

Представление задачи вакуумирования древесины в безразмерном виде (4) — (9) позволяет существенно расширить область применения расчетных зависимостей.

В качестве примера был выполнен расчет на ЭВМ безразмерного давления θ от ряда безразмерных параметров. В качестве исходных параметров использовались конкретные данные вакуумирования березы: $M = 0,1 \text{ м}^3/\text{с}$; $V_0 = 6,8 \text{ м}^3$; $k = 2,4 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2$; $\xi = 10^4$; $R = 8,3 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}$; $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$; $a = 1,53 \text{ Н/с}$; $T = 293 \text{ К}$; $\Pi = 0,64$; $P_0 = 10^5 \text{ Па}$. При этом параметр $L = 0,1$.

Результаты расчета зависимости $F_0(S)$ для различных значений конечного давления воздуха в автоклаве $P_{\text{ск}}$ и в древесине $P_{\text{к}}$ приведены на рис. 1. На этом же графике нанесены точки, соответствующие результатам выполненного ранее расчета [1] для различных размеров образцов при $P_{\text{ск}} = 5 \text{ кПа}$ и $P_{\text{к}} = 6 \text{ кПа}$ ($\theta_{\text{ск}} = 0,05$; $\theta_{\text{к}} = 1,2 \theta_{\text{ск}}$). Данные точки тесно группируются около кривой, соответствующей таким же значениям $\theta_{\text{ск}}$ и $\theta_{\text{к}}$. Это свидетельствует о хорошем описании процесса моделью, выраженной в критериальной форме. Экспериментальные результаты показывают различие с теоретическим значением 13 %, что является вполне удовлетворительным.

Таким образом, приведенные зависимости можно использовать для расчета продолжительности вакуумирования древесины вдоль волокон различных размеров, пород, качества обработки торцевой поверхности и параметров вакуумного оборудования.

Литература

1. Ш у т о в Г.М. Модифицирование древесины термохимическим способом. Мн., 1982.
2. Л ы к о в А.В. Теплообмен. М., 1972.

УДК 658.512.22:674.093

А.А. ЯНУШКЕВИЧ, канд. техн. наук,
М.И. КУЛАК, канд. физ.-мат. наук,
М.К. ЯКОВЛЕВ (БТИ)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ БРЕВНА БИКУБИЧЕСКИМ СПЛАЙНОМ

В настоящее время существуют разнообразные методы моделирования поверхностей. Среди наиболее общих из них можно отметить большой класс таких, как моделирование на основе аналитических и кусочно-аналитических описаний либо в виде тел вращения и др. Общность этих методов состоит в том, что осуществляется попытка приблизить (заменить) данную поверхность к другой, задаваемой небольшим числом легко определяемых параметров. Сравнительно простые поверхности могут быть воспроизведены таким способом. Существует, однако, достаточное число поверхностей (например, так называемые скульптурные), которые не могут быть в принципе приближены подобными методами либо точность приближения неудовлетворительна.

На протяжении последних тридцати лет плодотворно развиваются методы, основанные на идее построения поверхности путем задания некоторого конечного числа ее точек. Точки, указанные в определенном порядке, обуславливают точечный базис поверхности, на основе которого может быть построен ее каркас — совокупность нескольких (обычно двух) семейств линий. Воспроизведение поверхности производится в соответствии с базисом и существенно зависит от задаваемых дополнительных условий и используемого математического аппарата. Эта группа методов конструирования поверхностей входит ко времени так называемого "плазового проектирования", когда поверхности корпусов судов и самолетов воспроизводились путем построения в натуральную величину параллельных поперечных сечений и продольных кривых, композиция которых давала единую трехмерную форму.

Применение ЭВМ и сплайнов вдохнуло в эти методы новую жизнь, возродив громоздкие чертежные процедуры на новой основе. В этой группе методов можно выделить принадлежащий Кунсу способ конструирования поверхности из криволинейных четырехсторонних порций с помощью их непрерывного "склеивания" по границам, обеспечив гладкость градиентов и даже кривизны. Другим часто применяемым способом является способ бикубических сплайнов, где необходимая степень гладкости обеспечивается уже самим их применением. Следует подчеркнуть принципиальное отличие обоих способов от метода плазирования, заключающееся не столько в использовании другого математического аппарата и автоматизации процесса, сколько в том, что плазовый способ, собственно говоря, дает не поверхность, а набор линий на ней, тогда как методы Кунса и сплайнов позволяют определить положение каждой точки поверхности.

