального модуля от степени армирования (рис. 3.5) и достигают хорошего приближения результатов прогнозирования к экспериментальным данным.

Общий недостаток таких формул – отсутствие физических предпосылок для вводимых поправочных коэффициентов. Хотя формально поправочные коэффициенты в формулах (3.22)–(3.25) отражают дефекты структуры реальных КМ, но количественные характеристики дефектов, в частности пористость, в явном виде не вводятся.

С увеличением степени наполнения из-за неполной пропитки пористость КМ увеличивается, возрастает и роль данного фактора при нагружении композита в трансверсальной плоскости. В большей мере это относится к однонаправленным КМ на основе термопластичных полимеров. Вследствие высокой вязкости расплавов термопластов пропитка ими волокнистых систем затруднена. Микроструктура КМ с термопластичной матрицей неоднородна в трансверсальном сечении. Значительна доля волокон, не смоченных полимером. Чем выше степень наполнения таких КМ, тем больше

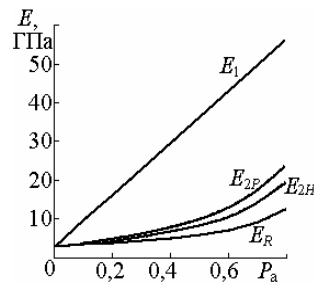


Рис. 3.5

их пористость и тем больше ее влияние на трансверсальный модуль Юнга. Чтобы учесть возрастающую роль пористости, необходимо найти поправочные коэффициенты как функции номинальной степени наполнения.

При общих подходах, основанных на решениях задач теории упругости (как классических, так и статистических), формулы для прогнозирования трансверсального модуля получаются более естественным образом. Однако точность их зависит от вводимых гипотез относительно структуры КМ и характера взаимодействия компонентов, а также от ограничений, накладываемых при решении задач теории упругости.

Модули сдвига. Вычисление модуля сдвига в плоскости x_1x_2 , параллельной волокнам, путем осреднения по схеме Фойгта (G_{12V}) дает завышенные значения по сравнению с экспериментальными, а путем осреднения по схеме Ройсса (G_{12R}) – заниженные. Поэтому для оценки модуля G_{12} используют откорректированные формулы. В частности, по предложению Цая и Хана записывают

$$G_{12T} = G_M G_a (P_a + \eta_G P_M) (G_M P_a + \eta_G G_a P_M)^{-1}, \quad (3.26)$$

где G_M и G_a – модули сдвига матрицы и армирующих волокон (оба компонента рассматриваются как изотропные); η_G – эмпирический поправочный коэффициент. Для стеклопластиков η_G имеет значения, близкие к 1.

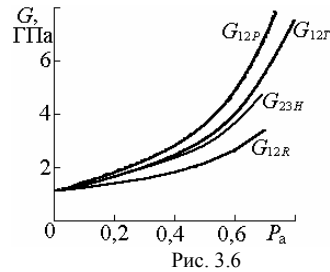
Согласно регрессионной модели А. Пука, модуль сдвига однонаправленного стеклопластика равен

$$G_{12P} = G_M G_a (1 + 0,6 P_a^{1/2}) (G_M P_a + G_a P_M^{1,25})^{-1}. \quad (3.27)$$

Для оценки модуля сдвига в трансверсальной плоскости G_{23} используют формулы (3.26) и (3.27) с иными значениями поправочных коэффициентов. Экспериментальные значения G_{23} почти всегда на 20–30% меньше значений G_{12} . Аналогичный вывод следует и из результатов расчета этих постоянных путем решения задач теории упругости. Удовлетворительное согласие с экспериментом дает также следующая формула Хашина – Розена (Z. Hashin, B. W. Rosen):

$$G_{23H} = [G_a + G_M + (G_a - G_M) P_a] [G_a + G_M - (G_a - G_M) P_a]^{-1}. \quad (3.28)$$

Результаты расчета модулей сдвига однонаправленного стеклопластика на основе эпоксидной смолы как функций объемной доли волокон показаны на рис. 3.6. Здесь, как и при оценке модуля Юнга в трансверсальной плоскости, пористость и иные дефекты структуры не учитываются.

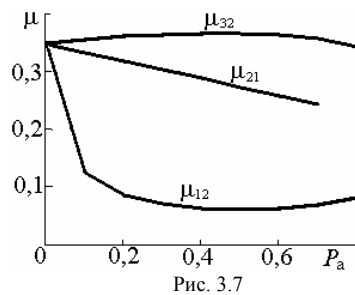


Коэффициенты Пуассона. Для оценки коэффициента Пуассона μ_{21} , характеризующего сокращение в трансверсальной плоскости при растяжении вдоль волокон, приемлема схема осреднения по Фойгту:

$$\mu_{21} = \mu_a P_a + \mu_m P_m, \quad (3.29)$$

где μ_a и μ_m – коэффициенты Пуассона компонентов.

Коэффициент Пуассона в трансверсальной плоскости μ_{32} может быть рассчитан по значениям модуля Юнга и модуля сдвига по формуле, следующей из соотношения (1.82). Для расчета коэффициента μ_{31} применимо соотношение (1.86) между постоянными упругости трансверсально-изотропного тела (см. подразд. 1.4).



Полученные таким образом коэффициенты Пуассона однонаправленного стеклопластика как функции объемной доли волокон показаны на рис. 3.7. Наблюдаемое на этом рисунке возрастание коэффициента Пуассона μ_{32} в области $P_a \approx 0,5$ отмечается при расчетах и по иным методам, но обусловлено,

скорее всего, неточностью оценки модуля Юнга и модуля сдвига в трансверсальной плоскости. Чтобы избежать такого несоответствия, коэффициент Пуассона в трансверсальной плоскости следует рассчитывать по формуле (3.29).

Матрицы и тензоры упругих свойств. Пять независимых технических постоянных упругости, оцениваемых по приведенным выше соотношениям, полностью определяют упругие свойства однонаправленного волокнистого КМ как трансверсально-

изотропного упругого тела. Подстановка этих значений в соотношения (1.85) дает матрицу упругих податливостей s_{ij} в главных осях симметрии структуры. Обратная по отношению к ней матрица – это матрица жесткости с элементами c_{ij} . Используя соотношения, приведенные в подразд. 1.4, находят компоненты C_{ijmn} тензора модулей упругости. Тензор упругих податливостей (S_{ijmn}) строится согласно формуле (1.79).

Упражнения

1. Рассчитать постоянные упругости однонаправленного стеклопластика и углепластика, сравнить результаты расчета по разным методам с экспериментальными данными.

2. Исследовать зависимость постоянных упругости однонаправленного стеклопластика и углепластика от свойств матрицы, от модуля Юнга и степени анизотропии волокон, от объемной доли волокон и пористости.

3.3. Слоистые композиты

Сеточная модель. Допустим, композит состоит из однонаправленных слоев, которые оказывают сопротивление только растяжению в направлении волокон, а модуль Юнга в направлении армирования E_1 задан формулой (3.7).

Распределение слоев по направлениям может быть как дискретным, так и непрерывным. Рассмотрим сначала случай дискретного распределения n слоев. Направление волокон в слое i составляет угол φ_i с направлением оси x (рис. 3.8). Толщина слоя i равна h_i , а толщина всего пакета $h = \sum h_i$. Отношение $h_i / h = P_i$ равно доле слоев заданного направления.

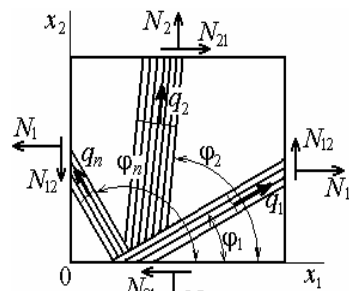


Рис. 3.8

заданного направления.

Пусть элемент слоистого композита единичных размеров по осям x_1 и x_2 , показанный на рис. 3.8, испытывает плоское напряженное состояние. Нормальные N_1 и N_2 и касательные N_{12} усилия, действующие на гранях элемента, складываются из нагрузок, воспринимаемых слоями. Из условий равновесия и формул преобразования компонентов тензора напряжений при повороте

координатных осей (1.29) вытекают следующие соотношения между усилиями:

$$N_1 = \sum q_i \cos^2 \varphi_i; \quad N_2 = \sum q_i \sin^2 \varphi_i; \quad N_{12} = \sum q_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i, \quad (3.30)$$

где q_i – продольное усилие в слое, отнесенное к единице его ширины, т. е. $q_i = \sigma^{(i)} h_i$ ($\sigma^{(i)}$ – растягивающее напряжение в слое i).

Разделив левую и правую части уравнений (3.30) на h , получим соотношения между растягивающими напряжениями в слоях и средними напряжениями в композите. В матричных обозначениях

$$\xi_1 = \sum \sigma^{(i)} P_i \cos^2 \varphi_i; \quad \xi_2 = \sum \sigma^{(i)} P_i \sin^2 \varphi_i; \quad (3.31)$$

$$\xi_6 = \sum \sigma^{(i)} P_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i.$$

Складывая соответственно левые и правые части первых двух уравнений, задающих нормальные напряжения в композите, находим, что сумма растягивающих напряжений в слоях при произвольном плоском напряженном состоянии равна сумме нормальных напряжений в композите (поскольку $\cos^2 \varphi_i + \sin^2 \varphi_i = 1$):

$$\xi_1 + \xi_2 = \sum \sigma^{(i)} P_i. \quad (3.32)$$

Предположим далее, что слои деформируются совместно, причем их деформации в системе координат $x_1 x_2$ не зависят от ориентации слоя и равны средним деформациям композита e_1 , e_2 и $e_6 = \gamma_{12}$. Тогда деформации слоев в направлении армирования получим, применив формулы преобразования компонентов тензора деформаций (1.57):

$$e^{(i)} = e_1 \cos^2 \varphi_i + e_2 \sin^2 \varphi_i + e_6 \sin \varphi_i \cos \varphi_i. \quad (3.33)$$

Поскольку по условию задачи слои деформируются упруго, то, согласно закону Гука и формуле (3.7), напряжение в слое равно $\sigma^{(i)} = E_a P_a e^{(i)}$. Подставив сюда деформации слоев, заданные формулами (3.33), а полученные выражения напряжений в слоях – в формулы (3.31), запишем соотношения между напряжениями и деформациями композита в виде матрицы (см. формулы (1.73) и (1.93))

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{26} \\ c_{61} & c_{62} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_6 \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

где c_{ij} – элементы матрицы жесткости в системе координат x_1x_2 .

Если x_1 и x_2 – главные оси симметрии структуры слоистого КМ, то $c_{16} = c_{26} = c_{61} = c_{62} = 0$, а отличные от нуля элементы матрицы жесткости заданы формулами

$$c_{11} = E_a P_a \sum P_i \cos^4 \varphi_i; \quad c_{22} = E_a P_a \sum P_i \sin^4 \varphi_i; \quad (3.35)$$

$$c_{12} = c_{21} = c_{66} = E_a P_a \sum P_i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i.$$

Элементы матрицы упругих податливостей s_{ij} вычисляются путем обращения матрицы жесткости (c_{ij}). В главных осях симметрии структуры композита отличные от нуля элементы матрицы (s_{ij}) заданы формулами

$$s_{11} = \frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}; \quad s_{22} = \frac{c_{11}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}; \quad s_{12} = \frac{c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}; \quad s_{66} = c_{66}^{-1}. \quad (3.36)$$

По ним в соответствии с формулой (1.85) вычисляются технические постоянные упругости слоистого КМ в системе координат x_1x_2 .

Суммы в правых частях формул (3.35) представляют собой средние значения тригонометрических функций случайного угла φ , являющегося по условию дискретной случайной величиной. Если угол φ , задающий распределение слоев по направлениям в плоскости x_1x_2 , – непрерывная случайная величина, плотность распределения которой $f_\varphi(x)$ известна, то при тех же предположениях относительно упругих свойств композита и совместной деформации слоев элементы матрицы жесткости вместо формул (3.35) находятся из соотношений

$$\begin{aligned} c_{11} &= E_a P_a \int_0^\pi f_\varphi(x) \cos^4 x dx; \quad c_{22} = E_a P_a \int_0^\pi f_\varphi(x) \sin^4 x dx; \\ c_{12} &= c_{21} = c_{66} = E_a P_a \int_0^\pi f_\varphi(x) \sin^2 x \cos^2 x dx. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Заметим, что в главных осях симметрии структуры КМ по сеточной модели независимо от ориентации слоев находятся только три различные постоянные упругости, тогда как в общем случае плоской

задачи (согласно формуле (1.85)) таких постоянных должно быть четыре. Это следствие гипотез относительно характера передачи нагрузки в сеточной модели. Применение сеточной модели приводит и к другим несоответствиям прогнозируемых постоянных упругости свойствам реальных слоистых композитов. Однако благодаря простоте вычислений сеточная модель пригодна для приближенной оценки упругих свойств слоистых композитов.

Проиллюстрируем применение сеточной модели для прогнозирования упругих постоянных КМ на некоторых примерах.

Ортотропный материал. Допустим, что однонаправленные слои ориентированы только в двух направлениях, параллельных координатным осям x_1 и x_2 , причем доля слоев, направленных параллельно оси x_1 , равна ν , а в перпендикулярном направлении – ν_2 . Следовательно, в данном случае $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$ и $\sin\varphi = 0$ с вероятностью ν ; а $\varphi = \pi / 2$, $\cos\varphi = 0$ и $\sin\varphi = 1$ с вероятностью $1 - \nu$. Подставляя возможные значения тригонометрических функций и их вероятности в формулы (3.35), находим

$$c_{11} = E_1 = E_a P_a \nu; \quad c_{22} = E_2 = E_a P_a (1 - \nu); \quad c_{12} = c_{12} = c_{66} = 0. \quad (3.38)$$

Из этих простых формул следует, что модули Юнга в направлениях армирования пропорциональны степени заполнения КМ и доле слоев, уложенных в соответствующем направлении. Модуль сдвига в плоскости и коэффициенты Пуассона получились равными нулю, что, безусловно, не соответствует свойствам реальных материалов и обусловлено несовершенством сеточной модели.

«Звездная» структура. Пусть слоистый композит составлен из слоев, ориентированных в трех направлениях, заданных углами $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi / 3$ и $\varphi_3 = 2\pi / 3$, причем доля слоев, уложенных в каждом направлении одинакова и равна $1/3$. Вычисления элементов матрицы жесткости по формулам (3.35) в этом случае дают

$$c_{11} = c_{22} = 3E_a P_a / 8; \quad c_{12} = c_{12} = c_{66} = E_a P_a / 8. \quad (3.39)$$

Технические постоянные упругости, рассчитанные с учетом формул (3.36), равны

$$E_1 = E_2 = E_a P_a / 3; \quad G_{12} = E_a P_a / 8; \quad \mu_{12} = E_1 / 2G_{12} - 1 = 1/3. \quad (3.40)$$

Материал обладает свойствами трансверсально-изотропного тела (x_1, x_2 – плоскость изотропии). В отличие от ортотропного материала,

рассмотренного выше, модули сдвига и коэффициенты Пуассона получились отличными от нуля.

Равномерное распределение слоев по направлениям. В этом случае имеем непрерывное распределение угла φ , причем $f_\varphi(x) = 1/\pi$.

Вычисления по формулам (3.37) приводят к тем же значениям постоянных упругости, что указаны в формулах (3.39) и (3.40). Следовательно, дискретная «звездная» и равномерная укладка однонаправленных слоев в плоскости эквивалентны в отношении упругих свойств композита.

Метод осреднения. Рассмотрим модель слоистого КМ, составленного из одинаковых ортотропных слоев, уложенных параллельно плоскости x_1x_2 и прочно связанных между собой. Направления главных осей симметрии структуры каждого слоя обозначим как x'_i (рис. 3.9). Будем считать, что оси x'_3 и x_3 параллельны, а ось x'_1 соответствует направлению наибольшего армирования (например, параллельна основе в слое с тканым наполнителем или направлению волокон в однонаправленно армированном слое).

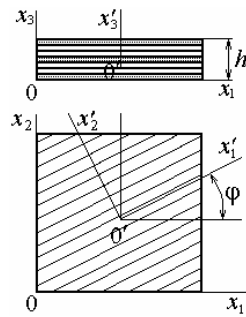


Рис. 3.9

Для задания ориентации слоев по отношению к системе координат x_i достаточно указать только угол φ между осями x'_1 и x_1 . Распределение угла φ полностью характеризует структуру рассматриваемого слоистого композита.

Постоянные упругости произвольного слоя j в системе координат x_i зависят от ориентации этого слоя. В частности, компоненты тензоров модулей упругости или упругих податливостей определяются формулами преобразования при повороте координатных осей (1.12) или (1.87) соответственно. Поскольку по условию задачи ориентация произвольного слоя случайна, то и компоненты тензоров модулей упругости и упругих податливостей слоя в координатах x_i тоже случайные величины, зависящие от φ :

$$\Theta_{ijmn} = \lambda_{i\alpha} \lambda_{j\beta} \lambda_{m\gamma} \lambda_{n\delta} C'_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (3.41)$$

$$\Pi_{ijmn} = \lambda_{i\alpha} \lambda_{j\beta} \lambda_{m\gamma} \lambda_{n\delta} S'_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (3.42)$$

где $\lambda_{ij} = \cos(x_i \wedge x_j)$ – случайные косинусы углов между осями координат; C'_{ijmn} – компоненты тензора модулей упругости; S'_{ijmn} – компоненты тензора упругих податливостей в системе координат, связанной со структурой слоя.

Матрица, задающая косинусы λ_{ij} случайного угла φ , в рассматриваемом случае аналогична заданной формулой (1.89):

$$(\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Постоянные упругости слоистого композита могут быть заданы средними значениями соответствующих компонентов модулей упругости $C^{\circ}_{ijmn} = \langle \Theta_{ijmn} \rangle$ или упругих податливостей $S^{\circ}_{ijmn} = \langle \Pi_{ijmn} \rangle$. Поскольку постоянные упругости слоев в системе координат, связанной со слоем, не являются случайными величинами, то операция осреднения распространяется только на произведения случайных косинусов углов, задающих ориентацию слоев:

$$C_{ijmn} = \langle \lambda_{i\alpha} \lambda_{j\beta} \lambda_{m\gamma} \lambda_{n\delta} \rangle C'_{\alpha\beta\gamma\delta} \text{ или } S_{ijmn} = \langle \lambda_{i\alpha} \lambda_{j\beta} \lambda_{m\gamma} \lambda_{n\delta} \rangle S'_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (3.43)$$

Чтобы вычислить C°_{ijmn} или S°_{ijmn} при каких-либо фиксированных значениях индексов, необходимо по аналогии с (1.88) развернуть выражения (3.43) при этих значениях. Для упрощения записи следует оставить в каждой сумме только слагаемые, содержащие отличные от нуля значения C'_{ijmn} или S'_{ijmn} и ненулевые значения λ_{ij} :

$$C^{\circ}_{3333} = \langle \lambda_{33}^4 \rangle C'_{3333}; \quad C^{\circ}_{3333} = \langle \lambda_{33}^2 \lambda_{32}^2 \rangle C'_{3322} + \langle \lambda_{33}^2 \lambda_{31}^2 \rangle C'_{3311} \text{ и т. д.}$$

Для вычисления математических ожиданий от произведений косинусов необходимо задать распределение угла φ . В некоторых частных случаях результаты вычислений могут быть представлены в аналитической форме. Рассмотрим эти случаи.

Ортотропный материал. Если v – доля слоев, где $\varphi = 0$, то $\cos \varphi = 1$ и $\sin \varphi = 0$ с вероятностью v ; а $\varphi = \pi / 2$, $\cos \varphi = 0$ и $\sin \varphi = 1$ с вероятностью $1 - v$; $\langle \cos^4 \varphi \rangle = \langle \cos^2 \varphi \rangle = v$; $\langle \sin^4 \varphi \rangle = \langle \sin^2 \varphi \rangle = 1 - v$.

Для задания упругих свойств ортотропного КМ в главных осях необходимо вычислить 9 постоянных. На основе анализа деформаций такого материала постоянные, характеризующие сопротивление нор-

мальным напряжениям, найдем путем осреднения компонентов тензора модулей упругости, а постоянные, характеризующие сопротивление сдвигу, – путем осреднения упругих податливостей. В результате получаем

$$\begin{aligned}
C_{1111}^{\circ} &= C'_{1111}v + C'_{3333}(1-v); & C_{2222}^{\circ} &= C_{3333}v + C_{1111}(1-v); \\
C_{1122}^{\circ} &= C'_{1122}v + C'_{2233}(1-v); & C_{1212}^{\circ} &= C'_{1212}; \\
C_{1133}^{\circ} &= C_{1122}^{\circ}; & C_{2233}^{\circ} &= C'_{2233}v + C'_{1133}(1-v); & C_{3333}^{\circ} &= C'_{3333}; \\
C_{2323}^{\circ} &= \frac{C'_{1212}C_{2323}}{C'_{1212}v + C'_{2323}(1-v)}; & C_{3131}^{\circ} &= \frac{C'_{1212}C'_{2323}}{C'_{2323}v + C'_{1212}(1-v)}.
\end{aligned} \quad (3.44)$$

Технические постоянные вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
E_1^{\circ} &= \frac{D^{\circ}}{C_{2222}^{\circ}C_{3333}^{\circ} - C_{2233}^{\circ 2}}; & \mu_{12}^{\circ} &= \frac{C_{1122}^{\circ}C_{3333}^{\circ} - C_{1133}^{\circ}C_{2233}^{\circ}}{C_{1111}^{\circ}C_{3333}^{\circ} - C_{1133}^{\circ 2}}; \\
E_2^{\circ} &= \frac{D^{\circ}}{C_{1111}^{\circ}C_{3333}^{\circ} - C_{1133}^{\circ 2}}; & \mu_{13}^{\circ} &= \frac{C_{1133}^{\circ}C_{2222}^{\circ} - C_{1122}^{\circ}C_{2233}^{\circ}}{C_{1111}^{\circ}C_{2222}^{\circ} - C_{1122}^{\circ 2}}; \\
E_3^{\circ} &= \frac{D^{\circ}}{C_{1111}^{\circ}C_{2222}^{\circ} - C_{1122}^{\circ 2}}; & \mu_{32}^{\circ} &= \frac{C_{1111}^{\circ}C_{2233}^{\circ} - C_{1122}^{\circ}C_{1133}^{\circ}}{C_{1111}^{\circ}C_{3333}^{\circ} - C_{1133}^{\circ 2}},
\end{aligned} \quad (3.45)$$

где $D^{\circ} = C_{1111}^{\circ}C_{2222}^{\circ}C_{3333}^{\circ} + 2C_{1122}^{\circ}C_{2233}^{\circ}C_{3311}^{\circ} - C_{1111}^{\circ}C_{2233}^{\circ 2} - C_{2222}^{\circ}C_{1133}^{\circ 2} - C_{3333}^{\circ}C_{1122}^{\circ 2}$.

Используя метод осреднения, приближенно оценим влияние на постоянные упругости слоистого ортотропного КМ случайных отклонений слоев от заданного направления. Будем считать, что отклонения малы и угол φ распределен по нормальному закону, причем $\langle \varphi \rangle = 0$; $\langle \varphi^2 \rangle = D_{\varphi}$, где D_{φ} – дисперсия угла φ , а потому можно принять

$$\cos \varphi = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } v, \\ \varphi & \text{с вероятностью } (1-v); \end{cases}$$

$$\sin \varphi = \begin{cases} \varphi & \text{с вероятностью } v, \\ 1 & \text{с вероятностью } (1-v); \end{cases}$$

$$\langle \cos^2 \varphi \rangle = v + D_{\varphi}(1-v); \quad \langle \sin^2 \varphi \rangle = 1 - v + D_{\varphi}v; \quad \langle \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \rangle = D_{\varphi};$$

$$\langle \varphi^4 \rangle = 3D_{\varphi}^2 \ll D_{\varphi}; \quad \langle \cos^4 \varphi \rangle = v; \quad \langle \sin^4 \varphi \rangle = 1 - v.$$

Подставив эти значения в формулы (3.43), получим следующие зависимости модулей упругости ортотропного материала от D_ϕ :

$$\begin{aligned}
 C_{1111}^\circ &= C'_{1111}v + C'_{3333}(1-v) - 2[C'_{1111}v + C'_{3333}(1-v) - C'_{1133} - 2C'_{3131}]D_\phi; \\
 C_{2222}^\circ &= C'_{3333}v + C'_{1111}(1-v) - 2[C'_{3333}v + C'_{1111}(1-v) - C'_{1133} - 2C'_{3131}]D_\phi; \\
 C_{1122}^\circ &= C'_{1122} + (C'_{1111} + C'_{3333} - 2C'_{1122})D_\phi; \quad C_{3333}^\circ = C'_{3333}; \\
 C_{1133}^\circ &= C'_{1122} + (C'_{1133} - C'_{1122})[v + (1-2v)D_\phi]; \quad C_{1133}^\circ = C'_{1122}; \quad (3.46) \\
 C_{2233}^\circ &= C'_{1122} - (C'_{1122} - C'_{2233})[v + (1-2v)D_\phi]; \\
 C_{1212}^\circ &= \frac{C'_{1212}C'_{3131}}{C'_{1212} + (C'_{3131} - C'_{1212})[v + (1-2v)D_\phi]}; \\
 C_{3131}^\circ &= \frac{C'_{1212}C'_{3131}}{C'_{1212} - (C'_{3131} - C'_{1212})[v + (1-2v)D_\phi]}.
 \end{aligned}$$

При $D_\phi = 0$, как нетрудно убедиться, из (3.46) получаем соотношения (3.44). Полагая в формулах (3.46) $v = 1$, находим соотношения для однонаправленного (в среднем) материала, которые позволяют учесть влияние отклонений слоев на упругие свойства. Относительные значения модулей Юнга и коэффициентов Пуассона как функции дисперсии угла ϕ в ортотропном стеклопластике ($E_a = 70$ ГПа; $E_m = 3$ ГПа; $\mu_a = 0,2$; $\mu_m = 0,3$ и $P_a = 0,46$) показаны на рис. 3.10.

При соотношении слоев 2 : 1 наибольшее влияние случайные отклонения слоев от заданных направлений армирования оказывают на коэффициент Пуассона и модуль сдвига в плоскости армирования. При этом оба показателя возрастают по мере увеличения отклонений, что вполне объясняется зависимостями, показанными на рис. 1.22 и 1.23. В меньшей мере отклонения слоев влияют на модуль Юнга в направлениях армирования, причем оба модуля уменьшаются пропорционально дисперсии отклонений.

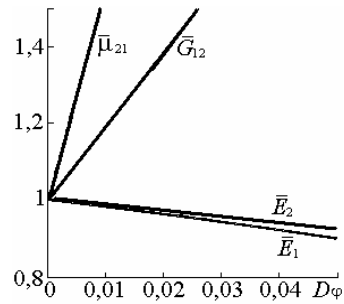


Рис. 3.10

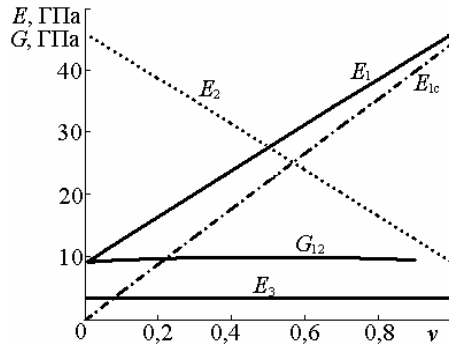


Рис. 3.11

Наблюдается близкая к линейной зависимость модулей Юнга в главных направлениях E_1 и E_2 от степени армирования (рис. 3.11), однако значения модулей E_{1c} , рассчитанные по методу осреднения, заметно выше, чем вычисленные по формулам (3.38), следующим из сеточной модели. Модуль Юнга перпендикулярно плоскости слоев E_3 и модуль сдвига в плоскости армирования G_{12} от соотношения слоев, уложенных в ортогональных направлениях, практически не зависят.

Коэффициенты Пуассона в плоскости армирования возрастают с увеличением степени армирования в направлении растяжения и тем больше, чем больше отклонения слоев от заданных ортогональных направлений (см. рис. 3.12, где μ_{21} — коэффициент Пуассона при отсутствии отклонений, а μ_{21}' — при $D_\varphi = 0,05$).

Коэффициент Пуассона μ_{31} , характеризующий сжатие перпендикулярно плоскости слоев при растяжении в одном из направлений армирования, уменьшается по мере увеличения степени армирования в данном направлении.

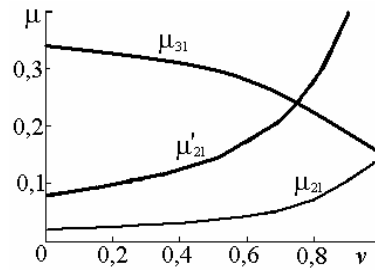


Рис. 3.12

Коэффициент Пуассона μ_{31} , характеризующий сжатие перпендикулярно плоскости слоев при растяжении в одном из направлений армирования, уменьшается по мере увеличения степени армирования в данном направлении.

Равномерное армирование в плоскости (текстура вращения). Этот случай соответствует равномерному распределению угла φ по направлениям в плоскости армирования. Вычислив моменты распределения, входящие в формулы (3.43), для макроскопических модулей упругости рассматриваемого композита получим

$$\begin{aligned}
C_{1122}^{\circ} &= \frac{1}{8}(C'_{1111} + C'_{3333}) - \frac{1}{2}C'_{1212} + \frac{3}{4}C'_{1133}; \\
C_{1212}^{\circ} &= \frac{1}{2}C'_{1212} + \frac{1}{8}(C'_{1111} + C'_{2222} - 2C'_{1122}); \\
C_{2222}^{\circ} &= C_{1111}^{\circ} = C_{1122}^{\circ} + 2C_{1212}^{\circ}; \quad C_{2233}^{\circ} = C_{1133}^{\circ} = \frac{1}{2}(C'_{2233} + C'_{1133}); \\
C_{2323}^{\circ} &= C_{3131}^{\circ} = 2C'_{1212}C'_{2323}(C'_{2323} + C'_{1212})^{-1}; \quad C_{3333}^{\circ} = C'_{3333}.
\end{aligned}
\tag{3.47}$$

Переход к техническим постоянным осуществляется по формулам (3.45). Вычисления по методу осреднения, как и сеточная модель, приводят к выводу, что в отношении упругих свойств равномерное в плоскости армирование эквивалентно «звездной» укладке 1 : 1 : 1.

Модуль Юнга и модуль сдвига стеклопластика, полученного в результате равномерной укладки однонаправленных слоев (постоянные упругости компонентов приведены выше), возрастают пропорционально объемной доле волокон (рис. 3.13). Сравнивая E_1

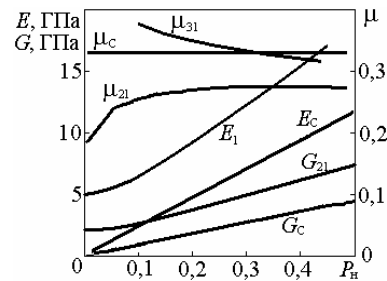


Рис. 3.13

с E_c и G_{12} с G_c , видим, что оценка по формулам (3.40), выведенным на основе сеточной модели, дает более низкие значения модулей.

Учет взаимодействия слоев. Формальное осреднение модулей упругости по схеме Фойгта и упругих податливостей по схеме Ройсса соответствует предположениям о постоянстве деформаций и напряжений в слоях. К близким результатам приводит и более точная модель деформирования слоистого материала (И. М. Лифшиц и Л. Н. Розенцвейг). Согласно этой модели, закон Гука материала с произвольной однородной слоистой структурой представлен в виде двух систем уравнений: для напряжений в плоскости слоев и для напряжений, направленных перпендикулярно слоям.

Пусть однонаправленные слои с модулями упругости C'_{ijmn} (ось x'_1 направлена вдоль волокон) расположены параллельно плоскости x_2x_1 . Обозначим θ_{ijmn} – компоненты модулей упругости слоя

в системе координат (x_1, x_2, x_3) , связанной с изделием; Δ – определитель, составленный из величин θ_{ijmn} : $\Delta = |2\theta_{3i33} - \theta_{3i33}\delta_{3j}|$; Δ_{ij} – алгебраическое дополнение определителя Δ ; $D = \langle \Delta_{ij} / \Delta \rangle$; D_{ij} – алгебраическое дополнение определителя D .

Используя уравнения равновесия в проекции на ось x_1 , уравнения совместности деформаций и физические уравнения, записываем компоненты тензора модулей упругости слоистого композита:

$$\begin{aligned} C_{3i3j}^{\circ} &= \frac{D_{ij}}{2D}(1 + \delta_{3i}\delta_{3j}); \quad C_{3ipq}^{\circ} = \frac{D_{ai}}{D} \left\langle \theta_{3\beta pq} \frac{\Delta_{\beta\alpha}}{\Delta} \right\rangle; \\ C_{pqrs}^{\circ} &= \frac{D_{\alpha\beta}}{D} \left\langle (2\theta_{pq3\gamma} - \delta_{1\gamma}\theta_{pq33}) \frac{\Delta_{\beta\gamma}}{\Delta} \right\rangle \left\langle \theta_{3\delta rs} \frac{\Delta_{\delta\alpha}}{\Delta} \right\rangle - \\ &\quad - \left\langle (2\theta_{pq3\gamma} - \delta_{3\gamma}\theta_{pq33}) \theta_{3\beta rs} \frac{\Delta_{\beta\gamma}}{\Delta} \right\rangle + \langle \theta_{pqrs} \rangle, \end{aligned} \quad (3.48)$$

где $i, j, \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1$; $p, q, r, s = 2, 3$.

В частном случае слоистого КМ ортотропной структуры по формулам (3.48) находим 9 независимых компонентов тензора модулей упругости:

$$\begin{aligned} C_{3333}^{\circ} &= C'_{3333}; \quad C_{3322}^{\circ} = \langle \theta_{3322} \rangle; \quad C_{3311}^{\circ} = \langle \theta_{3311} \rangle; \quad C_{2121}^{\circ} = \langle \theta_{2121} \rangle; \\ C_{2211}^{\circ} &= \langle \theta_{2211} \rangle - C_{3333}^{\prime-1} (\langle \theta_{3322}\theta_{3311} \rangle - \langle \theta_{3322} \rangle \langle \theta_{3311} \rangle); \\ C_{2222}^{\circ} &= \langle \theta_{2222} \rangle - C_{3333}^{\prime-1} (\langle \theta_{3322}^2 \rangle - \langle \theta_{3322} \rangle^2); \\ C_{3232}^{\circ} &= \langle \theta_{3232}^{-1} \rangle^{-1}; \\ C_{1111}^{\circ} &= \langle \theta_{1111} \rangle - C_{3333}^{\prime-1} (\langle \theta_{3311}^2 \rangle - \langle \theta_{3311} \rangle^2); \\ C_{3131}^{\circ} &= \langle \theta_{3131}^{-1} \rangle^{-1}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Заметим, что $\langle \theta_{3232}^{-1} \rangle^{-1} \neq \langle \theta_{3232} \rangle$.

