

**В. Н. Стругов, В. С. Исаченков**

# **ИНЖЕНЕРНАЯ И МАШИННАЯ ГРАФИКА**

**Тексты лекций  
для студентов специальностей  
1-25 01 07 «Экономика и управление  
на предприятии»,  
1-25 01 08 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»,  
1-26 02 02 «Менеджмент», 1-26 02 03 «Маркетинг»,  
1-47 01 01 «Издательское дело»**

Минск БГТУ 2007

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

**В. Н. Стругов, В. С. Исаченков**

# **ИНЖЕНЕРНАЯ И МАШИННАЯ ГРАФИКА**

**Тексты лекций  
для студентов специальностей  
1-25 01 07 «Экономика и управление  
на предприятии»,  
1-25 01 08 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»,  
1-26 02 02 «Менеджмент», 1-26 02 03 «Маркетинг»,  
1-47 01 01 «Издательское дело»**

Минск 2007

УДК 744(075.8)

ББК 30.11я73

С 87

Рассмотрены и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета.

Рецензенты:

начальник кафедры организации деятельности  
органов и подразделений по чрезвычайным ситуациям  
Командно-инженерного института МЧС Республики Беларусь  
доцент, кандидат технических наук *Г. И. Касперов*;  
доцент кафедры инженерной графики  
Белорусского национального технического университета  
кандидат технических наук *И. Д. Бушило*

**Стругов, В. Н.**

С 87 Инженерная и машинная графика : тексты лекций для студентов специальностей 1-25 01 07 «Экономика и управление на предприятии», 1-25 01 08 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», 1-26 02 02 «Менеджмент», 1-26 02 03 «Маркетинг», 1-47 01 01 «Издательское дело» / В. Н. Стругов, В. С. Исаченков. – Минск : БГТУ, 2007. – 58 с.

ISBN 978-985-434-719-6

В текстах лекций в соответствии с программами изложен метод проецирования, позволяющий строить изображения пространственных геометрических образов на плоскости, рассмотрены способы решения основных задач на чертеже и правила изображения на чертеже деталей. Приведены примеры, облегчающие выполнение самостоятельных графических работ студентами.

УДК 744(075.8)  
ББК 30.11я73

ISBN 975-985-434-719-6

© УО «Белорусский государственный  
технологический университет», 2007

Учебное издание

**Стругов Вячеслав Николаевич**  
**Исаченков Владимир Сергеевич**

## **ИНЖЕНЕРНАЯ И МАШИННАЯ ГРАФИКА**

Тексты лекций

Редактор *И. О. Гордейчик*

Подписано в печать 30.04.2007. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.  
Усл. печ. л.6,7. Уч.-изд. л. 5,6.  
Тираж 300 экз. Заказ .

Учреждение образования  
«Белорусский государственный технологический университет».  
220050. Минск, Свердлова, 13а.  
ЛИ № 02330/0133255 от 30.04.2004.

Отпечатано в лаборатории полиграфии учреждения образования  
«Белорусский государственный технологический университет».  
220050. Минск, Свердлова, 13.  
ЛП № 02330/0056739 от 22.01.2004.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Инженерная и машинная графика – одна из дисциплин, составляющих основу общеинженерной подготовки специалистов. Вместе с тем для различных специальностей в БГТУ на изучение данной дисциплины учебными программами отводится различное количество часов. Учебники и методическая литература разрабатываются и издаются применительно к специальностям с максимальным объемом учебных часов, что затрудняет ее освоение студентами нетехнических специальностей.

Теоретической базой инженерной и машинной графики является начертательная геометрия, позволившая создать одно из гениальнейших изобретений человеческой мысли – чертеж. Чертеж – это своеобразный графический язык, с помощью которого, используя лишь точки, линии, геометрические знаки, буквы и цифры, изображаются самые разнообразные поверхности, машины, приборы, инженерные сооружения и т. д. Этот язык является интернациональным, понятным любому технически подготовленному человеку, независимо от того, на каком языке он говорит.

Велика роль начертательной геометрии и при изучении естественных наук, когда изучаемые или анализируемые свойства сопровождаются доступными для человеческого восприятия наглядными геометрическими моделями, позволяющими развивать логическое мышление.

Предлагаемые тексты лекций «Инженерная и машинная графика» написаны применительно к учебным программам для студентов инженерно-экономического факультета и факультета издательского дела и полиграфии. Каждая из лекций (всего их девять) представляет собой самостоятельный раздел начертательной геометрии с необходимыми теоретическими и инженерными обоснованиями.

Использование данного пособия позволит студентам различных форм обучения самостоятельно осваивать основы начертательной геометрии и проекционного черчения, создавать фундамент инженерных знаний по указанным дисциплинам.

## **Лекция 1. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ**

### **Предмет и метод начертательной геометрии**

Начертательная геометрия, являясь одной из ветвей геометрии, имеет ту же цель, что и геометрия вообще, а именно: изучение форм предметов окружающего нас мира и отношений между ними, установление соответствующих закономерностей и использование их при решении конкретных задач.

Начертательную геометрию выделяет то, что она для решения общегеометрических задач использует графический путь, при котором геометрические свойства фигур изучаются непосредственно по чертежу. В других ветвях геометрии чертеж является вспомогательным средством (в основном с помощью чертежа иллюстрируются свойства фигур).

Для того чтобы чертеж стал геометрически равноценным изображением предмета (фигуры), он должен быть построен по определенным геометрическим законам. В начертательной геометрии чертеж строится с использованием проецирования, поэтому чертежи, применяемые в начертательной геометрии, носят название проекционных чертежей.

Таким образом, содержанием начертательной геометрии является:

- исследование способов построения проекционных чертежей;
- решение геометрических задач, относящихся к пространственным фигурам;
- приложение способов начертательной геометрии к исследованию практических и теоретических вопросов науки и техники.