Наиболее универсальный способ моделирования сложных поверхностей — их конструирование на основе бикубических сплайнов, которые вводятся следующим образом. Пусть на плоскости задан прямоугольник $R: [a, b] \times [c, d]$ и двумерная сетка на нем:

$$\Delta = \Delta x + \Delta y; \Delta x: a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b; \Delta y: c = y_1 < y_2 < \dots < y_M = d, \quad (1)$$

разбивающая область R на прямоугольники $R_{ij}: [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]; i = 1, 2, \dots, N-1; j = 1, 2, \dots, M-1$.

Бикубические сплайны возникли как естественное обобщение одномерных кубических сплайнов на двумерный случай, о чем свидетельствует следующее.

Определение [1]. Функция $C(x, y)$ называется бикубическим сплайном на сетке Δ , если: 1) она является бикубическим полиномом на каждом прямоугольнике R_{ij} , т.е.

$$C(x, y) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 a_{ij}^{kl} (x - x_i)^k (y - y_j)^l; \quad (2)$$

$$x, y \in R_{ij}; i = 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, M-1,$$

и 2) $C(x, y)$ принадлежит классу $F^{m,n}[R]$, где $F^{m,n}[R]$ — множество функций $f(x, y)$, имеющих на R непрерывные частные и смешанные производные порядка не выше m , включающие не более n дифференцирований по каждой переменной, т.е. существуют непрерывные производные:

$$\frac{\partial^{(p+q)} C}{\partial x^p \partial y^q} \quad (p + q \leq m, p, q \leq n).$$

Значения $m = 2, n = 1$ определяют так называемые сплайны Эрмита, обладающие минимальным порядком гладкости. Мы будем использовать в дальнейшем бикубические сплайны класса $F^{4,2}[R]$, одномерным аналогом которых являются кубические интерполяционные сплайны дефекта 1, применявшиеся ранее для моделирования элементов, составляющих каркас поверхности бревна [2, 3], и имеющие более высокий по сравнению со сплайнами Эрмита порядок гладкости (второй).

Геометрической моделью поверхности бревна (хлыста) может служить некоторая протяженная двусторонняя поверхность, гомеоморфная конечному цилиндру с замкнутой направляющей. Будем считать, что она представлена своим точечным каркасом — матрицей значений

$$[z_{ij}], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (3)$$

заданных некоторым регулярным образом в узлах сетки (1). Здесь и далее нумерация элементов матриц осуществляется в отличие от традиционной табличной формой, что в строке изменяется первый индекс.

Точечный каркас поверхности может быть образован различным образом. Воспользуемся одним из простейших способов, когда сетка Δ и матрица $[z_{ij}]$ представляют собой значения прямоугольных декартовых координат соответствующих точек поверхности, лежащих на параллельных сечениях ее двумя семействами взаимно ортогональных плоскостей определенного направления, например параллельных координатным плоскостям XOY и XOZ (рис. 1). Задание точечного каркаса позволяет тем или иным способом восстановить сеточный каркас поверхности — два взаимно пересекающихся семейства линий на ней, разбивающих ее на криволинейные четырехугольные клетки. Иногда совокупность координатных линий обоих семейств может быть известна заранее. В этом случае точечный каркас формируется как набор точек их взаимопересечения [1]. Предложенный способ формирования точечного каркаса поверхности бревна задает направление двух семейств координатных линий: первое образовано замкнутыми линиями поперечных сечений, второе представлено образующими боковой поверхности бревна.

Если значения точечного каркаса получены из точных измерений, то естественным способом аппроксимации таких данных является интерполяция. Будем искать интерполирующую функцию в виде сплайна (2) со значениями, заданными матрицей (3) на сетке узлов (1). Так как геометрическая модель поверхности бревна относится к замкнутым поверхностям, то удобно использовать ее параметрическое представление:

$$\vec{r}(t, s) = [X(t, s), Y(t, s), Z(t, s)], \quad (4)$$

где t, s — параметры, связанные соответственно с первым и вторым семействами координатных линий.