Вычисляя математические ожидания в формулах (3.49), получаем следующие значения компонентов модулей упругости слоистого КМ:

$$\begin{aligned}
C_{3333}^{\circ} &= C'_{3333}; \quad C_{3322}^{\circ} = C'_{3322}v + C'_{3311}(1-v); \\
C_{3311}^{\circ} &= C'_{3311}v + C'_{3322}(1-v); \quad C_{2121}^{\circ} = C'_{3131}; \\
C_{3232}^{\circ} &= \frac{C'_{3232}C'_{3131}}{C'_{3131}v + C'_{3232}(1-v)}; \quad C_{13131}^{\circ} = \frac{C'_{3232}C'_{3131}}{C'_{3213}v + C'_{3131}(1-v)}; \quad (3.50) \\
C_{2222}^{\circ} &= C'_{3333}v + C'_{1111}(1-v) - h_{2211}; \\
C_{1111}^{\circ} &= C'_{1111}v + C'_{3333}(1-v) - h_{2211}; \\
C_{2211}^{\circ} &= C'_{3311} + h_{2211}; \quad h_{2211} = C_{3333}^{\prime-1}(C'_{3322} - C'_{3311})^2 v(1-v).
\end{aligned}$$

Как видно из формул (3.50), модули C_{2222}° , C_{1111}° и C_{2211}° отличаются от соответствующих средних значений, заданных формулами (3.44), на величину поправки h_{2211} , однако вычисления показывают, что, по крайней мере, для стеклопластиков конструкционного назначения эти поправки малы.

Упражнения

1. По свойствам и объемным долям компонентов оценить постоянные упругости стекло- или углепластика, полученного путем укладки однонаправленных слоев. Сравнить с оценкой по сеточной теории и с результатами эксперимента для материалов с аналогичными по свойствам компонентами.

2. Построить зависимость постоянных упругости (модулей Юнга, модулей сдвига и коэффициентов Пуассона) ортотропного стеклопластика от среднего квадратического отклонения однонаправленных слоев и степени армирования одного из направлений в плоскости.

3. Оценить постоянные упругости стеклопластика с хаотической ориентацией слоев в плоскости. Сравнить с результатами оценки по сеточной теории и с результатами эксперимента для материалов с аналогичными параметрами структуры.

3.4. Композиты с тканым наполнителем

Сеточная модель. Пренебрегая переплетением нитей основы и утка, представим слой КМ с тканым наполнителем в виде двух слоев с однонаправленным расположением волокон вдоль основы в одном слое и вдоль утка – в другом. Если P_a – объемная доля волокон в тканом КМ, то доля наполнителя в первом слое, содержащем только нити основы,

равна $P_{но} = P_a n_o / (n_o + n_y)$, а во втором $P_{ny} = P_a n_y / (n_o + n_y)$, где n_o и n_y – число нитей (рвингов) основы и утка соответственно на единицу ширины ткани.

Модули Юнга КМ с тканым наполнителем в направлениях основы и утка согласно формуле (3.7) равны $E_o = E_a P_{но}$ и $E_y = E_a P_{ny}$, где E_a – модуль Юнга армирующих волокон.

Модули упругости КМ с тканым наполнителем, полученного путем укладки слоев в двух взаимно перпендикулярных направлениях, найдем путем осреднения

$$E_1 = E_o \nu_1 + E_y (1 - \nu_1); \quad E_2 = E_o (1 - \nu_1) + E_y \nu_1, \quad (3.51)$$

где ν_1 – доля слоев, основа которых направлена по оси x_1 .

Согласно сеточной модели слоистого ортотропного КМ, другие постоянные равны нулю (см. подразд. 3.3), поскольку модель не учитывает вклад связующего.

Метод осреднения. Нити основы и утка, пропитанные связующим, образуют однонаправленные элементы структуры КМ с тканым наполнителем. Эти элементы могут различаться по свойствам, если основа и уток образованы разными нитями, поэтому в общем случае примем, что $C^{(o)}_{ijmn}$ и $C^{(y)}_{ijmn}$ – тензоры модулей упругости однонаправленных элементов основы и утка в системе координат x'_i , связанной с направлением волокон в этих элементах. Элементы считаем трансверсально-изотропными. Компоненты тензоров модулей упругости $C^{(o)r}_{ijmn}$ и $C^{(y)r}_{ijmn}$ могут быть вычислены по характеристикам упругих свойств нитей основы и утка соответственно и с учетом объемной доли и постоянных упругости связующего.

В пределах элементарной ячейки с размерами $l_o \times l_y$ изменяется ориентация оси x'_i . Компоненты модулей упругости элементов в системе координат x_i , связанной со слоем, вычисляются по формулам преобразования (1.12):

$$C^{(o)}_{ijmn} = l_{i\alpha}^o l_{j\beta}^o l_{m\gamma}^o l_{n\delta}^o C^{(o)}_{\alpha\beta\gamma\delta}; \quad C^{(y)}_{ijmn} = l_{i\alpha}^y l_{j\beta}^y l_{m\gamma}^y l_{n\delta}^y C^{(y)}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (3.52)$$

где l_{ij}^o и l_{ij}^y – косинусы углов между осями x_i^o и x_j^y , x_i^y и x_j^o соответственно.

Косинусы углов l_{ij}^o и l_{ij}^y вычисляются по характеристикам структуры ткани (см. формулы (2.31)), поэтому возможно их осреднение

в пределах элементарной ячейки – участков с длиной, равной периодам отклонений нитей основы и утка l_o и l_y .

Объемные доли элементов основы и утка в ячейке P_o и P_y . Если P_a – степень наполнения этих элементов однонаправленными волокнами, то $P_o = P_{но}/P_n$ и $P_y = P_{ну}/P_n$. Тогда средние по объему элементарной ячейки модули упругости выражаются формулой

$$C_{ijmn} = \frac{P_o}{l_o} \int_0^{l_o} C_{ijmn}^o(x_1) dx_1 + \frac{P_y}{l_y} \int_0^{l_y} C_{ijmn}^y(x_2) dx_2. \quad (3.53)$$

Для их вычисления необходимо:

- определить технические постоянные однонаправленных элементов основы и утка и компоненты тензоров $C_{ijmn}^{(o)}$ и $C_{ijmn}^{(y)}$;
- задать параметры структуры ткани a_1, l_o, l_y (см. рис. 2.11);
- записать функции $\text{tg}\theta_0(x_1)$ и $\text{tg}\theta_y(x_2)$ по формулам (2.31);
- записать для основы и утка функции $\cos \theta = (1 + \text{tg}^2\theta)^{-0,5}$ и $\sin \theta = \text{tg}\theta / (1 + \text{tg}^2\theta)^{-0,5}$;

– выразить компоненты тензоров модулей упругости элементов основы и утка в системе координат x_i по формулам (3.52) и подставить в формулу (3.53);

– вычислить компоненты тензора модулей упругости элементарной ячейки по формуле (3.53).

Если материал ячейки ортотропный, а x_i – главные оси симметрии структуры, то достаточно найти девять компонентов тензора C_{ijmn} . По этим компонентам вычисляются технические постоянные согласно соотношениям (3.45) и элементы матрицы упругих податливостей согласно (1.85).

Изложенная выше схема осреднения может быть применима и для расчета упругих податливостей.

Расчетные формулы для величин C_{ijmn} , S_{ijmn} и технических постоянных упругости в общем случае получаются громоздкими.

Проанализируем влияние искривления нитей в тканом наполнителе на постоянные упругости с помощью следующей модели. Пусть однонаправленная нить, пропитанная связующим, является трансверсально-изотропной (изотропна в плоскости поперечного сечения нити x_2x_3), ее постоянные упругости заданы матрицей уп-

ругих податливостей (s_{ij}). Нить имеет периодические искривления в плоскости xz (см. рис. 2.11) с параметрами a_1 и l . При малых значениях отношения $\beta = a_1 / l$ углы θ также малы, а $\theta \approx 2\pi\beta$. Тогда постоянные упругости нити в координатах x, y, z заданы соотношениями

$$\begin{aligned} E_x &= [s_{11}I_5 + (2s_{12} + s_{66})I_3 + s_{22}I_1]^{-1}; \\ E_z &= [s_{11}I_1 + (2s_{12} + s_{66})I_3 + s_{22}I_5]^{-1}; \\ G_{yz} &= [(2s_{22} + s_{23})I_6 + s_{66}I_8]^{-1}; \\ \mu_{yz} &= -\frac{[s_{23}I_6 + s_{12}I_8]}{[s_{11}I_5 + (2s_{12} + s_{66})I_3 + s_{22}I_1]}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

где $I_1 = (1 + \theta^2 / 2)(1 + \theta)^{-1,5}$; $I_3 = (1 + \theta^2)^{1,5} \theta^2 / 2$; $I_5 = 1 - (1 + 3\theta^2 / 2)(1 + \theta^2)^{-1,5}$; $I_6 = (1 + \theta^2)^{-0,5}$; $I_8 = 1 - I_6$.

Расчеты по формулам (3.54) показывают, что с увеличением относительной амплитуды отклонений нити модуль Юнга E_x в направлении оси x убывает, а коэффициент Пуассона μ_{zx} , характеризующий сокращение по оси z при растяжении вдоль x , возрастает. Поперечный модуль E_z и модуль сдвига в плоскости xy практически не изменяются (рис. 3.14).

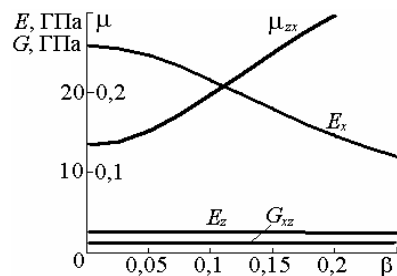


Рис. 3.14

Качественно эти изменения вполне согласуются с общими закономерностями изменения постоянных упругости однонаправленного композита при повороте координатных осей. Формулы (3.54) дают количественную оценку этих изменений в композитах тканой структуры.

Добавляя еще одну систему нитей, перпендикулярную рассмотренной, и применяя к новой системе метод осреднения, получим значения постоянных упругости композита с двумя системами искривленных нитей.

Модели высшего порядка. Для дальнейшего уточнения результатов прогнозирования постоянных упругостей КМ с тканым наполнителем учитывают искривление волокон за счет крутки в нитях, выпрямление нитей при растяжении. В большинстве случаев эти эффекты малы по сравнению с влиянием степени наполнения и структуры ткани, которое оценивается по методу осреднения.

Метод осреднения используют и при прогнозировании постоянных упругости КМ более сложной тканой структурой, например с тремя и более системами переплетающихся нитей.

Упражнения

1. По заданным характеристикам ткани и ее массовой доли в стеклопластике вычислить постоянные упругости слоя.
2. Оценить влияние типа переплетения нитей в ткани на модули Юнга и модули сдвига стеклотекстолита.

3.5. Материалы, наполненные частицами

КМ с изотропными изометричными частицами. Характер взаимодействия частиц наполнителя и матричного вещества при деформировании такого композита намного сложнее, чем в простейших схемах Фойгта и Ройсса. Для оценки постоянных упругости этих материалов требуются довольно сложные методы теории упругости, например решение задач о напряженном и деформированном состоянии вблизи упругого включения в упругом теле. Но и в этом случае часто не удается получить точную оценку, поскольку случайные отклонения формы частиц, их неупорядоченное расположение и взаимодействие между собой в этих моделях не учитываются.

В статистических моделях структуры наполненных КМ, задаваемых случайными полями (см. подразд. 2.2), ограничения на форму частиц и их взаимное расположение не накладываются. Однако в последующем при расчете поправок к средним значениям модулей по формулам (3.17) или упругих податливостей по формулам (3.18) вводят гипотезы относительно координатной зависимости моментных функций упругих свойств, эквивалентные ограничениям на форму, размеры и взаимное расположение частиц. В результате снижается точность учета взаимодействия частиц.

Решение задачи о взаимодействии единичного изотропного сферического включения с изотропной матрицей при условии прочной связи и равенстве напряжений на поверхности раздела приводит к вычислению модуля объемного сжатия и модуля сдвига (М. А. Кривоглаз, А. С. Черевко):

$$\begin{aligned}
 K &= K_M \left[1 + \frac{3(1-\mu_M)(K_H - K_M)P_H}{2K_M(1-2\mu_M) + K_H(1+\mu_M)} \right]; \\
 G &= G_M \left[1 + \frac{15(1-\mu_M)(G_H - G_M)P_H}{G_M(7-5\mu_M) + 2G_H(4-5\mu_M)} \right],
 \end{aligned}
 \tag{3.55}$$

где K_H, K_M, G_H, G_M – модули объемной деформации и сдвига компонентов; μ_M – коэффициент Пуассона матричного вещества; P_H – объемная доля наполнителя.

Модули Юнга и коэффициент Пуассона рассчитывают затем по формулам (1.84).

Из формул (3.55) следует, что с увеличением доли наполнителя модули упругости линейно возрастают. Значения модуля Юнга лежат между средними по Фойгту и Ройссу. Коэффициент Пуассона с увеличением P_H уменьшается. Поскольку влияние соседних частиц не учитывается, формулы (3.55) справедливы только для концентраций наполнителя $P_H \leq 0,1$.

Формулы (3.55) применимы и для расчета постоянных упругости композита, наполнитель которого менее жесткий, чем матрица. В случае пористых материалов $K_H = 0$ и $G_H = 0$, в результате формулы (3.55) преобразуются к виду

$$K = K_M \left[1 - \frac{3(1-\mu_M)\Pi}{2(1-2\mu_M)} \right]; \quad G = G_M \left[1 - \frac{15(1-\mu_M)\Pi}{7-5\mu_M} \right],
 \tag{3.56}$$

где Π – объемная доля пор.

Нетрудно убедиться, что с увеличением пористости относительное снижение модуля сдвига значительно больше, чем снижение модуля объемной деформации.

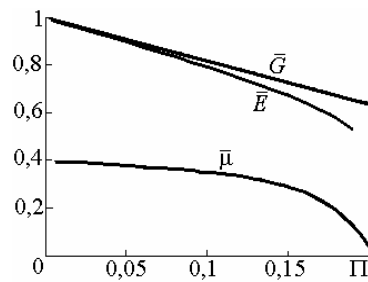


Рис. 3.15

Действительно, при $\mu_M = 0,35$ имеем $K = K_M(1 - 0,32\Pi)$; $G = G_M(1 - 1,86\Pi)$. В то же время относительное изменение модуля Юнга полимера по мере возрастания пористости даже несколько больше, чем модуля сдвига (рис. 3.15).

Коэффициент Пуассона, рассчитанный по модулям сдвига и объемной деформации согласно формулам (3.56), изменяется незначительно до $\Pi = 0,1$, а затем быстро снижается (см. рис. 3.15).

КМ с анизотропными и анизометричными частицами. Решение задач теории упругости о взаимодействии частиц в этом случае намного сложнее, поэтому отсутствуют точные решения, пригодные для технических расчетов.

Из формулы (3.19) следует, что для оценки модулей упругости КМ по методу осреднения необходимо найти средние значения постоянных для компонентов. Решение этой задачи для анизотропных частиц наполнителя аналогично решению для поликристаллического металла и сводится к вычислению математического ожидания компонентов тензора модулей упругости $\theta_{ijmn}^{(n)}$ или упругих податливостей $\Pi_{ijmn}^{(n)}$ наполнителя, зависящих от ориентации осей, связанных с частицей (см. рис. 2.6). Для этого модули упругости $\theta_{ijmn}^{(n)}$ или упругие податливости $\Pi_{ijmn}^{(n)}$ записывают как функции косинусов углов, задающих пространственную ориентацию частиц.

Если компоненты тензоров модулей упругости и упругих податливостей частиц наполнителя в осях x'_i , связанных с частицами, – детерминированные величины, то вычисление математических ожиданий $\langle \theta_{ijmn}^{(n)} \rangle$ и $\langle \Pi_{ijmn}^{(n)} \rangle$ сводится к вычислению математических ожиданий произведений косинусов. При этом косинусы λ_{ij} выражают через функции углов Эйлера (см. рис. 2.6):

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \psi \sin \varphi, \\ \lambda_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \theta \cos \psi \cos \varphi, \\ \lambda_{31} &= \sin \theta \sin \varphi, \\ \lambda_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi \cos \varphi, \\ \lambda_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \psi \cos \varphi, \\ \lambda_{32} &= \sin \theta \cos \varphi, \\ \lambda_{13} &= \sin \theta \sin \psi, \\ \lambda_{23} &= -\sin \theta \cos \psi, \\ \lambda_{33} &= \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

Далее задают плотность совместного распределения углов φ , ψ и θ . Средние значения модулей упругости вычисляют по формуле

$$C_{ijmn} = \langle \theta_{ijmn} \rangle = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta_{ijmn}(u, v, t) f_{\varphi, \psi, \theta}(u, v, t) du dv dt. \quad (3.58)$$

Численное интегрирование (3.58) не представляет сложности при любых типах симметрии упругих свойств наполнителя и законах распределения углов, задающих ориентацию, однако обозримые формулы получаются только в немногих частных случаях. К ним относится, например, случай равновероятного распределения анизотропных частиц наполнителя по направлениям в пространстве, при котором плотность совместного распределения углов Эйлера задана формулой (2.34). Следуя Фойгту, запишем средние значения отличных от нуля компонентов тензора модулей упругости и элементов матрицы жесткости как

$$\begin{aligned} c_{11} = C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} &= (3C_I + 4C_{II} + 2C_{III})/15; \\ c_{66} = C_{1212} = C_{3131} = C_{2323} &= (C_I + 3C_{II} - C_{III})/15; \\ c_{12} = C_{1122} = C_{2233} = C_{1133} &= (C_I - 2C_{II} + 4C_{III})/15, \end{aligned} \quad (3.59)$$

где $C_I = C'_{1111} + C'_{2222} + C'_{3333}$; $C_{II} = C'_{1212} + C'_{2323} + C'_{3131}$; $C_{III} = C'_{1122} + C'_{2233} + C'_{3311}$; C'_{ijmn} – тензор модулей упругости частицы.

Для средних значений упругих податливостей имеем

$$\begin{aligned} s_{11} = s_{22} = s_{33} &= (3s_I + s_{II} + 2s_{III})/15; \\ s_{44} = s_{55} = s_{66} &= (4s_I + s_{II} - 4s_{III})/15; \\ s_{13} = s_{31} = s_{12} &= (s_I - s_{II}/2 + 4s_{III})/15, \end{aligned} \quad (3.60)$$

где $s_I = s'_{11} + s'_{22} + s'_{33}$; $s_{II} = s'_{44} + s'_{55} + s'_{66}$; $s_{III} = s'_{13} + s'_{31} + s'_{12}$; s'_{ij} – элементы матрицы упругих податливостей частицы.

Поскольку в результате хаотической в пространстве ориентации анизотропных частиц КМ изотропен, то между постоянными, записанными в формулах (3.59) и (3.60), имеется связь: $c_{11} = c_{12} + 2c_{66}$ и $2(s_{11} - s_{12}) = s_{66}$, вытекающая из соотношений (1.83).

Изложенная схема пригодна и для прогнозирования постоянных упругости КМ, хаотически армированных волокнами. Такой композит, например литевой стеклонаполненный материал, можно рас-

смаатривать как систему хаотически ориентированных в пространстве пучков коротких волокон, пропитанных связующим. Элементом структуры материала служит трансверсально-изотропная частица с однонаправленной ориентацией волокон. Постоянные упругости частицы находятся как постоянные упругости однонаправленного волокнистого композита по формулам, приведенным в подразд. 3.2.

При хаотической ориентации частиц в пространстве плотность распределения углов Эйлера, определяющих положение частицы, задана формулой (2.34). Тогда средние значения постоянных упругости КМ находятся по формулам (3.59) и (3.60). Модули Юнга, рассчитанные в результате осреднения жесткостей (по Фойгту) и податливостей (по Ройссу), неодинаковы, что является следствием различных условий взаимодействия частиц в этих схемах. Для приближения к результатам эксперимента иногда применяют искусственный прием: в качестве модулей Юнга и сдвига материала принимают среднее арифметическое значений, полученных по схемам Фойгта и Ройсса.

Расчеты могут быть упрощены, если для оценки постоянных упругости однонаправленного элемента применить сеточную модель. Тогда для технических постоянных хаотически армированного КМ получаются следующие простые соотношения:

$$E = E_M P_M / 6; \quad G = E_n P_n / 15; \quad \mu = 0,25. \quad (3.61)$$

Вклад матрицы здесь не учитывается. Значения модулей, рассчитанных по сеточной модели, оказываются несколько выше, чем при осреднении по Ройссу и при расчете по формулам (3.55).

Если частицы распределены преимущественно в одном или нескольких направлениях в пространстве, то материал обладает анизотропией структуры и упругих свойств. Ориентация ортотропных частиц задается распределением углов Эйлера, изотропных или трансверсально-изотропных – распределением углов сферической системы координат общего вида (2.22). В зависимости от ориентации частиц материал оказывается трансверсально-изотропным, ортотропным или имеет еще более низкую степень симметрии структуры и упругих свойств.

Для вычисления постоянных упругости такого материала применимы две схемы осреднения. По первой схеме сначала находят средние по ориентациям значения постоянных упругости компонентов, а затем оценивают постоянные упругости композита по средним значениям свойств и концентрации компонентов согласно формулам (3.19).

По второй схеме операцию осреднения по углам применяют к постоянным упругости однонаправленных элементов, содержащих наполнитель и связующее в количествах, соответствующих составу всего материала. В этом случае приближенно учитываются длина частиц наполнителя, пористость и взаимодействие элементов структуры на микроуровне. Расчет по этой схеме также позволяет оценить влияние преимущественной ориентации элементов структуры на упругие свойства материала. На рис. 3.16 показаны зависимости постоянных

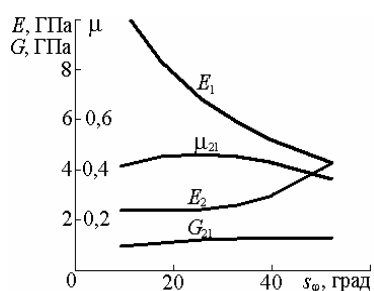


Рис. 3.16

упругости листового стеклонаполненного полипропилена от среднего квадратического отклонения угла φ , задающего ориентацию однонаправленных элементов относительно оси x_1 – направления преимущественной ориентации элементов в плоскости (см. подразд. 2.2). По мере уменьшения степени анизотропии (при этом s_φ уменьшается от 0° при однонаправленном расположении

параллельно оси x_1 до 52° при хаотической ориентации в плоскости) в большей мере изменяются модули Юнга в плоскости x_1x_2 и в меньшей мере – модуль сдвига и коэффициент Пуассона.

Обозримые формулы получают в случае равномерного распределения элементов по ориентациям в пространстве и в плоскости. Расчеты дают следующие приближенные формулы для модулей Юнга и модулей сдвига: при хаотической ориентации частиц в плоскости $E = (3E_1 + 5E_2) / 8$; $G = (E_1 + 2E_2) / 4$; при хаотической ориентации в пространстве $E = (E_1 + 4E_2) / 5$, где E_1 и E_2 – модули Юнга однонаправленного элемента в главных направлениях.

Законы распределения углов, определяющих ориентацию частиц в пространстве, задаваемые априори, могут сильно отличаться от наблюдаемых в реальных материалах. Соответственно различными будут и постоянные упругости – прогнозируемые и измеряемые.

Упражнения

1. Рассчитать постоянные упругости КМ, хаотически наполненного жесткими частицами (стеклянными, углеродными, базальтовыми

и др.). Проанализировать зависимость постоянных упругости от свойств и содержания компонентов. Дать сравнительную характеристику различных методов прогнозирования.

2. Рассчитать постоянные упругости пористого матричного вещества и наполненного КМ на его основе. Исследовать зависимость свойств от пористости и степени наполнения.

3. Оценить постоянные упругости термопластичного полимера, наполненного анизотропными частицами растительного происхождения (древесными, льноволокнами, льнокострой), в зависимости от направления и степени их преимущественной ориентации. Сравнить с известными экспериментальными данными.

4. Рассчитать постоянные упругости листового стеклонаполненного термопласта (полипропилена, полиамида-6, полиэтилентерефталата) в зависимости от степени наполнения и анизотропии распределения в плоскости. Сравнить с экспериментальными данными для известных материалов.

3.6. Термоупругие и теплофизические характеристики

Температурные коэффициенты линейного расширения однонаправленного КМ. В статистической модели КМ (см. подразд. 2.2) модули упругости $\theta(\mathbf{x})$ и температурные коэффициенты линейного расширения (ТКЛР) $\alpha_{\parallel}(\mathbf{x})$, отнесенные к элементам структуры, – случайные поля. В этом случае напряжения σ_{\parallel} , отнесенные к элементам структуры, температурные деформации $\epsilon_{\parallel}^T = \alpha_{\parallel} \Delta T$ (ΔT – детерминированная разность температур естественного (ненапряженного) состояния и эксплуатации) и полные деформации ϵ_{\parallel} – также случайные поля. Уравнения Дюамеля – Неймана (1.104), связывающие эти величины, имеют вид

$$\sigma_{\parallel} = \theta \cdot (\epsilon_{\parallel} - \alpha_{\parallel} \Delta T). \quad (3.62)$$

Применив к обеим частям уравнения (3.62) оператор математического ожидания, по аналогии с (3.12) получим уравнения, связывающие средние величины:

$$\sigma = C \cdot \epsilon + \langle \theta \cdot \epsilon_{\parallel} \rangle - \langle \theta \cdot \alpha_{\parallel} \rangle \Delta T. \quad (3.63)$$

При некоторых условиях средние напряжения σ и деформации ϵ равны макроскопическим (см. подразд. 3.1), связанным отношениями

$$\sigma_{II} = C^{\circ} \cdot (\varepsilon - \alpha \Delta T), \quad (3.64)$$

где C° – модули упругости; $\alpha = (\alpha_{ij})$ – ТКЛР композита.

ТКЛР композита находим, приравнивая правые части уравнений (3.63) и (3.64) и решая полученное уравнение относительно (α_{ij}) . В главных осях тензоров C° и α имеем

$$\alpha_{jj} = D_{jj} D^{-1}. \quad (3.65)$$

Здесь $D = |C_{ijij}^{\circ}|$; D_{jj} – определитель, полученный в результате замены соответствующего столбца определителя D на

$$A_{jj} = C_{jj\alpha\beta} \alpha_{\alpha\beta} + \langle \theta_{jj\alpha\beta}^{\circ} \alpha_{\Pi\alpha\beta}^{\circ} \rangle - \langle \theta_{jj\alpha\beta}^{\circ} \varepsilon_{\Pi\alpha\beta}^{\circ} \rangle_{\Delta T}, \quad (3.66)$$

где $\langle \theta_{jj\alpha\beta}^{\circ} \varepsilon_{\Pi\alpha\beta}^{\circ} \rangle_{\Delta T}$ – слагаемые $\langle \theta_{jj\alpha\beta}^{\circ} \varepsilon_{\Pi\alpha\beta}^{\circ} \rangle$, содержащие множитель ΔT и определяемые из решения задачи термоупругости.

Как видно из формул (3.65) и (3.66), ТКЛР композитов находятся в результате решения задачи теории упругости о взаимодействии элементов структуры при изменении температуры. Эта задача эквивалентна по сложности задаче о взаимодействии компонентов в случае приложения внешней нагрузки.

ТКЛР однонаправленно армированного волокнистого материала с изотропными компонентами (направление армирования параллельно x_1) выражаются формулами

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= [A_{11}(C_{2222}^{\circ} + C_{2233}^{\circ}) - 2A_{33}C_{1133}^{\circ}] Q^{-1}; \\ \alpha_{22} = \alpha_{33} &= (A_{33}C_{1111}^{\circ} - A_{11}C_{1133}^{\circ}) Q^{-1}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

где C_{ijmn}° – компоненты тензора модулей упругости КМ;

$$A_{11} = 3[K\alpha + K^*\alpha^*P_n(1-P_n) + n^*P_n(1-P_n)L^*h^{*-1}];$$

$$A_{33} = 3[K\alpha + K^*\alpha^*P_n(1-P_n) + n^*P_n(1-P_n)(L^* + G^*)h^{*-1}];$$

$$Q = C_{1111}^{\circ}(C_{2222}^{\circ} + C_{2233}^{\circ}) - 2C_{1133}^{\circ 2}; \quad h^* = L + 2G + (L^* + G^*)(1 - 2P_n);$$

$\alpha^* = \alpha_n - \alpha_m$; $n^* = K_n\alpha_n - K_m\alpha_m$; K, L, G – средние значения модуля объ-

емной деформации и постоянных Ламе; K^* , L^* , G^* – их разности для компонентов; α_n , α_m – ТКЛР компонентов.

Из формул (3.56) получаются формулы для коэффициентов усадки в результате подстановки вместо ТКЛР коэффициентов усадки компонентов.

Несколько проще получаются формулы для ТКЛР КМ, наполненного изотропными частицами.

Сложность формул (3.67) не гарантирует точности нахождения искомых величин, которая зависит от точности задания свойств компонентов и структуры материала. Более того, изменение температуры влечет за собой изменение постоянных упругости и ТКЛР компонентов, поэтому оценка ТКЛР всегда может быть лишь приближенной.

В этой связи часто оказывается обоснованным применение простых выражений для ТКЛР композитов однонаправленной и иных типов структуры, полученных при менее строгих предположениях о структуре композита и характере взаимодействия его компонентов. Так, для оценки ТКЛР однонаправленного волокнистого КМ вместо (3.67) могут быть использованы более наглядные соотношения, предложенные Шепери (R. A. Schepery):

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= [\alpha_n E_n P_n + \alpha_m E_m P_m] E_1^{-1}; \\ \alpha_{22} &= [\alpha_n P_n (1 + \mu_n) + \alpha_m P_m (1 + \mu_m)] - \mu_{21} \alpha_{11},\end{aligned}\tag{3.68}$$

где E_1 , μ_{21} – модуль Юнга и коэффициент Пуассона КМ. Другие обозначения приведены выше.

ТКЛР слоистых и хаотически армированных КМ. Если известны ТКЛР однонаправленных слоев или элементов, составляющих композит с заданными параметрами расположения этих слоев (элементов), то вычисления ТКЛР композита могут быть выполнены по методу осреднения.

Пусть α_{ij} – компоненты тензора ТКЛР слоя (элемента) в системе координат x_i , связанной с этим слоем (элементом); l_{ij} – косинусы углов, задающих положение системы координат x_i относительно системы координат x'_i , связанной с изделием; $f_{\varphi, \theta}(x, z)$ – плотность распределения углов сферической системы координат, в которой задано положение элементов. Тогда компоненты тензора ТКЛР в новых осях α'_{ij} заданы формулами преобразования (1.11), а средние значения находятся по формулам

$$\alpha_{ij}^{\circ} = \int_0^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha_{ij}' f_{\varphi, \vartheta}(x, z) dx dz. \quad (3.69)$$

Таким образом, вычисления сводятся к нахождению интегралов от тригонометрических функций, задающих положение слоев (элементов).

При ортогональном армировании, когда в направлении оси x'_1 укладывается доля ν_1 всех слоев, а в направлении оси x'_2 – $\nu_2 = 1 - \nu_1$, ТКЛР в главных направлениях равны

$$\alpha_{11}^{\circ} = \alpha_{11}\nu_1 + \alpha_{22}\nu_2; \quad \alpha_{22}^{\circ} = \alpha_{11}\nu_2 + \alpha_{22}\nu_1; \quad \alpha_{33}^{\circ} = \alpha_{33}. \quad (3.70)$$

При хаотическом расположении однонаправленных элементов параллельно плоскости x_1x_2 распределение углов задано плотностью $f_{\varphi}(x)$ общего вида (2.36), а степень анизотропии структуры зависит от параметров распределения угла φ . Степень анизотропии ТКЛР определяется также соотношением коэффициентов в главных осях x_i , которые, согласно формулам (3.69), являются функциями свойств компонентов и их объемных долей.

На рис. 3.17, а показаны ТКЛР стеклонаполненного полипропилена как функции степени наполнения при различной структуре композита – однонаправленной (кривые 1 и 2), ортотропной (3 и 4) и при равномерной укладке в плоскости (5).

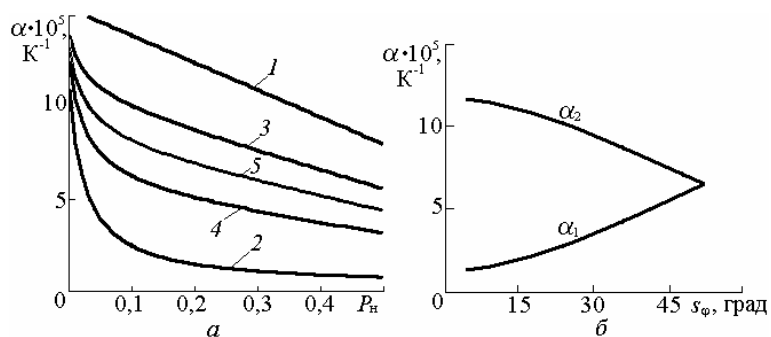


Рис. 3.17

Видно, что при малых степенях наполнения различие ТКЛР в главных направлениях особенно велико.

Зависимость ТКЛР в главных направлениях x_1 и x_2 от степени анизотропии структуры характеризует также рис. 3.17, б, где показаны

значения коэффициентов как функции среднего квадратического угла отклонения однонаправленных элементов (нитей стеклонаполненного полипропилена) от оси x_1 .

По методу осреднения могут быть получены значения ТКЛР композитов, наполненных короткими волокнами. В этом случае задают плотность распределения углов $f_{\varphi, \theta}(x, z)$ в общем виде (2.22) и входящие в эту формулу подходящие плотности распределения углов φ и θ (например, распределение угла θ в виде (2.23) или (2.35)).

Известны формулы для ТКЛР материалов, наполненных частицами, выведенные при различных гипотезах об условиях взаимодействия элементов структуры при изменении температуры.

Удельная теплоемкость. Удельная теплоемкость является скалярной величиной, поэтому ее рассчитывают как среднемассовое значение удельных теплоемкостей компонентов:

$$c_p = \sum_i c_{pi} C_i, \quad (3.71)$$

где c_{pi} – удельная теплоемкость, а C_i – массовая доля компонента i .

Теплопроводность. Коэффициенты теплопроводности k_{ij} , входящие в уравнение теплопроводности однородной и анизотропной сплошной среды (1.129), зависят от структуры материала и от направления координатных осей по отношению к главным осям симметрии структуры.

Для прогнозирования коэффициентов теплопроводности КМ различной структуры используют методы, аналогичные методам прогнозирования постоянных упругости (см. подразд. 3.1).

Применим осреднение по схемам Фойгта и Ройсса для оценки коэффициентов теплопроводности однонаправленного КМ, состоящего из двух изотропных компонентов (ось x_1 – вдоль волокон, ось x_2 – в трансверсальной плоскости). Получим:

$$k_1 = k_n P_n + k_m P_m; \quad k_2 = k_n k_m (k_n P_m + k_m P_n)^{-1}, \quad (3.72)$$

где k_n и k_m – коэффициенты теплопроводности компонентов; P_n и P_m – их объемные доли.

Как и модуль Юнга при растяжении в трансверсальной плоскости, коэффициент теплопроводности k_2 , вычисленный путем осреднения по схеме Ройсса, оказывается меньше измеренного в эксперименте. Однако в данном случае относительное отклонение меньше, поскольку меньше различие показате-

лей свойств компонентов. Более близкими к экспериментальным получаются значения коэффициента теплопроводности, вычисленные по откорректированной формуле

$$k'_2 = k_m [k_m P_m + k_n (1 + P_n)] / [k_m (1 + P_n) + k_n P_m]. \quad (3.73)$$

Коэффициенты теплопроводности композитов слоистой структуры или состоящих из однонаправленных элементов, в том числе с произвольным хаотическим расположением, как и ТКЛР, оцениваются по методу осреднения на основе формул преобразования тензора второго ранга. Так, по аналогии с ТКЛР (см. формулы (3.70)) для коэффициентов теплопроводности ортотропных композитов слоистой структуры, составленных из однонаправленных слоев, применяют формулы

$$k_{11}^{\circ} = k_1 v_1 + k_2 v_2; \quad k_{22}^{\circ} = k_{11} v_2 + k_{22} v_1; \quad k_{33}^{\circ} = k_{33}, \quad (3.74)$$

где k_1 и k_2 – коэффициенты теплопроводности в главных направлениях слоя, определяемые формулами (3.72) и (3.73); v_1 и v_2 – доли слоев, ориентированных в главных направлениях.