### **Краткие сведения по истории развития начертательной геометрии**

Начертательная геометрия возникла из потребностей практической деятельности человека. Задачи строительства различных сооружений, крепостных укреплений, жилья, храмов требовали предварительного их изображения. От примитивных рисунков, передававших приближенные геометрические формы сооружений, постепенно совершался переход к составлению проекционных чертежей, отражавших геометрические свойства изображаемых на них объектов.

Выдающуюся роль в развитии начертательной геометрии как науки сыграл французский геометр и инженер Гаспар Монж, который систематизировал и обобщил накопленный к тому времени опыт и теоретические познания в области изображения пространственных фигур на плоскости. В своем труде «Начертательная геометрия», изданном в 1798 году, Г. Монж дал первое научное изложение общего метода изображения пространственных фигур на плоскости.

Впервые в России курс начертательной геометрии начал преподаваться в 1810 году в Институте корпуса инженеров путей сообщения в Санкт-Петербурге учеником Г. Монжа французским инженером К. Потье, который издал в 1816 году курс начертательной геометрии на французском языке. С 1818 года преподавание начертательной геометрии стал вести профессор Севастьянов Яков Александрович, который перевел курс начертательной геометрии К. Потье на русский язык. В 1821 году Я. А. Севастьянов написал собственный курс лекций по начертательной геометрии.

Высокому уровню преподавания начертательной геометрии способствовали курсы лекций преемников Я. А. Севастьянова – Н. И. Макарова, В. И. Курдюмова, Е. С. Федорова, Н. Ф. Четверухина, В. О. Гордона и др.

## Принятые обозначения

1. Точки пространства обозначают прописными буквами латинского алфавита:  $A, B, C, D...$  или цифрами:  $1, 2, 3...$

2. Прямые и кривые линии пространства – строчными буквами латинского алфавита:  $a, b, c, d...$

3. Плоскости и поверхности – прописными буквами латинского алфавита:  $P, Q, F, V, W...$

4. Плоскость проекций и поле проекций –  $\pi$  (строчная буква греческого алфавита).

5. При образовании комплексного чертежа плоскости проекций и поле проекций обозначают буквой  $\pi$  с добавлением подстрочного индекса 1, 2, 3, 4... при этом: горизонтальная плоскость проекций обозначается  $\pi_1$ ; фронтальная плоскость проекций –  $\pi_2$ ; профильная плоскость проекций –  $\pi_3$ . Новую плоскость проекций, отличную от указанных выше, обозначают:  $\pi_4, \pi_5, \pi_6...$

6. Проекции точек, прямых и плоскостей обозначают теми же буквами, какими обозначены их оригиналы, с добавлением индекса, соответствующего индексу плоскости проекций. Так, проекции точки  $A$ , прямой  $a$  и плоскости  $Q$  соответственно обозначают:

– на плоскости  $\pi_1$  –  $A', a', Q'$ ;

– на плоскости  $\pi_2$  –  $A'', a'', Q''$ ;

– на плоскости  $\pi_3$  –  $A''', a''', Q'''$ .

7. Для указания способа задания плоскости рядом с буквенным обозначением плоскости в скобках пишутся обозначения тех элементов, которыми они заданы, например:

$Q(A, B, C), P(a // e), V(m \times n)$ .

8. Для некоторых прямых и плоскостей присвоены постоянные обозначения.

Линии уровня обозначают:

– горизонталь –  $h$ ;

– фронталь –  $f$ ;

– профильная –  $p$ .

Плоскости уровня обозначают:

– горизонтальная –  $H$ ;

– фронтальная –  $F$ ;

– профильная –  $P$ .

9. Углы обозначают следующими строчными буквами:  $\alpha, \beta, \gamma, \delta...$

10. Основные операции обозначаются: совпадение двух геометрических элементов – знаком  $\equiv$ ; принадлежность одного геометрического элемента другому –  $\supset$  или  $\subset$  (знак включения); пересечение двух элементов – знаком  $\times$ ; результат геометрической операции – знаком  $=$ .

11. Следы плоскости:

– горизонтальный –  $P_h$ ;

– фронтальный –  $P_v$ ;

– профильный –  $P_w$ .

## Основные свойства проецирования

Центральное проецирование (перспектива) заключается в построении изображения (*проекции*) точки  $A'$  точки  $A$  путем проведения через точку  $A$  и точку  $S$  (*центр проекций*) прямой  $SA$ , называемой *проецирующей прямой*, до пересечения с плоскостью  $\pi_1$ , называемой *плоскостью проекций* (рис. 1).

Метод центрального проецирования точек пространства на плоскость проекций  $\pi_1$ , можно записать с помощью следующего символического равенства:

$$A' = \pi_1 \times SA,$$

т. е.  $A'$  – точка пересечения плоскости  $\pi_1$  с прямой  $SA$ .

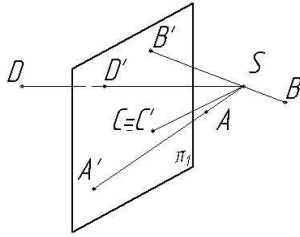


Рис. 1

Проецирование можно выполнить для любой точки пространства, за исключением точек, лежащих в плоскости, проходящей через центр проекции и параллельной плоскости проекций  $\pi_1$  (*несобственные точки*).

На рис. 1 показано построение проекций точек  $A, B, C$  и  $D$ , различно расположенных относительно плоскости проекций  $\pi_1$  и центра проекций  $S$ .

Изображение предметов при помощи центрального проецирования обладает большой наглядностью, но достаточно сложно и значительно искажает форму и размеры оригинала, так как не сохраняет параллельность прямых и отношения отрезков. Поэтому на практике чаще пользуются методом параллельного проецирования (в частности, ортогонального проецирования).