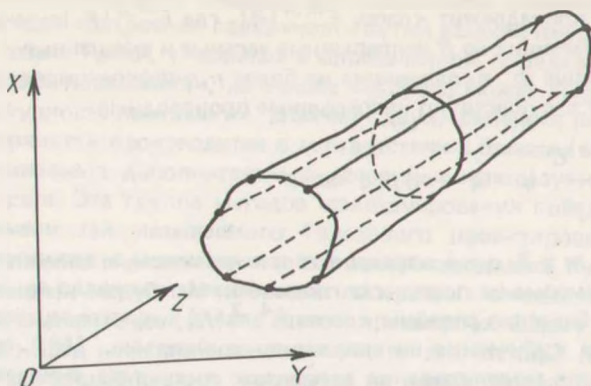


Рис. 1. Каркас поверхности бревна

Параметризация поверхности, заданной узлами точечного каркаса, может быть проведена следующим образом [1]. Из разных семейств выберем два каркасные линии, представленные в дискретно-точечной форме. Вводя для каждой из них параметризацию по суммарной длине хорд [2], получим сетки Δt и Δs , объединение которых дает двухмерную сетку $\Delta = \Delta t + \Delta s$:

$$\Delta t : 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_N = 1; \Delta s : 0 = s_1 < s_2 < \dots < s_M = 1, \quad (5)$$

причем $R : [0, 1] \times [0, 1]$ — единичный квадрат.

Теперь задачу интерполяции поверхности бревна можно переформулировать в новых обозначениях так; найти бикубические сплайны $C_x(t, s)$, $C_y(t, s)$ и $C_z(t, s)$ вида (2) соответственно со значениями $[x_{ij}]$, $[y_{ij}]$ и $[z_{ij}]$, заданными в узлах сетки (5).

Таким образом, моделирование поверхности сводится к построению трех бикубических сплайнов на общей сетке узлов.

Алгоритм построения бикубического сплайна основан на том, что на линиях сетки, например $s = s_j$, $j = 1, 2, \dots, M$, сплайн $C(t, s_j)$ и его частные производные по s являются кубическими сплайнами от переменной t .

Для однозначного определения коэффициентов сплайна требуется задать дополнительные условия на границе области. В данном случае целесообразно выбрать так называемые смешанные граничные условия, а именно, для переменной t взять условия периодичности сплайна $C(t, s)$ и его частных производных по t до порядка 2 включительно, а для переменной s задать значения первых частных производных по s на границах $s = s_1, s_M$ в точках t_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Приводимая ниже схема реализации алгоритма базируется в основном на работе [4]. Прежде всего расположим исходные данные в виде матрицы:

$$[a_{ij}^{00}], \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M+1, \quad (6)$$

где $a_{ij}^{00} = x_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, $j = 1, 2, \dots, M$, т.е. внутренние строки ее содержат условия интерполяции. Внешние строки a_{i0}^{00} , a_{iM+1}^{00} задают указанные вы-

ше граничные условия, т.е. значения производных $X_t(t_r, s_j)$, $i = 1, 2, \dots, N-1, j = 0, M+1$. Дальнейшие вычисления включают три последовательных шага.

Шаг 1. Построим кубические сплайны $C_j(t) = C(t, s_j)$, $j = 1, 2, \dots, M$ по строкам матрицы (6) на сетке узлов Δt [2]. Результаты представим в виде матрицы

$$[a_{ij}^{10}], \quad i = 1, 2, \dots, N-1, j = 0, 1, \dots, M+1, \quad (7)$$

где $a_{i0}^{10} = m_{st}^{i1} = C_{st}''(t_r, s_1)$; $a_{iM+1}^{10} = m_{st}^{iM} = C_{st}''(t_r, s_M)$,

$$a_{ij}^{10} = m_{st}^{ij} = C_t'(t_r, s_j), \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Шаг 2. Построим кубические сплайны $C_i(s) = C(t_r, s)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$ по столбцам матрицы (6) на сетке узлов Δs [3], после чего получим матрицу результатов:

$$[a_{ij}^{01}], \quad i = 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, M, \quad (8)$$

где $a_{ij}^{01} = m_s^{ij} = C_s'(t_r, s_j)$.

