

Экспериментальное определение коэффициентов заключается в следующем. Образец толщиной δ вставляется в патрон установки и зажимается. Создается давление P_1 на жидкость, которая фильтруется через образец. Давление на выходе из образца принимается равным атмосферному ($P_2 = P_a$). Объемный поток жидкости определяем через образец при данном перепаде давления (измеряется объем и время фильтрации жидкости). Удельный массовый поток жидкости находим по формуле

$$q_m = \rho \Delta V / S \Delta \tau ,$$

где S — площадь образца, через которую фильтруется жидкость; V — объем жидкости, протекающей за время $\Delta \tau$.

Определяется q_m в течение всего процесса фильтрации.

По результатам измерений была проведена соответствующая статистическая обработка (табл. 1).

Анализ данных табл. 1 свидетельствует о том, что среднее значение коэффициента проницаемости древесины ольхи и березы составом на основе МФПС-2 соответственно в 2,0 и 3,7 раза выше, чем для состава на основе лака ПЭ-232.

Значения коэффициента проницаемости составом на основе лака ПЭ-232 для березы и ольхи перекрываются в пределах доверительного интервала $\bar{K} - \Delta K < \bar{K} + \Delta K$. Это свидетельствует об отсутствии значимого различия между коэффициентами проницаемости древесины ольхи и березы составом на основе лака ПЭ-232.

Коэффициент поверхностного сопротивления ξ при исследовании проницаемости древесины березы и ольхи пропиточными составами на основе мочевиноформальдегидной и полиэфирной смол изменяется в значительных пределах и с учетом доверительного интервала одинаково для данных пород и составов. Максимальное значение, указанное в табл. 1, свидетельствует, что для березы данный параметр в 4–5 раз больше, чем для ольхи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш у т о в Г.М. Модифицирование древесины термохимическим способом: Обзор. информ. / БелНИИНТИ. — Минск, 1982.

УДК 674.093

М.К. ЯКОВЛЕВ, А.А. ЯНУШКЕВИЧ,
М.И. КУЛАК

ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙНОВ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ХЛЫСТОВ И БРЕВЕН

Важным инструментом в исследовании технологических процессов обрабатывающих отраслей промышленности являются модели сырья. В лесопилении эту роль играют модели хлыстов и бревен. Математические модели могут

быть реализованы при помощи различного математического аппарата. Так, известны аналитические модели хлыстов и бревен при описании объектов, например уравнениями цилиндра, параболоида вращения второй степени или усеченного конуса [1]. Однако в ряде случаев аналитические модели бывают неудовлетворительны, поскольку они не могут учесть недетерминированность формы ствола, вызванную биологической природой древостоев. Привлечения для этих целей концептуальных лесоводственных представлений о форме ствола и таксационных моделей недостаточно из-за того, что, когда хлыст или бревно доставлены на деревообрабатывающее предприятие для переработки, информацию об условиях роста древостоя нельзя восстановить. Поэтому такой подход, вполне приемлемый для моделирования, например, размерно-качественных характеристик древостоев в таксационных выделах, непригоден для построения адекватных моделей сырья в лесопилении.

Альтернативный путь может быть представлен численными моделями, позволяющими учесть индивидуальные особенности объектов лесопиления на основе индивидуальной диагностики. Нами предложено построение математических моделей хлыстов и бревен на основе сплайн-функций. По сравнению с другими математическими конструкциями, которые используются для описания геометрических тел сложной формы, сплайны обладают рядом существенных преимуществ. Это прежде всего лучшие аппроксимативные свойства и простота реализации на ЭВМ. Появившись в явном виде около сорока лет назад, сплайны нашли широкое применение при моделировании геометрических объектов в машиностроении (авиа- и судостроение, производство турбин, кузовов легковых автомобилей и др.), архитектуре, системах машинной графики и обработки изображений.