Параллельное проецирование предполагает заданными плоскость проекций  $\pi_1$  и направление проецирования  $S$ , не параллельное плоскости проекций (рис. 2). При построении проекции  $A'$  какой-либо точки  $A$  необходимо провести через точку  $A$  проецирующую прямую, параллельную направлению проецирования  $S$ , до пересечения с плоскостью  $\pi_1$ .

### Основные свойства параллельного проецирования

*Проекцией точки является точка.*

*Проекцией прямой линии является прямая линия.*

Все прямые, проецирующие точки  $A, B, C$  данной прямой  $l$  (рис. 2), лежат в одной плоскости (называемой проецирующей плоскостью), проходящей через прямую  $l$  и параллельной направлению проецирования  $S$ . Данная плоскость пересекает плоскость проекций  $\pi_1$  по прямой линии, которая, согласно определению проекции фигуры как совокупности проекций всех ее точек, и является проекцией прямой  $l$ . Эти свойства будем называть *свойствами прямолинейности*.

*Проекцией точки, лежащей на некоторой прямой, является точка, лежащая на проекции данной прямой.*

Это свойство, называемое *свойством принадлежности*, непосредственно следует из определения проекции фигуры как совокупности проекций всех точек.

Рассмотренные три свойства имеют место и при центральном проецировании.

*Проекциями параллельных прямых являются параллельные прямые.*

Если прямые  $l$  и  $m$  параллельны, то и проецирующие их плоскости будут параллельны как содержащие по паре пересекающихся соответственно параллельных прямых ( $l \parallel m, AA' \parallel MM'$ ) (рис. 2). Отсюда следует, что  $l' \parallel m'$  как прямые пересечения параллельных плоскостей третьей плоскостью. Это свойство называется *свойством сохранения параллельности*.

*Отношение проекций отрезков, лежащих на параллельных прямых или на одной и той же прямой, равно отношению самих отрезков.*

Пусть  $AB$  и  $MN$  – отрезки, лежащие на параллельных прямых  $l$  и  $m$ , а  $A'B'$  и  $M'N'$  – их проекции на плоскости  $\pi_1$  (рис. 2).

Проведем в проецирующих плоскостях отрезки  $AB^*$  и  $MN^*$ , соответственно параллельные отрезкам

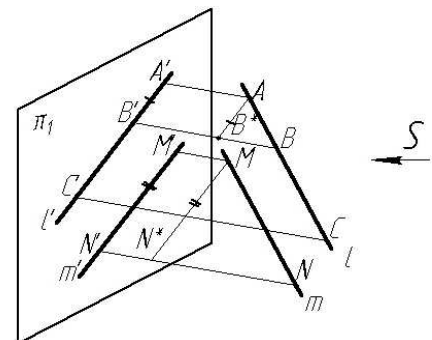


Рис. 2



$A'B'$  и  $M'N'$ . Очевидно, что треугольники  $ABB^*$  и  $MNN^*$  подобны, так как их соответственные стороны параллельны ( $A'B' / M'N' = AB^* / MN^* = AB / MN$ ).

*Проекция фигуры не меняется при параллельном переносе плоскости проекций.*

В качестве проецирующей фигуры возьмем треугольник  $ABC$  и спроецируем его по направлению  $S$  на плоскости  $\pi_1$  и  $\bar{\pi}_1$ , параллельные между собой (рис. 3). Так как отрезки  $A'A'$ ,  $B'B'$ ,  $C'C'$

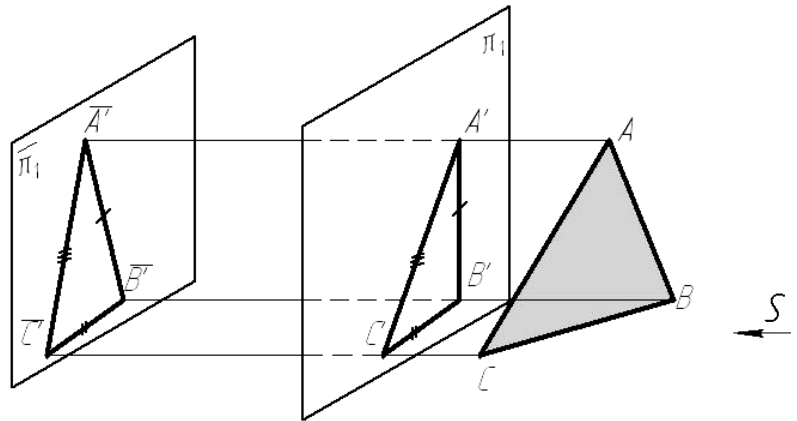


Рис. 3

параллельны и равны между собой, то четырехугольники  $A'B'B'\bar{A}'$ ,  $B'C'C'\bar{B}'$  и  $C'A'A'\bar{C}'$  являются параллелограммами. Поэтому у треугольников  $A'B'C'$  и  $\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'$  соответственные стороны равны и, следовательно, эти треугольники равны между собой.

*Ортогональное проецирование* является частным случаем параллельного проецирования, когда направление проецирования  $S$  перпендикулярно плоскости проекций  $\pi_1$ , что упрощает построение чертежа (рис. 4).

