УДК 517.977

А. А. Якименко
Белорусский государственный технологический университет

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В публикации рассматривается достаточное условие стабилизации для стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию. Дается определение задачи стабилизации для исследуемой системы. Показано, что при выполнении определенных условий и с определенными регуляторами исследование системы нейтрального типа можно заменить исследованием эквивалентной ей системы запаздывающего типа. Системы запаздывающего типа гораздо более просты для изучения, чем системы нейтрального типа. Были получены различные достаточные условия для их стабилизации, одно из которых применено к рассматриваемой системе нейтрального типа.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, запаздывающие системы, стабилизация, регуляторы, обратная связь, запаздывание.

A. A. Yakimenka
Belarusian State Technological University

SUFFICIENT CONDITION OF STABILIZATION FOR ONE NEUTRAL TYPE SYSTEM

The article obtained a sufficient stabilization condition for a stationary dynamical system with a delayed argument of neutral type with one input and one delay by state. The definition of the stabilization problem for the system under study is given. It is shown that, under certain conditions and with certain regulators, the study of a neutral type system can be replaced by a study of an equivalent system of a delayed type. Delayed systems are much simpler to learn than neutral systems. Various sufficient conditions were obtained for their stabilization, one of which was applied to the considered system of neutral type.

Key words: neutral type systems, delayed systems, stabilization, regulators, feedback control, lag.

Введение. Задача стабилизации является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа [1–9] решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. В свою очередь, исследование запаздывающих систем проще, чем систем нейтрального типа. Такие системы исследованы гораздо более полно, чем системы нейтрального типа. В статье предлагается способ перехода от изучения системы нейтрального типа к изучению системы запаздывающего типа.

Основная часть. Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t),\ t > 0, \tag{1}$$

где $A_i, i = 0, 1, 2$ – постоянные ($n \times n$)-матрицы; $h > 0$ – постоянное запаздывание; b – ненулевой n-вектор. Не ограничивая общности, считаем $b' = [0, 0, \dots, 0, 1]$ («$'$» означает транспонирование).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t)=q'_{00}x(t)+\sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{M}q'_{ij}x^{(i)}(t-jh), \qquad (2)$$

где q_{00}, q_{ij} – 2-векторы; $M\in\mathbb{N}$; $L\in\mathbb{Z}$, $L\geq 0$;

$$x^{(i)}(t)\overset{def}{=}\frac{d^i}{dt^i}x(t),\ \ x^{(0)}(t)\equiv x(t).$$

Определение. Система (1) стабилизируема регулятором вида (2), если найдется такой регулятор, при котором нулевое решение замкнутой системы (1), (2) будет устойчиво по Ляпунову или асимптотически устойчиво.

Пусть выполнено условие

$$\det\left[b,\ A_2b,\ A_2^2b,\ \ldots,\ A_2^{n-1}b\right]\neq 0. \qquad (3)$$

Из (3) следует, что векторы $b,\ A_2b,\ A_2^2b,\ \ldots,$ $A_2^{n-1}b$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, имеет место разложение

$$A^nb=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_iA^ib. \qquad (4)$$

Рассмотрим матрицу $T=\left[t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n\right]$, где

$$t_n=b;$$

$$t_{n-1}=Ab-\alpha_{n-1}b;$$

$$t_{n-2}=A^2b-\alpha_{n-1}Ab-\alpha_{n-2}b;$$

$$\vdots$$

$$t_{n-j}=A^jb-\alpha_{n-1}A^{j-1}b-\alpha_{n-2}A^{j-2}b-\cdots-\alpha_{n-j}b;$$

$$j=0,1,\ldots,n-1.$$

Очевидно, что

$$\det T=\det\left[b,\ A_2b,\ A_2^2b,\ \ldots A_2^{n-1}b\right]\neq 0.$$

Введем новый вектор переменных y по формуле $x=Ty$. Несложно убедиться, что с новыми переменными система (1) перепишется в эквивалентной форме:

$$\dot y(t)=\tilde A_0y(t)+\tilde A_1y(t-h)+ + \tilde A_2\dot y(t-h)+bu(t), \qquad (5)$$

где $\tilde A_0=T^{-1}A_0T$, $\tilde A_1=T^{-1}A_1T$, а матрица $\tilde A_2$ имеет вид

$$\tilde A_2=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1\\\alpha_0&\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\alpha_{n-2}&\alpha_{n-1}\end{bmatrix},$$