Зависимости коэффициентов теплопроводности стеклопластиков с эпоксидным связующим ($k_n = 0,8$ Вт/(м·К), $k_m = 0,2$ Вт/(м·К)) от объемной доли наполнителя и структуры, вытекающие из формул (3.72)–(3.74), показаны на рис. 3.18.

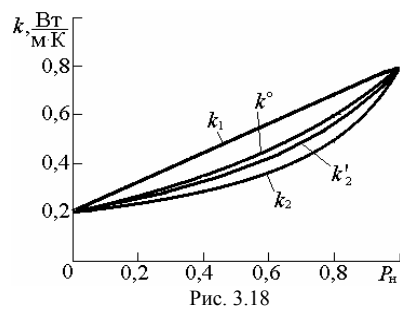


Рис. 3.18

Как видно из рис. 3.18, значения, рассчитанные по формуле (3.74), находятся между значениями для коэффициентов теплопроводности однонаправленного КМ в трансверсальной плоскости, полученными по схеме Ройсса (3.72) и по уточненной формуле (3.73).

Коэффициенты теплопроводности КМ, наполненного изотропными частицами, не зависят от направления в пространстве и приближенно оцениваются по формуле

$$k = k_m [2k_m + k_n + 2(k_n - k_m) P_n] [2k_m + k_n - 2(k_n - k_m) P_n]^{-1}. \quad (3.75)$$

Для прогнозирования коэффициентов теплопроводности используют также более точные физические модели и более сложные математические методы, учитывающие особенности структуры реальных материалов и тепловое взаимодействие компонентов. Однако, как уже неоднократно отмечалось, точность прогнозирования в большей мере зависит от соответствия исходных данных о характеристиках свойств и структуры композита, чем от сложности применяемого метода расчета. Это особенно важно для КМ с полимерной матрицей, поскольку теплофизические свойства полимеров зависят от природы, молекулярной массы, а также от температуры и давления.

Упражнения

1. Рассчитать ТКЛР и коэффициенты усадки однонаправленного и слоистого стеклопластика (углепластика) с заданной степенью наполнения. Охарактеризовать влияние структуры материала на прогнозируемые свойства.

2. Сравнить ТКЛР композитов различного состава и структуры с ТКЛР стали и бетона.

3. Оценить коэффициенты теплопроводности КМ на основе полимерной матрицы и стекловолокна при различной степени наполнения и структуре материала. Сравнить с экспериментальными данными.

4. МИКРОМЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ

4.1. Напряженное и деформированное состояние элементов структуры

Модели и методы. Ввиду малых размеров элементов структуры КМ непосредственные измерения напряжений и деформаций, возникающих в элементах структуры при нагружении изделий из КМ, невозможны. Для оценки влияния структуры КМ и свойств компонентов на распределение напряжений и деформаций применяют аналитические методы и упрощенные модели либо экспериментальные методы и увеличенные модели типичных фрагментов КМ. Такие модели и методы дают частные решения и в большинстве случаев только качественные характеристики влияния.

Современные методы и средства вычислений позволяют решать достаточно сложные задачи, исследовать более тонкие эффекты влияния структуры на напряженное и деформированное состояние компонентов КМ, однако усложнение задачи, обуславливающее неизбежное увеличение затрат на ее решение, далеко не всегда приводит к соизмеримым по эффективности результатам.

Ниже рассматриваются преимущественно простейшие модели и дается качественная характеристика влияния структуры КМ и свойств компонентов на распределение напряжений и деформаций элементов структуры. Более сложные методы расчета и полученные с их помощью результаты изложены схематично.

Одноосное растяжение вдоль волокон. Рассмотрим сначала одноосное растяжение вдоль волокон (по оси x_1) композита, однонаправленно армированного непрерывными волокнами (см. рис. 3.1). Примем согласно схеме Фойгта, что деформации ε_{11} в направлении растяжения одинаковы. Тогда напряжения в элементах структуры пропорциональны модулям Юнга этих элементов и равны $\sigma_{a11} = E_{a1}\varepsilon_{11}$; $\sigma_{m11} = E_{m1}\varepsilon_{11}$, где E_{a1} и E_{m1} – модули Юнга волокон и матрицы в направлении оси x_1 .

Рассмотрим далее фрагмент однонаправленного волокнистого КМ, содержащий разорванное волокно (рис. 4.1). Радиус R фрагмента связан с объемной долей наполнителя $P_a = \pi r_0^2 / \pi R^2 = (r_0 / R)^2$. Считаем, что оба компонента упругие; E_a – модуль Юнга волокон; G_m – модуль сдвига матрицы, а связь между волокном и матрицей идеальная.

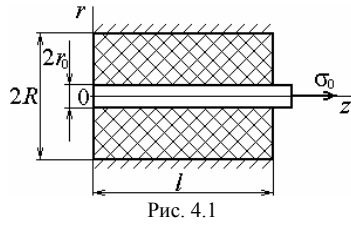


Рис. 4.1

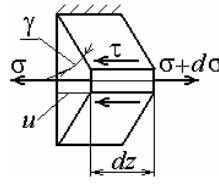


Рис. 4.2

Растяжение волокна вызывает касательные напряжения на его поверхности. Из условия равновесия элементарного участка длиной dz (рис. 4.2) получаем уравнение, связывающее растягивающие напряжения в волокне σ и касательные напряжения τ на границе:

$$(\sigma + d\sigma)\pi r_0^2 - \sigma\pi r_0^2 = 2\pi r_0 \tau dz. \quad (4.1)$$

После преобразований из (4.1) следует дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma}{dz} - \frac{2\tau}{r_0} = 0. \quad (4.2)$$

Нормальное напряжение в волокне $\sigma = E_a \varepsilon = E_a \frac{du}{dz}$, где u – перемещение. Касательные напряжения на границе (в матрице) $\tau = G_M \gamma \cong G_M u / (R - r_0)$. Здесь учтено, что ввиду малости перемещений угол сдвига $\gamma \approx \text{tg } \gamma = u / (R - r_0)$.

Подставив эти выражения в уравнение (4.2), получим дифференциальное уравнение относительно перемещений в виде

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - k^2 u = 0, \quad (4.3)$$

где $k^2 = 2G_M / r_0(R - r_0)E_a$, или, после подстановки $(r_0 / R)^2 = P_a$, позволяющей ввести объемную долю волокна в элементе, $k^2 = [2G_M \sqrt{P_a}] / [E_a r_0^2 (1 - \sqrt{P_a})]$.

Решение уравнения (4.3) при граничных условиях $\sigma|_{z=0} = 0$; $\sigma|_{z=\infty} = \sigma_0$ дает следующие выражения для нормальных напряжений в волокне и касательных напряжений в матрице:

$$\sigma = \sigma_0[1 - \exp(-kz)]; \quad \tau = \frac{\sigma_0 r_0 k}{2} \exp(-kz). \quad (4.4)$$

Эпюры напряжений, построенные согласно уравнениям (4.4), показаны на рис. 4.3.

Найдем «эффективную» длину волокна l_3 , при которой напряжение в волокне достигает значений, близких к σ_0 , например $\sigma_3 = 0,9\sigma_0$. При этом условии

$$l_3 = 2,3r_0 \sqrt{\frac{E_a(1 - \sqrt{P_a})}{2G_m \sqrt{P_a}}}. \quad (4.5)$$

Для стеклопластика ($E_a = 70$ ГПа, $G_m = 1$ ГПа, $P_a = 0,5$) $l_3 \cong 10r_0$, при $d = 10$ мкм $l_3 \cong 50$ мкм. Следовательно, напряжение в волокне

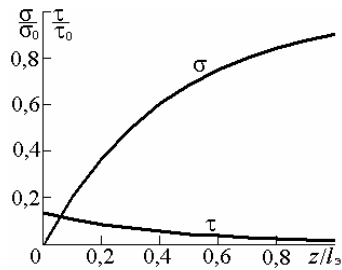


Рис. 4.3

отличается от номинального значения σ_0 только на очень малом удалении от конца волокна. В то же время касательные напряжения в матрице достигают довольно больших значений ($\tau_{\max} = 0,13\sigma_0$) как раз вблизи конца волокна. Даже при напряжении в волокне, равном половине от разрушающих ($\sigma_a^+ = 1$ ГПа), касательные напряжения, согласно этому соотношению, равны $\tau_{\max} = 65$ МПа,

т. е. значительно превосходят прочность связи между волокном и матрицей. Это означает, что разрушение при данном виде нагружения всегда будет происходить путем отслоения матрицы от волокна.

Более точный расчет взаимодействия волокна с матрицей, в частности учет вязкоупругих и пластических деформаций матрицы, показывает, что максимум касательных напряжений наблюдается на некотором расстоянии от концов волокон. Однако и в этом случае концентрация напряжений вблизи конца волокон велика и потому служит причиной отслоения матрицы.

После отслоения матрицы нагрузка на волокно может передаваться только за счет сил трения на поверхности, возникающих в результате обжатия волокна. В данном случае можно принять, что касательные напряжения распределены равномерно по длине волокна.

Аналогичное предположение допустимо и в случае идеально пластичной матрицы, когда прочность связи между волокном и матрицей τ_* не ниже предела текучести матрицы. После достижения касательными напряжениями на границе предела текучести матрицы напряжения равномерно распределены по всей поверхности. Найдем напряжение в волокне из условия равновесия. Максимальное значение (в среднем сечении по длине волокна) равно $\sigma = 2\tau_* l / d$. Длина волокна l_3 , при которой разрушение ячейки происходит путем разрыва волокна, также называется эффективной длиной и равна

$$l_3 = \frac{\sigma_a^+ d}{2\tau_*}, \quad (4.6)$$

где σ_a^+ – прочность волокна при растяжении.

Растяжение перпендикулярно волокнам. Рассмотрим модель однонаправленного волокнистого композита, нагруженного растягивающим усилием в трансверсальной плоскости (рис. 4.4).

Вычислим удлинение элементарной полоски единичного сечения и длиной $l = l_a + l_m$ ($l_a = l'_a + l''_a$). По условию равновесия напряжения во всех частях этой полоски равны $\sigma_a = \sigma_m = \sigma_{22}$, причем выполняется

закон Гука $\sigma_a = E_{a2}\varepsilon_a$ и $\sigma_m = E_m\varepsilon_m$. Удлинение равно $\Delta l = \varepsilon_a l_a + \varepsilon_m l_m = \varepsilon_{22} l$. Деформации ε_{22} получим, разделив удлинение Δl на l . При этом будем полагать, что $l_a / l = P_a$ и $l_m / l = P_m = 1 - P_a$, где P_a – относительная длина участка, занимаемого волокнами. Тогда отношение деформаций матрицы ε_m к средней деформации элемента ε_{22} запишется в виде

$$f_\varepsilon = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{22}} = \left[1 - P_a + \frac{E_m}{E_{a2}} P_a \right]^{-1}. \quad (4.7)$$

При любых значениях $P_a > 0$ это отношение больше 1, поэтому его называют коэффициентом увеличения деформаций матрицы. Если $E_m / E_{a2} \ll 1$, то $f_\varepsilon \approx P_m^{-1}$, т. е. коэффициент увеличения деформаций матрицы обратно пропорционален ее объемной доле.

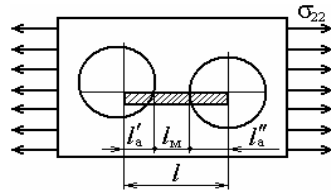


Рис. 4.4

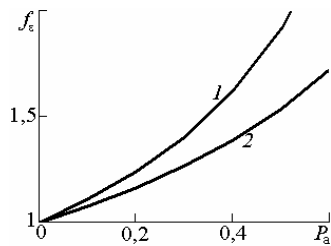


Рис. 4.5

На рис. 4.5 показаны зависимости коэффициента увеличения деформаций от степени наполнения композита ($E_m = 3$ ГПа) стеклянными ($E_{a2} = 70$ ГПа, кривая 1) и углеродными ($E_{a2} = 10$ ГПа, кривая 2) волокнами.

Нетрудно сделать вывод, что при этом виде нагружения увеличенные деформации матрицы в промежутках

между волокнами и, соответственно, концентрация напряжений в матрице ответственны за разрушения на микроуровне.

Более точную картину напряженного и деформированного состояния дают расчеты по методу конечных элементов для регулярной и статистической моделей структуры (см. рис. 2.9). Эти расчеты также свидетельствуют, что максимальные напряжения в матрице возникают вблизи волокон и на участках, где расстояние между волокнами минимально (рис. 4.6).

В регулярной модели стеклопластика при $P_a = 0,5$ коэффициент концентрации напряжений примерно равен 2, что близко к значениям, рассчитанным по коэффициенту увеличения деформаций согласно формуле (4.7). Согласно стохастической модели, максимальные напряжения в матрице тем больше, чем меньше расстояния между соседними волокнами, что также подтверждает справедливость приближенной оценки по формуле (4.7).

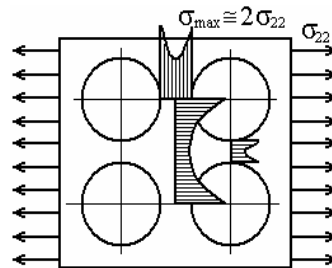


Рис. 4.6

Сложное напряженное состояние. Анализ напряжений и деформаций в элементах структуры при сложном напряженном состоянии КМ требует адекватных моделей. Известные подходы можно отнести к следующим направлениям: а) учет стохастической структуры материала и дефектов; б) учет нелинейных эффектов деформирования компонентов (пластичности, вязкоупругости). Решения получены численными методами.

Распределение параметров напряженного и деформированного состояния компонентов в стохастической модели волокнистого композита дает метод реализаций, по которому взаимодействие элементов

структуры учитывается с помощью функций Грина (см. подразд. 1.5). Функции Грина характеризуют влияние включений (волокон), расположенных в окрестности некоторой точки, на напряженное и деформированное состояние в этой точке. При решении задачи в перемещениях реализации напряжений рассчитывают по реализациям деформаций. В свою очередь, с учетом формул (3.14) реализации деформаций элементов структуры представляются в виде суммы средних значений e_{ij} , равных деформациям композита в целом, и поправок, учитывающих неоднородность структуры:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = e_{ij} + F_{ij\alpha\beta}(\mathbf{x})e_{\alpha\beta}. \quad (4.8)$$

Случайный функционал $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ отражает, с одной стороны, наличие в материале разнородных компонентов и, с другой стороны, случайность формы и расположения элементов структуры. Реализации функционала $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ в различных точках вычисляются по следующим формулам:

$$F_{ijmn}(\mathbf{x}) = \begin{cases} I_{a\ ij\alpha\beta}(C_{a\ \alpha\beta mn} - C_{m\ \alpha\beta mn}), \\ I_{m\ ij\alpha\beta}(C_{a\ \alpha\beta mn} - C_{m\ \alpha\beta mn}), \end{cases} \quad (4.9)$$

где

$$I_{a\ ijmn} = \frac{1}{2} \left[(I_{ijmn} + I_{jimn})(1 - P_a) - \sum_{k=1}^{\infty} (I^{(k)}_{ijmn} + I^{(k)}_{jimn}) \right];$$

$$I_{m\ ijmn} = \frac{1}{2} \left[(I_{ijmn} + I_{jimn})(-P_a) - \sum_{k=1}^{\infty} (I^{(k)}_{ijmn} + I^{(k)}_{jimn}) \right];$$

$$I_{ijmn} = \int_S \frac{\partial G_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial x_j} \frac{\partial k_{\lambda}(r)}{\partial x'_n} dS'; \quad I^{(k)}_{ijmn} = \int_{L_k} \frac{\partial G_{im}(x, x')}{\partial x_j} n^{(k)}_n dL_k;$$

суммирование осуществляется по номерам k кругов – участков, занятых волокнами; $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ – компоненты тензора Грина; $k_{\lambda}(r)$ – нормированная корреляционная функция расположения элементов структуры (см. подразд. 2.2); S – площадь модельного поля; L_k – контур круга k ; C_{aijmn} , C_{mijmn} – компоненты тензоров модулей упругости волокон и матрицы соответственно.

Дифференцирование компонентов тензора Грина $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ по координатам дает тригонометрические функции, поэтому вычисление величин $I^{(k)}_{ijmn}$ сводится к вычислению интегралов от тригонометрических

функций, содержащих в качестве параметров полярные координаты и радиусы волокон.

Гистограммы распределения напряжений в компонентах однонаправленного стеклопластика при растяжении в трансверсальной плоскости ($P_a = 0,5$; $\sigma_{22} = 10$ МПа), рассчитанные по этому методу, показаны на рис. 4.7 (*a* – в волокнах, *б* – в связующем). Расчеты выполнены для реализации модельной структуры со средним диаметром волокон 13 мкм и коэффициентом вариации диаметра 10%. Реализации функционала $F(x)$ вычислены в 100 точках, расположенных случайным образом внутри квадрата со стороной 300 мкм, содержащего ~400 кругов.

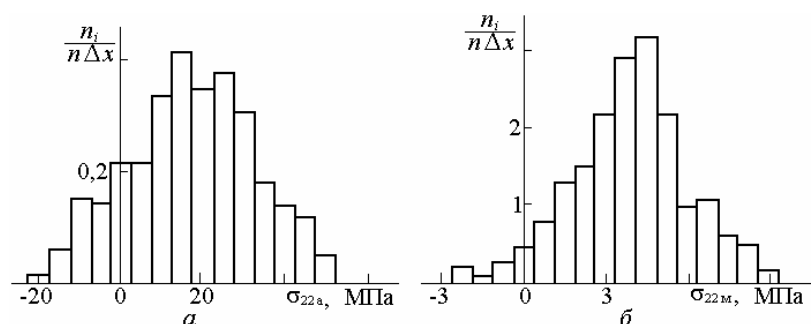


Рис. 4.7

Судя по гистограммам, распределение напряжений в связующем имеет асимметрию и может быть представлено законом Вейбулла.

По изложенному методу построены гистограммы и рассчитаны параметры распределения напряжений и деформаций в компонентах однонаправленного стеклопластика при различных напряженных состояниях. По ним в дальнейшем оценивались параметры микроповрежденности элементов структуры (см. подразд. 4.4).

Экспериментальное изучение. Растяжение модели однонаправленного композита в трансверсальной плоскости наиболее часто воспроизводят в эксперименте. Используют увеличенные (в 1000 раз и более) модели с тем, чтобы размеры включений, моделирующих волокна, были не меньше 10 мм. Это обусловлено требованиями к точности и техническими возможностями определения напряжений и деформаций.

Стеклянные или алюминиевые шайбы заливают эпоксидной смолой, затем смолу отверждают. Образец нагружают и поляризационно-оптическим методом измеряют разность главных напряжений

в матричном полимере. Таким методом получены показанные на рис. 4.8 коэффициенты концентрации напряжений в квадратной (а) и гексагональной (б) моделях однонаправленного стеклопластика (Г. Грюнингер, А. Рот). Они сравниваются с рассчитанными путем решения статистической задачи в реализациях (О. А. Кравченко) при степенях заполнения 0,58 (1) и 0,46 (2).

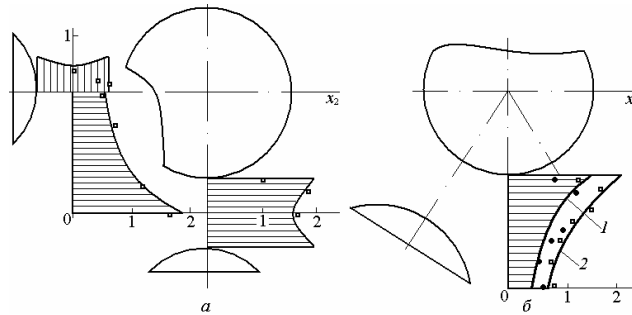


Рис. 4.8

Увеличенные модели структуры для измерения деформаций по методу сеток изготавливают также из резины или иного эластичного материала. Включения моделируют участками увеличенной толщины. На поверхность модели наносят точную сетку (растр), шаг которой на порядок меньше диаметра включений. Смещения узлов сетки под нагрузкой фиксируют с помощью измерительного микроскопа. Гистограммы распределения продольных и поперечных деформаций в резиновой модели однонаправленного КМ, растягиваемого в трансверсальной плоскости (в направлении оси x_2) напряжением 0,8 МПа, полученные по этому методу, показаны на рис. 4.9. Сплошными линиями нанесены результаты расчета.

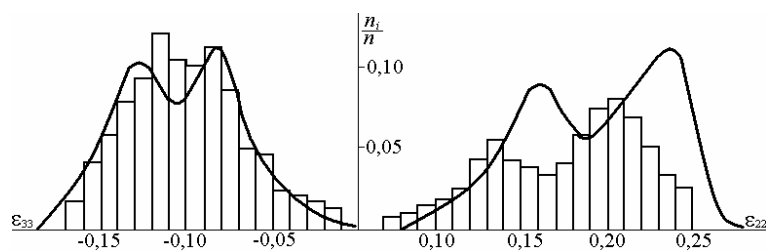


Рис. 4.9

Каждая кривая имеет две вершины, относящиеся к наполнителю и матрице. Средние значения деформаций, полученные в эксперименте, удовлетворительно согласуются со значениями, рассчитанными в результате решения статистической задачи.

Упражнения

1. Оценить напряжения и деформации в компонентах однонаправленного стеклопластика (углепластика) при растяжении вдоль волокон и в трансверсальной плоскости. Сравнить с предельными значениями напряжений и деформаций для компонентов.

2. Охарактеризовать зависимости параметров распределения напряжений и деформаций в компонентах однонаправленного КМ от свойств компонентов и структуры материала и условия разрушения элементов структуры.

4.2. Прочность компонентов

Теоретическая и реализуемая прочность волокон. Определим максимально возможное разрушающее напряжение при растяжении волокон (теоретическую прочность) через прочность связи между атомами в кристаллической решетке, которая, согласно теории прочности твердых тел, зависит от поверхностной энергии U_s , теоретического модуля Юнга $E_{\text{теор}}$ вещества и параметра r_0 , характеризующего расстояние:

$$\sigma_{\text{теор}} = \sqrt{U_s E_{\text{теор}} / r_0}. \quad (4.10)$$

Ряд химических элементов, построенный на основе этой формулы в порядке убывания теоретической прочности, выглядит так: Be, В, С, Al, Si, N, O. Нетрудно заметить, что первые места в этом ряду занимают вещества, образующие волокна, используемые в качестве высокопрочных армирующих наполнителей КМ: бериллий, бор, углерод, алюминий, кремний.

Теоретический модуль Юнга $E_{\text{теор}}$, входящий в формулу (4.10), также рассчитывается из условий взаимодействия атомов. Однако значения, получаемые в экспериментах, оказываются меньше рассчитанных.

Наряду с формулой (4.10) для оценки прочности веществ используют и более простую формулу

$$\sigma_{\text{теор}} \cong 0,1 E_{\text{теор}}. \quad (4.11)$$

Значения расчетных и наблюдаемых в эксперименте модулей Юнга и прочности при растяжении (обозначенной символом «+») некоторых веществ и волокон, используемых для армирования КМ, приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Значения расчетных и наблюдаемых в эксперименте модулей Юнга и прочности при растяжении (обозначенной символом «+») некоторых веществ и волокон, используемых для армирования КМ

Материал	E, ГПа			σ^+ , ГПа		
	Теория	Эксперимент		Теория	Эксперимент	
		Волокно	Монолит		Волокно	Монолит
Стекло	80	80	70	11	4	0,05
Сталь	210	210	210	21	4	1,4
Полиэтилен	300	100	1	27	1,5	0,03
Полипропилен	50	20	1,6	16	13	0,03
Полиамид	160	5	2	27	1,7	0,05

Видно, что модули Юнга некоторых типов волокон близки к теоретическим и, как правило, намного превышают модули монолитных материалов. Прочность волокон также больше прочности монолитных материалов, но намного меньше теоретической прочности.

Основная причина, по которой фактическая прочность волокон значительно меньше теоретической, – наличие дефектов структуры и поверхностных дефектов, возникающих при изготовлении волокон.

Наличие случайных дефектов обуславливает статистическую природу прочности волокон, которая проявляется в разбросе разрушающих напряжений. Этот факт более детально анализируется в следующем параграфе.

Вероятность появления дефекта в отрезке волокна возрастает с увеличением диаметра и длины волокна, т. е. имеет место так называемый масштабный эффект прочности. Типичные зависимости прочности стеклянных волокон при растяжении от диаметра и длины показаны на рис. 4.10.

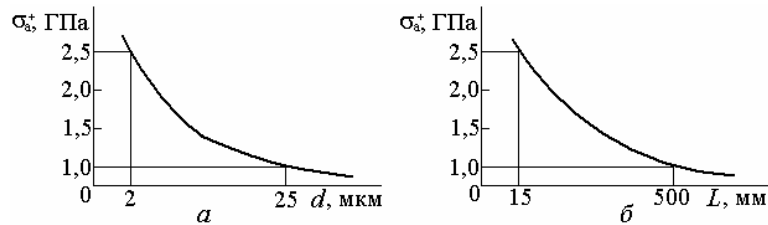


Рис. 4.10

На прочность волокон, как, впрочем, и матричных материалов, влияют также температура и продолжительность действия напряжений, влажность и иные факторы. Обычно внешние воздействия снижают прочность волокон. Эффект снижения зависит как от природы вещества, из которого получено волокно, так и от дефектов его поверхности.

Совместное влияние температуры и напряжения на время до разрушения при заданных условиях нагружения часто оценивают по формуле

$$t_p = t_0 \exp\left(\frac{U_0 - \gamma\sigma}{kT}\right), \quad (4.12)$$

где t_p – продолжительность прочного состояния при температуре T и напряжении σ ; t_0 – параметр, имеющий размерность времени; U_0 – энергия активации процесса разрушения; γ – параметр, зависящий от структуры; $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Исходные положения, приводящие к уравнению (4.12), называют кинетической теорией прочности твердых тел (С. Н. Журков).

Связь между напряжением и временем до разрушения выражают также уравнением

$$\sigma^n t_p = \text{const}, \quad (4.13)$$

где n – показатель степени, зависящий от природы материала.

Соотношения вида (4.12) и (4.13) используют для описания длительной прочности материалов (см. подразд. 5.4).

Распределение прочности волокон. Наличие дефектов обуславливает неоднородность прочности волокон. В. Вейбулл, основываясь на гипотезе «слабого звена», вывел закон распределения прочности хрупких тел.

Допустим, отрезок волокна длиной L (рис. 4.11) состоит из n участков, имеющих какие-либо дефекты. Дефекты распределены случайным образом, поэтому σ_i – разрушающее напряжение для участка i – случайная величина. Пусть $F_i(x) = P(\sigma_i < x)$ – функция распределения разрушающего напряжения для участка i (x – возможное значение напряжения). Отрезок волокна длиной L не разрушится при напряжении x , если не разрушится ни один из составляющих его участков. Вероятность неразрушения участка i равна $P(\sigma_i > x) = 1 - F_i(x)$.

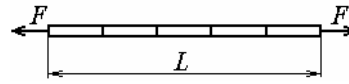


Рис. 4.11

Вероятность неразрушения отрезка длиной L запишем, полагая, что разрушающие напряжения участков σ_i – независимые случайные величины, тогда

$$P(\sigma > x) = \prod_{i=1}^n P(\sigma_i > x). \quad (4.14)$$

Если к тому же прочности участков имеют одинаковые распределения, то функцию распределения прочности отрезка запишем как

$$F_\sigma(x) = P(\sigma < x) = 1 - [1 - F_i(x)]^n. \quad (4.15)$$

Допустим, существуют минимальное x_0 и максимальное x_m значения прочности участков волокон σ_i . Тогда функция распределения прочности $F_i(x)$ задана в диапазоне этих значений (рис. 4.12).

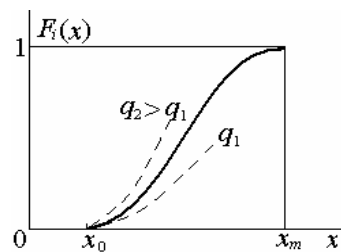


Рис. 4.12

Для анализа прочности волокна важна, в первую очередь, начальная часть кривой $F_i(x)$, поскольку разрыв при малых напряжениях хотя бы одного из участков означает разрушение волокна.

Следуя Вейбуллу, предположим, что эта начальная часть кривой $F_i(x)$ задана степенной функцией

$$F_i(x) = ((x - x_0) / x_m)^q, \quad (4.16)$$

где q – параметр, характеризующий неоднородность участков: чем больше q , тем круче кривая $F_i(x)$ (см. рис. 4.12) и тем уже диапазон возможных значений прочности, т. е. меньше их разброс.

Подставив $F_i(x)$ из формулы (4.16) в уравнение (4.15), получим функцию распределения прочности в виде степенной функции:

$$F_{\sigma}(x) = 1 - \left[1 - ((x - x_0)/x_m)^q \right]^n. \quad (4.17)$$

За разрушение ответственны наименее прочные участки. Обозначив $z = (x - x_0) / x_m$, разложим степенную функцию, заключенную в квадратные скобки выражения (4.17), в ряд в окрестности значения x_0 и заменим сумму этого ряда экспонентой

$$(1 - zq)^n = 1 - nz^q + \dots \cong \exp(-nz^q). \quad (4.18)$$

Преобразовав с учетом соотношения (4.18) формулу (4.17), получим следующее выражение для функции распределения прочности волокна:

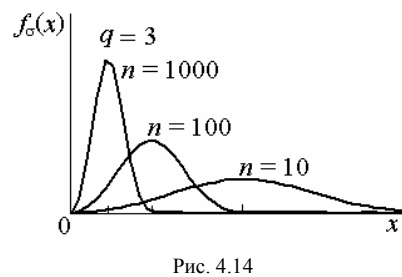
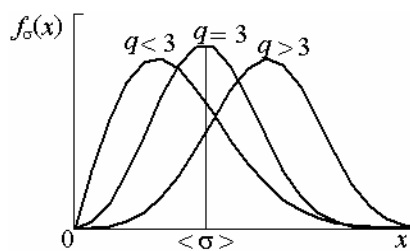
$$F_{\sigma}(x) = 1 - \exp\left[-n((x - x_0)/x_m)^q\right]. \quad (4.19)$$

Примем $x_0 = 0$ и обозначим $b = nx_m^{-q}$, тогда вместо функции (4.19) имеем

$$F_{\sigma}(x) = 1 - \exp(-bx^q). \quad (4.20)$$

Сравнивая полученное выражение с формулой (2.18), видим, что формула (4.20) задает функцию распределения Вейбулла. Плотность распределения имеет вид (2.19), а ее параметры связаны с математическим ожиданием и дисперсией формулами (2.20).

Зависимость графика плотности распределения $f_{\sigma}(x)$ от значений параметров q и n иллюстрируют рис. 4.13 и 4.14.



По числовым значениям параметров можно подобрать плотность распределения, отражающую результаты эксперимента. При этом следует учитывать, что полученное одномодальное распределение типично для прочности волокон, если она определяется дефектом только одного вида. Если разрушение обусловлено наличием двух и более дефектов, то кривая $f_{\sigma}(x)$ может иметь две и более моды (рис. 4.15).

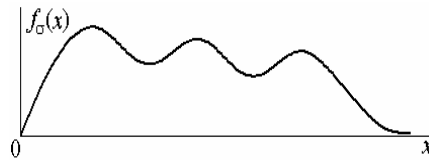


Рис. 4.15

Каждая мода характеризует дефект одного вида. В этом случае плотность распределения прочности записывается как сумма

$$f_{\sigma}(x) = \sum_k P_k f_k(x), \quad (4.21)$$

где P_k – доля волокон, причиной разрушения которых служит наличие дефекта типа k ; $f_k(x)$ – плотность распределения прочности при условии, что разрушение связано с дефектом типа k .

Помимо полученного выше двухпараметрического распределением Вейбулла используют и другие законы распределения прочности волокон – трехпараметрический закон Вейбулла и логарифмически нормальный.

Прочность пучка волокон. Ввиду неоднородности волокон при нагружении пучка (нити, ровинга) сначала разрушаются волокна с наиболее опасным дефектом. Нагрузка передается на целые еще волокна. Напряжение в них возрастает, что приводит к разрушению еще некоторой части волокон. Этот процесс происходит до тех пор, пока не наступит равновесие или не произойдет разрушение всего пучка.

Проанализируем зависимость прочности пучка от параметров распределения прочности составляющих его волокон, основываясь на основе простейшей статистической модели.

Пусть пучок, состоящий из N_0 волокон, имеющих одинаковые диаметры и длины, нагружен усилием F , вызывающим напряжения x_0 . Суммарная исходная площадь сечения волокон A_0 , поэтому $F = x_0 A_0$.

После разрушения части волокон прочными остаются N волокон, которые воспринимают всю приложенную нагрузку. Доля этих волокон

при напряжении x_N равна $P_N(x_N) = \frac{N}{N_0} = \frac{A_N}{A_0}$, где A_N – площадь сечения волокон, остающихся прочными при напряжении x_N .

Из условия равновесия и записанного выше соотношения

$$F = x_N A_N = x_N A_0 P_N(x_N). \quad (4.22)$$

Доля неразрушенных волокон P_N равна вероятности того, что прочность волокна больше x_N . С учетом формулы (4.19) при $x_0 = 0$

$$P_N = 1 - F_\sigma(x_N) = \exp[-n(x_N/x_m)^q]. \quad (4.23)$$

Подставим P_N из (4.23) в (4.22) и найдем максимум нагрузки, которую выдержит пучок до разрушения. Для этого продифференцируем полученное выражение по x_N и приравняем производную к нулю:

$$\frac{dF}{dx_N} = A_0 \exp[-n(x_N/x_m)^q] - x_N A_0 (n/x_m)^q x_m^{m-1} \exp[-n(x_N/x_m)^q] = 0.$$

Решая это уравнение, получаем напряжение x_N , при котором нагрузка достигает максимального значения:

$$x_N = x_m (nq)^{\frac{1}{q}}. \quad (4.24)$$

Разрушающую нагрузку найдем, поставив это значение в формулу (4.22):

$$F_* = x_m A_0 (nq)^{\frac{1}{q}} \exp(-1/q). \quad (4.25)$$

Среднее напряжение в волокнах в момент разрушения получим, разделив F_* на начальную площадь сечения A_0 :

$$\bar{\sigma}_* = x_m (nq)^{\frac{1}{q}} \exp(-1/q). \quad (4.26)$$

Сравним это разрушающее напряжение для пучка волокон со средней прочностью волокон $\langle \sigma \rangle$:

$$\frac{\bar{\sigma}_*}{\langle \sigma \rangle} = (qe)^{\frac{1}{q}} \Gamma^{-1}(1+1/q), \quad (4.27)$$

где e – основание натурального логарифма.

Как видно из выражения (4.27), относительная прочность пучка зависит только от параметра q , связанного с коэффициентом вариации прочности волокон (см. формулу (2.20)) и характеризующего неоднородность прочности. С увеличением неоднородности волокон прочность пучка уменьшается (рис. 4.16).

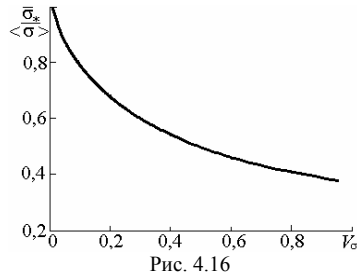


Рис. 4.16

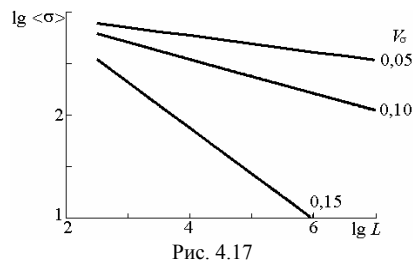


Рис. 4.17

Средняя прочность пучка, выраженная формулой (4.26), зависит также от параметра n , пропорционального длине волокон. С увеличением n прочность пучка снижается, т. е. наблюдается масштабный эффект. С увеличением неоднородности волокон масштабный эффект усиливается (рис. 4.17).