Наиболее употребительны в приложениях полиномиальные кубические сплайны. Нами использованы интерполяционные кубические сплайны дефекта 1, определяемые следующим образом [2]. Пусть на отрезке $[a, b]$ в узлах $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ заданы некоторые конечные вещественные значения $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{1, N}$. Если они получены из очень точных наблюдений либо определены с помощью некоторой достаточно гладкой функции f , то естественным методом аппроксимации таких данных является интерполяция. Обозначим через $C^2[a, b]$ множество дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций. Интерполяционным кубическим сплайном дефекта 1 называется функция

$$S(x) = S_i(x) = \sum_j a_{ij} (x - x_i)^{j-1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, 4}, \quad (1)$$

удовлетворяющая следующим условиям:

$$S(x) \in C^2[a, b], \quad (2)$$

$$S(x_i) = y_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Перейдем к построению сплайна (1). Очевидно, ввиду линейности $S_i''(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$

$$S_i''(x) = S_i''(x_i) + \frac{S_i''(x_{i+1}) - S_i''(x_i)}{h_i} (x - x_i), \quad (4)$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, представим производную полинома $S_i(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$ в виде

$$S_i'(x) = S_i'(x_i) + \int_{x_i}^x S_i''(x) dx,$$

и, учитывая уравнение (4),

$$S_i'(x) = S_i'(x_i) + S_i''(x_i)(x - x_i) + \frac{S_i''(x_{i+1}) - S_i''(x_i)}{2h_i}(x - x_i)^2. \quad (5)$$

Аналогично

$$S_i(x) = S_i(x_i) + \int_{x_i}^x S_i'(x) dx = S_i(x_i) + S_i'(x_i)(x - x_i) + \frac{S_i''(x_i)}{2}(x - x_i)^2 + \frac{S_i''(x_{i+1}) - S_i''(x_i)}{6h_i}(x - x_i)^3. \quad (6)$$

Из условия (2), в частности, следует, что

$$S_i^{(q)}(x_i) = S_{i-1}^{(q)}(x_i); \quad q = 0, 1, 2; \quad i = \overline{2, N-1}, \quad (7)$$

тогда с учетом выражений (5), (6)

$$S_i'(x_i) = S_{i-1}'(x_{i-1}) + [S_{i-1}''(x_i) + S_{i-1}''(x_{i-1})] \frac{h_{i-1}}{2}; \quad (8)$$

$$S_i(x_i) = S_{i-1}(x_{i-1}) + S_{i-1}'(x_{i-1})h_{i-1} + [S_{i-1}''(x_i) + 2S_{i-1}''(x_{i-1})] \frac{h_{i-1}^2}{6}. \quad (9)$$

Введем традиционные обозначения: $M_i = S_i''(x_i)$, $m_i = S_i'(x_i)$. Выражения (8), (9) дают систему уравнений для определения "моментов" M_i и M_{i-1} :

$$\begin{cases} M_i + M_{i-1} = 2 \frac{m_i - m_{i-1}}{h_{i-1}}; \\ M_i + 2M_{i-1} = 6 \frac{y_i - y_{i-1} - h_{i-1}m_{i-1}}{h_{i-1}^2} \end{cases}$$

откуда находим

$$M_i = \frac{2}{h_{i-1}^2} [-3(y_i - y_{i-1}) + 2h_{i-1}m_i + h_{i-1}m_{i-1}]; \quad (10)$$

$$M_{i-1} = \frac{2}{h_{i-1}^2} [3(y_i - y_{i-1}) - 2h_{i-1}m_{i-1} - h_{i-1}m_i]. \quad (11)$$

Моменты M_i и M_{i-1} представляют собой значения соответственно лево- и правосторонних вторых производных сплайна, вычисленные в узлах. Если в формуле (11) заменить $i-1$ на i , с учетом условия (7) можно приравнять правые части выражений (10) и (11). После несложных преобразований получим

$$h_i m_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})m_i + h_{i-1}m_{i+1} = 3\left[\frac{(y_{i+1} - y_i)h_{i-1}}{h_i} + \frac{(y_i - y_{i-1})h_i}{h_{i-1}}\right], \quad i = \overline{2, N-1}. \quad (12)$$