где α_i, $i=0,1,\ldots,n-1$ – определены по формуле (4). Возьмем в системе (5) в качестве регулятора $u(t)$ следующий регулятор:

$$u(t)=\left[-\alpha_0\quad -\alpha_1\quad \cdots\quad -\alpha_{n-1}\right]\times \times\left[\dot y_1(t-h)\quad \dot y_2(t-h)\quad \cdots\quad \dot y_n(t-h)\right]'+u_1(t).$$

Тогда система (5) перепишется в виде

$$\dot y(t)=\tilde A_0y(t)+\tilde A_1y(t-h)+\bar A_2\dot y(t-h)+bu_1(t), \qquad (6)$$

где $\bar A_2$ имеет вид

$$\bar A_2=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}.$$

Перенесем слагаемое $\bar A_2\dot y(t-h)$ в левую часть системы (6). Тогда (6) перепишется в виде

$$D\dot y(t)=\tilde A_0y(t)+\tilde A_1y(t-h)+bu_1(t), \qquad (7)$$

где

$$D=\begin{bmatrix}1&-m&0&\cdots&0&0\\0&1&-m&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-m&0\\0&0&0&\cdots&1&-m\\0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix},$$

m – оператор сдвига $\left(mx(t)=x(t-h)\right)$. Очевидно, что $\det D=1$. Тогда матрица D^{-1} существует и имеет вид

$$D^{-1}=\begin{bmatrix}1&m&m^2&\cdots&m^{n-2}&m^{n-1}\\0&1&m&\cdots&m^{n-3}&m^{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\vdots&m^2&m^3\\0&0&0&\cdots&1&m\\0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}.$$

Умножим обе части соотношения (7) слева на матрицу D^{-1}. Тогда (7) в операторном виде перепишется

$$\dot{y}(t)=\overline{A}(m)y(t)+\overline{b}(m)u_1(t), \qquad (8)$$

где $\overline{A}(m)=\sum_{i=1}^{n}\overline{A}_i m^i$, элементы матриц $\overline{A}_i$ однозначно выражаются через элементы матриц $\tilde{A}_0$ и $\tilde{A}_0$ из (7), вектор $\overline{b}(m)$ имеет вид

$$\overline{b}(m)=\begin{bmatrix} m^{n-1} & m^{n-2} & \cdots & m & 1\end{bmatrix}'.$$

Система (8) является системой запаздывающего типа с запаздываниями как по состоянию, так и по управлению. Такие системы исследовались многими авторами. В частности, в работе [4] было получено достаточное условие стабилизации для системы (8):

Система (8) будет стабилизируема, если корни уравнения относительно $m\in\mathbb{C}$

$$\det\left[\overline{b}(m),\,\overline{A}(m)\overline{b}(m),\,\ldots,\,\overline{A}^{n-1}(m)\overline{b}(m)\right]=0$$

будут лежать вне круга $|m|\le 1$.

Если $u_1(m,\,y)$ – регулятор вида (2), стабилизирующий систему (8), то регулятор

$$u(m,\,y)=\begin{bmatrix}-\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1}\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} m\dot{y}_1(t) & m\dot{y}_2(t) & \cdots & m\dot{y}_n(t)\end{bmatrix}'+u_1(m,\,y)$$

стабилизирует систему (5). Тогда регулятор $u\left(m,\,T^{-1}x\right)$ стабилизирует систему (1).

Замечание. Такой метод исследования стабилизации системы нейтрального типа может быть обобщен и на большее число запаздываний, кратных h.

Пример. Исследуем на стабилизируемость следующую систему нейтрального типа

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+A_1x(t-h)+$$

$$+A_2x(t-2h)+A_3\dot{x}(t-h)+bu(t),\ t>0,$$

где

$$A_0=\begin{bmatrix}-7{,}5 & -0{,}25 & -3\\ -21 & 1{,}5 & -6\\ 19{,}5 & -1 & 6\end{bmatrix};$$

$$A_1=\begin{bmatrix}6{,}5 & 1{,}5 & 4\\ 2{,}5 & 3{,}75 & 5\\ -12{,}25 & -3{,}25 & -8\end{bmatrix};$$

$$A_2=\begin{bmatrix}3{,}25 & -2 & -1\\ 4 & -2{,}25 & -1\\ -7{,}25 & 4{,}25 & 2\end{bmatrix};\ A_3=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & -3 & 4\end{bmatrix};\ b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Условие (3) для матрицы A_3 примет вид

$$\det\left[b,\,A_3b,\,A_3^2b\right]=\det\begin{bmatrix}0 & 1 & 7\\ 0 & 2 & 13\\ 1 & 4 & 13\end{bmatrix}=-1\ne 0.$$