Приведенная выше модель разрушения пучка не учитывает различие диаметров и длины волокон, зависимость прочности от диаметра. При растяжении пучка, состоящего из волокон различной длины, сначала разрушаются более короткие волокна, затем нагрузка передается на более длинные волокна, поэтому диаграмма деформирования имеет нелинейный начальный участок. Его профиль зависит от распределения длины и прочности волокон.

Упражнения

1. Проанализировать влияние параметров распределения прочности волокон на числовые характеристики прочности пучка.
2. Охарактеризовать зависимость прочности пучка волокон от показателей неоднородности составляющих его волокон.

4.3. Прочность однонаправленного волокнистого композита

Микроповреждение как критерий прочности КМ. Ввиду неоднородности структуры и свойств КМ, напряженного и деформированного состояния на микроуровне разрушение начинается с повреждения отдельных элементов структуры. Поскольку размеры элементов

структуры КМ малы, речь идет о микроповреждениях. Ясно, что повреждение отдельных элементов структуры КМ еще не означает разрушения всего изделия, однако для анализа влияния структуры КМ и свойств компонентов на прочность композита в изделии при определенных условиях достаточно упрощенных соотношений между показателями прочности компонентов и КМ. Установление таких соотношений относится к микромеханике разрушения КМ. Уточнение этих соотношений с учетом экспериментальных данных позволяет использовать их для предварительной оценки прочности материала в изделиях.

Данный подход чаще всего применяют для прогнозирования прочности волокнистых КМ однонаправленной структуры при простых типах нагружения.

Растяжение вдоль волокон. При данном типе нагружения в большей мере, чем в иных случаях, проявляется роль армирующего наполнителя. В то же время на характер повреждений и условия разрушения влияют свойства матрицы. В зависимости от соотношения предельных удлинений различают эластичную и хрупкую матрицы. На рис. 4.18 показаны диаграммы деформирования волокон (1), хрупкой (2) и эластичной (3) матриц. Здесь и далее индексом «+» обозначаются предельные значения напряжений и деформаций при растяжении.

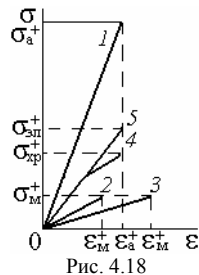


Рис. 4.18

Хрупкая матрица ($\varepsilon_m^+ < \varepsilon_a^+$) растрескивается в КМ при достижении деформации $\varepsilon = \varepsilon_m^+$, наблюдается хрупкий тип разрушения (рис. 4.19, а). При этом волокна еще могут воспринимать нагрузку, не разрушаясь. После разрушения хрупкой матрицы модуль упругости материала уменьшается, и на диаграмме деформирования появляется перегиб (диаграмма 4 на рис. 4.18).

В случае эластичной матрицы волокна разрушаются раньше, чем достигнута предельная деформация ε_m^+ (диаграмма 5 на рис. 4.18). При этом элементарные акты разрушения волокон и процесс накопления повреждений происходят ана-

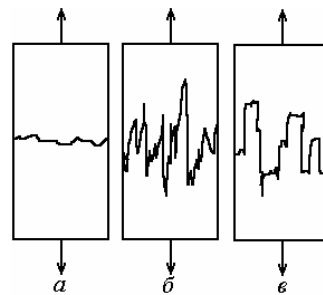


Рис. 4.19

логично разрушению волокнистого наполнителя. Наблюдается «волокнистый» тип разрушения материала (4.19, б).

На распределение напряжений между волокнами матрица влияет незначительно. Действительно, если $E_a \gg E_m$, то напряжение в матрице $\sigma_m = \varepsilon E_m$ намного меньше, чем в волокнах ($\sigma_a = \varepsilon E_a$). Поэтому отдельные волокна и пучки волокон разрушаются в разных сечениях. В местах обрыва волокон напряжения распределяются согласно уравнению (4.4) (см. также

рис. 4.3), и вследствие концентрации касательных напряжений в матрице вблизи торцов разорванного волокна происходит отслоение матрицы. Возможен также промежуточный тип разрушения, когда после частичного растрескивания матрицы волокна воспринимают основную нагрузку (см. рис. 4.19, в).

Учитывая изложенное, при создании высокопрочных КМ стремятся обеспечить условие $\varepsilon_m^+ > \varepsilon_a^+$. Это, в принципе, почти всегда возможно, поэтому «волокнистый» тип разрушения является основным. Поскольку в данном случае прочность определяется достижением деформацией значения ε_a^+ , то при условии однородности волокон предельные напряжения при растяжении вдоль волокон (по оси x_1) равны

$$\sigma_1^+ = \sigma_a^+ P_a + \sigma_m^+ P_m = (E_a P_a + E_m P_m) \varepsilon_a^+,$$

или

$$\sigma_1^+ = \sigma_a^+ (P_a + P_m E_m / E_a), \quad (4.28)$$

где P_a и P_m – объемные доли армирующих волокон и матрицы соответственно.

Если отношение $(P_m E_m / E_a)$ мало, то возможно упрощение формулы (4.28):

$$\sigma_1^+ \cong \sigma_a^+ P_a, \quad (4.29)$$

что соответствует сеточной модели волокнистого композита (вклад матрицы не учитывается).

Понятно, что выражение (4.29) применимо лишь при достаточно высокой степени наполнения. При малых значениях P_a на прочность композита влияет и матрица, причем тем больше, чем меньше P_a и больше отношение E_m / E_a (рис. 4.20).

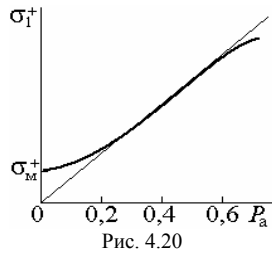


Рис. 4.20

При описании экспериментальных данных после превышения некоторого значения P_a возможно отклонение линии $\sigma_1^+(P_a)$ от прямой, определяемой уравнением (4.28), вследствие нарушения сплошности матрицы.

Заметим также, что выражения (4.28) и (4.29) получены при условии равнопрочности волокон. На самом деле прочность волокон всегда имеет разброс. Поэтому начальные повреждения однонаправленного композита при растяжении вдоль волокон наблюдаются при напряжениях, которые значительно меньше разрушающих.

Растяжение в трансверсальной плоскости. Анализ этого типа нагружения на основе простейшей модели (см. рис. 4.4) приводит к заключению о том, что ответственными за разрушение на микроуровне могут быть приняты наибольшие деформации в связующем. Тогда с учетом формулы (4.7) запишем для предельных деформаций

$$\varepsilon_2^+ = \varepsilon_m^+ f_\varepsilon^{-1} \quad (4.30)$$

и для предельных напряжений

$$\sigma_2^+ = \sigma_m^+ \frac{E_2}{E_m} f_\varepsilon^{-1}. \quad (4.31)$$

При малых значениях модуля E_2 по сравнению с E_a и относительно малых концентрациях волокон формула (4.31) упрощается и записывается в виде

$$\sigma_2^+ \cong \sigma_m^+. \quad (4.32)$$

Понятно, что соотношения (4.30)–(4.32) определяют потенциальную прочность КМ при растяжении в трансверсальной плоскости. Они справедливы при относительно равномерном расположении волокон в трансверсальном сечении, наличии гарантированных прослоек матрицы и достаточно прочной связи между матрицей и волокнами. Из этих соотношений следует, что с увеличением объемной доли волокон трансверсальная прочность КМ снижается. Это подтверждается экспериментальными данными. Однако существуют и другие причины снижения трансверсальной прочности по мере

увеличения P_a . Прежде всего, это неполная пропитка волокнистого наполнителя, его неоднородное расположение в пучке и другие дефекты, обусловленные несовершенством технологии. По этим причинам прочность КМ иногда оказывается намного ниже рассчитанной по формулам (4.31) и (4.32).

Растяжение под углом к направлению армирования. Применим полученные выше характеристики прочности однонаправленного КМ в главных направлениях для оценки прочности при растяжении под углом к направлению армирования (рис. 4.21).

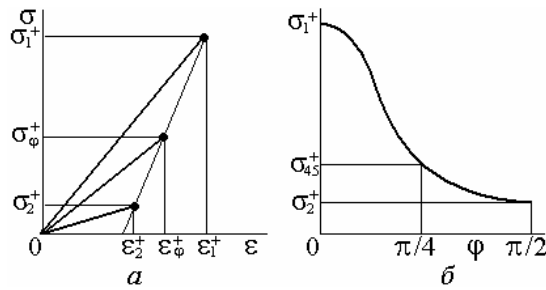


Рис. 4.21

Следуя А. Л. Рабиновичу, предположим, что материал разрушается хрупко при любом значении угла φ , причем конечная точка любой диаграммы деформирования лежит на прямой, соединяющей конечные точки диаграмм деформирования при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi / 2$ (см. рис. 4.21, а). Отметим, что данное предположение не всегда согласуется с результатами эксперимента. Для стеклопластиков, например, в диапазоне $15^\circ < \varphi < 35^\circ$ диаграммы деформирования нелинейны, а предельные удлинения больше, чем при $\varphi = 0$.

В то же время принятая гипотеза позволяет из геометрических соотношений найти разрушающее напряжение σ_φ^+ при растяжении под углом φ по известным характеристикам прочности в главных осях σ_1^+ и σ_2^+ , модулям упругости материала E_1 и E_2 в главных осях и модулю упругости E_{45} при растяжении под углом 45° к ним:

$$\sigma_\varphi^+ = \frac{k_\sigma \sigma_1^+}{k_\sigma \cos^4 \varphi + 2B_\sigma \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi}, \quad (4.33)$$

$$\text{где } k_\sigma = \frac{\sigma_2^+}{\sigma_1^+}; \quad B_\sigma = B(1+b) - b; \quad B = \frac{2E_2}{E_{45}} - \frac{1+k}{2}; \quad b = \frac{k_E k_\sigma}{1-k_E}; \quad k_E = \frac{E_2}{E_1}.$$

Типичная зависимость $\sigma_\varphi^+(\varphi)$ для однонаправленных волокнистых КМ, следующая из условия (4.33), показана на рис. 4.21, б. Из нее следует, что прочность при растяжении под углом к направлению армирования значительно меньше прочности при растяжении вдоль волокон и при $\varphi = 45^\circ$ она лишь немного превосходит прочность при растяжении перпендикулярно волокнам σ_2^+ .

Сжатие вдоль волокон. В зависимости от жесткости и прочности матрицы, жесткости и объемной доли волокон и условий нагружения наблюдаются следующие виды разрушения при сжатии (рис. 4.22): *a* – раскалывание вдоль волокон (хрупкая матрица); *б* – смятие торцов (эластичная матрица); *в* – отщепление полосок («китайский фонарик»), если торцы зафиксированы окружающей обмоткой; *г* – скалывание под углом к направлению волокон (жесткая и прочная матрица и короткие образцы). Чем выше модуль упругости и прочность матрицы, тем выше разрушающее напряжение.

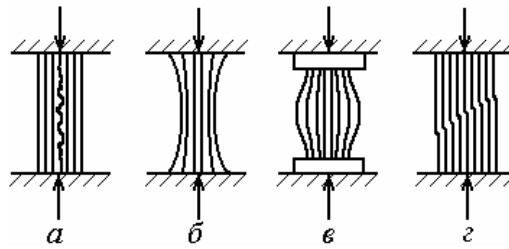
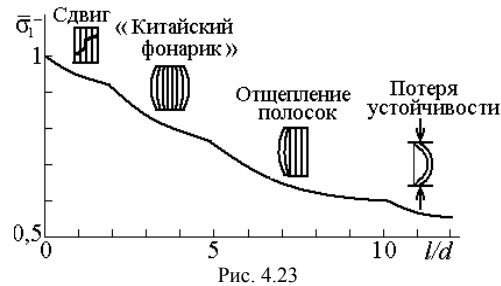


Рис. 4.22

Очевидно, что показатели прочности при сжатии зависят от условий испытания. Механизмы разрушений также различны. В случаях *a* и *в* (см. рис. 4.22) ответственны за разрушения поперечные деформации в матрице, в других случаях разрушение сопровождается сдвигом и потерей устойчивости волокон. Влияние длины цилиндрических образцов из эпоксидных стеклопластиков на относительную прочность при сжатии и механизм разрушения показаны на рис. 4.23.



Одну из простейших моделей для оценки прочности КМ при сжатии получим, приняв, что матрица хрупкая, а разрушение КМ происходит при достижении в матрице напряжения, равного прочности при сжатии σ_m^- . В этом случае по аналогии с формулой (4.28) запишем

$$\sigma_1^- = \sigma_m^- (P_m + P_a E_a / E_m). \quad (4.34)$$

При больших значениях E_a / E_m формула дает завышенные значения прочности, поэтому вводят поправочные коэффициенты:

$$\sigma_1^- = \sigma_m^- (k_m P_m + k_a P_a E_a / E_m), \quad (4.35)$$

где k_m и k_a – коэффициенты, задаваемые в зависимости от свойств компонентов, в частности для эпоксидных стеклопластиков принимают $k_m = 1$ и $k_a = 0,33$.

Подбор коэффициентов k_m и k_a обеспечивает широкие возможности вариаций получаемого результата, вплоть до совпадения его с экспериментальным значением. Однако вопрос обоснованности выбора остается открытым.

Приняв ответственным за разрушение наибольшее касательное напряжение в матрице и волокне (см. рис. 4.22, з), в результате осреднения напряжений в компонентах в момент разрушения получим

$$\sigma_1^- = 2(\tau_a^* P_a + \tau_m^* P_m), \quad (4.36)$$

где τ_a^* и τ_m^* – разрушающие напряжения для волокон и матрицы при сдвиге.

Предположение об ответственности за разрушение КМ поперечных деформаций в хрупкой матрице (случай *a* на рис. 4.22) с учетом коэффициента увеличения деформаций (см. формулу (4.30)) приво-

дит к следующей приближенной формуле для оценки прочности КМ при сжатии:

$$\sigma_1^- = \frac{E_1^- P_M}{\mu_{21}} \varepsilon_M^+, \quad (4.37)$$

где E_1^- – модуль упругости при сжатии вдоль волокон; μ_{21} – коэффициент Пуассона, характеризующий растяжение в поперечном направлении при сжатии вдоль волокон; ε_M^+ – предельная деформация матрицы ($\varepsilon_M^+ = \sigma_M^+ / E_M$).

Из условия потери устойчивости волокон, заключенных в матрицу, получается следующее приближенное выражение для оценки прочности при сжатии:

$$\sigma_1^- = G_M [1 - P_a (1 - G_M / G_a)]^{-1}, \quad (4.38)$$

где G_M и G_a – модули сдвига компонентов.

Расчет по формуле (4.38) приводит к значениям прочности КМ, более высоким, чем наблюдаются в экспериментах.

Приведенные выше приближенные формулы для оценки прочности при сжатии вдоль волокон получены в предположении об упругом деформировании компонентов вплоть до разрушения. Следовательно, они могут быть пригодны для КМ с относительно жесткими матрицами. Если КМ имеет металлическую или термопластичную полимерную матрицу, диаграммы деформирования которой при растяжении и сжатии существенно нелинейны, то применимость этих приближенных формул нуждается в дополнительном обосновании. Необходимо иметь в виду и отмеченную выше зависимость экспериментальных значений прочности от условий испытаний, способа получения и размеров образцов, способа их закрепления и нагружения.

Измеренная экспериментально прочность при сжатии вдоль волокон однонаправленных КМ с эластичной термопластической полимерной матрицей оказывается в 3–4 раза меньше, чем прочность при сжатии КМ с жесткой терморезистивной матрицей. Формально эти различия можно учесть, вводя в формулу (4.35) подходящие поправочные коэффициенты.

При наличии дефектов структуры прочность КМ при сжатии снижается. Так, отклонение волокон от направления сжатия на 5° приводит к снижению разрушающего напряжения однонаправленного стеклопластика при сжатии на 20%. Пористость в 5% снижает

прочность при сжатии вдоль волокон на 30%. Отсюда следует, что влияние дефектов структуры на прочность намного больше, чем на постоянные упругости.

Сдвиг. В зависимости от направления главных напряжений по отношению к направлению волокон различают четыре вида сдвигового воздействия на однонаправленный трансверсальный волокнистый изотропный КМ (рис. 4.24). В этих случаях различны механизмы разрушения и характеристики прочности.

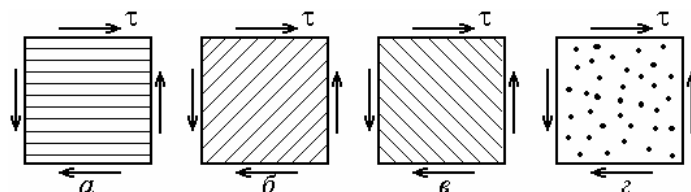


Рис. 4.24

При нагружении по схеме на рис. 4.24, а касательные напряжения $\tau_{12} = \tau$ действуют параллельно волокнам, и можно предположить, что напряжения в матрице пропорциональны углу сдвига: $\tau_m = \tau_{12} G_m / G_{12} P_m$, где G_m – модуль сдвига матрицы; G_{12} – модуль сдвига КМ в плоскости $x_1 x_2$, параллельной волокнам, определяемый по формулам (3.26) или (3.27). Отсюда следует выражение для предельных напряжений сдвига:

$$\tau_{12}^* = \tau_m^* G_{12} P_m / G_m, \quad (4.39)$$

где τ_m^* – предел прочности матрицы при сдвиге.

Если $G_a \gg G_m$, то при $P_a \approx 0,5$ $G_{12} \cong G_m / P_m$ и, следовательно,

$$\tau_{12}^* = \tau_m^*. \quad (4.40)$$

При малых степенях наполнения для стекловолокнистых КМ с термопластичной матрицей удовлетворительное приближение дает формула

$$\tau_{12}^* = \tau_m^* (1 + P_a). \quad (4.41)$$

При сдвиге по схеме на рис. 4.24, б наибольшее главное (растягивающее) напряжение действует вдоль волокон, такое же по величине, но сжимающее – перпендикулярно волокнам. Именно последнее и вызывает разрушение материала. Поэтому можно считать, что

$$\tau_{12}^+ = \sigma_2^- . \quad (4.42)$$

Здесь знак «+» над τ_{12} означает прочность однонаправленного КМ при чистом сдвиге, когда наибольшее (растягивающее) главное напряжение направлено вдоль волокон.

В случае, изображенном на рис. 4.24, в, наибольшее главное (растягивающее) напряжение действует в трансверсальной плоскости. Прочность КМ определяется прочностью при растяжении перпендикулярно волокнам:

$$\tau_{12}^- = \sigma_2^+ . \quad (4.43)$$

Если касательные напряжения приложены в трансверсальной плоскости (см. рис. 4.24, з), то прочность материала определяется условиями разрушения при растяжении-сжатии в этой плоскости. Разрушающее напряжение при сдвиге в этой плоскости τ_{23}^* в зависимости от степени наполнения волокнами может быть оценено по прочности при сжатии, заданной выражениями (4.34) или (4.35).

Сжатие в трансверсальной плоскости. Приняв ответственными за разрушение касательные напряжения, с учетом формулы (4.40) при $P_a \approx 0,5$ в случае хрупкой матрицы запишем

$$\sigma_2^- \cong \sigma_m^+ P_m^{-1} , \quad (4.44)$$

где σ_m^+ – прочность матрицы при растяжении.

При малых степенях наполнения и пластичной матрицы, согласно формуле (4.41), имеем

$$\sigma_2^- = \sigma_m^+ (1 + P_a) . \quad (4.45)$$

Таким образом, на основе простейших гипотез о возможном механизме разрушения элементов структуры могут быть записаны приближенные формулы для оценки семи показателей прочности однонаправленного волокнистого КМ. Как будет показано ниже, этих показателей достаточно, чтобы оценить прочность рассматриваемого трансверсально-изотропного материала при произвольном напряженном состоянии.

Упражнения

1. Оценить характеристики прочности однонаправленного стеклопластика (углепластика) по свойствам компонентов. Сравнить с известными экспериментальными данными.

2. Охарактеризовать влияние дефектов структуры и способа нагружения на характеристики прочности однонаправленного волокнистого композита.

4.4. Микроповрежденность и кинетика разрушения

Критерии и меры микроповреждений. Неоднородность микроструктуры КМ и напряженного состояния ее элементов обуславливают статистический характер процессов накопления повреждений и разрушения. В статистической механике разрушения КМ вводятся параметры и законы распределения микроповрежденности как функции напряженного состояния, параметров и законов распределения показателей свойств компонентов, формы, размеров и ориентации элементов структуры. Установление таких соотношений позволяет связать задаваемые параметры свойств компонентов и структуры КМ с регистрируемыми техническими средствами показателями поврежденности материала при различных видах силового воздействия, оценить степень опасности того или иного напряженного состояния, в том числе с помощью вероятностных характеристик. В то же время адекватные статистические модели структуры, напряженного состояния, накопления повреждений и разрушения КМ оказываются слишком сложными для практического применения. Поэтому для анализа факторов, влияющих на процесс разрушения и прочность КМ, используют упрощенные модели, не приводящие, однако, к точному количественному описанию процесса и характеристик прочности материала.

Условия и характер повреждений элементов микроструктуры, кинетика развития микроповреждений и уровень накопленной микроповрежденности, предшествующей разрушению материала с заданной структурой, зависят от свойств компонентов и напряженного состояния КМ.

Интегральной мерой поврежденности элементов структуры может служить вероятность превышения напряжениями или деформациями предельного уровня, например

$$Q = 1 - \int_{W^*} f_{\sigma}(x, R) dx, \quad (4.46)$$

где $f_{\sigma}(x, R)$ – плотность распределения напряжений в данном компоненте; R – совокупность параметров распределения; W^* – область прочного состояния.

Мера Q может трактоваться как объемная доля поврежденных элементов структуры. Она зависит от критерия разрушения элемента микроструктуры. В простейших случаях для хрупких компонентов

используют критерии наибольших напряжений или деформаций. Если известны все компоненты тензоров напряжений и деформаций элемента структуры, то могут быть введены и более сложные критерии их разрушения (см. подразд. 5.1).

Разрушение элемента структуры означает потерю им несущей способности. Модуль упругости материала в зоне разрушения равен нулю, как и в случае, когда в данной зоне находится пора. Следовательно, модули упругости поврежденного материала могут быть определены по доле поврежденных элементов структуры аналогично модулям упругости пористой среды.

Возникновение трещины при разрушении элемента структуры приводит к избирательному сопротивлению приложенной нагрузке. Этот эффект учитывает тензорная мера поврежденности, аналогичная тензору деформаций.

Для построения адекватной теории разрушения микронеоднородных материалов необходимо учесть взаимное влияние повреждений и перераспределения напряжений и деформаций после разрушения части элементов структуры. Простейший случай накопления повреждений рассмотрен в подразд. 4.2 в связи с прогнозированием прочности пучка волокон. Влияние повреждений на волокна, сохраняющие прочное состояние, ограничивается увеличением средних напряжений, которые обратно пропорциональны суммарной площади сечения прочных волокон. В композитах разрушение отдельных элементов структуры сопровождается дополнительным эффектом концентрации напряжений в зоне повреждения. Учет этого эффекта требует более сложных моделей и существенно увеличивает объем вычислений.

Диаграмма поврежденности. Оценим долю поврежденных волокон в однонаправленном волокнистом КМ (или относительную площадь поврежденного сечения) при растяжении напряжением σ , применив модель разрушения пучка волокон (см. подразд. 4.2). Основываясь на формуле (4.23), запишем напряжение после разрушения части волокон в виде

$$\sigma = \sigma_a P_a / [1 - F_\sigma(x)], \quad (4.47)$$

где $F_\sigma(x) = P(\sigma^+ < x)$ – функция распределения прочности элементов структуры, в данном случае волокон, равная доле элементов (волокон), разрушенных при напряжении x .

Следовательно, поврежденность материала при напряжении x равна $Q(x) = F_\sigma(x)$. Графики этой функции – диаграммы поврежденности для двух материалов с разными значениями коэффициента вариации прочности элементов структуры ($V_2 > V_1$) показаны на рис. 4.25; Q_1^* и Q_2^* – предельные уровни поврежденности, при достижении которых происходит полное

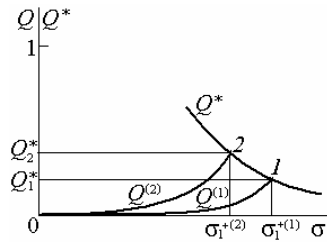


Рис. 4.25

(мгновенное) разрушение материала. Чем больше коэффициент вариации прочности элементов структуры, тем выше предельный уровень поврежденности, но тем ниже напряжение, при котором происходит разрушение материала.

Масштабный эффект. Масштабный эффект прочности имеет статистическую природу: с увеличением размеров образца возрастает вероятность наличия опасных дефектов. Появление дефектов связано и с технологией изготовления материала: с увеличением размеров образца возрастает отклонение волокон от заданного направления, более неоднородны их длина и напряженное состояние при растяжении.

Применим для количественной оценки масштабного эффекта модель разрушения Вейбулла. Согласно формуле (4.26), среднее значение прочности обратно пропорционально параметру n – числу элементарных участков, содержащих дефект, – в степени $1/q$, где q – параметр неоднородности. Примем, что параметр n пропорционален объему V или площади сечения A . На основании формулы (4.26) соотношение средней прочности двух образцов с различными объемами (V_1 и V_2) или с различной площадью поперечного сечения (A_1 и A_2), изготовленных из материала с параметром неоднородности q , выражается как

$$\frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{или} \quad \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_2} = \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4.48)$$

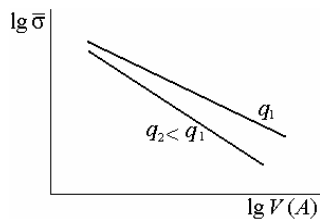


Рис. 4.26

Из (4.48) следует, что зависимость прочности от объема или площади сечения образца линейна в логарифмических координатах (рис. 4.26). Ее наклон зависит от параметра q .

В силу технологических причин параметр q для волокнистых КМ может иметь разные значения в зависимости от того, за счет какого размера изменяются объем или сечение образца.

Кинетика разрушения. Закономерности развития микроповреждений в трансверсальном сечении однонаправленного стеклопластика при одноосном растяжении-сжатии рассмотрим на примере численного решения задачи теории упругости по методу конечных элементов (В. П. Ставров, А. И. Столяров, В. М. Ткачев).

Реализации стохастической структуры получали путем размещения на квадратном модельном поле случайным образом непересекающихся кругов, диаметры которых распределены по нормальному закону. Средний диаметр волокон – 10 мкм, коэффициент вариации – 0,1. Степень заполнения, равная объемной доле стекловолокон в материале, $P_a = 0,3-0,5$. Число конечных элементов на модельном поле более 50 000. Модули Юнга компонентов $E_a = 70$ ГПа, $E_m = 3$ ГПа, коэффициенты Пуассона $\mu_a = 0,2$, $\mu_m = 0,35$. Прочность связующего при растяжении $\sigma_m^+ = 48$ МПа, разрушение хрупкое; предельная деформация $\varepsilon_m^+ = 0,016$. Между волокнами и матрицей в исходном состоянии существует идеальное сцепление.

На каждой ступени нагрузки (по 0,5 МПа) рассчитывали деформации и напряжения в элементах, полагая, что разрушенный элемент имеет нулевые значения модулей упругости. Перераспределение напряжений в элементах структуры учитывали, задавая в каждой последующей итерации поврежденность, накопленную в предыдущей итерации. Напряженное и деформированное состояние в последней итерации считали равновесным при данной нагрузке. Строили диаграммы деформирования и микроповрежденности.

Начало микроповреждений регистрировали при напряжениях более 7 МПа. На рис. 4.27 показаны стадии накопления повреждений вплоть до образования магистральной трещины при растяжении в направлении оси y .

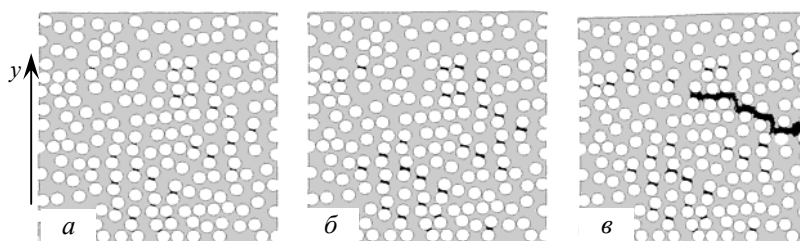


Рис. 4.27

В первую очередь разрушаются элементы матрицы, находящиеся между волокнами, расстояния между которыми, измеренные в направлении растяжения, минимальны. Затем наблюдаются повреждения между соседними с ними парами волокон. Магистральная трещина проходит через систему поврежденных элементов (см. рис. 4.27, в). Среднее значение разрушающего напряжения ~16 МПа (коэффициент вариации 9%).

Развитие повреждений приводит к снижению модуля Юнга (рис. 4.28, а). Установлена достаточно тесная корреляция между модулем Юнга и уровнем поврежденности (коэффициент корреляции не менее 0,95).

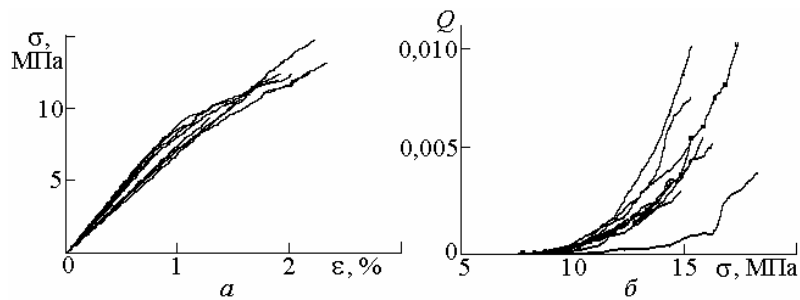


Рис. 4.28

Уровень поврежденности, соответствующий разрушающим напряжениям в модели, в среднем не превышает 1%, но имеет большой разброс (рис. 4.28, б), его коэффициент вариации свыше 20%, т. е. намного больше, чем разрушающего напряжения. Это указывает на то, что накопленный уровень микроповрежденности не является достаточно точным критерием разрушения. Чем более однородна в статистическом смысле микроструктура материала (см. подразд. 2.1), тем меньше предельный уровень поврежденности, однако разрушающие напряжения при этом различаются незначительно.

Предельный уровень поврежденности (рис. 4.29) зависит и от типа нагружения (1 – растяжение; 2 – сжатие), и от наличия дефектов структуры и начальных напряжений (А – без дефектов; С – начальные дефекты типа пор; Т – начальные термоструктурные напряжения).

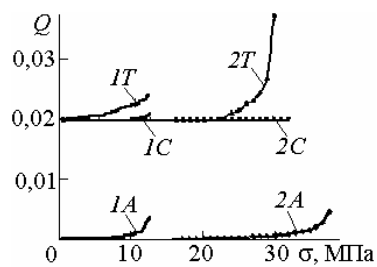


Рис. 4.29

При наличии дефектов структуры (C) микрповреждения развиваются после достижения более высоких напряжений, чем в случае A , но уровень микрповрежденности при напряжениях, соответствующих разрушению, невелик. При наличии начальных напряжений (T) микрповреждения начинают развиваться при более низких нагрузках и их предельные значения оказываются более высокими. В то же время разрушающие напряжения от наличия повреждений и начальных напряжений в компонентах почти не зависят.

Прочность при сжатии, соответствующая предельному равновесному состоянию модели с повреждениями, более чем вдвое превышает прочность при растяжении. Начальные повреждения наблюдаются при более высоких напряжениях, однако предельные значения поврежденности тоже относительно малы.

Экспериментальные методы. Экспериментальная оценка уровня микрповрежденности КМ необходима для выбора компонентов и технологических условий получения материала, наименее подверженного разрушению. От уровня микрповрежденности материала при заданной нагрузке зависят ресурс изделия, его сопротивление эксплуатационным воздействиям, в частности проницаемость для жидких и газообразных сред, герметичность и другие свойства. Сравнение результатов экспериментальной оценки поврежденности с результатами расчета дает возможность учитывать перечисленные эффекты еще на стадии проектирования материала и изделия. Это крайне важно, поскольку прямая оценка микрповрежденности КМ даже в лабораторных условиях, а тем более в реальных условиях эксплуатации крайне затруднена.

В исследовательской практике используют различные методы, позволяющие прямым или косвенным способом оценить уровень микрповреждений материала при заданном напряженном состоянии. Для этой цели используют показатели, связанные с поврежденностью КМ и элементов микроструктуры. Так, выше отмечалось, что существует статистическая связь между модулем упругости материала после нагружения до заданных напряжений и уровнем микрповрежденности. Как относительное снижение модуля упругости, так и дополнительная деформация ϵ' , приобретаемая в результате развития микрповреждений, служат характеристиками микрповрежденности материала (рис. 4.30).

Разрушение отдельных волокон и отслоение их от матрицы сопровождаются характерным потрескиванием, слышимым при испытаниях образцов однонаправленных волокнистых КМ этого типа. Сигналы регистрируют методом звуковой эмиссии (рис. 4.31). Нарастание амплитуды звуковых колебаний (сигнала U) свидетельствует о прогрессирующем разрушении. Уровень акустической эмиссии служит косвенной характеристикой микроповрежденности материала.

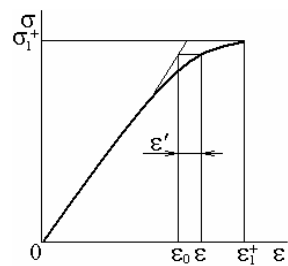


Рис. 4.30

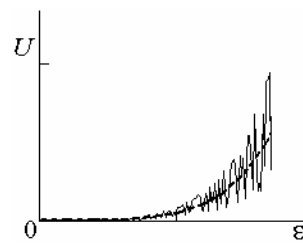


Рис. 4.31

К другим показателям микроповрежденности КМ, определяемым экспериментальными методами, относятся показатели проницаемости для жидких и газообразных сред, для световых и рентгеновских лучей, характеристики электропроводности и т. п. Они относятся к методам неразрушающего контроля материалов и конструкций.

Упражнения

1. Охарактеризовать процесс развития микроповреждений КМ, предшествующих его разрушению, и факторы, влияющие на уровень поврежденности, необходимый для полного разрушения.

2. Оценить с учетом масштабного эффекта среднее значение разрушающего напряжения для КМ в изделии с заданными размерами по результатам испытаний стандартных образцов (по среднему значению прочности и коэффициенту вариации).

5. ПРОЧНОСТЬ

5.1. Прочность при сложном напряженном состоянии

Критерии прочности. В механике материалов и конструкций прочность при сложном напряженном состоянии оценивают, сравнивая эквивалентные напряжения – некоторые функции напряжений, действующих при заданной нагрузке, – с предельными для данного материала или с допускаемыми значениями. Соответствующие соотношения называют гипотезами или теориями прочности. Аналогичный подход используют и при расчетах конструкций из КМ на прочность.

Наиболее простая, а поэтому и наиболее распространенная гипотеза предусматривает, что ответственны за разрушение наибольшие нормальные (растягивающие) напряжения σ_1 . Их сравнивают с разрушающими напряжениями при одноосном растяжении σ^+ или с допускаемыми напряжениями, рассчитанными по заданному коэффициенту запаса прочности. Условие прочности, согласно этой гипотезе («первой теории прочности»), $\sigma_1 < \sigma^+$ или $\sigma_1 < [\sigma^+]$, где $[\sigma^+] = \sigma^+ / n^+$ – допускаемые напряжения (n^+ – коэффициент запаса прочности по наибольшему растягивающему напряжению).