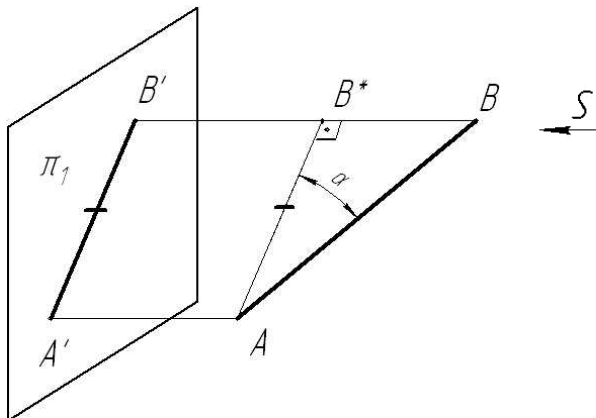


Рис. 4

При ортогональном проецировании нетрудно установить соотношение между длиной *натурального отрезка*  $AB$  и длиной его проекции  $A'B'$ :

$$A'B' = AB \cdot \cos \alpha.$$

Ортогональное проецирование получило наибольшее применение в технических чертежах. Рассмотренные методы проецирования позволяют однозначно решать прямую задачу, т.е. по данному оригиналу строить его

проекционный чертеж, и не позволяют решать обратную задачу – по данному однопроекционному чертежу воспроизводить оригинал.

### Комплексный чертеж точки

Наибольшее применение в технической практике получил чертеж, составленный из двух или более связанных между собой ортогональных проекций изображаемого оригинала. Такой чертеж называется комплексным чертежом в ортогональных проекциях или *комплексным чертежом*.

Принцип образования такого чертежа состоит в том, что данный оригинал проецируется ортогонально на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций, которые затем соответствующим способом совмещают с плоскостью чертежа. Одна из

плоскостей проекций  $\pi_1$  располагается горизонтально и называется горизонтальной плоскостью проекций, другая  $\pi_2$  – вертикально и называется фронтальной (рис. 5). Прямую пересечения плоскостей называют *осью проекций* и обозначают буквой  $x$ .

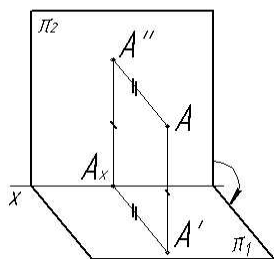


Рис. 5

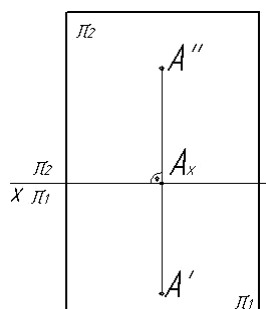


Рис. 6

Спроецируем ортогонально на плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$  какую-нибудь точку  $A$  и получим две ее проекции:  $A'$  – горизонтальную на плоскость  $\pi_1$  и  $A''$  – фронтальную на плоскость  $\pi_2$ . Проецирующие прямые  $AA'$  и  $AA''$  определяют проецирующую плоскость  $AA'A_xA''$ , перпендикулярную к обеим плоскостям проекций и к оси  $x$ . Прямые  $A_xA'$  и  $A_xA''$ , являющиеся проекциями проецирующей плоскости на плоскостях проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , также перпендикулярны оси  $x$ .

Чтобы получить плоский чертеж, совместим плоскость  $\pi_1$  с плоскостью  $\pi_2$ , вращая плоскость  $\pi_1$  вокруг оси  $x$  в направлении, указанном на рис. 5. В результате получаем комплексный чертеж (рис. 6), состоящий из двух проекций  $A'$  и  $A''$  точки  $A$ , лежащих на одной прямой линии связи.

Изображение, полученное при совмещении плоскостей проекций с плоскостью чертежа, называется *эпюром* (от французского слова *epure* – чертеж).

На эпюре  $A''A_x$  – расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\pi_1$ ,  $A'A_x$  – расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\pi_2$ , что свидетельствует о том, что проекции точки на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций определяют ее положение в пространстве.

На рис. 7 показана прямая общего положения  $l$ . Проекции прямой  $l$  ( $l'$  и  $l''$ ) находятся при помощи проекций точек  $A$  и  $B$ , лежащих на ней. Поэтому на комплексном чертеже (рис. 8) всякая прямая  $l$  может быть задана проекциями  $A'$ ,  $A''$ ,  $B'$  и  $B''$  точек, ей принадлежащих. Вместе с тем учитывая, что всякая параллельная проекция обладает свойствами прямолинейности и принадлежности, прямую  $l$  на комплексном чертеже можно задать и ее проекциями  $l'$  и  $l''$ , проходящими через точки  $A'$ ,  $B'$  и  $A''$ ,  $B''$ .

На комплексном чертеже проекции восходящей прямой ориентированы одинаково, а нисходящей – противоположно.

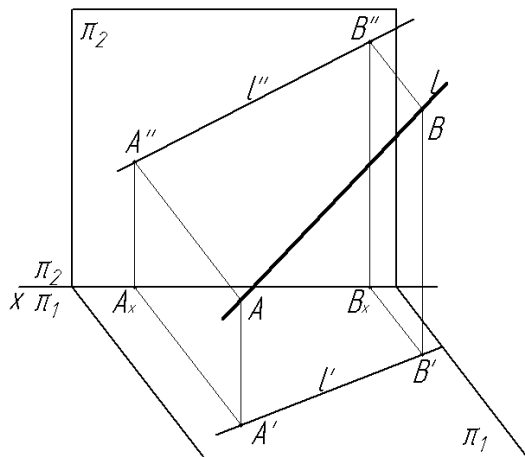
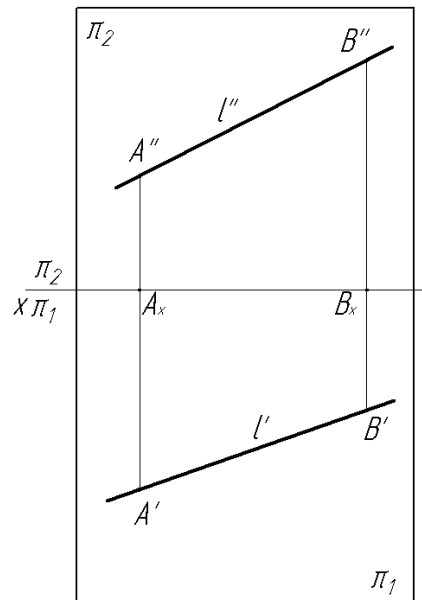


Рис. 7  
Рис. 8



Для деления отрезка  $AB$  в заданном отношении одну из проекций отрезка достаточно разделить в этом отношении, а затем спроецировать делящие точки на другую проекцию отрезка.