Шаг 3. Так как порядок дифференцирования во внутренних строках ($j = 1, 2, \dots, M$) матрицы (7) можно изменить, то легко видеть, что ее столбцы содержат данные для построения сплайнов по s для функций m_{st} на сетке Δs . Результаты построения таких сплайнов образуют матрицу

$$[a_{ij}^{11}], \quad i = 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, M, \quad (9)$$

где $a_{ij}^{11} = m_{ts}^{ij} = C_{ts}''(t_r, s_j)$.

На этом построение одномерных сплайнов заканчивается, и теперь известны все данные для вычисления всех 16 коэффициентов a_{ij}^{kl} сплайна

$$C_x(t, s) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 a_{ij}^{kl} (t - t_r)^k (s - s_j)^l \quad (10)$$

в любой клетке сетки $\Delta_{ij}: [t_r, t_{j+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$.

Если положить сплайн в (10) $s = s_j$, то бикубический сплайн превращается в кубический с уравнением i -го звена.

$$C_x(t, s) = \sum_{k=0}^3 a_{ij}^{k0} (t - t_r)^k, \quad (11)$$

причем коэффициенты a_{ij}^{k0} сплайна (11) совпадают с соответствующими коэффициентами бикубического сплайна (10). Значения коэффициентов a_{ij}^{00} и a_{ij}^{10} содержатся соответственно в матрицах (6) и (7), что следует из самого

способа их вычисления. Коэффициенты a_{ij}^{20} и a_{ij}^{30} можно найти по формулам для одномерных сплайнов, приведенных в работе [2]:

$$a_{ij}^{20} = (3(a_{i+1j}^{00} - a_{ij}^{00}) - h_i(2a_{ij}^{10} + a_{i+1j}^{10})) / h_i^2; \quad (12)$$

$$a_{ij}^{30} = (-2(a_{i+1j}^{00} - a_{ij}^{00}) + h_i(a_{ij}^{10} + a_{i+1j}^{10})) / h_i^3, \quad (13)$$

где $h_i = t_{i+1} - t_i$; $i = 1, 2, \dots, N-1$, $j = 1, 2, \dots, M-1$.

Точно так же матрицы (8) и (9) содержат нулевые и первые коэффициенты сплайнов:

$$C_j(t) = C'_s(t, s_j) = \sum_{k=0}^3 a_{ij}^{k1} (t - t_j)^k,$$

совпадающие с соответствующими коэффициентами сплайна (10), а коэффициенты a_{ij}^{21} и a_{ij}^{31} вычисляются по формулам (12) и (13), если индекс $l = 0$ у коэффициентов a_{ij}^{kl} заменить на $l = 1$.

Итак, коэффициенты a_{ij}^{k0} и a_{ij}^{k1} , $k = 0, 1, 2, 3$ определены. При фиксированном k они задают нулевые и первые коэффициенты одномерных кубических сплайнов $C(t, s)$, $C'_t(t, s)$, $C''_{tt}(t, s)$, $C'''_{ttt}(t, s)$, совпадающие с соответствующими коэффициентами сплайна (10). Поэтому остальные коэффициенты a_{ij}^{k2} и a_{ij}^{k3} находятся по формулам, аналогичным формулам (12) и (13):

$$a_{ij}^{k2} = (3(a_{ij+1}^{k0} - a_{ij}^{k0}) - g_j(2a_{ij}^{k0} + a_{ij+1}^{k0})) / g_j^2;$$

$$a_{ij}^{k3} = (-2(a_{ij+1}^{k0} - a_{ij}^{k0}) + g_j(a_{ij}^{k0} + a_{ij+1}^{k0})) / g_j^3,$$

где $g_j = s_{j+1} - s_j$; $i = 1, 2, \dots, N-1$, $j = 1, 2, \dots, M-1$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Аналогичным образом осуществляется построение сплайнов $C_y(t, s)$, $C_z(t, s)$.