Данная гипотеза не учитывает другие (кроме σ_1) компоненты тензора напряжений. По этой гипотезе при всех плоских напряжен-

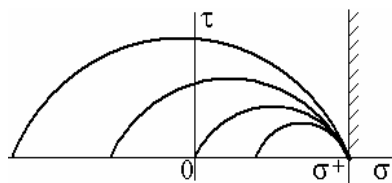


Рис. 5.1

ных состояниях, изображенных на рис. 5.1 в виде кругов Мора, материал должен быть равнопрочным. Предельное состояние ограничивает заштрихованная линия $\sigma = \sigma^+$.

Гипотеза удовлетворительно характеризует прочность хрупких материалов при слож-

ном напряженном состоянии. Для анизотропных КМ она применима, если напряженное состояние близко к одноосному растяжению.

Согласно «второй теории прочности», ответственным за разрушение принимают наибольшее удлинение. Для изотропного материала это приводит к условию прочности

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] < \varepsilon^+ = \frac{\sigma^+}{E}, \quad (5.1)$$

а для ортотропного –

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1^\circ} - \frac{\mu_{12}^\circ \sigma_2}{E_2^\circ} - \frac{\mu_{13}^\circ \sigma_3}{E_3^\circ} < \varepsilon_{10}^+ = \frac{\sigma_{10}^+}{E_1^\circ}, \quad (5.2)$$

где $E_1^\circ, E_2^\circ, E_3^\circ$ – модули Юнга в осях x_i° , совпадающих с направлениями главных напряжений; $\mu_{12}^\circ, \mu_{13}^\circ$ – коэффициенты Пуассона; $\sigma_{10}^+, \varepsilon_{10}^+$ – разрушающие напряжения и предельные деформации при растяжении вдоль оси x_1° . Заметим, что примененные здесь обозначения осей связаны с приложенной нагрузкой и могут не совпадать с обозначениями осей, связанных со структурой материала в изделии.

Эквивалентные напряжения, определяемые по гипотезе наибольших удлинений, в случае изотропного материала

$$\sigma_{\text{эkv}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (5.3)$$

Если главные оси симметрии структуры анизотропного материала не совпадают с главными осями тензора напряжений, для использования критерия (5.2) необходимо привести постоянные упругости к осям x_i° . Необходимость в этом отпадает, если главные оси симметрии структуры еще на стадии проектирования изделия совмещены с главными осями тензора напряжений, действующих в изделии в условиях эксплуатации. Данное замечание справедливо в отношении других критериев прочности анизотропных КМ при сложных напряженных состояниях.

По «третьей теории прочности» ответственными за разрушение считают наибольшие касательные напряжения (см. формулы (1.38)):

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} < \tau^* = \frac{\sigma^+}{2}, \quad (5.4)$$

где τ^* – прочность при сдвиге КМ данного типа структуры.

Эквивалентные напряжения, согласно этой теории, $\sigma_{\text{эkv}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3$. На диаграмме Мора предельные напряженные состояния ограничены линией $\tau = \tau^*$ (рис. 5.2). Гипотеза оправдана только для пластичных материалов, к которым большинство КМ не относится.

Предположим, что разрушение происходит при достижении не-

которого предельного значения энергии формоизменения («четвертая теория прочности»). Тогда условие прочности изотропного материала в главных осях записывается в виде

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} < \sigma^+. \quad (5.5)$$

При одноосном растяжении критерий (5.5) совпадает с критерием (5.1). В случае анизотропных материалов формула для эквивалентных напряжений, выраженных через напряжения в произвольных осях координат, оказывается весьма громоздкой.

Предельная поверхность прочности. Геометрическая трактовка предельных состояний материала (см. рис. 5.1 и 5.2) позволяет по экспериментальным данным построить некоторую линию или поверхность,

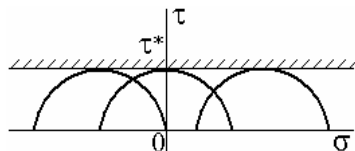


Рис. 5.2

ограничивающую прочное состояние материала при различных соотношениях компонентов тензора напряжений. Эту идею иллюстрирует огибающая кругов Мора (заштрихована), построенная по результатам испытаний на прочность при одноосном растяжении σ^+ ,

одноосном сжатии σ^- и чистом сдвиге τ^* (рис. 5.3). При всех напряженных состояниях, круги Мора которых не выходят за заштрихованную границу, материал остается прочным.

При произвольном (объемном) напряженном состоянии отличны от нуля все три компонента тензора напряжений, поэтому предельная поверхность должна быть построена в пространстве главных напряжений (рис. 5.4).

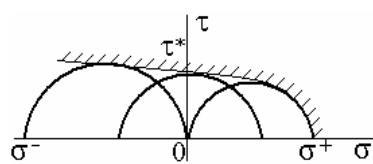


Рис. 5.3

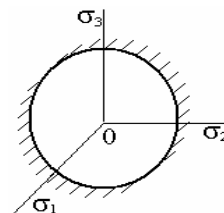


Рис. 5.4

По предложению А. К. Малмейстера (1966), Цая (S. T. Tsai) и Ву (E. M. Wu) (1971) уравнение предельной поверхности задают в виде

полинома

$$R_{\alpha\beta}^{(M)}\sigma_{\alpha\beta}^* + \sigma_{\alpha\beta}^* R_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(M)}\sigma_{\gamma\delta}^* + \sigma_{\alpha\beta}^* R_{\alpha\beta\gamma\delta\varphi\phi}^{(M)}\sigma_{\gamma\delta}^*\sigma_{\varphi\phi}^* + \dots = 1, \quad (5.6)$$

где σ_{ij}^* – компоненты тензора разрушающих напряжений в осях x_i ; $R_{ij}^{(M)}$, $R_{ijmn}^{(M)}$, ... – компоненты тензоров прочности по Малмейстеру.

Вариант задания предельной поверхности прочности анизотропных материалов в виде полинома, однородного относительно степеней напряжений, предложен И. И. Гольденблатом и В. А. Копновым (1965):

$$\left(R_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}^*\right) + \left(\sigma_{\alpha\beta}^* R_{\alpha\beta\gamma\delta}\sigma_{\gamma\delta}^*\right)^{1/2} + \left(\sigma_{\alpha\beta}^* R_{\alpha\beta\gamma\delta\varphi\phi}\sigma_{\gamma\delta}^*\sigma_{\varphi\phi}^*\right)^{1/3} \dots = 1. \quad (5.7)$$

Увеличение порядка уравнений (5.6) или (5.7) (степени полинома) обеспечивает необходимую точность приближения к эксперименту, однако на практике для описания прочности анизотропных КМ часто оказывается достаточно учесть в этих уравнениях только два первых слагаемых. Тогда предельная поверхность прочности по Малмейстеру, Цаю и Ву выражается уравнением

$$R_{\alpha\beta}^{(M)}\sigma_{\alpha\beta}^* + \sigma_{\alpha\beta}^* R_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(M)}\sigma_{\gamma\delta}^* = 1. \quad (5.8)$$

Компоненты тензоров прочности $R_{ij}^{(M)}$ и $R_{ijmn}^{(M)}$ выражаются через характеристики прочности материала в главных осях, вычисляемые по свойствам компонентов, как это сделано в подразд. 4.3, или определяемые из эксперимента при некоторых простых типах нагружения. При этом компоненты тензоров прочности $R_{ij}^{(M)}$ и $R_{ijmn}^{(M)}$ в уравнении (5.8) не совпадают с компонентами тензоров прочности R_{ij} и R_{ijmn} в уравнении (5.7).

Предельная поверхность прочности однонаправленно армированного КМ. Построим в качестве примера предельную поверхность прочности КМ, однонаправленно армированного волокнами, приняв ее уравнение в форме Гольденבלата и Копнова (5.7) и ограничившись при этом только двумя первыми членами в левой части:

$$R_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}^* + \sqrt{\sigma_{\alpha\beta}^* R_{\alpha\beta\gamma\delta}\sigma_{\gamma\delta}^*} = 1. \quad (5.9)$$

В главных осях симметрии структуры x_i , связанных с направлением волокон (ось x_1), разрушающие напряжения при простых напряженных со-

стояниях, рассмотренных в подразд. 4.3, заданы семью характеристиками σ_1^+ , σ_2^+ , σ_1^- , σ_2^- , τ_{12}^+ , τ_{12}^- и τ_{12}^* . Найдем по этим характеристикам компоненты тензоров прочности R_{ij} и R_{ijmn} в тех же осях x_i .

Из уравнения (5.9) при одноосном растяжении вдоль оси x_1 до предельного состояния, когда $\sigma_{11}^* = \sigma_1^+$, и при сжатии, когда $\sigma_{11}^* = -\sigma_1^-$, следуют два уравнения:

$$R_{11}\sigma_1^+ + \sigma_1^+ \sqrt{R_{1111}} = 1; \quad -R_{11}\sigma_1^- + \sigma_1^- \sqrt{R_{1111}} = 1. \quad (5.10)$$

Решая эти уравнения относительно R_{11} и R_{1111} , находим

$$R_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^+} - \frac{1}{\sigma_1^-} \right); \quad R_{1111} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^+} + \frac{1}{\sigma_1^-} \right)^2. \quad (5.11)$$

Аналогичным образом, рассматривая одноосное растяжение и сжатие вдоль оси x_2 , получаем

$$R_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_2^+} - \frac{1}{\sigma_2^-} \right); \quad R_{2222} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_2^+} + \frac{1}{\sigma_2^-} \right)^2. \quad (5.12)$$

Поскольку материал трансверсально-изотропный (x_2x_3 – плоскость изотропии), то $R_{22} = R_{33}$ и $R_{2222} = R_{3333}$.

Зададим тензор предельных плоских напряженных состояний, при которых $\sigma_{11}^* = \tau_{12}^+$; $\sigma_{22}^* = -\tau_{12}^+$ (см. рис. 4.24, б) и $\sigma_{11}^* = -\tau_{12}^-$; $\sigma_{22}^* = \tau_{12}^-$ (см. рис. 4.24, в). Подставив эти компоненты тензора σ_{ij} в (5.9), получим два уравнения:

$$\begin{aligned} \tau_{12}^+ [R_{11} - R_{22} + \sqrt{R_{1111} + R_{2222} - 2R_{1122}}] &= 1; \\ \tau_{12}^- [R_{22} - R_{11} + \sqrt{R_{1111} + R_{2222} - 2R_{1122}}] &= 1. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Решим эти уравнения, учитывая, что величины R_{11} , R_{22} , R_{1111} и R_{2222} заданы соотношениями (5.11) и (5.12). Имеем

$$R_{1122} = \frac{1}{8} \left[\left(\frac{1}{\sigma_1^+} + \frac{1}{\sigma_1^-} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_2^+} + \frac{1}{\sigma_2^-} \right)^2 - \left(\frac{1}{\tau_{12}^+} + \frac{1}{\tau_{12}^-} \right)^2 \right]. \quad (5.14)$$

Из условия симметрии следует, что $R_{2211} = R_{1122}$. Кроме того, из уравнений (5.13) следует соотношение

$$2(R_{11} - R_{22}) \equiv \left(\frac{1}{\sigma_1^+} - \frac{1}{\sigma_1^-} \right) - \left(\frac{1}{\sigma_2^+} - \frac{1}{\sigma_2^-} \right) = \frac{1}{\tau_{12}^+} - \frac{1}{\tau_{12}^-}, \quad (5.15)$$

называемое условием совместности. Действительно, уравнение (5.15) накладывает определенные ограничения на значения характеристик прочности материала, определенных при различных напряженных состояниях.

Зададим чистый сдвиг в плоскости x_1x_2 , при котором $\sigma_{12} = \tau_{12}^*$ (см. рис. 4.24, а). Получим

$$R_{1212} = \frac{1}{4\tau_{12}^*}. \quad (5.16)$$

Из уравнения (5.9), записанного для данного случая, находим, что $R_{12} = 0$.

Таким образом, вычислены все отличные от нуля компоненты тензоров прочности однонаправленного КМ в главных осях симметрии структуры.

Условие прочности при произвольном напряженном состоянии, определяемом компонентами тензора напряжений σ_{ij} , заданных в главных осях симметрии структуры КМ, выражается неравенством

$$\sigma_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \sqrt{\sigma_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta}} < 1. \quad (5.17)$$

Чтобы проверить, выполняется ли условие прочности, необходимо тензор напряжений σ'_{ij} , заданный в произвольных осях x'_i , привести к осям

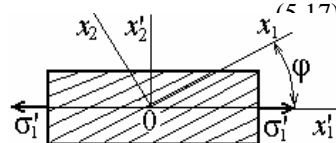


Рис. 5.5

x_i , используя формулы преобразования (1.29). Покажем это на приме-

ре оценки прочности однонаправленного КМ при растяжении под углом к направлению армирования (рис. 5.5).

Растягивающее напряжение σ'_1 преобразуется к осям x_i по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma'_1 \cos^2 \varphi; \\ \sigma_{22} &= \sigma'_1 \sin^2 \varphi; \\ \sigma_{12} &= \sigma'_1 \sin \varphi \cos \varphi.\end{aligned}\quad (5.18)$$

Подставив эти выражения в неравенство (5.17), получим условие прочности при данном напряженном состоянии. Приравняв левую часть (5.17) к единице и решив полученное уравнение относительно σ'_1 , найдем формулу для разрушающего напряжения при растяжении под углом φ :

$$\sigma_\varphi^+ = \left[R_{11} \cos^2 \varphi + R_{22} \sin^2 \varphi + \sqrt{R_{1111} \cos^4 \varphi + R_{2222} \sin^4 \varphi + (R_{1212} + 2R_{1122}) \sin^2 2\varphi} \right]^{-1}. \quad (5.19)$$

Теперь подставим значения R_{ij} и R_{ijmm} согласно выражениям (5.11)–(5.16), получим разрушающее напряжение при растяжении под углом к направлению армирования как функцию значений прочности при простых напряженных состояниях. На рис. 5.6 рассчитанная таким образом прочность однонаправленного теплопластика (кривая 1) сравнивается с зависимостью (кривая 2), построенной по формуле (4.33). Хотя вид кривых идентичен, наблюдается некоторое различие показателей прочности в области углов $30^\circ < \varphi < 60^\circ$.

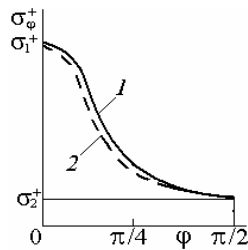


Рис. 5.6

При выводе формулы (4.33) предполагалась линейная зависимость предельной деформации от разрушающего напряжения. Предельная деформация при растяжении под углом φ с учетом формулы (5.19) находится как

$$\varepsilon_{\varphi}^{+} = \frac{\sigma_{\varphi}^{+}}{E(\varphi)}, \quad \text{где } E(\varphi) \text{ – модуль Юнга}$$

при растяжении под углом φ (см. формулу (1.100)). Как видно из рис. 5.7, ее зависимость от напряжения (сплошная линия), рассчитанная при тех же параметрах материала, что и кривая 2 на рис. 5.6, отличается от линейной (штриховая линия).

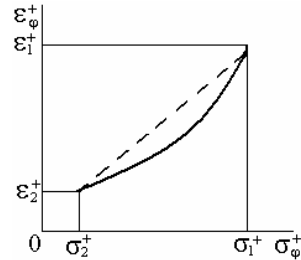


Рис. 5.7

В рассмотренном случае главные оси тензора напряжений не совпадают с главными осями симметрии структуры материала, поэтому потребовалось преобразование компонентов тензора напряжений. Задача может быть решена иначе – путем преобразования компонентов тензора прочности R_{ij} и R_{ijmn} к главным осям тензора напряжений по формулам (1.11). Тогда после подстановки преобразованных значений в формулы (5.9) условие прочности при растяжении вдоль оси x'_1 (см. рис. 5.5) принимает вид

$$\sigma'_1 < \sigma_1'^+ = \left[R_{11}^{\circ} + \sqrt{R_{1111}^{\circ}} \right]^{-1}, \quad (5.20)$$

где R_{11}° и R_{1111}° – компоненты тензоров прочности в главных осях тензора напряжений.

Рассмотрим другой пример – построение предельной поверхности прочности однонаправленного стеклопластика, нагружаемого в трансверсальной плоскости. Воспользуемся результатами решения статической задачи о напряженном и деформированном состоянии компонентов в реализациях, изложенной в подразд. 4.1. Решение дает законы (гистограммы) распределения напряжений и деформаций в компонентах при различных простых напряженных состояниях. По ним и характеристикам прочности компонентов рассчитывается уровень напряжений или деформаций, при котором микроповрежденность достигает заданного предельного значения. Подстановка этих значений в формулы (5.11)–(5.16) дает компоненты тензоров прочности.

Прочность при плоском напряженном состоянии. При плос-

ком напряженном состоянии одно из главных напряжений (например, σ_3) равно нулю. Предельная поверхность вырождается в линию на плоскости $\sigma_1 - \sigma_2$ (рис. 5.8) или на плоскости $\sigma - \tau$ (рис. 5.9).

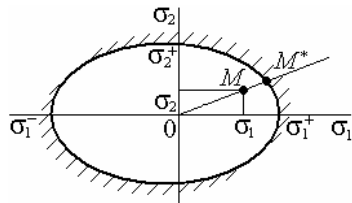


Рис. 5.8

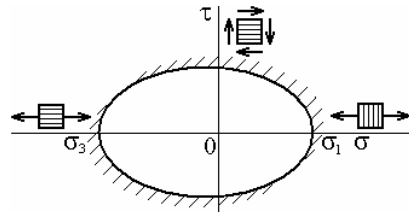


Рис. 5.9

Если главные напряжения σ_1 и σ_2 изменяются пропорционально нагрузке, то напряженное состояние характеризуется точкой M на луче (см. рис. 5.8). Точка M^* соответствует предельному состоянию, а отношение $n = \frac{OM^*}{OM}$ представляет собой коэффициент запаса прочности.

Допустим, сосуд давления из ортотропного КМ, главные оси структуры которого совпадают с главными осями напряжений σ_r и σ_θ , нагружен внутренним давлением p . Радиус цилиндрической части сосуда R . Если толщина стенки h мала, то главные напряжения равны

$$\sigma_1 = \frac{pR}{h}; \quad \sigma_2 = \frac{pR}{2h}, \quad (5.21)$$

т. е. оба напряжения изменяются пропорционально давлению.

Подставим выражения (5.21) и компоненты тензоров прочности в уравнение предельной поверхности (5.9), приняв, что x_1 – окружное, а x_2 – осевое направление. Получим условие прочности

$$f(p^*) = \frac{p^*R}{2h} \left(R_{11} + 2R_{22} + \sqrt{R_{1111} + 4R_{2222} + 4R_{1122}} \right) < 1. \quad (5.22)$$

При достижении разрушающего давления p^* имеем $f(p^*) = 1$, поэтому величина $n(p) = f^{-1}(p)$ – коэффициент запаса прочности при давлении p . Если коэффициент запаса прочности задан, то из (5.22) вытекает условие прочности или определяется допускаемое давление $[p] = p^* f([p])$.

При действии на сосуд помимо давления осевой нагрузки изменяется соотношение между главными напряжениями и положение луча OM на рис. 5.8. Условие прочности выводится из уравнения общего вида (5.17).

Упражнения

1. По характеристикам прочности однонаправленного стеклопластика (углепластика) построить предельную поверхность прочности при напряженных состояниях: а) в плоскости, параллельной направлению армирования, б) в трансверсальной плоскости.

2. По предельной поверхности прочности однонаправленного (ортотропного) КМ построить зависимость разрушающего напряжения при растяжении (сжатии) от угла между направлениями армирования и нагружения. Охарактеризовать эту зависимость и сравнить с известными экспериментальными данными.

3. Используя предельную поверхность прочности ортотропного КМ с соотношением разрушающих напряжений в главных направлениях $2 : 1$, найти допустимое соотношение между внутренним давлением и дополнительным напряжением осевого сжатия.

5.2. Прочность слоистых материалов

Особенности разрушения. Анизотропия слоев и их низкая прочность при растяжении и при сдвиге в трансверсальной плоскости, низкая прочность при сдвиге между слоями обуславливают специфичные механизмы разрушения КМ, составленных из однонаправленных слоев (рис. 5.10): отслоение при растяжении в направлении армирования (*а*); размотку трубы или кольца, нагруженных внутренним давлением (*б*); расслоение при изгибе (*в*) и кручении (*г*).

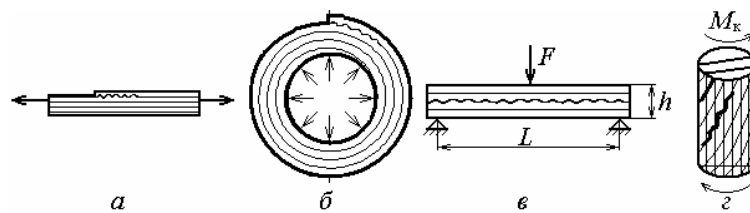


Рис. 5.10

Условие отслоения при действии растягивающих напряжений (см. рис. 5.10, *a* и *б*) найдем, основываясь на следующей элементарной модели (рис. 5.11).

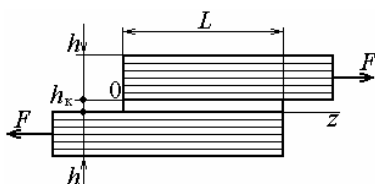


Рис. 5.11

Пусть σ – растягивающее напряжение; h – толщина слоев, соединенных между собой прослойкой толщиной h_k . Слои и прослойки деформируются упруго; E_1 – модуль Юнга и G_{12} – модуль сдвига слоев в направлении растяжения; G_k – модуль сдвига прослойки.

Задача о совместном деформировании слоев аналогична задаче о растяжении фрагмента однонаправленного КМ, рассмотренной в подразд. 4.1. Решение этой задачи дает касательные напряжения в прослойке как функции координаты z :

$$\tau(z) = Fk \left(\frac{\cosh(k(z-L)) + \cosh(kz)}{2 \sinh(kL)} \right), \quad (5.23)$$

где F – растягивающее усилие; $k = \sqrt{2G_{12}G_k/E_1h(G_{12}h_k + G_k h)}$; L – длина прослойки.

Из формулы (5.23) следует типичное для клеевых соединений распределение касательных напряжений с максимальными значениями на краях. Условием начала разрушения служит достижение этими напряжениями предельных значений в прослойке.

Среднее значение касательных напряжений в прослойке $\bar{\tau}^*$ при достижении предельной нагрузки F^* получим, проинтегрировав (5.23) по длине соединения L и разделив на L . Ввиду неравномерного распределения касательного напряжения в прослойке среднее значение по мере увеличения длины соединения уменьшается. Чем меньше модули сдвига слоя G_{12} и прослойки G_k , тем больше эффективная длина соединения, при которой достигается равнопрочность по критериям сдвига и разрыва слоев.

Наибольшие нормальные и касательные напряжения в стержне прямоугольного сечения, нагруженного по схеме на рис. 5.10, *в*, равны, как известно,

$$\sigma_{\max} = \frac{3FL}{2bh^2} \quad \text{и} \quad \tau_{\max} = \frac{3F}{4bh},$$

где b – ширина стержня.

Отношение наибольших касательных напряжений к наибольшим нормальным возрастает пропорционально отношению h/L : $\tau_{\max}/\sigma_{\max} = h/4L$. При малых значениях h/L разрушение происходит

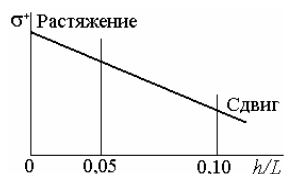


Рис. 5.12

в результате разрыва волокон, а с увеличением относительной толщины образца возрастает опасность разрушения за счет сдвига. Соответственно снижается уровень нормального напряжения, соответствующего разрушению (рис. 5.12).

Оценка прочности. Допустим, КМ состоит из однонаправленных слоев, уложенных ортогонально. При растяжении в одном из направлений армирования сначала разрушается слой, в котором волокна перпендикулярны направлению растяжения. Это объясняется тем, что прочность при разрыве однонаправленного КМ при растяжении в трансверсальной плоскости всегда ниже, чем при растяжении вдоль волокон (см., например, рис. 4.18). На диаграмме деформирования появляется характерный излом (рис. 5.13).

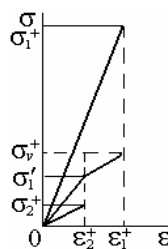


Рис. 5.13

Напряжения при этом равны $\sigma'_1 = E_1^0 \varepsilon_2^+$, где E_1^0 – модуль Юнга слоистого КМ в направлении растяжения; ε_2^+ – предельная деформация при растяжении слоя в трансверсальной плоскости.

Дальнейшее нагружение возможно до разрушения слоев, ориентированных в направлении растяжения. Следовательно, разрушающее напряжения равно

$$\sigma_v^+ = \sigma_1^+ v_1, \tag{5.24}$$

где v_1 – доля слоев, уложенных в направлении растяжения.

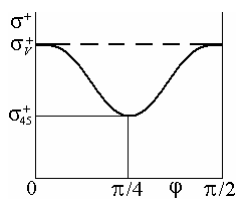


Рис. 5.14



Рис. 5.15

При растяжении такого ортотропного слоистого КМ под углом к направлению армирования прочность определяется наибольшей прочностью слоев. Но поскольку с увеличением угла φ прочность всех слоев снижается, то снижается и прочность ортотропного КМ. Для материалов со структурой 1 : 1 такое снижение наблюдается до $\varphi = 45^\circ$, затем прочность слоев возрастает (рис. 5.14). Наименьшее значение прочности (при $\varphi = 45^\circ$) равно прочности однонаправленных КМ при растяжении под таким же углом. Эффект снижения прочности практически исчезает (штриховая линия на рис. 5.14) при испытаниях образцов, в которых волокна не перерезаны (рис. 5.15).

Заметим, что при нагружении сосуда давления, полученного намоткой под углом $\pm 55^\circ$, обеспечивающим равнопрочность в осевом и окружном направлениях, разрушение также происходит путем разрыва волокон, причем сумма разрушающих напряжений равна прочности однонаправленной ленты σ_1^+ , которой намотан сосуд: $\sigma_0^+ + \sigma_t^+ = \sigma_1^+ = 3p^*R/2h$, где p^* – разрушающее давление, R – радиус цилиндрической части сосуда, h – толщина стенки.

Соображения, высказанные выше относительно прочности КМ слоистой структуры, в принципе справедливы и для КМ с тканым наполнителем. Наличие связи между нитями снижает негативные эффекты при нагружении под углом к направлению армирования. Искривление нити не оказывает существенного влияния на прочность. Более того, прочность КМ на основе стеклотканей при растяжении часто оказывается выше прочности КМ на основе стеклоровингов с такой же степенью наполнения. Это объясняется более высокой прочностью волокон: диаметр волокна в стеклотканях 5–7 мкм, тогда как в стеклоровинге обычно 10–13 мкм.

Упражнения

1. По характеристикам прочности однонаправленной ленты рассчитать давление, при котором следует ожидать потери герметичности сосуда давления, полученного ортогональной намоткой.
2. Оценить разрушающие напряжения слоистого стеклопластика (углепластика) ортотропной структуры по заданным характеристикам прочности компонентов, их объемной доле и соотношению слоев.

5.3. Прочность материалов, хаотически армированных волокнами

Зависимость от структуры. Прочность КМ, хаотически армированных волокнами, как и характеристики однонаправленных материалов, зависит от степени наполнения. На рис. 5.16 показаны зависимости разрушающего напряжения при растяжении для полипропилена, армированного стеклянными волокнами. Приняты обозначения: \oplus – хаотически армированный в пространстве (коротковолокнистый литьевой); # – хаотически армированный в плоскости (в прессованных изделиях); \uparrow – однонаправленный. Показатели свойств в плоскости армирования обозначены индексом «||», а в перпендикулярной ей плоскости – индексом « \perp ». Видно, что прочность хаотически армированного материала при равных значениях степени наполнения значительно ниже, чем при однонаправленном армировании.

Более низкая прочность хаотически армированных композитов обусловлена меньшей длиной и отклонением волокон от направления растяжения. Средняя длина волокон в стеклонаполненных литьевых термопластах составляет 0,1–0,2 мм. При литье под давлением изделий наблюдаются ориентационные эффекты, обусловленные неоднородностью поля скоростей сдвига при течении расплавленной композиции, однако степень приобретаемой анизотропии относительно мала и структура материала близка к изотропной.

С увеличением длины армирующих волокон возрастают жесткость и особенно прочность КМ. Механические свойства гранулированных длиноволокнистых литьевых и прессовочных материалов из однонаправленно армированных стренг длиной 8–25 мм в изделиях, изготавливаемых литьем под давлением или прессованием при «щадящих» режимах пластикации, соизмеримы со свойствами материала (с теми же компонентами) в изделиях, получаемых прессованием листовых стеклонаполненных полуфабрикатов. Материал в таких изделиях трансверсально-изотропный. Проч-

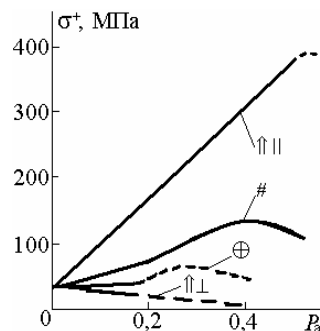


Рис. 5.16

ность при растяжении в плоскости армирования выше, чем при наполнении короткими волокнами, несколько выше и предельная степень наполнения, после достижения которой показатели механических свойств начинают снижаться вследствие возрастающей пористости материала.

Типичные значения характеристик упругих свойств и прочности матричного полипропилена (ПП) и ПП, армированного стеклянными волокнами, при различных вариантах структуры материала в изделиях и обычных для них значениях степени наполнения ($P_{\text{опт}}$) приведены в табл. 5.1. Индекс «+» означает растяжение, а индекс «-» – сжатие»; звездочкой обозначено предельное значение касательного напряжения при чистом сдвиге в соответствующей плоскости.

Таблица 5.1

Показатели свойств неармированного и армированного стеклянными волокнами ПП

Показатель	ПП	⊕	#	↑
$P_{\text{опт}}/P_{\text{макс}}$	–	0,15/0,30	0,25/0,40	0,30/0,50
$E_{\parallel}^+/E_{\perp}^+$, ГПа	1,6/1,6	8,0/8,0	10,0/4,0	22,0/3,6
$G_{\parallel}^+/G_{\perp}^+$, ГПа	0,65/0,65	3,5/3,5	4,5/2,4	1,5/1,3
$\sigma_{\parallel}^+/\sigma_{\perp}^+$, МПа	40/40	80/70	110/15	420/12
$\sigma_{\parallel}^-/\sigma_{\perp}^-$, МПа	50/50	150/180	120/200	200/16
$\tau_{\parallel}^*/\tau_{\perp}^*$, МПа	32/32	90/45	60/70	40/8

Сечения предельных поверхностей прочности, построенных на основе уравнения (5.9), для материалов, указанных в таблице, показаны на рис. 5.17. Видно, насколько велико влияние структуры и соотношения компонентов тензора напряжений на условия разрушения армированных термопластов.

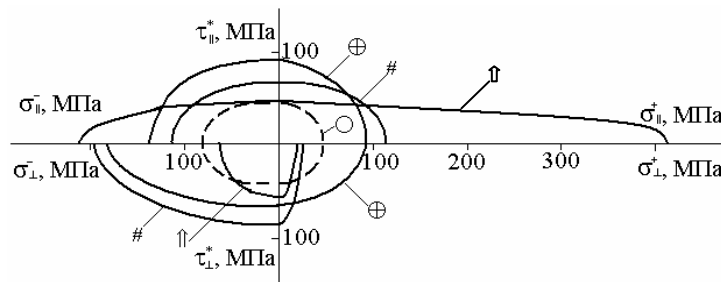


Рис. 5.17

По мере уменьшения доли волокон и возрастания степени их разориентации в материале снижается уровень напряжений, до которого наблюдается близкая к пропорциональной зависимость между напряжениями и деформациями (рис. 5.18).

Понятно, что количественные характеристики упругих и прочностных свойств, степень их зависимости от структуры композита при использовании иных матричных полимеров или армирующих наполнителей могут отличаться от приведенных выше, однако принципиальные выводы относительно влияния структуры при этом сохраняются.

Ввиду существенной зависимости прочности КМ, хаотически армированных волокнами, от параметров структуры, актуальны проблема построения адекватной модели разрушения и разработка методов прогнозирования свойств. Известны различные подходы к решению этих задач. Некоторые модели рассматриваются ниже.

Модель Келли – Тайсона (A. Kelly, W. R. Tyson). К элементарным актам, сопровождающим разрушение КМ, хаотически армированных волокнами, при растяжении, относятся отслоение и выдергивание волокон, разрушение (разрыв) волокон и матрицы. Условия отслоения и разрыва волокон зависят от их длины (см. подразд. 4.1).

В простейшей модели разрушения (модели Келли – Тайсона) предполагается, что волокна и матрица разрушаются одновременно. При этом волокно разрушается, если его длина больше эффективной, вычисляемой по формуле (4.6). Если длина волокон меньше эффективной, то при напряжениях на поверхности волокон, равных прочности адгезионной связи τ^* , происходит отрыв матрицы от волокна.

Пусть КМ содержит короткие волокна, имеющие одинаковый диаметр d и прочность σ_a^+ ; $f_\lambda(z)$ – плотность распределения длины волокон в представительном объеме композита; l_0 – эффективная длина волокна при прочности адгезионной связи τ^* ; σ_m^+ – разрушающее напряжение при растяжении матрицы; P_m – объемная доля матрицы в КМ ($P_m = 1 - P_a$). Принимая во внимание вклад волокон с учетом их ориентации на основании формулы (1.29) преобразования нормальных напряжений при повороте координатных осей, запишем среднее значение напряжения в момент разрушения

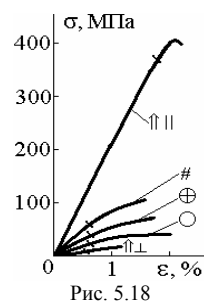


Рис. 5.18

$$\sigma_{1^*}^+ = \sigma_M^+ P_M + k_\varphi \left[\frac{2\tau_*}{d} \int_0^{l_3} f_\lambda(z) dz + \sigma_a^+ \int_{l_3}^{\infty} f_\lambda(z) dz \right]. \quad (5.25)$$

Здесь символ 1^* означает, что речь идет о прочности в направлении армирования (по оси x_1^*). Коэффициент k_φ , учитывающий ориентацию волокон, равен $k_\varphi = \langle \cos^2 \varphi \rangle = 1$, если волокна ориентированы в направлении оси x_1^* ; $k_\varphi = 1/2$ при равномерном распределении углов в плоскости x_1x_2 и $k_\varphi = 1/3$ при равномерном распределении в пространстве.

Основываясь на формуле (5.25), проанализируем влияние прочности адгезионной связи между волокнами и матрицей на прочность КМ, хаотически армированных волокнами.

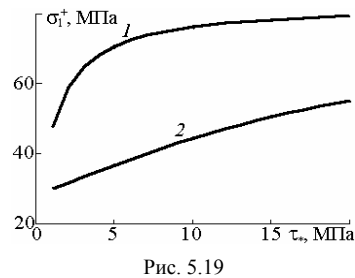


Рис. 5.19

На рис. 5.19 показаны соответствующие зависимости для КМ, содержащих стеклянные волокна, хаотически ориентированные в пространстве, при средней длине волокон 2,5 мм (1) и 0,2 мм (2). Коэффициент вариации длины волокон равен 1; $P_a = 0,2$; $\sigma_a^+ = 1$ ГПа; $d = 13$ мкм; $\sigma_M^+ = 40$ МПа.