На рис. 9 для деления отрезка  $AB$  в соотношении  $2 : 5$ , проведена произвольная линия  $A'B_0$ , на которой отложены семь равных отрезков. Конечная точка линии  $B_0$  соединяется с проекцией  $B'$ , а из точки  $M_0'$ , отстоящей от точки  $A'$  на два деления, проведена прямая  $M_0M'$ , параллельная отрезку  $B'B_0$ . Проведем из точки  $M'$  вертикальную линию связи до пересечения с проекцией  $A''B''$  и найдем проекцию  $M''$ .

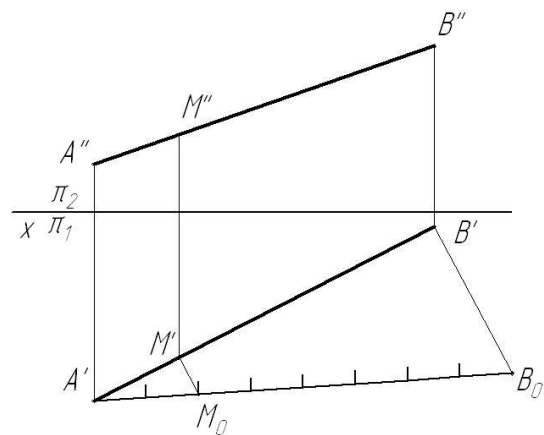


Рис. 9

### Комплексный чертеж из трех ортогональных проекций

Комплексный чертеж, состоящий из двух проекций, является обратимым чертежом, т. е. по этому чертежу можно воспроизвести оригинал. Однако воспроизведение оригинала, у которого имеются профильные элементы, и в частности профильные прямые или плоскости, становится проще, когда помимо двух основных проекций имеется еще одна проекция на третью плоскость.

В качестве такой плоскости проекций применяется плоскость, перпендикулярная к обоим основным плоскостям  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , называемая профильной плоскостью проекций; ее обозначают  $\pi_3$  (рис. 10).

Линия (ось  $x$ ) пересечения плоскостей проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$  называется осью абсцисс, плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_3$  (ось  $y$ ) – осью ординат, плоскостей  $\pi_2$  и  $\pi_3$  (ось  $z$ ) – осью аппликат.

На рис. 10 изображены находящаяся в пространстве некоторая точка  $A$  и ее проекции на плоскости проекций  $\pi_1$  ( $A'$ ),  $\pi_2$  ( $A''$ ) и  $\pi_3$  ( $A'''$ ). Точка  $A'''$  называется профильной проекцией точки  $A$ .

Совместив плоскости проекций поворотом плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_3$  на угол  $90^\circ$ , получим эпюр точки  $A$  в системе  $\pi_1, \pi_2$  и  $\pi_3$  (рис. 11). При этом ось  $y$  как бы раздваивается: одна ее часть с плоскостью  $\pi_1$  опускается вниз, а вторая с плоскостью  $\pi_3$  уходит вправо.

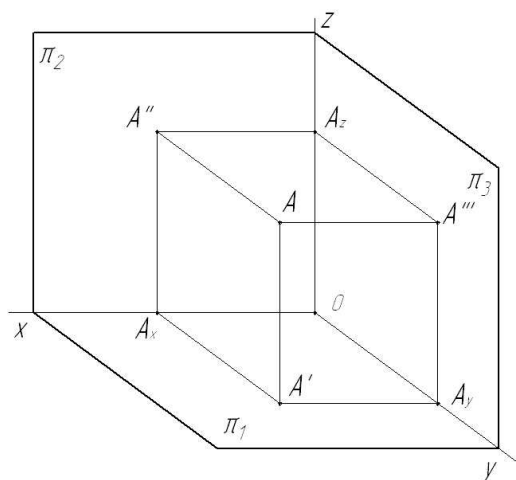


Рис. 10

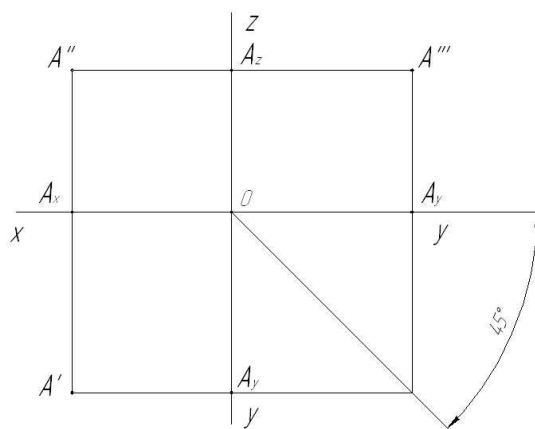


Рис. 11

Следует обратить внимание на то, что на эпюре фронтальная и горизонтальная проекции точки всегда лежат на одном перпендикуляре к оси  $x$  (линии связи  $A'A''$ ), фронтальная и профильная проекции точки – на одном перпендикуляре к оси  $z$  (линия связи  $A''A'''$ ), при этом проекция точки  $A'''$  находится на таком же расстоянии от оси  $z$ , как и проекция точки  $A'$  от оси  $x$ .

При построении профильной проекции точки можно использовать постоянную преломления (постоянную Монжа, рис. 11), которая является биссектрисой прямого угла и наклонена к вертикальным и горизонтальным линиям проекционной связи под углом  $45^\circ$ .