Таким образом, построение сплайна (10) свелось к решению $2N + M$ систем уравнений: $M+2$ — на первом и по $N-1$ — на втором и третьем шагах. Моделирование же поверхности бревна требует, как это следует из формулы (4), решения в общей сложности $W = 3(2N + M)$ одномерных задач. Если принять среднюю длину бревна $L = 5$ м и предположить, что точечный каркас задается через каждый метр его длины восьмиточечной сеткой поперечных сечений, то $W = 3(2 \cdot 9 + 6) = 72$. Если воспользоваться другим вариантом алгоритма, где переменные t и s переставлены местами, то $W = 3(2 \cdot 6 + 9) = 63$. Из этого следует, что при реализации алгоритма, прежде всего метода прогонки, в системах САПР и АСУТП реального времени быстроедействие применяемых вычислительных средств должно быть достаточно высоким.

Предложенная модель поверхности бревна содержит в качестве базовых алгоритмы моделирования его каркаса — поперечных сечений и образующих одномерными кубическими сплайнами. Такое моделирование каркасных эле-

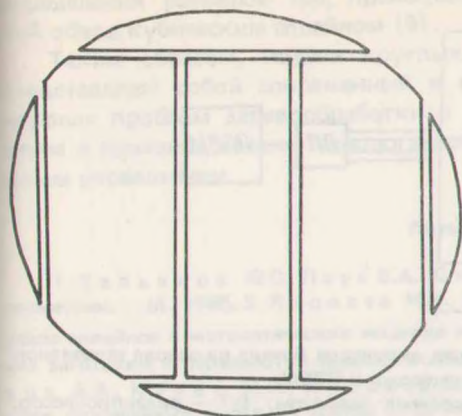


Рис. 2. Вариант раскряя кряжа способом троеения

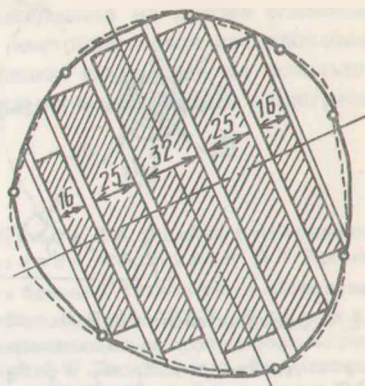


Рис. 3. Вариант формирования сечений пиломатериалов для поставка 16—25—32—25—16

ментов было осуществлено нами ранее [2, 3]. При этом поперечные сечения бревен, хлыстов, кряжей моделировались векторными кубическими сплайнами дефекта 1 с периодическими граничными условиями. Были даны оценки качества моделирования введенных норм, которые подтвердили высокую адекватность и сходимость интерполяционных алгоритмов. Как показали исследования, такие модели обладают удовлетворительной точностью даже при малом (10—12) числе узлов. Так, в серии вычислительных экспериментов при числе узлов $N = 8$ точность такого представления, оцениваемая по площади, составила 1,5—2 %. Моделирование образующих поверхности с использованием кубических сплайнов с нулевыми граничными условиями на первые производные также дало аналогичные результаты.

Практическое использование предложенных моделей в системах автоматизированного учета и раскряя, системах автоматизированного проектирования связано с построением соответствующих алгоритмов определения объема и раскряя и созданием оборудования, обеспечивающего необходимые измерительные, вычислительные и технологические функции. В общей постановке такая задача представляется достаточно сложной, однако в ряде простых случаев полученные результаты могут быть реально использованы. Так, на основе сплайновых моделей были разработаны алгоритмы определения объема и раскряя сырья для производства строганого шпона из тропических пород красного дерева. Для таких круглых лесоматериалов достаточно адекватна математическая модель поверхности, представляющая собой прямой цилиндр с направляющей, моделируемой периодическим кубическим сплайном. Для получившего наибольшее распространение на практике способа троеения и сводящегося к нему ванческого четырехстороннего способа раскряя был разработан соответствующий алгоритм. Моделирование раскряя, осуществляемое на основе указанной модели, сводится к формированию на плоском сплайновом контуре поперечных сечений заготовок необходимого вида и размеров (рис. 2).