Из рис. 5.19 видно, что прочность композита с длинными волокнами на 30–50% выше, чем при малой длине волокон. Степень реализации прочности волокон близка к предельной уже при сравнительно малых значениях адгезионной прочности (~5 МПа). Если длина волокон мала, то даже при максимально возможной прочности связи на границе волокно–матрица, равной пределу прочности матрицы при сдвиге, потенциальная прочность волокон не используется в полной мере.

Модель Лиза (J. R. Lees). Допустим, КМ состоит из элементов, однонаправленно армированных волокнами (нитей, пучков волокон, пропитанных связующим) и равномерно распределенных по углу φ в плоскости x_1x_2 (рис. 5.20).

Разрушение КМ при растяжении возможно по трем механизмам:

- 1) путем разрыва элементов, если направление армирования близко к направлению приложенного напряжения ($0 \leq \varphi \leq \varphi_1$);
- 2) путем сдвига параллельно волокнам при углах $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$;

3) путем разрыва в направлении, близком к трансверсальному, при углах $\varphi_2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Приняв гипотезу прочности Мизеса и вычислив эквивалентные напряжения по формуле (5.5), из условия равнопрочности по отношению к двум граничным предельным состояниям получим

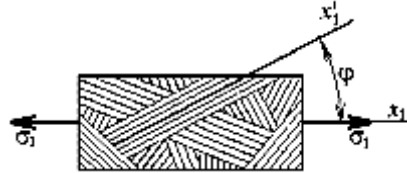


Рис. 5.20

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\tau_{12}^*}{2\sigma_1^+}; \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\sigma_2^+}{\sqrt{3}\tau_{12}^*},$$

где σ_1^+ и σ_2^+ – разрушающие напряжения для однонаправленного элемента при растяжении вдоль волокон и в трансверсальном направлении; τ_{12}^* – прочность при сдвиге в плоскости, параллельной волокнам.

Если предположить, что угол φ , задающий ориентацию однонаправленных элементов в плоскости x_1x_2 , равномерно распределен в диапазоне от 0 до $\pi/2$, то формула для оценки разрушающего напряжения получается в результате осреднения φ :

$$\sigma_{1^*}^+ = \frac{2}{\pi} \left[\sigma_1^+ \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{\sqrt{3}\tau_{12}^*}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} + \sigma_2^+ \int_{\varphi_1}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \right]. \quad (5.26)$$

Прочность элемента при растяжении вдоль волокон σ_1^+ может быть задана с учетом длины волокон по формуле (5.25), в которой следует принять $k_\varphi = 1$.

Зависимость (5.26) учитывает различные механизмы разрушения при растяжении, но, как и формула (5.25), выведена из условия одновременного разрушения всех элементов.

Модель, учитывающая кинетику разрушения. Ввиду неизбежного разброса длины волокон указанные выше элементарные акты разрушения происходят неодновременно, поэтому адекватная модель разрушения КМ должна учитывать кинетику накопления повреждений. В качестве меры поврежденности может быть принята доля разрушенных однонаправленных элементов.

Рассмотрим растяжение КМ, составленного из однонаправленных элементов, ориентация которых симметрична относительно главных осей x_1 и x_2 и задана плотностью распределения угла φ в ви-

де (2.36). Разрушающее напряжение каждого элемента зависит от угла φ и определяется по формуле (4.33). Предположим также, что деформации элементов одинаковы.

Доля разрушенных элементов Q равна вероятности того, что $\varphi^* < \varphi < \pi/2$, где φ^* – угол, задающий ориентацию элементов, разрушающее напряжение которых при заданном угле меньше действующих в элементе напряжений, т. е.

$$Q(\varphi^*) = 2 \int_{\varphi^*}^{\pi/2} f_{\varphi}(x) dx. \quad (5.27)$$

Среднее напряжение в неразрушенных элементах после достижения поврежденности Q равно

$$\bar{\sigma} = \sigma / (1 - Q). \quad (5.28)$$

В результате разрушения части элементов модуль Юнга материала \bar{E}_1 уменьшается. Из условия равенства деформаций элементов следует

$$\bar{E}_1(\varphi^*) = 2 \int_0^{\varphi^*} E_1(x) f_{\varphi}(x) dx, \quad (5.29)$$

где $E_1(\varphi)$ – модуль Юнга элемента в направлении оси x_1 .

Пусть σ_{φ}^+ – прочность элемента при растяжении под углом φ , тогда из условия равенства деформаций элементов имеем для напряжений

$$\sigma(\varphi) = \sigma_{\varphi}^+ \bar{E}_1(\varphi) / E_1(\varphi). \quad (5.30)$$

Отношение $\sigma_{\varphi}^+ / E_1(\varphi) = \varepsilon_{\varphi}^+$ задает предельную деформацию однонаправленного элемента при растяжении под углом φ .

Зависимость между поврежденностью $Q(\varphi^*)$, приобретенной материалом после разрушения части элементов, и действующим при этом напряжением $\sigma(\varphi^*)$ дает диаграмму поврежденности материала. По ней находят разрушающее напряжение как $\sigma^+ = \max \sigma(Q)$ и уровень поврежденности Q^* , накопление которой предшествует полному разрушению материала. По значениям $\sigma(\varphi^*)$ и $\varepsilon(\varphi^*) = \sigma(\varphi^*) / \bar{E}_1(\varphi^*)$ строится диаграмма деформирования материала вплоть до разрушения.

Изложенная выше модель иллюстрируется результатами оценки

прочностных характеристик КМ, полученного из однонаправленных отрезков длиной 20 мм полипропилена, армированного стеклоровингом ($P_a = 0,16$). При расчетах использовали модули Юнга $E_1(\varphi)$ и разрушающие напряжения σ_φ^+ однонаправленного элемента как функции угла между направлением армирования и направлением растяжения (рис. 5.21).

Диаграммы деформирования КМ, рассчитанные с учетом накопления повреждений в процессе нагружения, показаны на рис. 5.22 для двух значений среднего квадратического отклонения угла φ : $s_\varphi = 52^\circ$ (1) и $s_\varphi = 32^\circ$ (2). Нелинейность расчетных диаграмм (линии) обусловлена повреждениями элементов, для экспериментальных (точки) она связана также с нелинейной деформацией матричного полимера.

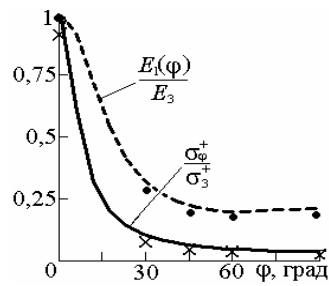


Рис. 5.21

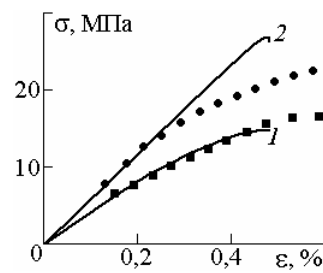


Рис. 5.22

На рис. 5.23 показана зависимость поврежденности, накопленной до разрушения материала, от ориентации элементов: 1 – $s_\varphi = 52^\circ$; 2 – $s_\varphi = 32^\circ$. Зависимости разрушающего напряжения (1) и накопленной поврежденности (2) материала от среднего квадратического угла отклонения элементов показаны на рис. 5.24. Доля поврежденных элементов, соответствующая полному разрушению материала, при равновероятной в плоскости ориентации ($s_\varphi = 52^\circ$) составляет около 0,5, с увеличением степени ориентации элементов в направлении растяжения она убывает и уже при $s_\varphi = 20^\circ$ составляет всего лишь 0,01. Данный вывод в равной мере относится как к направлению преимущественной ориентации элементов, так и к перпендикулярному ему направлению.

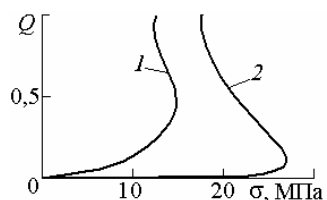


Рис. 5.23

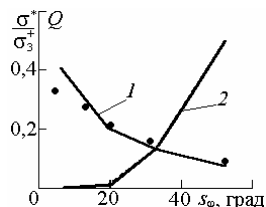


Рис. 5.24

Зависимость от степени армирования по оси x_1 модулей Юнга при растяжении по осям x_1 (1) и x_2 (2) и разрушающих напряжений (3) и (4) показана на рис. 5.25. Характер изменения показателей прочности (1) и жесткости (2) по мере возрастания степени анизотропии в плоскости армирования (рис. 5.26) идентичен, однако степень анизотропии прочности (кривая 1) заметно выше, чем степень анизотропии упругих свойств (2).

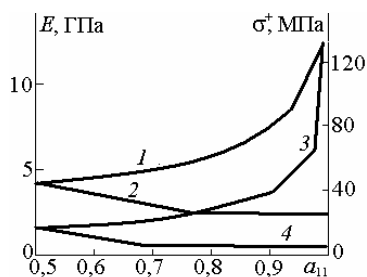


Рис. 5.25

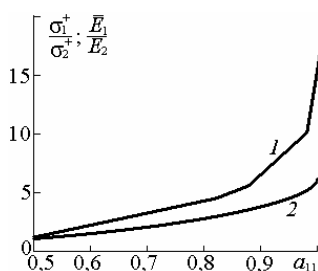


Рис. 5.26

Изложенный метод оценки показателей прочности и поврежденности применим и в случае более сложной структуры композита. При этом для вычисления модулей упругости, показателей прочности и поврежденности вместо функций угла φ в формулы (5.27)–(5.30) достаточно записать соответствующие функции углов ориентации элемента согласно формулам (2.22) и (2.32). Точность оценки зависит от качества исходных данных о свойствах компонентов и параметрах структуры материала.

Упражнения

1. Охарактеризовать зависимость прочности при растяжении КМ, армированных хаотически ориентированными волокнами, от параметров структуры материала – степени наполнения, длины и от ориентации волокон.

2. Оценить разрушающее напряжение при растяжении КМ, армированного волокнами (стеклянными, углеродными, арамидными, льняными), при заданных значениях средней длины и характеристик прочности компонентов.

3. Построить диаграммы деформирования и поврежденности КМ, составленного из однонаправленных элементов, при различных степенях армирования в плоскости. Охарактеризовать влияние свойств элементов и степени их преимущественной ориентации на кинетику накопления повреждений и характеристики прочности.

5.4. Влияние условий нагружения и внешних факторов

Температура. Этот фактор относится к наиболее существенным при нагружении КМ с полимерной матрицей. При повышенных температурах сильнее, чем при нормальной температуре (T_0), проявляются вязкоупругие деформации КМ (см. подразд. 1.6), усиливаются и другие временные эффекты – влияние скорости и продолжительности нагружения и т. п. При низких температурах матричный полимер становится более жестким и прочным (рис. 5.27).



Рис. 5.27

На степень снижения жесткости и прочности сильно влияют тип и структура полимерной матрицы, степень наполнения и структура КМ. При повышенных температурах может происходить доотверждение термореактивных полимеров, при этом прочность может несколько возрастать. Деструкция, напротив, ведет к снижению прочности. Разрушающие напряжения при сжатии однонаправленного стеклопластика с эпоксидным связующим при температуре -60°C на 20%, а при -190°C в 1,5–1,7 раза выше, чем при нормальной температуре. Прочность при растяжении при низких температурах возрастает заметно меньше – на 10–20%. Менее чувствительны к действию температуры КМ с металлической и керамической матрицей.

Минеральные и другие неорганические наполнители в области допустимых температур эксплуатации матричных полимеров в меньшей мере реагируют на изменение температуры, поэтому жесткость и прочность при растяжении вдоль волокон меньше всего зависит от температуры нагружения. Чем выше роль матрицы в процессе деформирования (например, при изгибе, сдвиге и сжатии), тем более чувствительны КМ к изменению температуры.

Скорость нагружения. Скорости кратковременного статического нагружения КМ при определении модуля упругости и разрушающих напряжений регламентируются стандартами на методы испытаний.

Скорость деформации образца с базой l , растягиваемого со скоростью v , равна $\dot{\epsilon} = v / l$. При стандартной скорости перемещения активного захвата $v = 10$ мм/мин и базе 100 мм скорость деформации составляет $\sim 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$.

Скорость деформации образца толщиной h при трехточечном изгибе равна $\dot{\epsilon} = 6hv / L^2$, где v – скорость перемещения нагружающего пуансона; L – расстояние между опорами. При стандартных значениях $h = 4$ мм, $L = 60$ мм и $v = 10$ мм/мин скорость деформации наружных слоев при испытаниях на изгиб $\dot{\epsilon} \approx 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Таким образом, скорости деформации при стандартных испытаниях на растяжение и изгиб соизмеримы.

С увеличением скорости нагружения релаксационные процессы развиваются медленнее, а модуль упругости и прочность возрастают. При скоростях деформирования $\sim 10^3 \text{ с}^{-1}$ модуль упругости однонаправленного стеклопластика на 20–30%, а разрушающие напряжения в 1,5–2 раза больше, чем при статическом нагружении. При медленном нагружении, напротив, в большей мере проявляется вязкоупругое поведение матрицы, а значения модуля упругости и разрушающих напряжений, регистрируемые при испытаниях, меньше, чем при стандартных режимах нагружения.

Длительное нагружение. При длительном нагружении КМ с полимерной матрицей наблюдаются вязкоупругие деформации (ползучесть). Скорость ползучести тем выше, чем выше напряжение и температура (рис. 5.28). Более отчетливо ползучесть проявляется при нагружении КМ на основе термопластичных полимеров. Деформации ползучести КМ, однонаправленно армированного волокнами, больше при изгибе, сжатии и сдвиге, чем при растяжении вдоль волокон.

Для описания ползучести при относительно небольших напряжениях пригодна модель стандартного линейно-вязкого тела Кельвина (см. уравнение (1.134)). Чем больше склонен материал к ползучести, тем ниже его длитель-

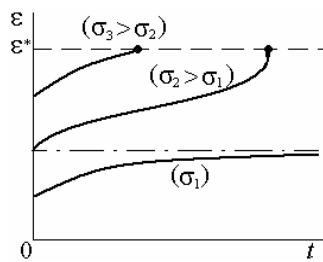


Рис. 5.28

ный модуль по сравнению с кратковременным и тем меньше время релаксации. В подразд. 1.6 приведены уравнения, отражающие процесс ползучести при растяжении и изгибе, и соотношения, необходимые для экспериментального определения параметров этих уравнений.

При длительном растяжении вдоль волокон происходит выпрямление волокон, выравнивается нагрузка на волокна. В результате вязкоупругих деформаций матрицы происходит перераспределение напряжений в волокнах, возрастает их поврежденность. Разрушающие напряжения при длительном нагружении ниже, чем при кратковременных статических испытаниях. С другой стороны, по мере увеличения напряжений уменьшается время до разрушения.

Характеристики прочности материала при длительном нагружении определяют по результатам испытаний при растяжении или изгибе и реже – при других напряженных состояниях.

При одноосном растяжении связь между долговечностью материала – временем до разрушения t , напряжением σ и термодинамической температурой T выражают уравнениями (4.12) или (4.13). Из уравнения (4.12) следует линейная зависимость между σ и $\ln t$ (рис. 5.29), а из уравнения (4.13) – линейная зависимость между $\lg \sigma$ и $\lg t$. Линеаризованные таким образом уравнения регрессии используют для определения параметров уравнений по методу наименьших квадратов.

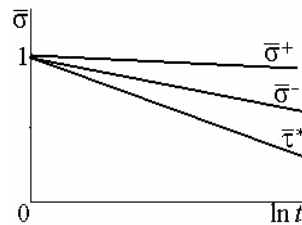


Рис. 5.29

В большей мере временная зависимость прочности проявляется при нагружении КМ с хаотическим армированием, чем КМ с однонаправленным или ортогональным армированием, нагружаемых в направлении волокон. Снижение относительной прочности однонаправленного и ортотропного КМ при сдвиге $\bar{\tau}^*$ и сжатии $\bar{\sigma}^-$ больше, чем при растяжении $\bar{\sigma}^+$ (см. рис. 5.29).

При длительном нагружении усиливается влияние на процесс разрушения дефектов материала, его неоднородности как на микро-, так и на макроуровне. Возможность прогнозирования длительной прочности КМ различной структуры ограничена из-за сложного характера напряженного состояния компонентов как функции времени. Разброс характеристик прочности, в частности

времени до разрушения t , значительно больше, чем разброс характеристик, полученных при кратковременном статическом нагружении при стандартных испытаниях. А это означает, что для надежной оценки характеристик длительной прочности требуется намного больший объем экспериментов, чем для оценки кратковременной статической прочности. Необходима также тщательная статистическая обработка результатов.

Из уравнений (4.12) и (4.13) следуют зависимости относительной прочности от продолжительности нагружения $\sigma^*(t)/\sigma_0^* = f(t)$, где $f(t)$ – функция времени до разрушения. Параметры функции $f(t)$, а иногда и вид ее индивидуальны для КМ различной структуры и зависят от напряженного состояния.

Для оценки длительной прочности анизотропных КМ при сложном напряженном состоянии необходимы временные зависимости компонентов тензоров прочности $R_{ij}(t)$ и $R_{ijmn}(t)$.

Ситуация еще более усложняется, если в процессе эксплуатации изделие подвергается не одной фиксированной нагрузке, а совокупности статических нагрузок разного уровня, действующих с различной, в частности случайной, продолжительностью. Условия разрушения выводят в этих случаях из закона суммирования повреждений.

Как и в модели накопления повреждений при растяжении пучка волокон (см. подразд. 4.2), предполагается, что напряжение в прочных элементах после частичного разрушения материала равно

$$\sigma = \sigma_0 / (1 - Q), \quad (5.32)$$

где σ_0 – заданное напряжение, отнесенное к начальной площади поперечного сечения изделия; Q – доля поврежденных элементов.

Выразим Q из формулы (5.32): $Q = 1 - \sigma_0 / \sigma$, продифференцируем по времени и обозначим полученную скорость развития повреждений как функцию напряжения σ :

$$\dot{Q} = \frac{\sigma_0 \dot{\sigma}}{\sigma^2} = \dot{Q}(\sigma). \quad (5.33)$$

Из (5.33) следует дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma}{dt} = \dot{Q}(\sigma) \frac{\sigma^2}{\sigma_0}, \text{ или } dt = \sigma_0 \frac{d\sigma}{\sigma^2 \dot{Q}(\sigma)}. \quad (5.34)$$

Интегрируя уравнение (5.34), находим в общем виде время до разрушения:

$$t^* = \sigma_0 \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^2 \dot{Q}(\sigma)}. \quad (5.35)$$

Интеграл в правой части (5.35) содержит незадавленную пока зависимость скорости развития повреждений от напряжения. Примем эту зависимость в виде степенной функции

$$\dot{Q}(\sigma) = C\sigma^k, \quad (5.36)$$

где C и k – параметры, которые могут быть получены в результате эксперимента. Подставив функцию (5.36) в (5.35) и проинтегрировав, получим

$$t^*(\sigma) = [C(1+k)\sigma_0^k]^{-1}. \quad (5.37)$$

Подставив далее функцию (5.37) в правую часть (5.33), получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно меры поврежденности:

$$\frac{dQ}{dt} = C \left(\frac{\sigma_0}{1-Q} \right)^k, \quad \text{или} \quad dQ(1-Q)^k = C\sigma_0^k dt. \quad (5.38)$$

Интегрируем уравнение (5.38) при условии, что к моменту разрушения (времени t^*) поврежденность возрастает от 0 до 1. Тогда получаем

$$1 = \int_0^{t^*} [C(1+k)\sigma_0^k] dt. \quad (5.39)$$

После замены подынтегрального выражения в (5.39) согласно (5.37) на $[t^*(\sigma_0)]^{-1}$ получим закон суммирования повреждений в виде

$$\int_0^t \frac{dt}{t^*(\sigma)} = 1. \quad (5.40)$$

В случае статического нагружения постоянными напряжениями σ_i из (5.40) вытекает следующая формула для оценки долговечности:

$$\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{t_i^*} \leq 1, \quad (5.41)$$

где t_i – продолжительность нагружения в i -м цикле (напряжением уровня σ_i); t_i^* – время до разрушения при напряжении σ_i , определяемое, например, из уравнения (4.12) или (4.13). Выражение (5.41) известно в теории длительной прочности как критерий Бейли.

Как уже отмечалось в подразд. 4.4, в качестве меры поврежденности материала может быть принята дополнительная деформация, обусловленная разрушением части элементов структуры и перераспределением нагрузки (см. рис. 4.30). Накопленная к моменту разрушения деформация остается практически постоянной (см. рис. 5.28). Это дает основание сформулировать деформационный критерий разрушения при длительном статическом нагружении $\varepsilon(t) \leq \varepsilon^*$. Деформации ползучести сильно зависят от структуры КМ и температуры, что ограничивает область, в которой приемлем данный критерий.

Периодическое нагружение. Характеристиками периодического нагружения, при котором напряжения изменяются по закону $\sigma = \sigma_a \sin \frac{2\pi t}{T}$ (рис. 5.30), служат среднее значение напряжений $\bar{\sigma} = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$, амплитуда $\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$, период T и асимметрия $r = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ цикла.

Зависимость прочности материала от числа циклов при периодическом нагружении (рис. 5.31) называют кривой усталости или кривой Велера. Ее строят в полулогарифмических координатах по результатам испытаний, задавая σ^* – разрушающее напряжение при однократном статическом нагружении; σ_0 – предел усталости – значение напряжения, к которому асимптотически приближается кривая $\sigma(\lg N)$ и при напряжениях ниже которого разрушение не происходит при любом числе циклов N . Для полимеров и КМ на их основе предел усталости обычно не наблюдается. Условный предел усталости $\sigma_0^{(y)}$ относят к некоторому базовому числу N_0 .

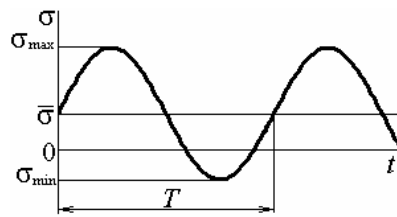


Рис. 5.30

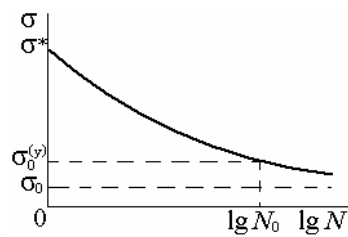


Рис. 5.31

Другой характеристикой усталостной прочности служит диаграмма предельных амплитуд – зависимость между амплитудой σ_a и средним значением напряжения в цикле $\bar{\sigma}$, соответствующим разрушению материала при заданном, в частности базовом, числе циклов (рис. 5.32). При $\bar{\sigma} = 0$ она задает усталостную прочность при симметричном цикле ($r = -1$), при $\sigma_a = 0$ – длительную статическую прочность при напряжении $\bar{\sigma}$.

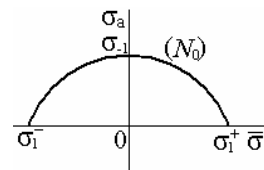


Рис. 5.32

Усталостную прочность КМ чаще всего определяют по результатам испытаний на растяжение-сжатие или при изгибе. Отмечается целый ряд особенностей поведения КМ, обусловленных неоднородной и анизотропной структурой, особенностями поведения компонентов.

При нагружении однонаправленного и ортотропного волокнистого КМ вдоль волокон интенсивность развития усталостных повреждений меньше, чем у КМ с хаотическим армированием. КМ менее чувствительны, чем металлы, к концентрациям напряжений. Наличие полимерной матрицы и неоднородность структуры усиливают зависимость усталостной прочности от температуры и частоты циклов. Относительное снижение этого показателя при повышенных температурах намного больше, чем при испытаниях металлов.

Влияние частоты цикла обусловлено низкой теплопроводностью КМ. За счет энергии, выделяемой при нагружении, возрастает температура образцов. Если тепло плохо отводится, то при последующих циклах нагружения возрастают деформация и, соответственно, поврежденность материала (рис. 5.33). С увеличением толщины образца (изделия) это влияние усиливается, поэтому масштабный эффект прочности при периодическом нагружении проявляется сильнее, чем при статическом нагружении. Из изложенного следует, что ускорение усталостных испытаний КМ за счет увеличения частоты нагружения может дать искаженную картину разрушения и неточную характеристику проч-

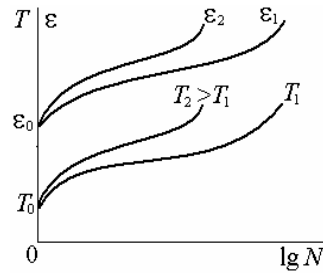


Рис. 5.33

ности материала.

Влияние ориентации волокон, структуры, температуры, формы и размеров образца, вида напряженного состояния и частоты нагружения учитывают при оценке усталостной прочности КМ.

Экспериментально установлено, что усталостная прочность стеклопластиков в меньшей мере коррелирована с разрушающим напряжением при растяжении-сжатии и в большей мере – с напряжениями, соответствующими началу отклонения диаграммы деформирования при статическом нагружении от прямой линии. Данное напряжение можно трактовать как границу начала повреждений (см. рис. 4.30). С учетом этого предел усталости стеклопластиков при симметричном цикле нагружения записывают как

$$\sigma_{-1} = \sigma^* k_c k_m k_T k_\omega, \quad (5.42)$$

где σ^* – граница линейного участка на диаграмме растяжения-сжатия; k_c , k_m , k_T и k_ω – коэффициенты, характеризующие влияние структуры и размеров образца (масштабный эффект), температуры и частоты нагружения соответственно.

Средний предел усталости стеклотекстолита на основе эпоксидного связующего (на базе $N_0 = 10^7$ циклов при 20°C и $\omega \cong 20$ Гц) составляет $\sim 0,5\sigma^*$. Наблюдается значительный разброс показателей долговечности. Он возрастает с увеличением амплитуды цикла и частоты нагружения, отклонений нитей основы и утка от оси образца, а также по мере уменьшения размеров образцов.

Экспериментальное определение усталостной прочности КМ – трудоемкая и материалоемкая процедура. Для повышения достоверности оценки влияния числа циклов и условий нагружения на усталостную прочность КМ при испытаниях регистрируют температуру и деформации образцов, скорость диссипации энергии, а также показатели поврежденности. К последним относятся интенсивность механолюминесценции, акустическая и световая эмиссия, светопропускание, скорость ультразвука и колебаний, ИК-спектры и рассеяние рентгеновских лучей, изменения модуля упругости и диэлектрических свойств, газопроницаемость и др. Корреляции между показателем поврежденности и долговечностью материала позволяют сформулировать требования к методике ускоренных испытаний.

Для оценки ресурса КМ при периодическом нагружении используют принцип суммирования повреждений, положенный в основу

вывода уравнения (5.40). Заменяя в этом уравнении время на число циклов, условие прочности (ресурс N^*) по критерию накопления усталостных повреждений записывают в виде

$$\int_0^{N^*} \frac{dN}{N^* [\sigma_a(N); T(N)]} < n_N, \quad (5.43)$$

где $N^* [\sigma_a(N); T(N)]$ – число циклов до разрушения при постоянной температуре T и амплитуде напряжений σ_a ; n_N – некоторое число, зависящее от структуры КМ и условий испытаний (определяется по результатам эксперимента).

Ударное нагружение. При высоких скоростях нагружения скорости и ускорения частиц материала также велики, поэтому они должны учитываться при оценке напряженного и деформированного состояния. Возникает динамическая задача, в которой вместо уравнений равновесия (1.43) рассматривают уравнения движения (1.130). В этих уравнениях величина $-\rho \mathbf{w}$ – инерционная сила, обусловленная ударным воздействием.

Как и статическая задача, динамическая задача может быть поставлена для микроуровня и макроуровня. В результате решения динамической задачи на микроуровне находят напряжения, деформации и перемещения элементов структуры, скоростей их изменения, выявляют эффекты, обусловленные микроструктурой КМ. Решение задачи на макроуровне дает распределение напряжений, деформаций, перемещений и скоростей их изменения для осредненных объемов материала и эффекты, обусловленные анизотропией и макронеоднородностью структуры.

Удар телом большой массы, движущимся с небольшой скоростью, вызывает колебания, сопровождающиеся периодическим изменением напряженного и деформированного состояния.

Кратковременное (ударное) действие на границу стержня (рис. 5.34) силы F с высокой скоростью v_0 вызывает волну напряжений, деформаций и перемещений, распространяющихся вдоль оси x со скоростью звука $c = \sqrt{E/\rho}$, где E – модуль Юнга в направлении оси x ; ρ – плотность материала.

Перемещение произвольного сечения $u = \varepsilon(ct - x)$, где $\varepsilon = \sigma/E$ –

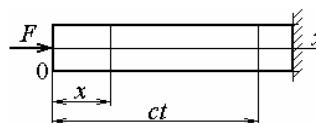


Рис. 5.34

деформация; σ – напряжение в сечении. Скорость перемещения $v = \frac{du}{dt} = \frac{\sigma}{E}c$. Отсюда следует, что напряжение равно $\sigma = -Ev/c$.

Модули упругости КМ и, следовательно, скорости распространения волн зависят от структуры материала. Так, скорость распространения волн в направлении волокон однонаправленного стеклопластика составляет 5,0–5,3 км/с, а перпендикулярно волокнам – 3–4 км/с. Для сравнения: скорости распространения волн в эпоксидной смоле – 2,6 км/с, в стали – 4,9 км/с, в дереве (вдоль волокон) – 4,2 км/с.

Скорость распространения волны в КМ с тканым наполнителем в направлении основы больше, чем по утку в $\sqrt{E_o/E_y}$ раз, где E_o, E_y – модули Юнга материала по основе и утку соответственно.

При ударе перпендикулярно плоскости пластины из анизотропного КМ фронт ударной волны распространяется не по круговому контуру. Так, в ортотропном КМ (стеклотекстолит) он имеет вид, показанный на рис. 5.35.

При ударе шара о поверхность тела возникают волны трех типов (рис. 5.36): растяжения-сжатия (продольные), распространяющиеся со скоростью $c^I = \sqrt{E/\rho}$; сдвига (поперечные) – со скоростью $c^{II} = \sqrt{G/\rho}$ и поверхностные (волны Релея) – со скоростью $c^{III} = (0,90 - 0,95)\sqrt{G/\rho}$.

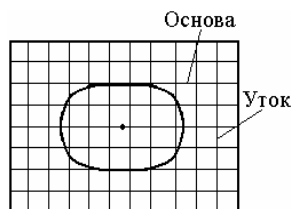


Рис. 5.35

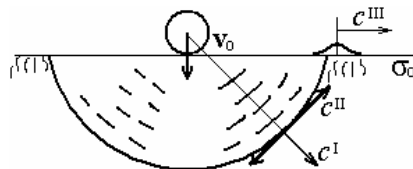


Рис. 5.36

Волны I типа распространяются с наибольшей скоростью и вызывают трещины разрыва в зонах максимальных растягивающих напряжений, распределенные преимущественно по сферическим поверхностям (см. рис. 5.36). Волны II типа вызывают повреждения

от сдвига, а волны III типа – кольцевые трещины на поверхности. И хотя скорость распространения волн Релея наименьшая, их повреждающее действие велико даже по сравнению с волнами I типа. Они разрушают поверхностный слой материала, снижают его защитные свойства, что ведет к дальнейшему ускоренному развитию повреждений при циклических нагружениях, при воздействии воды и химических реактивов.

После прекращения действия ударной силы волны затухают (рассеиваются). Неоднородность структуры и вязкоупругие свойства матрицы способствуют рассеиванию волн в КМ.

Поврежденность элементов микроструктуры КМ при ударном воздействии существенно зависит от соотношения между длиной волны, равной $2\pi k$ (k – волновое число, зависящее от структуры КМ), и размерами элементов структуры. При близких значениях этих величин более интенсивны разрушения на границах раздела компонентов и расслоения. Дефекты структуры обуславливают при динамических воздействиях более высокую концентрацию напряжений, чем при статическом нагружении.

При ударе перпендикулярно слоям КМ возникает акустический импеданс (сопротивление) прохождению волны. Существуют частоты, при которых волна не распространяется в глубь материала, т. е. слоистый материал становится волновым фильтром. С увеличением энергии удара возрастают интенсивность расслоения и глубина распространения трещин (рис. 5.37).

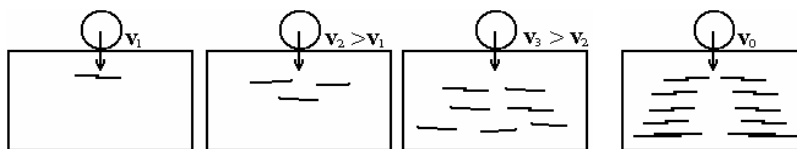


Рис. 5.37

Рис. 5.38

При ударе сферическим телом наиболее интенсивные повреждения отмечаются между слоями по траектории максимальных касательных напряжений (рис. 5.38, ср. рис. 5.36).

Влияние внешней среды и излучений. Влажность, вода, химические реагенты, биологическая среда и излучения (α -, β -, γ -, рентгеновское и др.) оказывают влияние на механические свойства КМ в первую очередь постольку, поскольку способны изменять свойства компонентов и характеристики связи между элементами

структуры. Наиболее подвержена этому влиянию матрица и особенно полимерная. При этом в большей мере изменяются те свойства КМ, которые наиболее зависят от свойств матрицы, – жесткость и прочность при сдвиге и сжатии, при растяжении под углом к направлению армирования, ползучесть и обусловленное ею накопление повреждений при длительном статическом и периодическом нагружении. Влияние перечисленных факторов на КМ разного типа сугубо индивидуально и отражено в специальной и справочной литературе.

В любом случае, проектируя или выбирая КМ для конкретных условий эксплуатации, учитывают все наиболее существенные факторы, влияющие на его поведение в этих условиях. При прогнозировании свойств влияние внешних воздействий учитывают путем подстановки в расчетные формулы характеристик компонентов для заданных условий эксплуатации, при расчетах элементов конструкции – путем задания показателей свойств при конкретных условиях и подходящих коэффициентов запаса жесткости и прочности, при испытаниях – путем создания условий, близких к условиям эксплуатации.

Упражнения

1. Охарактеризовать влияние скорости нагружения и внешних факторов на поведение КМ различной структуры.
2. Оценить долговечность и усталостную прочность ортотропного и хаотически армированного КМ при заданном периодическом режиме нагружения по свойствам компонентов и характеристикам прочности, полученным при стандартизованных условиях испытаний.

5.5. Равновесие тел с трещинами

Модель Гриффитса. Рассмотрим равновесие изотропной пластинки единичной толщины, ослабленной трещиной длиной $2l \ll b$ и растягиваемой напряжениями σ (рис. 5.39).

Энергия упругой деформации, аккумулируемая в единице объема пластинки, пропорциональна σ^2/E , где E – модуль Юнга материала. Образование трещины приводит к изменению плотности упругой энергии. Часть энергии затрачивается на раскрытие трещины и пропорциональна квадрату длины трещины, а другая часть превращается в поверхностную энергию и пропорциональна длине трещины:

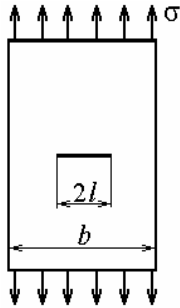


Рис. 5.39

$$\Delta U = -\lambda \sigma^2 l^2 / E + 4\gamma l, \quad (5.44)$$

где λ – параметр, учитывающий геометрию участка, на который распространяется влияние трещины (согласно расчетам, выполненным методами теории упругости, в рассматриваемом случае $\lambda = \pi$, что в точности соответствует круговому участку радиусом l); γ – плотность поверхностной энергии.

Условие равновесия трещины длиной l при некотором напряжении σ_k означает отсутствие изменения энергии и получается в результате приравнивания к нулю производной по l от приращения энергии ΔU . Из этого условия следует

$$\sigma_k = \sqrt{2E\gamma / \pi l_k}, \quad (5.45)$$

где l_k – критическая длина трещины при напряжении σ_k .