### Система прямоугольных координат

Положение точки в пространстве может быть определено также при помощи ее прямоугольных (декартовых) координат.

*Координаты точки* – это числа, выражающие расстояние от нее до плоскостей проекций, называемых плоскостями координат.

Зная координаты точки  $(X, Y, Z)$  и приняв оси координат за оси проекций, можно построить эпюр точки по заданным координатам (рис. 11). Из начала координат откладывают координату  $X$  (положительную влево, отрицательную вправо). Через полученную точку  $A_x$  проводят вертикальную линию связи, на которой откладывают координату  $Y$  (положительную вниз, отрицательную вверх), и определяют горизонтальную проекцию точки  $A'$ , а затем координату  $Z$  (положительную вверх, отрицательную вниз) и находят фронтальную проекцию точки  $A''$ . Профильная проекция точки  $A'''$  находится с использованием линии связи и постоянной Монжа.

### Способы задания плоскости на чертеже

На эпюре плоскость может быть задана проекциями геометрических элементов, определяющих ее (рис. 12):

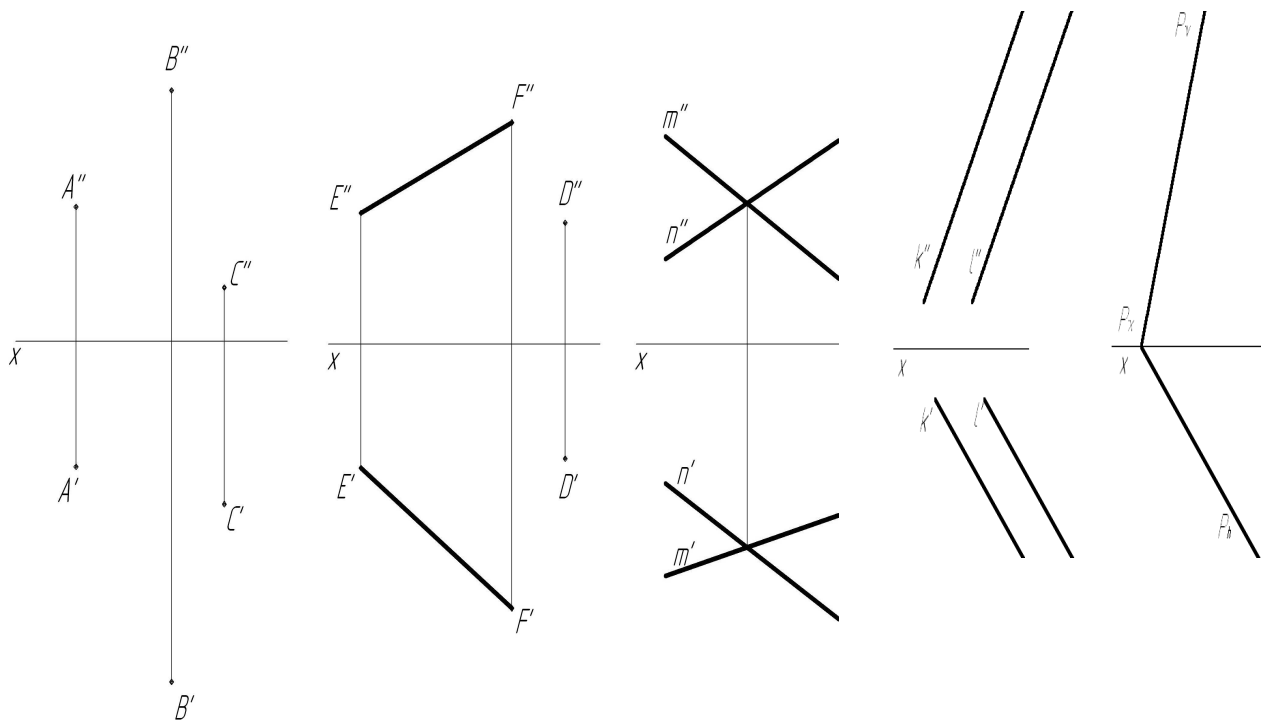


Рис. 12

- проекциями трех точек ( $A, B, C$ ), не лежащих на одной прямой;
- проекциями прямой ( $EF$ ) и точки ( $D$ ), не принадлежащей данной прямой;
- пересекающимися прямыми ( $m$  и  $n$ );
- двумя параллельными прямыми ( $k, l$ );
- следами плоскости  $P_h$  и  $P_v$ .

### Расположение прямой и плоскости относительно плоскостей проекций

Прямые и плоскости, наклонные ко всем основным плоскостям проекций ( $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ ), называются *прямыми и плоскостями общего положения*.

На рис. 13 приведен пример эюра прямой общего положения, а на рис. 14 и 15 – плоскости общего положения, заданной треугольником  $ABC$ .