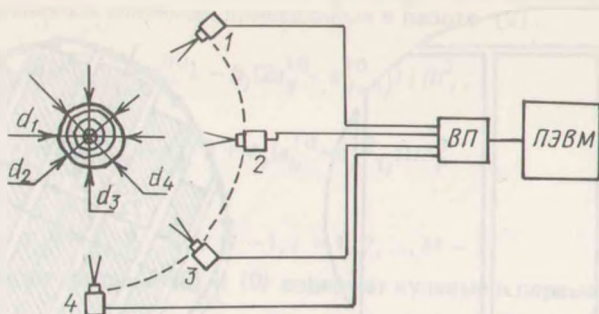


Рис. 4. Схема установки для измерения четырех диаметров бревна на основе телевизионных камер, видеопроцессора и ПЭВМ:

1-4 — телекамеры; d_1, d_2, d_3, d_4 — измеряемые диаметры; ВП — видеопроцессор; ПЭВМ — персональная ЭВМ

Сравнительный анализ результатов моделирования раскроя сырья для производства строганого шпона и данных опытных распиловки показал, что увеличение использования площади сечения за счет выбора оптимального варианта в условиях эксперимента составило не менее 3–5 %.

Для той же цилиндрической модели с направляющей в виде замкнутой сплайновой кривой разработан алгоритм расчета поставок, выполняющий формирование сечений пиломатериалов заданных размеров на плоском сплайновом контуре, при этом ввиду асимметрии такого сечения за счет выбора его оптимальной ориентации можно минимизировать потери (рис. 3).

Обеспечение разработанных на основе кубических сплайнов моделей "непосредственной диагностики" информацией о размерах моделируемых геометрических объектов (значениях координат) является важнейшей проблемой. Ее решение может быть осуществлено на базе различной измерительной аппаратуры. Структурно-функциональная схема лабораторной установки с использованием для этих целей телевизионных камер приведена на рис. 4. В данном варианте четыре телекамеры, расположенные вокруг измеряемого объекта (бревна, кряжа), используются для определения четырех диаметров. При этом через видеопроцессор в ПЭВМ передаются соответствующие изображения боковой поверхности бревна. Видеопроцессор, выполненный в виде специальной платы в ПЭВМ и имеющий буферную память размером 16 К байт, преобразует непрерывное телевизионное изображение в дискретный вид, которое поступает затем в основную память ПЭВМ для обработки. Программное обеспечение осуществляет определение значений соответствующих величин (координат), используя методы цифровой обработки изображений (бинаризация, определение границ и т.п.), выполняет построение моделей и затем проводит с их помощью необходимые технологические расчеты. В качестве ПЭВМ применяется серийная ЕС 1840; для нее разработан видеопроцессор. После лабораторных исследований и испытаний предполагается использовать установку подобного типа в составе автоматизированной системы обмера и учета круглых лесоматериалов в производстве пиломатериалов и шпона.

Для этих же целей может быть применен предложенный авторами способ

определения размеров тел, преимущественно бревен, использующий гладкий обвод кубическим сплайном [6].

Таким образом, модели круглых лесоматериалов на основе сплайнов представляют собой современный и гибкий инструмент для исследования научных проблем деревообработки и лесопиления. На очереди их использование в производственно-технологических системах и комплексах с программным управлением.

Литература

1. Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скороспелов В.А. Сплайны в инженерной геометрии. М., 1985.
2. Яковлев М.К., Янушкевич А.А., Кулак М.И. Применение сплайнов в математических моделях хлыстов и бревен // Технология и оборудование заготовки и переработки древесины. Мн., 1988. Вып. 3. С. 97—103.
3. Янушкевич А.А., Кулак М.И., Яковлев М.К. Автоматизированное проектирование раскроя пиловочного сырья на основе сплайновых моделей // Технология и оборудование заготовки и переработки древесины. Мн., 1989. Вып. 4. С. 145—150.
4. Завьялов Ю.С. Интерполирование функций одной и двух переменных кусочно-полиномиальными функциями // Математические проблемы геофизики. Новосибирск, 1969. 5. А.с. 1551990 СССР, МКИ G 01 B 11/10, 11/24. Способ определения профилей сечения объектов, преимущественно бревен.