Нетрудно убедиться, что матрица T имеет вид

$$T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}.$$

Регулятор в системе (5) примет вид

$$u(t)=\begin{bmatrix}-7 & 16 & -7\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\dot{y}_1(t-h) & \dot{y}_2(t-h) & \dot{y}_3(t-h)\end{bmatrix}'+u_1(t).$$

Матрица $\overline{A}(m)$ в (8) примет вид

$$\overline{A}(m)=\begin{bmatrix}2+m & 2+m & 0\\ -\frac{11}{4}-\frac{3}{4}m & 1-2m & -3+m\\ -\frac{13}{4}-m & \frac{1}{2}-\frac{9}{4}m & -3+m\end{bmatrix}.$$

Достаточное условие стабилизируемости: корни уравнения

$$\det\left[\overline{b}(m),\,\overline{A}(m)\overline{b}(m),\,\ldots,\,\overline{A}^{n-1}(m)\overline{b}(m)\right]=0$$

лежат вне круга $|m|\le 1$ на комплексной плоскости. Для нашего примера векторы имеют вид

$$\overline{b}(m)=\begin{bmatrix}m^2\\ m\\ 1\end{bmatrix};$$

$$\overline{A}(m)\overline{b}(m)=\begin{bmatrix}2m+3m^2+m^3\\ -3+2m-\frac{19}{4}m^2-\frac{3}{4}m^3\\ -3+\frac{3}{2}m-\frac{11}{2}m^2-m^3\end{bmatrix};$$

$$A^2(m)\overline{b}(m)=\begin{bmatrix}-6+5m+\frac{1}{2}m^2-\frac{5}{4}m^3+\frac{1}{4}m^3\\ 6-5m-\frac{1}{2}m^2+\frac{5}{4}m^3-\frac{1}{4}m^3\\ \frac{15}{2}-\frac{25}{4}m-\frac{5}{8}m^2+\frac{25}{16}m^3-\frac{5}{16}m^3\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\det\left[\overline{b}(m),\,\overline{A}(m)\overline{b}(m),\,A^2(m)\overline{b}(m)\right]=$$

$$=-\frac{1}{64}(m+2)(m-3)^2(m-2)^6=0.$$

Очевидно, что корни этого уравнения $m_1 = -2$, $m_2 = 3$ (кратности 2) и $m_3 = 2$ (кратности 6) лежат вне круга $|m| \leq 1$ на комплексной плоскости.

Заключение. В статье получен способ преобразования системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа в систему запаздывающего типа. Это возможно при выполнении условия (3). Для полученной системы применены известные достаточные условия стабилизируемости. С использованием обратных преобразований получено новое достаточное условие стабилизируемости для рассматриваемой системы. Также рассмотрен иллюстративный пример.

Литература

1. Марченко В. М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Доклады Академии наук БССР. 1978. № 5. С. 401–404.

2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London: Pitman Press, 1984. 362 p.

3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1967. Vol. AC-12, no. 6. P. 660–665.

4. Кириллова Ф. М., Марченко В. М. Функциональные преобразования и некоторые канонические формы в линейных системах с запаздывающим аргументом. Минск, 1978. 28 с. (Препринт / Акад. наук Белорус. сов. социалист. респ., № 7 (39)).

5. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems // Circuits Systems Signal Process. 1986. Vol. 5, no. 1. P. 69–84.

6. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.

7. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.

8. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 25–27.

9. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае при кратных корнях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 1 (206). С. 5–8.

References

1. Marchenko V. M. On problem of modal control in linear systems with delay. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Reports of the BSSR Academy of Science], 1978, no. 5, pp. 401–404 (In Russian).

2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London, Pitman Press, 1984. 362 p.

3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1967, vol. AC-12, no. 6, pp. 660–665.

4. Kirillova F. M., Marchenko V. M. *Funktsional'nyye preobrazovaniya i nekotoryye kanonicheskiye formy v lineynykh sistemakh s zapazdyvayushchim argumentom* [Functional transforms and some canonical forms for linear retarded systems]. Minsk, 1978. 28 p. Preprint; Institute of mathematics AS BSSR, no. 7 (39).

5. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems. *Circuits Systems Signal Process*, 1986, vol. 5, no. 1, pp. 69–84.

6. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 3–7 (In Russian).

7. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 18–21 (In Russian).

8. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 25–27 (In Russian).

9. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case with double roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1, pp. 5–8 (In Russian).

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliaksandravich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила 20.11.2018