

УДК 625.711.84

П. А. Протас, кандидат технических наук, доцент (БГТУ)

### ПРИМЕНЕНИЕ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ БОЛЬЦМАНА – ВОЛЬТЕРРА ДЛЯ ОЦЕНКИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЛЕСОТРАНСПОРТНЫХ ПУТЕЙ

В работе дана методика и обоснована целесообразность применения наследственной теории упругости Больцмана – Вольтерра для оценки напряженно-деформированного состояния лесотранспортных путей. Применение результатов исследований позволит разработать рекомендации по использованию лесных машин, проектированию и содержанию лесотранспортных путей с учетом их эксплуатационно-экологической совместимости с лесной средой.

In this work the method and the feasibility Boltzmann – Volterr's hereditary theory of elasticity are given and proved to estimate the stress-strain state of the log transporting ways. Application of research will develop recommendations for the use of forest machinery, design and content log transporting ways according to their operational and environmental compatibility with the forest environment.

**Введение.** Лесотранспортный путь, включая трелевочный волок, можно представить как вязкоупругое слоистое полупространство, нагруженное осесимметричной нагрузкой от колеса лесотранспортной (лесозаготовительной) машины. При воздействии движителей в грунтовом основании лесотранспортных путей возникают напряжения и деформации, для оценки которых может быть применена задача, когда грунт работает в упругой фазе, без учета фактора времени [1]. Однако в лесных грунтах, имеющих низкую несущую способность, появляются деформации ползучести, в связи с чем необходимо учитывать время нагружения [2].

**Основная часть. Оценка напряженно-деформированного состояния лесотранспортных путей.** При небольших изменениях внешних давлений (0,5–0,7 МПа) грунты рассматриваются как линейно деформируемые тела, то есть с достаточной для практических целей точностью можно принимать зависимость между общими деформациями и напряжениями для грунтов линейной. Напряженно-деформированное состояние грунта изменяется во времени, что является результатом реологических свойств грунта – его ползучести при нагрузке. Деформируемость дисперсных грунтов во времени вполне описывается линейной теорией наследственной упругости (ползучести) Больцмана – Вольтерра [3], согласно которой связь между напряжениями и деформациями можно показать уравнением

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right], \quad (1)$$

где  $\varepsilon(t)$  – относительная деформация;  $E$  – модуль упругости, МПа;  $\sigma$  – напряжение, МПа;  $K(t-\tau)$  – ядро ползучести, или ядро интегрального уравнения, представляющего функцию влияния напряжений  $\sigma(\tau)$  в момент времени  $\tau$

на деформацию в момент времени  $t$ ,  $1/c$ ;  $t$  – время наблюдения, с;  $\tau$  – время, предшествующее моменту наблюдения, с.

Ядро в уравнении (1) также называют ядром наследственности, которое характеризует степень «забывания» к моменту времени  $t$  о тех воздействиях, которые были совершены в момент времени  $\tau$ . Поэтому если свойства материала во времени не меняются, то мера «памяти» и «забывания» зависит от разности  $t - \tau$ .

Задача определения напряжений и перемещений, возникающих в грунтовом полупространстве от сосредоточенной силы, является осесимметричной, ее решение производят в цилиндрической системе координат через функцию напряжений  $\varphi = \varphi(r, z)$ . Согласно теории упругости, напряжения через функцию  $\varphi$  записываются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right); \quad \sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left( (2-\mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\theta$  – нормальные напряжения, действующие соответственно по площадкам, перпендикулярным осям  $r$  и  $z$  и касательной к окружности радиуса  $r$ ;  $\mu$  – коэффициент Пуассона грунта;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа, который в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Геометрическая сторона задачи (деформации) запишется уравнениями:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3)$$

где  $u$  – горизонтальные перемещения грунта (по оси  $r$ ), м;  $w$  – вертикальные перемещения грунта (по оси  $z$ ), м.

Если нагрузка за время ее действия не меняется, связь между деформацией и напряжениями записывается как

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \sigma \left[ 1 + \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right].$$

Уравнение позволяет по заданному закону изменения напряжений во времени определить закон изменения деформаций.