Уравнения (12) дают $N-2$ условий для определения N значений m_i и, следовательно, любые два из них могут быть фиксированы произвольно. Обычно это осуществляется в виде задания краевых условий, фиксирующих значения производных сплайна на концах отрезка интерполирования. Существует несколько типов краевых условий, которые выбирают в зависимости от целей аппроксимации и природы интерполируемых данных. Среди них выделим используемые ниже периодические краевые условия

$$S^{(q)}(a) = S^{(q)}(b); \quad q = 0, 1, 2, \quad (13)$$

которые применяют при интерполировании периодических функций. Интерполяционный сплайн с условиями (13) называется периодическим. В таком случае в силу периодичности

$$y_N = y_1; \quad y_{N+1} = y_2; \quad m_N = m_1; \quad m_{N+1} = m_2; \quad h_N = h_1,$$

при этом узел x_N (или x_1) может рассматриваться как внутренний. Выполнение для него условий (7) при $q = 2$ эквивалентно тому, что уравнения (12) справедливы и для $i = N$. Тогда система уравнений для определения m_i будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(h_i + h_{N-1})m_1 + h_{N-1}m_2 + h_i m_{N-1} = 3\left[\frac{(y_2 - y_1)h_{N-1}}{h_1} + \frac{(y_N - y_{N-1})h_i}{h_{N-1}}\right]; \\ h_i m_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})m_i + h_{i-1}m_{i+1} = 3\left[\frac{(y_{i+1} - y_i)h_{i-1}}{h_i} + \frac{(y_i - y_{i-1})h_i}{h_{i-1}}\right], \quad i = \overline{2, N-1}. \end{array} \right. \quad (14)$$

Определитель такой системы, называемой ленточной с диагональным преобладанием, всегда отличен от нуля. Поэтому $m_1 = m_N, m_2, \dots, m_{N-1}$ опре-

деляются единственным образом. Для решения системы (14) существует эффективный алгоритм, называемый прогонкой [2].

После нахождения m_i коэффициенты сплайна a_{ij} в представлении (1) можно рассчитать, если в формулу (6) вместо $S_i''(x_i)$, $S_i''(x_{i+1})$ подставить их значения соответственно из выражений (11) и (10), предварительно заменив в них i на $i+1$. Тогда

$$a_{i4} = \frac{1}{h_i^3} [-2(y_{i+1} - y_i) + h_i(m_i + m_{i+1})];$$

$$a_{i3} = \frac{1}{h_i^2} [3(y_{i+1} - y_i) - 2h_i(m_i + m_{i+1})];$$

$$a_{i2} = S_i'(x_i) = m_i, \quad a_{i1} = S_i(x_i) = y_i, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Кубические сплайны дефекта 1 в результате высокой степени гладкости в узлах представляют собой удобные конструкции для аппроксимации кривых. Если кривая, подлежащая аппроксимации, замкнута, ее целесообразно аппроксимировать периодическим способом.

Задача интерполяции плоской замкнутой кривой может быть сформулирована в следующей постановке [3]: пусть на плоскости даны N точек $P_i(x_i, y_i)$ и нужно провести гладкую замкнутую кривую, проходящую через эти точки в заданном направлении. Будем искать интерполирующую кривую в виде периодического сплайна.

Как следует из способа построения, сплайн-функция строится для однозначной функции на монотонно возрастающей сетке узлов. С этой целью введем нормированную t -параметризацию точек $P_i(x_p, y_p)$ по суммарной длине орда, определяемую формулой

$$t_{i+1} = \sum_{j=1}^i |\overline{P_j P_{j+1}}| / \sum_{j=1}^N |\overline{P_j P_{j+1}}|;$$

$$P_{N+1} = P_1, \quad t_1 = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Очевидно, что $t \in [0, 1]$ монотонно возрастает. Построим периодические сплайны:

$$S(x, t) = \sum b_{ij}(t - t_i)^{j-1}, \quad S(x, t_i) = x_i;$$

$$S(y, t) = \sum c_{ij}(t - t_i)^{j-1}, \quad S(y, t_i) = y_i.$$

Векторная функция $\{S(x, t), S(y, t)\}$, называемая параметрическим или векторным сплайном, является решением задачи о гладком обводе заданных точек плоскости.