Чем больше напряжение, тем меньше критическая длина трещины, для которой выполняется условие равновесия (рис. 5.40). При напряжениях выше критического σ_k происходит неограниченное раскрытие трещины, т. е. разрушение пластинки.

Зависимость между критическим напряжением и равновесной длиной трещины в форме (5.45) впервые получена А. Гриффитсом в 1920 г. Она не учитывает характер напряженного и деформированного состояния на контуре трещины и, что особенно важно, вблизи ее концов.

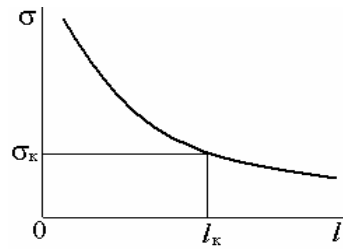


Рис. 5.40

В последующем в рамках линейной теории упругости были предложены различные модели, приводящие к вычислению коэффициентов интенсивности напряжений на контуре трещины и уточнению условия ее раскрытия. Соответствующее направление механики тел с трещинами называют линейной механикой разрушения.

Выделяя параметры материала, от которых зависит условие разрушения, критическое напряжение записывают в виде

$$\sigma_k = K_{Ic} / \sqrt{\pi l_k}. \quad (5.46)$$

где $K_{Ic} = \sqrt{2E\gamma}$ – критический коэффициент интенсивности напряжений, или вязкость разрушения. Индекс I здесь означает, что коэффициент относится к растяжению.

Помимо трещины, приводящей к отрыву и обозначаемой индексом I, различают также трещины поперечного (II) и продольного (III) сдвига (рис. 5.41). Соответствующие им коэффициенты интенсивности также рассчитывают, решая задачи линейной теории упругости. При сложном напряженном состоянии тела с трещиной коэффициент интенсивности напряжений является функцией коэффициентов интенсивности K_I , K_{II} и K_{III} .

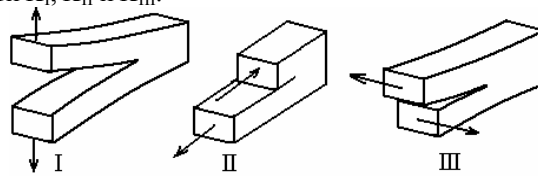


Рис. 5.41

Критические значения этих коэффициентов характеризуют способность материала выдерживать нагрузку при наличии трещин, обозначаемую как «вязкость» разрушения материала.

Производная от упругой энергии деформируемого тела U по длине трещины $G = -dU/dl$ по физическому смыслу представляет собой удельную работу разрушения. Эта величина имеет размерность силы, и потому ее называют силой сопротивления раскрытию трещины. Значения величины G при различных типах трещины, как и критические коэффициенты интенсивности, характеризуют трещиностойкость материала.

Интенсивность высвобождения энергии при раскрытии трещины определяется как поток энергии через границу трещины и выражается так называемым J -интегралом, который вычисляется по контуру в области вершины трещины как

$$J = \int_C \left(U dy - \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} n_\beta ds \right),$$

где C – контур, окружающий вершину трещины; U – упругая энергия на единицу объема тела; $dy = n_1 ds$; $\mathbf{u} = (u_i)$ – вектор перемещений;

$\mathbf{n} = (n_i)$ – вектор внешней нормали к контуру.

В случае линейно-упругого тела J -интеграл с точностью до знака совпадает с силой сопротивления раскрытию трещины G .

Для экспериментального определения характеристик вязкости разрушения при отрыве испытывают образцы с трещинами (рис. 5.42). Регистрируют критическое напряжение, при котором наблюдается рост трещины. Подставляя это напряжение в формулу вида (5.46), вычисляют вязкость разрушения K_{Ic} .

Так, при испытаниях по схеме на рис. 5.42, в вязкость разрушения вычисляют по формуле

$$K_{Ic} = 1,66 \sigma^+ \sqrt{\pi l},$$

где коэффициент 1,66 учитывает относительную ширину разреза.

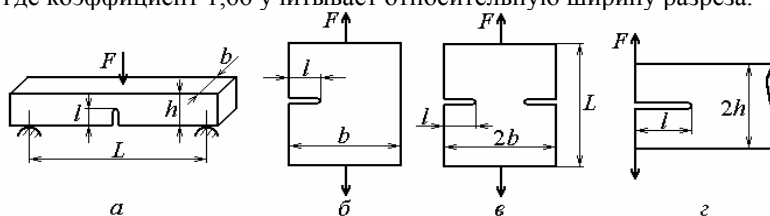


Рис. 5.42

Характеристики трещиностойкости используют для оценки прочности связи слоев, достигаемой в различных технологических процессах получения КМ слоистой структуры. Так, степень консолидации однонаправленно армированных лент, наматываемых на оправку, оценивают по результатам испытаний на отрыв по схеме, изображенной на рис. 5.43.

Испытания по этой схеме аналогичны определению межслойной вязкости разрушения путем отрыва с изгибом полосы (см. рис. 5.42, з), однако в рассматриваемом случае отслоившийся участок ленты опирается на ролик, поэтому его перемещение ограничено. Эффективное усилие, под действием которого происходит отслоение ленты, равно $F_{уд}^* = F - M_x / a$, где $M_x = D_x / r$ – изгибающий момент

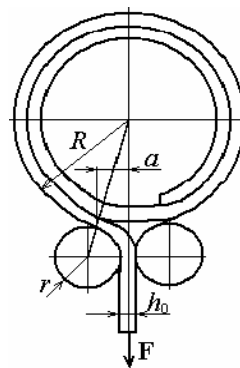


Рис. 5.43

(D_x – жесткость ленты при изгибе); a – плечо силы F , рассчитываемое из условий опирания по формуле $a \approx Rr / (R + r)$.

Усилие F^* , отнесенное к ширине ленты, практически совпадает с интенсивностью высвобождения энергии в результате разрушения (удельной работой разрушения). Вязкость разрушения рассчитывается по формуле

$$K_{Ic} = \sqrt{E_m F_{уд}^* b^{-1}},$$

где E_m – модуль Юнга матрицы; b – ширина ленты.

Эксперименты, подобные оценке вязкости разрушения K_{Ic} при испытаниях по схемам, изображенным на рис. 5.42, проводят и для других типов трещины (см. рис. 5.41). Получают критические коэффициенты K_{Ic} и K_{IIc} . По значениям коэффициентов K_{Ic} , K_{IIc} и K_{IIIc} строят предельные поверхности трещиностойкости, аналогичные предельным поверхностям прочности (см. подразд. 5.1), но характеризующие условия распространения трещин при сложном напряженном состоянии. Условие распространения трещин, как и условие разрушения КМ, сильно зависит от его структуры.

Показатели вязкости разрушения используют для построения кинетического уравнения усталостного разрушения материалов. Так, скорость развития усталостной трещины согласно уравнению Пэриса – Эрдогана записывают в виде

$$\frac{dl}{dt} = cK^m,$$

где $K = K(\sigma, l)$ – коэффициент интенсивности напряжений; c и m – характеристики материала, определяемые из эксперимента.

Упражнения

1. Охарактеризовать особенности развития трещин в КМ различной структуры и влияние свойств компонентов.

2. По заданному усилию отрыва и известным характеристикам структуры и свойств компонентов оценить вязкость разрушения при отрыве слоя и критическое напряжение как функцию длины трещины.

6. РЕОЛОГИЯ

6.1. Проницаемость волокнистой системы

Течение вязкой жидкости через пористую среду. Течение жидкости и газа через пористую среду (поровое пространство) называют *фильтрацией*. Затекание высоковязкой жидкости в поровое пространство называют также *перколяцией* (просачиванием).

Рассмотрим течение изотропной ньютоновской жидкости с вязкостью μ через поровое пространство с неизменной геометрией. Направление вектора \mathbf{q} , задающего объемный расход жидкости через единицу площади нормального сечения, совпадает с направлением вектора скорости жидкости \mathbf{v} и противоположно направлению градиента давления:

$$\mathbf{q} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla p, \quad (6.1)$$

где \mathbf{K} – тензор проницаемости; $\nabla p = dp / d\mathbf{n}$ – градиент давления жидкости; \mathbf{n} – вектор внешней нормали к поверхности, ограничивающей поровое пространство.

Тензор проницаемости \mathbf{K} зависит от структуры порового пространства. В случае ортотропных волокнистых материалов тензор \mathbf{K} задается тремя значениями в главных осях симметрии структуры. В системе осей координат, повернутых относительно главных, компоненты тензора проницаемости выражаются через значения в главных осях по формулам преобразования компонентов тензора второго ранга (1.11). Если поровое пространство изотропно, то его проницаемость во всех направлениях одинакова и характеризуется одним параметром – коэффициентом проницаемости.

При одномерном течении ньютоновской жидкости через поровое пространство уравнение переноса (6.1) записывается в виде

$$q_x = -\frac{K_x}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (6.2)$$

Уравнение (6.2) известно в теории фильтрации как закон Дарси. Скалярная величина K_x – коэффициент проницаемости порового пространства в направлении x .

Согласно капиллярной модели Кармана – Козени, коэффициент проницаемости произвольной пористой среды для линейно-вязкой жидкости пропорционален квадрату размера пор h :

$$K_x = h^2 \Pi^3 / C_K (1 - \Pi)^2, \quad (6.3)$$

где Π – пористость; C_K – константа Козени, учитывающая структуру порового пространства.

В формулу (6.3) вместо h^2 вводят также удельную смачиваемую поверхность, а константу Козени представляют в виде $C_K = c_\Phi f_n^2$, где c_Φ – коэффициент формы пор; f_n – параметр извилистости.

Как видно из формулы (6.3), коэффициент проницаемости пористой среды для линейно-вязкой жидкости имеет размерность квадрата длины. В качестве единицы коэффициента проницаемости иногда принимают *дарси*, равный 1 Да = $9,87 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2 \approx 1 \text{ мкм}^2$.

Закон Дарси (6.2) не учитывает инерционные свойства жидкости, поэтому оправдан при относительно малых скоростях течения, а именно для чисел Рейнольдса $Re = \rho v_x h / \mu < 1$ (здесь ρ – плотность жидкости; h – характерный размер пор). Нетрудно убедиться, что это условие всегда выполняется в процессах затекания матричных полимеров, тем более высоковязких расплавов термопластов, в поровое пространство волокнистых наполнителей.

При одномерном затекании жидкости в однородное поровое пространство, пористость которого равна Π , средняя скорость перемещения фронта жидкости составляет $v_x = dx / dt$, а объемный расход ее через единицу площади равен $q_x = \Pi v_x$. Градиент давления уменьшается обратно пропорционально глубине затекания x : $dp / dx = -p_0 / x$. Тогда интегрирование уравнения (6.2) дает глубину затекания как функцию времени:

$$x = \sqrt{2K_x p_0 t / \Pi \mu}. \quad (6.4)$$

Закон одномерной фильтрации нелинейно-вязких жидкостей со степенным законом течения имеет вид

$$q_x = -\text{sign} \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{K_x}{\mu^s} \left| \frac{dp}{dx} \right|^s. \quad (6.5)$$

Коэффициент проницаемости K_x , входящий в данную формулу, в отличие от коэффициента проницаемости в законе Дарси (6.2) формально не является физической величиной, поскольку его размерность зависит от значения показателя степени в законе течения ($n = 1/s$), т. е. от размерности коэффициента консистенции.

Для характеристики порового пространства волокнистых наполнителей вместо K_x целесообразно использовать величину $K_e = K_x / \Pi$,

которую называют эффективным коэффициентом проницаемости. Тогда интегрирование уравнения (6.5) с учетом соотношений $q_x = \Pi v_x$ и $dp/dx = -p_0/x$ дает следующую формулу для глубины затекания нелинейно-вязкой жидкости:

$$x(t) = \left[(1+s)K_e (p_0/\mu)^s t \right]^{1/(s+1)}. \quad (6.6)$$

Эффективный коэффициент проницаемости может быть найден по рассчитанным или построенным экспериментально кинетическим кривым $x(t)$. Влияние структуры поровой среды на коэффициенты проницаемости может быть установлено в результате анализа вязкого течения жидкости через систему каналов соответствующей геометрии. Ниже эта возможность будет показана на примере проницаемости однонаправленного волокнистого слоя.

Коэффициенты проницаемости однонаправленного волокнистого слоя. Рассмотрим перколяцию нелинейно-вязкой жидкости со степенным законом течения через поровое пространство, образованное промежутками между однонаправленно ориентированными волокнами (рис. 6.1, 1 – волокно; 2 – жидкость). Элементарную ячейку будем рассматривать как щель переменной ширины.

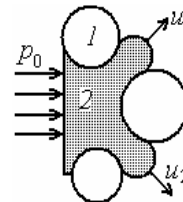


Рис. 6.1

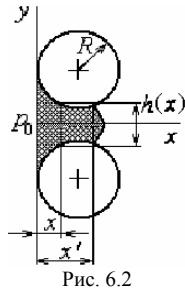
Воспользуемся решением задачи о течении нелинейно-вязкой жидкости в зазоре между плоскопараллельными пластинами, рассмотренной в подразд. 1.7. Скорость течения в щели шириной h при наличии градиента давления dp/dx и при условии прилипания к поверхностям ($v(y = \pm h/2) = 0$) задана формулой (1.169), а расход через участок единичной длины (по z) – формулой (1.171). Перепишем расход как

$$Q_1 = \frac{K_x}{\mu^s} \left| \frac{dp}{dx} \right|^s, \quad (6.7)$$

где

$$K_x = \frac{h^{s+2}}{(s+2)2^{s+1}}. \quad (6.8)$$

Выражение (6.7) имеет вид, типичный для расхода нелинейно-вязкой (степенной) жидкости, проникающей через пористую среду



(см. формулу (6.5)). При этом величина K_x имеет смысл коэффициента проницаемости. При $n = 1$ выражение (6.7) преобразуется в известный закон Дарси (6.2).

Пусть ось z направлена вдоль волокон, а течение происходит вдоль оси x (рис. 6.2). Давление на входе в зазор равно p_0 . Градиент давления изменяется по мере затекания жидкости в зазор: $dp / dx = -p_0 / x'$, где x' — глубина затекания.

Зазор между волокнами h зависит от взаимного расположения соседних волокон и является известной функцией координаты x . При этих условиях проинтегрируем уравнение (6.7). В результате найдем расход жидкости через элементарную ячейку волокнистого слоя как функцию координаты фронта жидкости x' :

$$q_1(x') = \frac{p_0^s}{\mu^s (s+2) 2^{s+1} f_h^s(x')}, \quad (6.9)$$

где

$$f_h(x') = \int_0^{x'} h(x)^{-1-2n} dx. \quad (6.10)$$

Полученные формулы позволяют вычислить скорость затекания жидкости в зазор между волокнами. Осреднение этого расхода по множеству ячеек, образующих слой волокон, приводит к оценке коэффициента проницаемости волокнистого слоя.

Расход жидкости через единицу площади волокнистого слоя (в плоскости, параллельной yz) равен произведению расхода, заданного формулой (6.9), и числа элементарных ячеек N_y , приходящихся на единицу ширины слоя по y :

$$Q_1(x') = \frac{\bar{k}_x R^{s+1}}{\mu^s} \left(\frac{p_0}{x'} \right)^s, \quad (6.11)$$

где

$$\bar{k}_x = \frac{N_y x'^s R^{-(s+1)}}{(2+s) 2^{s+1} f_h^s(x')} \quad (6.12)$$

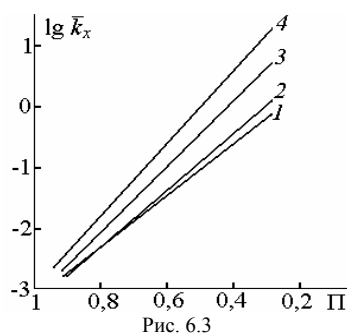
есть безразмерный коэффициент проницаемости, полученный путем деления коэффициента проницаемости согласно формуле (6.7) на

характерный параметр волокнистого слоя – радиус волокон R в степени $(s + 1)$.

Как видно из формулы (6.11), проницаемость волокнистого слоя тем выше, чем больше средний диаметр волокон. При этом нелинейность вязких свойств жидкости ($s > 1$) усиливает эффект влияния диаметров волокон.

При стохастическом расположении волокон проницаемость слоя значительно выше и существенно зависит от неоднородности распределения зазоров между волокнами. Вклад относительно широких зазоров между волокнами весьма велик. Так, при исходной пористости слоя волокон $\Pi = 0,5$ доля ячеек с кратчайшим расстоянием между волокнами, превышающим среднее значение вдвое, составляет менее 5%, но через эти ячейки протекает 50% жидкости при $n = 1$ и более 70% – при $n = 0,5$. Наличие ячеек с наиболее широкими зазорами, встречающимися с вероятностью менее 1%, увеличивает проницаемость на порядок. Эффект влияния неоднородности структуры волокнистого слоя усиливается в случае течения через него нелинейно-вязкой жидкости:

при $n < 1$ коэффициенты проницаемости изменяются существенно больше, чем при $n = 1$. При упорядоченном (и фиксированном) расположении волокон в элементарных ячейках коэффициенты проницаемости волокнистого слоя мало зависят от типа регулярной структуры. Это видно из рис. 6.3, иллюстрирующего зависимость безразмерных коэффициентов



проницаемости однонаправленного волокнистого слоя от исходной пористости и расположения волокон в трансверсальном сечении: 1 – квадратная, 2 – гексагональная, 3, 4 – стохастическая модели ($n = 1$ для 1–3; $n = 0,5$ для 4).

Зависимость коэффициента проницаемости волокнистого слоя от радиуса и исходной пористости слоя волокон, вытекающая из формулы (6.12), типична для моделей типа Козени – Кармана. Коэффициенты проницаемости однонаправленного волокнистого слоя для ньютоновской жидкости, заполняющей слой в трансверсальном и продольном направлениях, часто представляют в виде

$$K_x = \frac{R^2}{4c_x} \frac{\Pi^3}{(1-\Pi)^2} \text{ и } K_z = \frac{R^2}{4c_z} \frac{\Pi^3}{(1-\Pi)^2}, \quad (6.13)$$

где c_x и c_z – параметры, принимаемые для стекловолоконного слоя, согласно экспериментальным данным, 17,9 и 0,7 соответственно.

Наблюдаемое в экспериментах соотношение между проницаемостью волоконистого слоя в трансверсальном и в продольном направлениях не подтверждается расчетами, выполненными для моделей с фиксированным расположением волокон в слое. Данная аномалия объясняется тем, что деформации волоконистой системы при затекании в нее жидкости в этих направлениях по-разному изменяют поровое пространство.

Сила, действующая на отдельное волокно, равна $F_1 = \int (p \cos \alpha + \tau_s \sin \alpha) dA_s$, где p – давление; τ_s – касательные напряжения на поверхности волокна; α – угол между внутренней нормалью к поверхности волокна и заданным направлением; dA_s – элемент поверхности волокна, контактирующей с жидкостью. Сила, уравнивающая распределенные по поверхности волокна давление и касательные напряжения, обусловлена натяжением волокна и реакциями соседних волокон.

Смещение волокон под действием приложенных к ним сил приводит к изменению геометрии порового пространства, а следовательно, и к изменению не только параметров, но и структуры системы уравнений, описывающих процесс перколяции. Жидкость, обтекающая натянутый слой, смещает волокна в направлении потока (рис. 6.4, а). Волокнистый слой уплотняется, его проницаемость снижается. В местах разрежения слоя за счет смещения части волокон образуются «промывы».

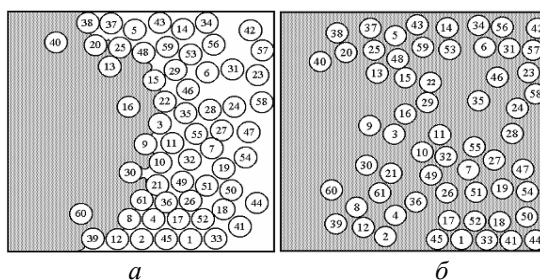
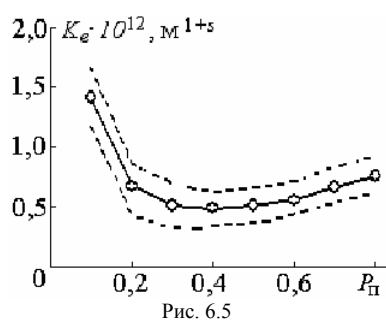


Рис. 6.4

После полного обтекания жидкостью волокна под действием натяжения смещаются в обратном направлении. Конечное положение системы волокон (см. рис. 6.4, б) существенно отличается от исходного. Структура пропитанного слоя неоднородна и зависит как от условий течения жидкости, так и от натяжения волокон. Натяжение волокон повышает проницаемость волокнистого слоя.

Коэффициенты проницаемости натянутого волокнистого слоя не являются константами: они не только зависят от параметров жидкости и волокнистого слоя, но и изменяются по мере затекания жидкости (рис. 6.5). Штриховые линии здесь – 90%-ные доверительные границы; P_{II} – степень заполнения порового пространства.

Эффективные коэффициенты проницаемости, как и параметры структуры волокнистого слоя, зависят от радиуса волокон, вязкости и давления жидкости. Так, при пропитке слоя стеклянных волокон расплавом полиамида-6 с показателем степени



в законе течения $n = 0,55$ увеличение среднего диаметра волокон от 13 до 17 мкм, т. е. всего на 30%, приводит к увеличению эффективного коэффициента проницаемости более чем вдвое.

Полученные соотношения используют для расчета процессов пропитки волокнистых материалов. Структура порового пространства наполнителя зависит от вида наполнителя, формы и размеров его элементов и характеризуется обобщенно тензором коэффициентов проницаемости. Существенно различны коэффициенты проницаемости и соответственно условия пропитки однонаправленных нитей или ривинга и наполнителей в виде холстов (матов) и тканей, структура порового пространства которых микро- и макронеоднородна.

Проницаемость тканых и нетканых волокнистых материалов. Особенность структуры таких материалов – наличие элементарных волокон и нитей, содержащих пучки волокон. Расстояния между волокнами в нитях намного меньше расстояний между нитями. Поэтому следует различать проницаемость на макро- и микроуровнях. Жидкость заполняет в первую очередь промежутки между нитями, а лишь затем проникает в зазоры между волокнами. Продолжительность заполнения всего порового пространства можно рассматривать

как сумму продолжительности затекания в зазоры на макроуровне и затекания в зазоры на микроуровне.

Проницаемость на макроуровне на порядки выше, чем проницаемость на микроуровне. При этом поровое пространство на макроуровне характеризуется существенной анизотропией и большой неоднородностью, особенно в нетканых материалах. Пусть коэффициенты проницаемости в главных направлениях, совпадающих с координатными осями, равны K_x , K_y и K_z . Тогда процесс описывается уравнением (6.1), записанным в проекциях на координатные оси.

На втором этапе жидкость заполняет поровое пространство между волокнами в нити или ровинге. Сжатие нитей под давлением окружающей их жидкости и наличие воздушных включений между волокнами затрудняют затекание жидкости в поровое пространство внутри нитей.

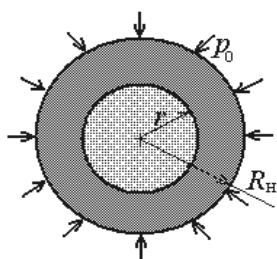


Рис. 6.6

Если волокна образуют плоский слой, то процесс можно считать одномерным и использовать соотношения для однонаправленного слоя волокон, выведенные выше. Другая модель – заполнение жидкостью порового пространства в цилиндрическом пучке волокон, радиус которого равен R_n , под действием радиального

давления (рис. 6.6). Темным фоном выделена пропитанная часть, заштрихована непропитанная.

Расход нелинейно-вязкой жидкости через участок единичной длины при достижении фронтом ее радиуса r в этом случае равен

$$Q_1(r) = \frac{2\pi K_r r}{\mu^s} \left| \frac{dp}{dr} \right|^s, \quad (6.14)$$

где K_r – коэффициент проницаемости нити в радиальном направлении; его можно принять равным коэффициенту проницаемости однонаправленного волокнистого слоя в трансверсальном направлении.

Интегрируя это уравнение по r от $r = R_n$ до текущего значения r при $s \neq 1$ и $p(R_n) = p_0$, получаем зависимость между расходом и давлением жидкости:

$$Q_1(r) = \frac{2\pi K_r}{\mu^s} \left[\frac{(1-n)p_0}{R_n^{1-n} - r^{1-n}} \right]^s. \quad (6.15)$$

Подставив в левую часть (6.15) выражение для расхода $Q_1(r) = -2\pi r\Pi(dr/dt)$, следующее из условия неразрывности, и проинтегрировав, получим продолжительность заполнения порового пространства нити:

$$t(R_n) = \frac{\mu^s R_n^{1+s} \Pi}{(1-n)^s K_r P_0^s} \int_0^1 (x^n - x)^s dx. \quad (6.16)$$

Из расчетов по этой формуле следует, что круглый пучок волокон радиусом R_n быстрее заполняется жидкостью, чем плоский слой толщиной $1,5R_n$ при двухстороннем доступе жидкости. При этом необходимо отметить, что формула (6.16), как и все предыдущие, справедлива при фиксированной геометрии порового пространства. Если круглый пучок волокон сжимается жидкостью, то его проницаемость снижается, а проницаемость плоского слоя, как показано выше, может возрастать за счет смещений волокон.

6.2. Вязкое течение композиций

Вязкость суспензии. Наполнение жидкостей твердыми частицами увеличивает сопротивление течению. Закон течения изотропной ньютоновской жидкости в форме (1.154) аналогичен закону Гука при чистом сдвиге изотропного упругого тела, при этом параметром среды в первом случае служит ньютоновская вязкость, а во втором – модуль сдвига. Используем эту аналогию для оценки вязкости суспензии.

При малых концентрациях P_n изотропного наполнителя модуль сдвига композиции задан формулой (3.55). Заменим в этой формуле модуль сдвига G_m матричного вещества на μ_m – вязкость матричной жидкости. Полагаем, что жидкость несжимаема, поэтому ее коэффициент Пуассона равен 0,5. Вязкость наполнителя считаем большой по сравнению с вязкостью матричной жидкости μ_m . С учетом этого из формулы (3.55) получается следующая формула для вязкости суспензий, известная как формула Эйнштейна:

$$\mu = \mu_m (1 + 2,5P_n), \quad (6.17)$$

где P_n – объемная твердых доля частиц в суспензии.

Композиция с изометричными или анизометричными частицами, хаотически ориентированными в пространстве, как правило, изотропна, поэтому ее реологические свойства вполне характери-

зуются ньютоновской вязкостью, не зависящей от направления. Однако при экспериментальном определении вязкости в вискозиметрах различного типа структура композиций изменяется в результате миграции матричной жидкости к стенкам прибора и ориентации частиц.

Сопротивление течению жидкости, содержащей анизометричные частицы, зависит от ориентации частиц относительно плоскостей сдвига. Наименьшее сопротивление оказывают частицы, ориентированные параллельно этим плоскостям. Влияние параметров частицы можно приближенно оценить, основываясь на решении задачи о течении жидкости в зазоре между коаксиальными цилиндрами (см. формулы (1.176)). На основе такой модели установлено, что вязкость линейно-вязкой жидкости, содержащей цилиндрические волокна диаметром d и длиной l , определяется формулой

$$\mu = \mu_m P_n k_l k_\theta, \quad (6.18)$$

где $k_l = 2\pi l^2 / [12a \ln(D/d)]$ – коэффициент, учитывающий относительные размеры частиц (a , D – характерные размеры области матричной жидкости, окружающей частицу); k_θ – коэффициент, учитывающий ориентацию частиц.

Вязкость однонаправленного препрега. Различают сдвиговые деформации в трансверсальной плоскости и в плоскостях, параллельных волокнам. Модели, учитывающие неоднородность структуры (a), и различные схемы сдвига при течении однонаправленного препрега (в трансверсальной плоскости (b), параллельно волокнам при закреплении продольных сторон ($в$ и $г$) и при закреплении поперечных сторон элемента ($д$)) показаны на рис. 6.7.

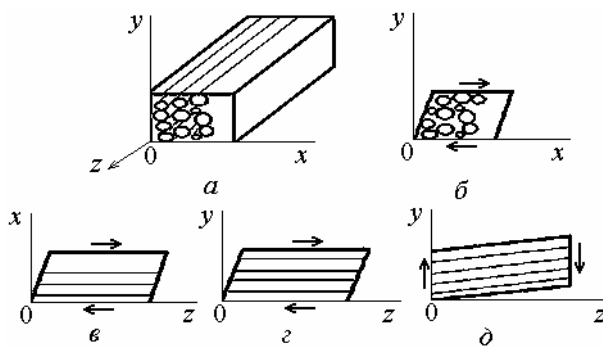


Рис. 6.7

Применим для анализа влияния степени наполнения на вязкость однонаправленного препрега так называемую модель «первого порядка» и рассмотрим сдвиг элементарной ячейки (рис. 6.8).

Пусть напряжения сдвига на границах элементарной ячейки и на границах полимерной прослойки равны τ , а угол сдвига полимерной прослойки – γ_m . Скорость сдвига элементарной ячейки $\dot{\gamma}$ пропорциональна скорости сдвига и относительной толщине прослойки матричного вещества h_m/h , равной в данной модели объемной доле наполнителя P_n . Приняв для матричного вещества степенной закон течения (1.162), запишем коэффициент консистенции препрега в виде

$$\mu = \mu_m f_v(P_n), \quad (6.19)$$

где μ_m – вязкость матричного вещества; $f_v(P_n)$ – коэффициент увеличения вязкости препрега по сравнению с вязкостью матричного вещества, зависящий от структуры препрега.

Коэффициент увеличения вязкости препрега со статистически однородной структурой находится в результате осреднения относительной ширины промежутков между волокнами. Его приближенное значение равно

$$f_v(P_n) = (1 - P_n)^{-n}. \quad (6.20)$$

Вытекающая отсюда зависимость показана на рис. 6.9, *a* сплошной линией. Если волокна в препреге размещены неравномерно (см. рис. 6.7, *a*), то неоднородным оказывается и сопротивление течению. При равных значениях средней степени наполнения двух образцов препрега местное увеличение относительной толщины полимерной прослойки в отдельных частях сечения одного из них приводит к аномальному снижению вязкости при сдвиге вдоль волокон. Снижение вязкости наблюдается и при неполной пропитке волокнистого наполнителя после достижения некоторой степени наполнения (штриховая линия на рис. 6.9, *a*).

Характер течения однонаправленного препрега при сдвиге параллельно волокнам зависит не только от степени заполнения трансверсального сечения волокнами, но и от способа приложения касательных напряжений.

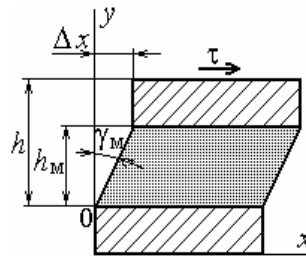


Рис. 6.8

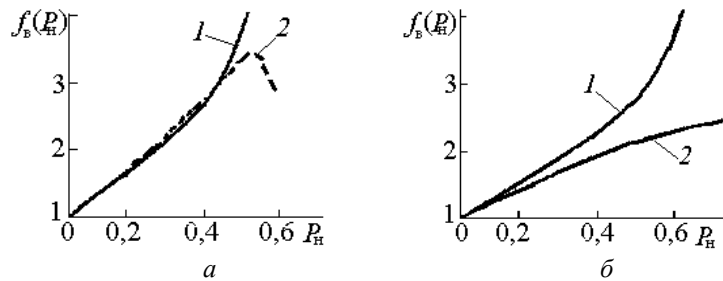


Рис. 6.9

Если сдвигающие усилия приложены параллельно волокнам (см. рис. 6.7, з), то, согласно условию равновесия, касательные напряжения одинаковы на всех продольных площадках, параллельных плоскости xz . Среднее значение скорости сдвига по всему элементу $\dot{\gamma} = \langle \dot{\gamma}_i \rangle = \tau^s \langle 1/\mu_i^s \rangle$. Следовательно, коэффициент консистенции элемента равен $\mu = \langle 1/\mu_i^s \rangle^{-n}$.

Если нагружение происходит по схеме, показанной на рис. 6.7, д, то скорости сдвига в плоскости yz одинаковы, а касательные напряжения на площадках, параллельных волокнам, различаются, поскольку различны вязкие свойства слоев. На рис. 6.9, б кривая 1 показывает зависимость относительной вязкости препрега от степени наполнения при сдвиге параллельно волокнам (см. рис. 6.7, з), кривая 2 – при сдвиге перпендикулярно волокнам (см. рис. 6.7, д).

Согласно оценкам, выполненным разными авторами, показатели вязкости однонаправленного препрега при сдвиге в трансверсальной и продольной плоскостях имеют близкие значения, однако при измерениях вязкость в трансверсальной плоскости оказывается обычно меньше и составляет 0,5–0,8 от продольной. В экспериментах иногда наблюдаются и обратные соотношения, что обусловлено как особенностями структуры образцов, так и условиями их испытаний.

Течение однонаправленного препрега в трансверсальной плоскости. Рассмотрим течение однонаправленного препрега в виде полосы 1 длиной L прямоугольного сечения с площадью S_0 при сжатии между плоскопараллельными плитами 2 (рис. 6.10). Данная схема аналогична схеме сжатия диска, рассмотренной выше, однако характер течения при этом отличается: течение одно-

направленного препрега происходит только в трансверсальной плоскости xy .

В направлении армирования (оси z) течение отсутствует и длина полосы L не изменяется. Объем и площадь сечения полосы, структура материала (он изотропен в плоскости xy) также не меняются. Предполагается, что имеет место идеальное прилипание материала к поверхности плит.

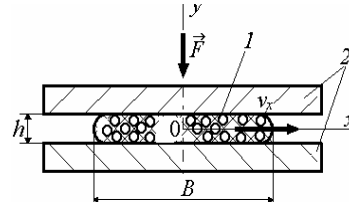


Рис. 6.10

Касательные напряжения τ_{xy} в трансверсальной плоскости связаны со скоростями частиц v_x степенным законом (1.162), который в рассматриваемом случае эквивалентен уравнению

$$\tau_{xy} = \mu \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv_x}{dy}. \quad (6.21)$$

Касательные напряжения τ_{xy} связаны с давлением p уравнением равновесия

$$\tau_{xy} = -\frac{dp}{dx} y. \quad (6.22)$$

Скорости v_x и $v_z = -\frac{dh}{dt}$ удовлетворяют уравнению неразрывности

$$Bv_z = \int_0^h v_x dy. \quad (6.23)$$

Подставив касательные напряжения из уравнения (6.21) в уравнение (6.22) и проинтегрировав относительно v_x при граничных условиях $v_x(\pm h/2) = 0$ (из условия прилипания) и $dv_x/dy = 0$ при $x = 0$ (из условия симметрии), найдем распределение скоростей:

$$v_x = \frac{h^{s+1}}{2^{s+1}(s+1)} \left(-\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \right)^s \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^{s+1} \right]. \quad (6.24)$$

Далее, подставив v_x из уравнения (6.24) в уравнение неразрывности (6.23) и проинтегрировав при условии $p(x = \pm B/2) = 0$, получим распределение давления на поверхности образца:

$$p(x) = \frac{\mu v_z^n (s+2)^n B^{n+1}}{h^{2n+1} (n+1)} \left[1 - \left(\frac{2x}{B} \right)^{n+1} \right]. \quad (6.25)$$

Усилие деформирования найдем, проинтегрировав давление, заданное уравнением (6.25), по поверхности образца:

$$F = \frac{\mu (s+2)^n v_z^n S_0^{n+2} L}{(n+2) h^{3(n+1)}}. \quad (6.26)$$

Как и в случае сжатия изотропного нелинейно-вязкого диска между плоскопараллельными плитами, полученные соотношения могут быть применены для экспериментального определения параметров закона течения препрега в трансверсальной плоскости.