Так как уравнение линейное, то, исходя из принципа суперпозиции, при объемном напряженном состоянии будем иметь:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{E} [\sigma_0 - \mu(\sigma_r + \sigma_z)] \cdot \left[ 1 + \int_0^t K(t-\tau) d\tau \right]. \quad (4)$$

Подставив в уравнение (4)  $\sigma$  согласно (2), получим

$$\varepsilon_0 = \frac{(-1+\mu)}{rE} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} \left[ 1 + \int_0^t K(t-\tau) d\tau \right].$$

Согласно (3), сделав соответствующие преобразования, получим горизонтальные и вертикальные перемещения (деформации) грунта:

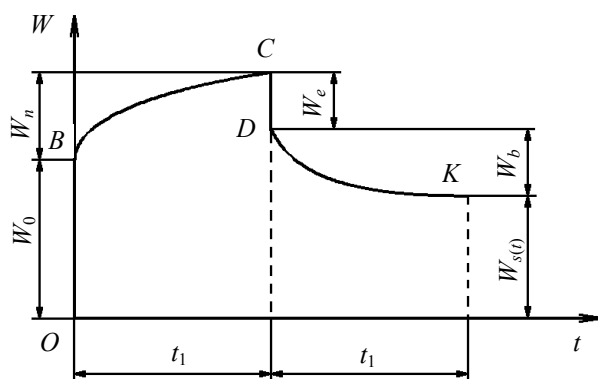
$$U = \frac{F(1+\mu)}{2\pi E_0 R} \left( \frac{rz}{R^2} - (1-2\mu) \frac{r}{R+z} \right) \left( 1 + \frac{\delta_0}{\beta_0} (1 - e^{-\beta_0 t}) \right);$$

$$W = \frac{F(1+\mu)}{2\pi E_0 R} \left( \frac{z^2}{R^2} + 2(1-\mu) \right) \left( 1 + \frac{\delta_0}{\beta_0} (1 - e^{-\beta_0 t}) \right),$$

где  $F$  – нагрузка от движителя на грунт, Н;  $\delta_0$  и  $\beta_0$  – параметры, характеризующие общую деформацию ползучести грунта, 1/с (определяются из опытов на ползучесть);

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

Характер возникновения вертикальных перемещений (деформаций) приведен на рисунке.



Деформации грунтового основания при однократном нагружении

Если нагрузка и разгрузка периодически повторяются, то при  $N$  циклах остаточные перемещения определяются формулой

$$W_s^*(N) = \frac{q(1-\mu^2)}{\pi} J \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{E_{0(i)}} \left( 1 + \frac{\delta_{0(i)}}{\beta_{0(i)}} (1 - e^{-\beta_{0(i)} t_i}) \right) - \frac{1}{E_i} \left( 1 + \frac{\delta_i}{\beta_i} (1 - e^{-\beta_i t_i}) \right) \right],$$

где  $q$  – интенсивность сплошной нагрузки от давления движителя, МПа;  $J$  – интеграл, зависящий от геометрической формы площади, по которой распределена нагрузка, м;  $E_{0(i)}$ ,  $E_i$  – соответственно модуль общей деформации и модуль упругости при  $i$ -м цикле, МПа;  $\delta_{0(i)}$ ,  $\beta_{0(i)}$  – параметры, характеризующие общую деформацию ползучести при  $i$ -м цикле, 1/с;  $\delta_i$ ,  $\beta_i$  – параметры, характеризующие вязкоупругую деформацию при  $i$ -м цикле, 1/с.

**Заключение.** В данной работе приведена методика оценки напряженно-деформированного состояния лесотранспортных путей, согласно которой в качестве решения принимается интегральное уравнение с наследственным разностным ядром. Это позволяет определять деформации в дорожных конструкциях, выполненных с применением вязкоупругих материалов. Разработанный метод позволяет также производить оценку многослойных конструкций лесотранспортных путей, для чего требуется знать величины вязкоупругих параметров используемых в конструкции материалов.

Применение результатов исследований позволит разработать рекомендации по эксплуатации лесных машин, проектированию и содержанию лесотранспортных путей с учетом их эксплуатационно-экологической совместимости с лесной средой.

## Литература

1. Туроверов, К. К. К вопросу исследования напряженного и деформированного состояния упругого слоистого полупространства / К. К. Туроверов // Труды Ленинградской лесотехн. акад. – 1962. – Вып. 94. – С. 87–101.
2. Федоренчик, А. С. Аналитическое исследование колеобразования на трелевочных волоках, укрепленных отходами лесозаготовок / А. С. Федоренчик, С. С. Макаревич, П. А. Протас // Изв. вузов. Лесной журнал. – 2002. – № 1. – С. 80–89.
3. Вырко, Н. П. Обеспечение круглогодичной работы лесовозного автотранспорта на вывозке заготовленного леса: дис. ... д-ра техн. наук: 05.21.01 / Н. П. Вырко. – Минск, 1999. – 326 л.

Поступила 26.02.2013