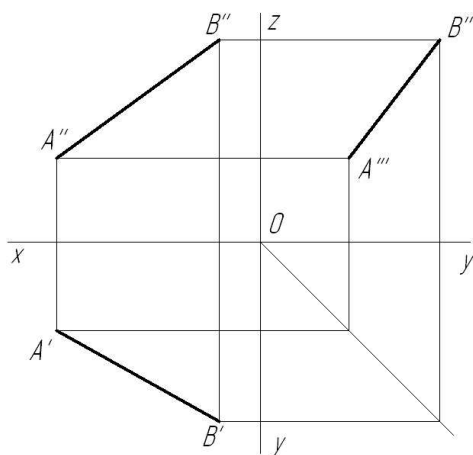


Рис. 13

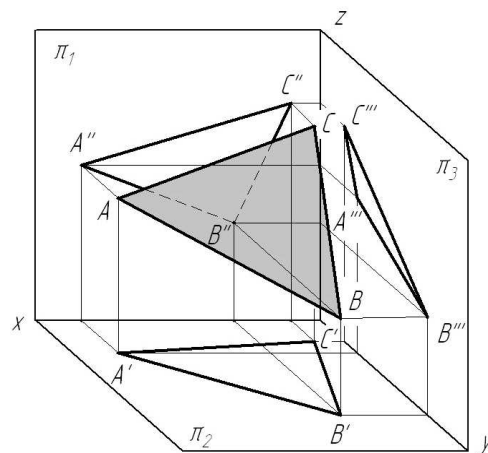


Рис. 14

Прямые и плоскости, перпендикулярные либо параллельные плоскостям проекций,

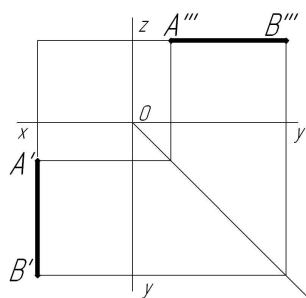


Рис. 17

называются *прямыми и плоскостями частного положения*.

Прямые и плоскости частного положения разделяются на *проецирующие прямые и плоскости*, перпендикулярные к плоскости проекций, и на *прямые и плоскости уровня*, параллельные плоскости проекций.

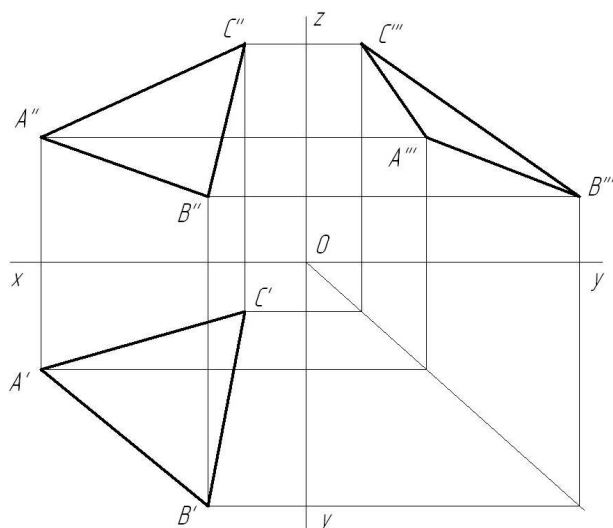


Рис. 15

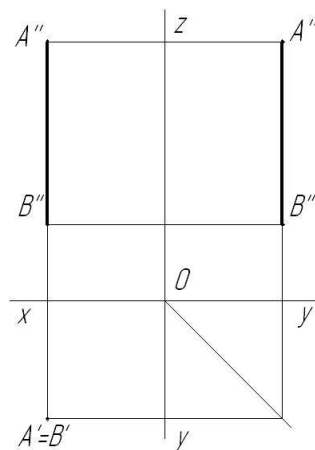


Рис. 16

Прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций  $\pi_1$ , называется *горизонтально проецирующей прямой* (рис. 16). Она проецирует все свои точки на горизонтальную плоскость проекций в одну точку, являющуюся ее горизонтальной проекцией. Фронтальная и профильная проекции прямой параллельны оси аппликат  $z$ . Отрезок  $AB$  горизонтально проецирующей прямой параллелен плоскостям  $\pi_2$  и  $\pi_3$  и проецируется на эти плоскости без искажения ( $AB = A''B'' = A'''B'''$ ).

Прямая, перпендикулярная к фронтальной плоскости проекций  $\pi_2$ , называется *фронтально проецирующей* (рис. 17). Фронтальная проекция этой прямой проецируется в точку, а горизонтальная и профильная проекции параллельны оси  $y$  и проецируются на плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_3$  без искажения ( $AB = A'B' = A'''B'''$ ).

Прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций  $\pi_3$ , проецируется на эту плоскость в виде точки и называется *профильно проецирующей прямой* (рис. 18). Горизонтальная и фронтальная проекции этой прямой располагаются параллельно оси  $x$  и проецируются на плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$  без искажения ( $AB = A'B' = A''B''$ ).

Плоскость, перпендикулярная к горизонтальной плоскости проекций, называется *горизонтально проецирующей плоскостью* (рис. 19). Эта плоскость проецирует все свои точки на горизонтальную плоскость проекций в одну прямую линию, которая и является ее проекцией. Углы  $\beta$  и  $\gamma$ , которые образует горизонтальная проекция горизонтально проецирующей плоскости с горизонтальной и вертикальной линиями связи, определяют ее наклон к плоскостям  $\pi_2$  и  $\pi_3$ .

Плоскость, перпендикулярная к фронтальной плоскости проекций, называется *фронтально проецирующей* (рис. 20). Фронтальная проекция данной плоскости является прямой линией, а углы  $\alpha$  и  $\gamma$  определяют наклон данной плоскости к плоскостям проекций  $\pi_1$  и  $\pi_3$ .