Так, из выражения (6.26) следует формула для расчета коэффициента консистенции:

$$\mu = \frac{F(n+2)h^{3(n+1)}}{(s+2)^n v_z^n S_0^{n+2} L}. \quad (6.27)$$

Для определения параметра n уравнение (6.26) решим относительно v_z^n и прологарифмируем. Дифференцируя затем полученное выражение по $\lg h$ и решая относительно n , находим

$$n = 3 / (d(\lg v_z) / d(\lg h) - 3). \quad (6.28)$$

Нетрудно убедиться, что формулы (6.27) и (6.28) по своей структуре мало отличаются от соответствующих формул (1.187) и (1.185) для параметров степенного закона течения изотропного диска.

Изменение толщины полосы, сжимаемой между плитами, соответствующее принятому степенному закону течения, выражается формулой

$$h(t) = h(1 + t/t')^{-n/(2n+3)}, \quad (6.29)$$

где

$$t' = \frac{2n+1}{2n+3} \left[\frac{\mu L B^{n+2}}{(n+2) F h^{n+1}} \right]^s. \quad (6.30)$$

Касательные напряжения и скорости сдвига на периферии деформируемой полосы (при $x = \pm B/2$) равны соответственно

$$\tau = \frac{F(n+2)h^3}{2^n S_0^2 L} \text{ и } \dot{\gamma} = \frac{(s+2)^s B v_z}{2h^2}. \quad (6.31)$$

На рис. 6.11 показана зависимость эффективной вязкости при 180°C от скорости сдвига для композиций: 1 – ПЭВД первичный; 2 – ПЭВД первичный стеклонаполненный; 3 – ПЭВД вторичный с однонаправленным ровингом (в трансверсальной плоскости).

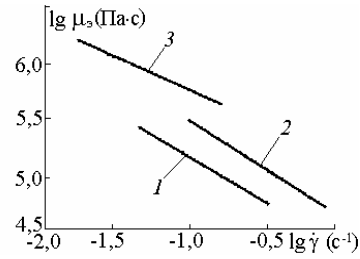


Рис. 6.11

Как у расплавов матричных термопластичных полимеров, так и у однонаправленных препрегов на их основе эффективная вязкость в логарифмических координатах имеет отчетливо выраженную линейную зависимость, по крайней мере в диапазоне скоростей сдвига от 0,01 до 10 с⁻¹.

Течение волокнистой композиции в плоскости армирования.

Данный вид течения реализуется, например, при нагружении в шарнирной рамке прямоугольного, в частности квадратного, образца, вырезанного из однонаправленного препрега или из листового препрега с хаотически ориентированным в плоскости или тканым волокнистым наполнителем (рис. 6.12).

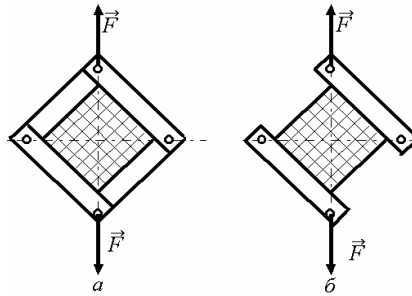


Рис. 6.12

При растяжении вдоль диагонали квадратного образца, закрепленного в шарнирной рамке по четырем сторонам (см. рис. 6.12, а), происходит потеря плоской формы (выпучивание). При закреплении

только по двум сторонам (см. рис. 6.12, б) реализуется простой сдвиг в плоскости армирования. Чтобы исключить влияние удлинений образца на изменение длины диагонали, закрепляемые стороны ориентируют перпендикулярно одному из направлений армирования.

Из условия равновесия касательные напряжения, обуславливающие сдвиговую деформацию образца, можно выразить следующим образом:

$$\tau = F / (2Bh \cos \alpha),$$

где B и h – сторона квадрата и толщина образца соответственно; α – угол между диагональю и стороной квадрата (в исходном положении $\alpha = 45^\circ$).

Угол сдвига γ выражается через угол α : $\gamma = \pi / 2 - 2\alpha$, откуда следует, что скорость сдвига равна $\dot{\gamma} = -2\dot{\alpha}$. Дифференцирование выражения для изменяющейся в результате сдвига длины диагонали L_0 по времени дает скорость сдвига как функцию скорости изменения длины диагонали: $\dot{\gamma} = \dot{L}_0 / 2\sqrt{4B^2 - \dot{L}_0^2}$.

В отличие от сжатия полосы между плоскопараллельными плитами при данном виде испытаний для определения двух параметров степенного закона течения препрега в плоскости армирования недостаточно значений τ и $\dot{\gamma}$, найденных из одного опыта. Один из вариантов испытаний с целью нахождения двух параметров – ступенчатое нагружение образца. Ступени нагрузки задают так, чтобы скорости сдвига различались примерно на порядок. Каждую ступень нагрузки выдерживают до получения линейного участка на диаграмме удлинения диагонали образца как функции времени. Это иллюстрирует рис. 6.13, где экспериментальные точки (1) образуют линейный участок на первой 2 и второй 3 ступенях нагружения и участок упругой деформации после приложения второй ступени нагрузки 4.

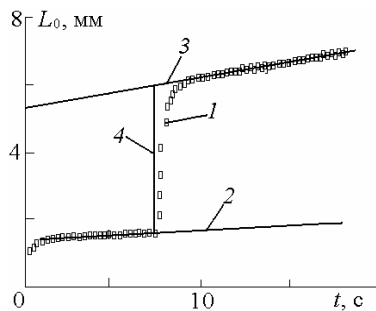


Рис. 6.13

Из линейных уравнений регрессии, задающих зависимость приращений длины растягиваемой диагонали образца от времени, находят скорости сдвига $\dot{\gamma}_1$ и $\dot{\gamma}_2$. Вычисляют также касательные напряжения на каждой ступени τ_1 и τ_2 . Параметры степенного закона течения находят, решая систему

из двух линейных уравнений (для каждого участка), полученных в результате логарифмирования уравнения, связывающего касательные напряжения со скоростями сдвига.

Сдвиг в плоскости армирования имеет место также при растяжении прямоугольной пластины, армирующее волокна в которой расположены под углом 45° к продольной оси. Наибольшие касательные напряжения действуют параллельно волокнам и равны половине от нормальных растягивающих. В образцах, длина которых значительно больше ширины, возникает достаточно однородное напряженное состояние, однако требуется повышенная точность поддержания скорости перемещения захватов и измерения усилия.

Течение при межслойном сдвиге. Если плоский образец 1 (рис. 6.14) из композиции, содержащей нерастяжимый волокнистый наполнитель, ориентированный вдоль оси образца 2, изгибается заданной силой F , то угол поворота крайних сечений α равен углу сдвига γ . Это дает возможность оценить скорость сдвига по измеренной временной зависимости прогибов. Касательные напряжения оцениваются по поперечным силам.

Однако вследствие межслойных сдвигов прогибы образца могут быть настолько велики, что необходимо учитывать изменение расстояния между опорами. На основании идеализированной схемы деформирования нетрудно построить профиль опоры, при котором в любом положении образца нормаль к его поверхности в точке касания с опорой совпадает с нормалью к поверхности опоры в этой точке. Координаты точек касания образца и опоры, удовлетворяющие этому условию, равны:

$$x(\alpha) = \pm \frac{L}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}; \quad y(\alpha) = \int_0^{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \frac{dx(\varphi)}{d\varphi} d\varphi.$$

Профиль опоры, определяемый этими уравнениями, показан на рис. 6.14. Прогиб образца связан с углом сдвига соотношением

$$f(\gamma) = L[1 - \cos(\gamma/2)]/\gamma.$$

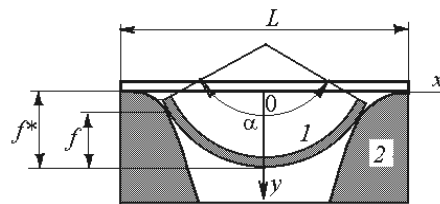


Рис. 6.14

Ввиду перемещения крайних точек образца относительно опоры фактический прогиб отличается от измеряемого прогиба $f^*(\gamma)$, при этом $f(\gamma) = f^*(\gamma) - y$. По измеряемому прогибу вычисляют угол сдвига γ , по скорости изменения прогиба (по заданной скорости перемещения нагружающей траверсы) – скорость межслойного сдвига. Определение параметров степенного закона течения в рассматриваемом случае сводится к тем же процедурам, что и при сдвиге в плоскости армирования.

Упражнения

1. Оценить вязкость препрега с заданной степенью наполнения по вязкости матричной жидкости. Сравнить характеристики вязкости при различных вариантах расположения волокон.
2. Охарактеризовать закон изменения толщины ленты однонаправленного препрега, сжимаемой заданным усилием между плоскопараллельными плитами. Вычислить касательные напряжения и скорости сдвига.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Физико-механические свойства волокнистых наполнителей КМ

Показатель	Стекло		Углерод		Арамид		Бор	Сапфир (усы)	Ба- зальт	Асбест	Древе- сина
	Е	S	HT	HM	СВМ	Кевлар					
Диаметр, мкм	6–20	5–7	5–7	7–8	10–12	12	100	2,8	9–12	–	–
Плотность, г/см ³	2,54	2,58	1,70	1,86	1,44	1,44	2,50	3,9	2,75	2,56	0,6–0,7
Модули упругости, ГПа											
E_1^+	70–80	85	250–300	350–400	125	130–160	380–420	380–500	95	140–160	14–20
E_2^+	70–80	85	15–18	6–8	5–10	5–6	50–100	50–100	90	10–20	0,5–1,1
Коэффициент Пуассона μ_{21}	0,22	0,20	0,28	0,36	0,35	0,38	0,25	0,2	0,25	0,2	0,35
Разрушающие напряжения σ_1^+ , ГПа	2,5–3,5	4,2	2,5–3,2	1,8–2,8	4,0	2,1–2,8	3,5–4,5	14–25	2,4	3,1	0,10–0,12
ТКЛР, $\times 10^6 \text{ K}^{-1}$											
α_1	5–10	6	–0,5	–1,4	–1	–2	6,3	6–9	4,5	0,3	0,8
α_2	5–10	6	5–10	8–12	10–20	20–50	10–20	12–15	4,5	0,5	2,5–3,5
Удельная теплоемкость c_p , кДж/(кг·К)	0,8–1	0,8	0,6	0,7	1,4	1,4	0,7	1–2	1,2	1,1	1,7
Теплопроводность, Вт/(м·К)											
k_1	0,8	1,0	10–20	15–40	0,5	0,5	2–5	12–20	0,8	2,1	0,47
k_2	0,8	1,0	2–5	2–5	0,4	0,4	1–2	5–10	0,8	0,5	0,12

Примечание. Индексы в показателях обозначают направление: 1 – вдоль оси; 2 – трансверсальное.

**2. Свойства растительных волокон и древесных частиц
при влажности 12% мас.**

Тип волокон и частиц	ρ , г/см ³	T , текс	E , ГПа	σ^+ , ГПа	ε^+ , %
Лен	1,48	4,0	48	659	1,37
Пенька	1,50	9,8	69	826	1,20
Джут	1,44	5,1	44	536	1,22
Береза	0,57	–	18,3	104–126	–
Сосна	0,56	–	12,0	82–113	–
Дуб	0,62	–	14,3	111	–

**3. Характеристики свойств
некоторых термореактивных полимерных связующих**

Показатель	Поли- эфирное	Феноло- формаль- дегидное	Эпок- сидное	Крем- нийорга- ническое	Поли- имидное
Плотность, г/см ³	1,1–1,4	1,2–1,3	1,15–1,25	1,1–1,4	1,2–1,4
Модуль упругости при растяжении, ГПа	1,5–4,5	1,4–6,8	2,5–3,5	4,2–4,5	3,2–5,0
Разрушающее напряжение, МПа при растяжении при сжатии	20–70 50–250	20–80 70–200	40–140 85–270	7–34 50–100	90–95 250–280
Относительное уд- линение при разры- ве, %	0,5–6,0	0,4–3,0	1,2–10,0	0,3–1,5	1,0–4,0
Удельная теплоем- кость, кДж/(кг·К)	1,0–2,5	1,3–2,0	0,8–1,2	1,2–1,6	1–2
ТКЛР, $\times 10^{-6} \text{ К}^{-1}$	60–90	20–80	45–60	20–40	50–58
Усадка при отвер- ждении, %	4–15	0,5–7,0	0,5–3,6	2,1–4,3	0,5–2,0
Теплопроводность, Вт/(м·К)	0,12–0,23	0,23–0,27	0,17–0,21	0,4–0,6	0,35–0,37

4. Характеристики свойств некоторых термопластичных полимеров

Показатель	ПП	ПЭНД	ПЭВД	ПА-6	ПА-66	ПК	ПБТ	ПЭТФ	ПЭЭК
Плотность, г/см ³	0,90–0,92	0,91–0,92	0,94–1,00	1,09–1,14	1,08–1,14	1,19–1,24	1,23–1,35	1,3–1,4	1,26–1,32
Температура, °С									
стеклования	От –23 до –10	–125	–100	40–48	50–80	140–150	20–45	69–110	139–153
плавления	160–176	105–116	120–140	215–216	250–269	–	224–240	246–265	334–343
переработки	200–290	150–230	150–290	215–270	250–320	260–330	246–290	256–310	370–400
Удельная теплоемкость, кДж/(кг·К)	1,7–1,9	1,9–2,0	1,57–2,28	1,6	1,68	1,17–1,26	1,1–1,2	1,1–1,15	1,1
Теплопроводность, Вт/(м·К)	0,14–0,20	0,3–0,4	0,2–0,4	0,17	0,24	0,19	0,2	0,2–0,3	0,25
Усадка, %	1,0–2,5	1,5–5,0	1,5–5,0	1,2–2,6	1,5–2,0	0,5–0,8	1,6–2,3	2,5	–
ТКЛР, × 10 ⁻⁵ К ⁻¹	6,8–13,5	10	12–13	8–86	7,2–9,0	6,5–7,0	7,0–7,2	5,9–6,5	4,7–5,5
Модуль упругости, ГПа									
при растяжении	0,95–1,78	0,06–0,38	0,41–1,49	2,9	2,5–3,9	2,3–3,0	2,37	2,7–4,0	3,1–3,8
при изгибе	0,83–1,73	–	0,41–1,07	1,9–2,8	1,1–3,5	2,14–2,38	1,9–2,6	2,8	2,8–3,9
Разрушающее напряжение, МПа									
при растяжении	26–41,4	4–78,6	14,5–38	43–79	12,4–94	53–72	51,8–55,9	50–70	70–103,5
при изгибе	55	–	–	69–117	90–131	81–93	83–96	110–112	110
Теплостойкость, °С	50–63	32–50	43–60	56–80	75–90	127–140	49–65	100	150–204

5. Характеристики стеклянных тканей

Показатель	T-10-14	T-11	TP-0,3-30A	TP-0,7-30A	УТС-П-30А	W-380Г	ЭЗ-200
Тип переплетения	Сатин 8/3	Сатин 8/3	Плотняное	Плотняное	Сатин 4/3	Плотняное	Плотняное
Поверхностная плотность, г/м ²	290	385	350	830	243	380	195
Толщина, мм	0,25	0,25	0,30	0,70	0,19	0,355	0,20
Тип нитей							
основы	ЕС6-26×1×2	ЕС7-54×1×2, ЕС9-52×1×2	РБТ13-120×4	РБТ13-1400	ЕС7-36×1×2	ЕС13-320	ЕС9-52×1×2
утка	ЕС6-26×1×2	ЕС7-54×1×2, ЕС9-52×1×2	РБТ13-120×2	РБТ13-700	ЕС6-26×1	ЕС13-320	ЕС9-52×1×2
Число нитей на 1 см							
основы	36	22	5	3	20	0,6	10
утка	20	13	2	2	12	0,6	9
Разрывная нагрузка, Н (для полоски шири- ной 25 мм)							
по основе	3136	2744	3136	3136	2450	1960	1127
по утку	1666	1568	1176	2450	294	1764	1078

6. Типичные характеристики некоторых однонаправленных КМ на основе эпоксидных смол

Показатель	Тип армирующих волокон			
	Стеклан- ные (Е)	Углеродные (НТ)	Арамидные	Бор- ные
Объемная доля волокон	0,58–0,62	0,58–0,62	0,60–0,62	0,6
Плотность, г/см ³	1,9–2,0	1,52–1,56	1,30–1,38	1,34
Модули упругости, ГПа				
E_1^+	45–55	125–140	78–95	250
E_2^+	10–12	8–9	4,1–5,5	4–5
G_{12}	3–5	5,2–5,5	2,1	9,8
Коэффициенты Пуассона				
μ_{21}	0,31	0,32	0,35	0,22
μ_{12}	0,06	0,02	0,02	0,02
Разрушающие напряжения, МПа				
σ_1^+	1200–1600	1400–1500	1400–2200	1200
σ_1^-	600–800	1100–1200	280–310	1160
σ_2^+	40–60	28–35	12,3–28,2	30–50
σ_2^-	80–100	160–190	96,5–138	90–200
τ_{12}^*	30	70–80	20–44	60
ТКЛР, $\times 10^6 \text{ K}^{-1}$				
α_1	4–10	0	–3,5–4,0	4–6
α_2	20–40	28	35–70	30–50
Удельная теплоемкость c_p , кДж/(кг·К)	1,1–1,2	1,0–1,2	0,6–0,8	1
Теплопроводность, Вт/(м·К)				
k_1	0,5–0,6	5–8	0,14	0,5
k_2	0,4–0,6	1–2	0,012	0,2

Примечание. Индексы в показателях обозначают направление: 1 – армирования; 2 – трансверсальное.

7. Типичные характеристики стеклопластиков в изделиях, получаемых различными методами

Показатель	Литье под давлением	Прессование, термоформование	Контактное формование	Прессование	Пулпрузия	Намотка	Формование в автоклаве		Прессование
	ПА	ПП	Полиэфир	Полиэфир	Полиэфир	Эпоксид	Эпоксид	ПП	Эпоксид
Вид наполнителя	Длинные волокна	Холст	Холст	Длинные волокна	Ровинг + холст	Нити	Нити	Ровинг	Ткань
$P_{\text{в}}$, % об.	0,3	0,22	0,16	0,47	0,49	0,60	0,59	0,31	0,48
Плотность, г/см ³	1,54	1,26	1,34	1,79	1,86	1,90	1,90	1,40	1,60
Ориентация волокон	Хаотическая	Хаотическая	Хаотическая	Хаотическая	Однонаправленная	Спиральная 1 : 2 (x/y)	Однонаправленная	Однонаправленная	Ортогональная 1 : 1
E_x^+ , ГПа	10,6 ± 0,80	6,2 ± 0,14	7,27 ± 0,55	11,3 ± 0,5	31,2	11,2	47,0 ± 2,7	21,5 ± 1,2	25,2
E_x^- , ГПа	10,3 ± 0,80	–	7,86 ± 0,64	11,4 ± 0,6	31,2	–	45,5 ± 1,6	26,5 ± 1,0	–
E_y^+ , ГПа	7,9 ± 0,34	5,7 ± 0,66	6,64 ± 0,34	11,4 ± 0,6	9,36	18,3	16,4 ± 0,8	3,6 ± 0,1	25,2
E_y^- , ГПа	5,6 ± 0,55	–	7,67 ± 0,60	13,7 ± 0,4	9,36	–	15,9 ± 1,0	4,3 ± 0,5	–
G_{xy} , ГПа	1,6	2,4	2,16	4,8	3,2	10,8	6,0	1,34	4,41
μ_{xy}	0,35 ± 0,06	0,38 ± 0,02	0,39 ± 0,02	0,29 ± 0,01	0,20	0,43	0,28	0,31 ± 0,03	0,14
μ_{yx}	0,22 ± 0,01	0,38 ± 0,03	0,40 ± 0,02	0,30 ± 0,01	0,10	0,71	0,08	0,05 ± 0,01	0,14
σ_x^+ , МПа	137 ± 12	88,6 ± 7,8	81 ± 6	84,7 ± 5,3	483	80	1139 ± 124	425 ± 0,11	317
σ_x^- , МПа	180 ± 4	105 ± 4	168 ± 11	143 ± 8	409	–	759 ± 103	272 ± 16	303
σ_y^+ , МПа	112 ± 7	96,8 ± 8,4	68 ± 5	74,5 ± 1,5	34,9	230	63 ± 5	11,0 ± 0,5	317
σ_y^- , МПа	148 ± 4	104 ± 4	160 ± 14	169 ± 8	92,2	–	213 ± 13	53 ± 4	303
τ_{xy} , МПа	91,4 ± 3,9	55,9 ± 2,5	81 ± 9	76,9 ± 2,0	73,3	190	107	50 ± 2	57

Примечание. E – модули Юнга («+» – при растяжении; «-» – при сжатии); G – модуль сдвига; ν_{xy} и ν_{yx} – коэффициенты Пуассона; σ – разрушающие напряжения при растяжении-сжатии, τ – при сдвиге; x – направление преимущественной ориентации волокон.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ванин, Г. А. Микромеханика композиционных материалов / Г. А. Ванин. – Киев: Наукова думка, 1985. – 302 с.
2. Волков, С. Д. Статистическая механика композитных материалов / С. Д. Волков, В. П. Ставров. – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – 208 с.
3. Гуняев, Г. М. Структура и свойства полимерных композитов / Г. М. Гуняев. – М.: Химия, 1981. – 232 с.
4. Композиционные материалы: в 8 т. – М.: Мир, 1978. – Т. 2: Механика композиционных материалов / под ред. Дж. Сендецки. – 1978. – 566 с.
5. Композиционные материалы: в 8 т. – М.: Мир, 1978. – Т. 5: Разрушение и усталость / под ред. Л. Браутмана. – 1978. – 486 с.
6. Композиционные материалы: справочник / под ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
7. Кортен, Х. Т. Разрушение армированных пластиков / Х. Т. Кортен. – М.: Химия, 1967. – 168 с.
8. Кравчук, А. С. Механика полимерных композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы / А. С. Кравчук, В. П. Майборода, Ю. С. Уржумцев. – М.: Наука, 1985. – 304 с.
9. Кристенсен, Р. М. Введение в механику композитов / Р. М. Кристенсен. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
10. Малмейстер, А. К. Сопротивление полимерных и композитных материалов / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. – 3-е изд. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
11. Механика композиционных материалов и конструкций: в 3 т. – Киев: Наукова думка, 1982–1983. – Т. 1: Механика материалов / А. Гузь [и др.]. – 1982. – 368 с.
12. Мэттьюз, Ф. Композитные материалы. Механика и технология / Ф. Мэттьюз, Р. Ролингс. – М.: Техносфера, 2004. – 408 с.
13. Победря, Б. Е. Механика композиционных материалов / Б. Е. Победря. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
14. Рабинович, А. Л. Введение в механику армированных полимеров / А. Л. Рабинович. – М.: Наука, 1970. – 482 с.
15. Скудра, А. М. Структурная теория армированных пластиков / А. М. Скудра, Ф. Я. Булавс. – Рига: Зинатне, 1978. – 192 с.
16. Соколкин, Ю. В. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел / Ю. В. Соколкин, А. А. Ташкинов. – М.: Наука, 1984. – 116 с.

17. Ставров, В. П. Механика композиционных материалов: учеб. пособие / В. П. Ставров. – Минск: БГТУ, 1996. – 164 с.
18. Ставров, В. П. Механика и технология композиционных материалов с термопластичной полимерной матрицей / В. П. Ставров // Материалы, технологии, инструменты. – 2005. – Т. 10, № 4. – С. 94–100.
19. Тарнопольский, Ю. М. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков / Ю. М. Тарнопольский, А. М. Скудра. – Рига: Зинатне, 1966. – 260 с.
20. Черепанов, Г. П. Механика разрушения композитных материалов / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.
21. Шермергор, Т. Д. Теория упругости микронеоднородных тел / Т. Д. Шермергор. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
22. Composite engineering handbook / ed. P. K. Mallik. – N.Y.: M. Dekker, 1997. – 1239 p.
23. Comprehensive composite materials. Vol. 2: Polymer matrix composites. – Oxford: Elsevier, 2000. – 759 p.
24. Tsai, S. W. Composites design / S. W. Tsai. – 4th ed. – Think composites: Dayton, 1988. – 629 p.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адекватность модели 100
- Анизотропия 44
- Вектор 13
 - напряжения 24
 - перемещения 33
- Время
 - запаздывания 66
 - релаксации 67
- Вязкое течение 71
- Вязкость 65, 73
 - изотропной жидкости 73
 - ньютоновская 73
 - препрега 240
 - суспензии 239
 - эффективная 76
- Градиент поля 19
- Давление 71
- Движение по Лагранжу и Эйлеру 33
- Деформации 33
 - вязкоупругие 64
 - главные 36
 - объемные 36
 - температурные 37
 - усадочные 37
- Дисперсия случайной величины 92
- Дифференцирование тензорной функции 19
- Доля компонента
 - массовая 88
 - объемная 88
- Задача
 - линейной термоупругости 63
 - теории упругости 55
 - динамическая 64
 - статическая 55
- Закон
 - Аррениуса 75
 - Гука 39
 - распределения случайной величины 91
 - Вейбулла 92
 - логарифмически нормальный 93
 - сохранения
 - массы 72
 - энергии 74
 - течения 75
 - Балкли – Гершеля 76
 - Бингама – Шведова 77
 - Керри 76
 - степенной (Оствальда – де-Вила) 76
 - Изгиб стержня
 - анизотропного упругого 59
 - вязкоупругого 68
 - Измерение углов 98
 - Инварианты тензора
 - деформаций 36
 - напряжений 26
 - Кинетика разрушения 187, 211
 - Композиционный материал 10
 - армированный 86
 - волокнистый 86
 - слоистый 87
 - наполненный 87, 149
 - с тканым наполнителем 145
 - трансверсально-изотропный 46
 - Композиция 239
 - Компоненты
 - КМ 86
 - тензора 16

Коэффициент
 – вариации 92
 – влияния 51
 – – Ченцова 51
 – консистенции 76
 – интенсивности напряжений 227
 – проницаемости 231
 – Пуассона 41
 – теплопроводности 159
 – увеличения деформаций 165
 Критерий
 – Бейли 219
 – прочности 194
 Круговая диаграмма Мора 31
 Материал композиционный
 – анизотропный 44
 – квазиизотропный 88, 111
 – изотропный 41
 – ортотропный 44, 88
 – с тканым наполнителем 107
 – слоистый 87
 – трансверсально-изотропный 46
 Матрица КМ 10
 Матрица
 – жесткостей 40, 48
 – упругих податливостей 41, 49
 Макродеформации 35
 Макронапряжения 23
 Макроструктура КМ 87
 Масштабный эффект 171, 189
 Математическое ожидание 92
 Метод
 – вариационный 57, 119
 – Лауна 82
 – детерминистический 118
 – осреднения 122, 136, 146
 – статистический 119
 – функций Грина 58
 Микродеформации 35
 Микронапряжения 23
 Микроповрежденность 187
 Микроструктура КМ 87, 98
 Модель
 – адекватная 100
 – вязкоупругости 65
 – Гриффитса 226
 – Кармана – Козени 231
 – Келли – Тайсона 209
 – Лиза 210
 – Максвелла 65
 – линейно-упругая 65
 – линейно-вязкая 65
 – «первого порядка» 241
 – регулярная 99
 – сеточная 123, 134
 – стандартного вязкоупругого тела Кельвина 67
 – статистическая 99
 – структуры 98
 Модуль
 – длительный 67
 – мгновенный 67
 – объемной деформации 43
 – сдвига 43
 – упругости (Юнга) 41
 Напряжение
 – главное 25
 – касательное 24
 – нормальное 24
 – октаэдрическое 28
 Напряженное состояние
 – в точке 21
 – объемное 30
 – плоское 30, 58
 – трубы 61
 Однородность структуры 105
 Оператор
 – Гамильтона 19
 – Лапласа 73
 Определитель преобразования 20

Ориентация частиц 95
 Оси симметрии структуры 44
 Перколяция 231
 Плотность КМ 89
 Погрешность оценки степени
 наполнения 102
 Ползучесть 67
 Постоянные упругости 41
 – анизотропного тела 44
 – Ламе 43
 – технические 45
 Предел текучести 77
 Предельная поверхность
 прочности 196
 Прочность
 – адгезионная 164
 – пучка волокон 175
 Расход жидкости 78, 233
 Распределение
 – Вейбулла 94, 174
 – логарифмически нормальное 93
 – размеров частиц 91
 – углов 97
 Растяжение
 – одноосное 30
 – вязкоупругого стержня 65
 Релаксация напряжений 66
 Реономные свойства 65
 Решение в реализациях 166
 Ротор векторного поля 19
 Символ
 – Кронекера 13
 – Леви – Чивита 15
 Система координат
 – прямоугольная 13
 – сферическая 20
 Скорость
 – деформации 72
 – нагружения 215
 – сдвига 75
 Случайное поле микроструктуры 103
 Степень
 – анизотропии 113, 114
 – армирования 87
 – наполнения 100
 Структура КМ 86
 – однонаправленная 87
 – однородная 105
 – ориентированная 111
 – хаотическая 87
 Температура 214
 Температурный коэффициент
 линейного расширения 38, 155
 Тензор 16
 – антисимметричный 18
 – вращения 34
 – деформаций 33
 – дисторсии 34
 – модулей упругости 39
 – напряжений 21
 – ориентации 97
 – проницаемости 231
 – симметричный 18
 – упругих податливостей 39
 – шаровой 18
 Теорема Остроградского –
 Гаусса 20
 Теплоемкость удельная 159
 Теплопроводность 63, 159
 Термоупругость 54
 Течение вязкой жидкости 71
 – в канале 79
 – в плоской щели 77
 – при продольном сдвиге 80
 – диска между плитами 81
 Течение композиций 239
 – в плоскости армирования 245
 – при межслойном сдвиге 247
 – при сжатии полосы 242
 Углы Эйлера 96

Угол сдвига 36
Ударное нагружение 223
Уравнение
– Бельтрами – Митчела 56
– Бернулли 74
– Дюамеля – Неймана 54
– Коши 34
– Навье – Стокса 73
– неразрывности 72
– Пэриса – Эрдогана 230
– равновесия 29
– сохранения энергии 74
– статической задачи теории упругости 55
– физическое 73
– теплопроводности 63
– Эйлера 73
Условие
– граничное 55
– ортогональности 16, 27
– совместности деформаций 37
Усталостная прочность 220
Фильтрация 231
Формула Пуазейля 79
Функция
– Грина 57
– корреляционная 104
– моментная 103
– напряжений (Эри) 53
Частица
– анизотричная 86
– изометричная 86
Элемент структуры 86
Энергия активации
– вязкого течения 75
– упругой деформации 40
Эффективная длина волокна 64
Ядро
– ползучести 70
– релаксации 70
Ячейка Вороного 101

ОСНОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

KM	– композиционный материал
A	– площадь
$\mathbf{a} = (a_{ij})$	– тензор ориентации
B, b	– ширина
$\mathbf{C} = (C_{ijmn})$	– тензор модулей упругости
C_i	– массовая доля компонента i
$\mathbf{c} = (c_{ij})$	– матрица жесткости и ее составляющие
c	– скорость звука
c_p	– удельная теплоемкость
d	– диаметр
D_δ	– дисперсия случайной величины δ
E	– модуль упругости (модуль Юнга); длительный модуль
E^+, E^-	– модули упругости при растяжении и сжатии
F	– сила
$F_\delta(x)$	– функция распределения случайной величины δ
$f_\delta(x)$	– плотность распределения случайной величины δ
G	– модуль сдвига
g	– ускорение силы тяжести
H	– мгновенный модуль
h	– расстояние, толщина образца (слоя)
$\mathbf{K} = (K_{ij})$	– тензор коэффициентов проницаемости пористой среды
K	– модуль объемной деформации
K_{1c}	– вязкость разрушения
$\mathbf{k} = (k_{ij})$	– коэффициенты теплопроводности
$\mathbf{I} = (\delta_{ij})$	– единичный тензор второго ранга и символы Кронекера
L	– постоянная Ламе
L, l	– длина
l_{ij}	– косинусы углов между осями координат
M	– масса
m, q	– параметры распределения Вейбулла
\mathbf{n}	– единичный вектор внешней нормали к поверхности
P_i	– объемная доля компонента i
p	– давление
$\mathbf{Q} = (Q_{ij})$	– матрица жесткости
Q	– мера поврежденности; объемный расход жидкости

\mathbf{q}	– плотность теплового потока
R, r	– радиус
R_{ij}, R_{ijmn}	– компоненты тензоров прочности
$\mathbf{S} = (S_{ijmn})$	– тензор упругих податливостей
$\mathbf{s} = (s_{ij})$	– матрица упругих податливостей
s_δ	– среднее квадратическое отклонение случайной величины δ
T	– температура
t	– время
U	– удельная энергия
$\mathbf{u} = (u_i)$	– перемещение
V	– объем
V_δ	– коэффициент вариации случайной величины δ
ν	– степень армирования слоистого КМ
$x_i; x, y, z$	– оси прямоугольной системы координат, координаты ($i = 1-3$)
$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{ij})$	– тензор температурных коэффициентов линейного расширения
β_{ij}	– коэффициенты линейной усадки
γ	– угол сдвига
$\dot{\gamma}$	– скорость сдвига
Δ	– отклонение, приращение; оператор Лапласа
$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})$	– тензор деформаций
ε_{ijk}	– компоненты тензора Леви-Чивита
θ	– относительная объемная деформация
θ, φ	– углы сферической системы координат
$\boldsymbol{\theta} = (\theta_{ijmn})$	– тензор случайных модулей упругости
$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{ij})$	– тензор случайных косинусов углов между осями координат
μ	– ньютоновская вязкость, коэффициент консистенции
μ_{xy}	– коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение по оси x при растяжении по оси y
Π	– объемное содержание пор (пористость)
ρ	– плотность
$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$	– тензор напряжений
$\sigma^+; \sigma^-$	– разрушающее напряжение при растяжении и сжатии
τ	– касательное напряжение
∇	– дифференциальный оператор Гамильтона

ОГЛАВЛЕНИЕ

Основные сокращения и обозначения	5
Предисловие	7
Введение	10
1. Напряженное и деформированное состояние	13
1.1. Векторы и тензоры	13
1.2. Тензор напряжений	21
1.3. Тензор деформаций	32
1.4. Обобщенный закон Гука	39
1.5. Задачи теории упругости	55
1.6. Вязкоупругие деформации	64
1.7. Вязкое течение	71
2. Структура	86
2.1. Характеристики	86
2.2. Модели структуры	98
3. Жесткость	116
3.1. Задачи и методы прогнозирования	116
3.2. Однонаправленно армированные волокнистые композиты.....	128
3.3. Слоистые композиты	134
3.4. Композиты с тканым наполнителем	145
3.5. Материалы, наполненные частицами	149
3.6. Термоупругие и теплофизические характеристики	155
4. Микромеханика разрушения	162
4.1. Напряженное и деформированное состояние элементов структуры.....	162
4.2. Прочность компонентов.....	170
4.3. Прочность однонаправленного волокнистого композита	177
4.4. Микроповрежденность и кинетика разрушения	187
5. Прочность	194
5.1. Прочность при сложном напряженном состоянии	194

5.2. Прочность слоистых материалов	203
5.3. Прочность материалов, хаотически армированных волокнами	207
5.4. Влияние условий нагружения и внешних факторов	215
5.5. Равновесие тел с трещинами	226
6. Реология	231
6.1. Проницаемость волокнистой системы	231
6.2. Вязкое течение композиций	239
Приложения.....	249
Литература.....	255
Предметный указатель.....	257