Математическая модель формы хлыста может быть представлена в виде совокупности моделей образующих древесного ствола (хлыста) и его поперечных сечений параллельными плоскостями. На основании изложенной в настоящей статье методики построения сплайновых моделей плоских замкнутых кривых было осуществлено моделирование на ЭВМ поперечных сечений хлы-

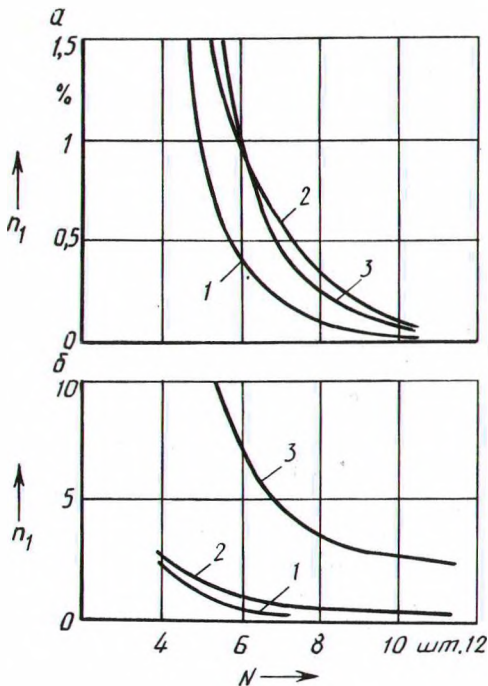


Рис. 1. Зависимость от числа узлов:
 а – нормы 1; б – нормы 2; 1 – окружность; 2 – эллипс ($b/a = 0,9$); 3 – улитка Паскаля ($e/a = 1,5$).

стов. Исследовались аналитические замкнутые кривые (окружность, эллипс, улитка Паскаля), заданные параметрическими уравнениями, и реальные сечения хлыстов в дискретно-точечном виде. Аналитические кривые интерполировались на равномерных (по параметру) сетках с четным числом узлов

$$t_i = \frac{\pi i}{m+1}, \quad i = \overline{0, 2m+1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Для реальных поперечных сечений выбирались "квазиравномерные" сетки, рассчитываемые путем деления дискретного набора на четное число равных частей и последующего сканирования.

Качество (погрешность) приближения кривых оценивалось вычислением остатка интерполирования в двух вариантах – в виде норм n_1 и n_2 . Норма n_1 представляет собой разность площадей, ограниченных аппроксимирующей кривой и сплайном, в процентах к площади, ограниченной исходной кривой, и вычисляется по формуле

$$n_1 = \frac{\sum |S_i^k - S_i^3|}{\sum S_i^k} \cdot 100,$$

где S_i^k – площадь сектора кривой; S_i^3 – площадь сплайнового сектора. Секторы образовывались лучами, исходящими из центра масс кривой контура. Площади криволинейных секторов вычислялись путем дискретизации кривой и суммирования площадей соответствующих треугольников. Норма n_2

определена как максимальное отклонение исходной кривой от сплайна в процентах к минимальному радиусу и вычислена по формуле

$$n2 = \frac{\max_i \max_j |P_{\kappa}(t_j)P_3(t_j)|}{\min_m |P_{\text{м}}P_{\kappa}(t_m)|} \cdot 100,$$

где P_{κ} , P_3 — соответственно точки дискретизации кривой и сплайна; $P_{\text{м}}$ — центр масс исходного контура.

Зависимости скорости сходимости от числа узлов в нормах $n1$ и $n2$ для аналитических кривых представлены на рис. 1. Как видно из приведенных графиков, погрешность интерполяции оказалась достаточно низкой и составила для шести узлов не более 1,5 % по площади и менее 10 % для нормы $n2$. Для поперечного сечения без крупных особенностей путем сканирования удалось получить значение нормы $n1$ — 4,08 % ($N = 4$); 3,54 ($N = 6$); 1,92 ($N = 8$) и нормы $n2$ — соответственно 12,96, 8,83, 6,42 %.

Таким образом, даже при небольшом числе узлов сетки $N = 4, 6, 8$ кубические сплайны с высокой степенью точности аппроксимируют профили поперечных сечений бревен и являются удобным и точным инструментом для построения их адекватных моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский В.С. Автоматическая оптимизация раскроя древесных стволов. — М., 1986.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. — М., 1980.
3. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулдер К. Машинные методы математических вычислений. — М., 1980.