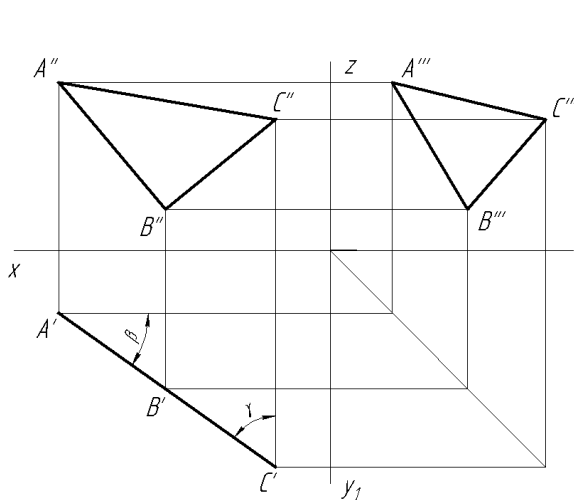


Рис. 19

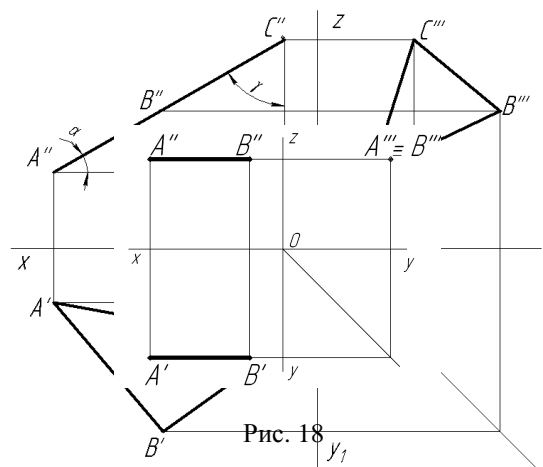


Рис. 20

Плоскость, перпендикулярная к профильной плоскости проекций, называется *профильно проецирующей* (рис. 21). Профильная проекция плоскости является прямой линией, а углы  $\alpha$  и  $\beta$  определяют наклон данной плоскости к плоскостям проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$ .

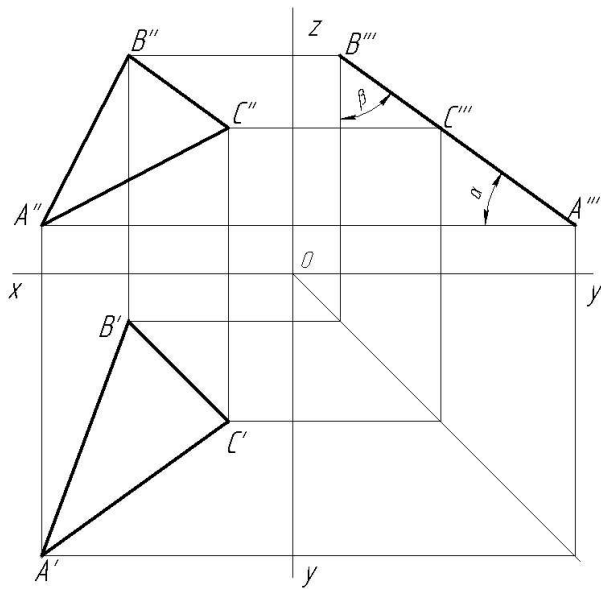


Рис. 21

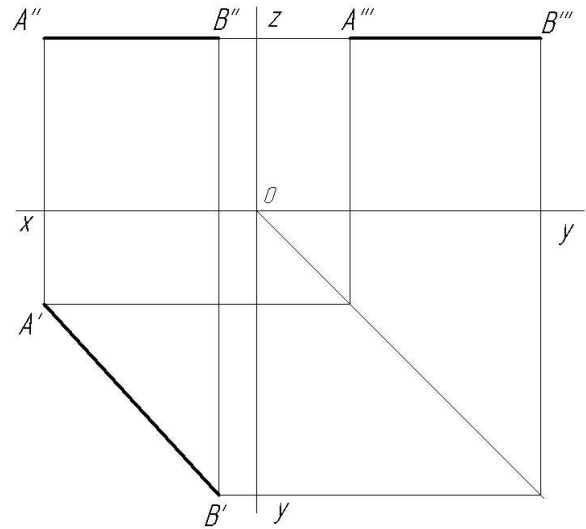


Рис. 22

Прямая, параллельная какой-нибудь плоскости проекций, называется *прямой уровня*. Прямая уровня  $h$ , параллельная горизонтальной плоскости проекций  $\pi_1$  (рис. 22), называется *горизонталью*. Прямая уровня  $f$ , параллельная фронтальной плоскости  $\pi_2$ , называется *фронталью* (рис. 23).

*Профильная* прямая  $p$  также является прямой уровня по отношению к плоскости проекций  $\pi_3$ , которой она параллельна (рис. 24).

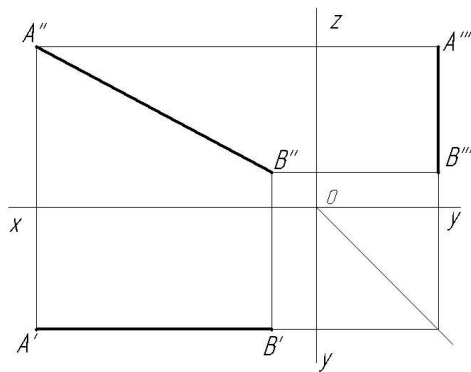


Рис. 23

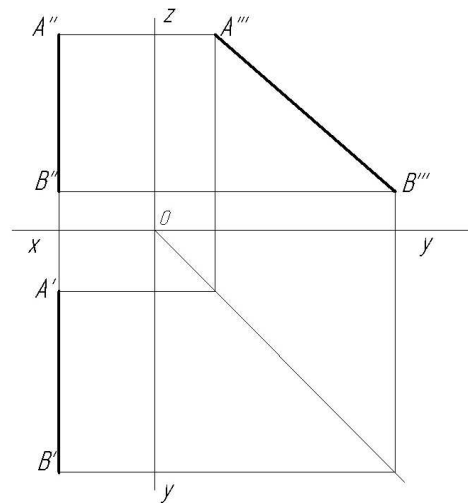


Рис. 24

На комплексном чертеже фронтальная и профильная проекции горизонтали совпадают с одной и той же горизонтальной линией связи. Горизонтальная и профильная проекции фронтالي на комплексном чертеже перпендикулярны соответственно вертикальным и горизонтальным линиям связи. У профильной прямой уровня  $p$  горизонтальная и фронтальная проекции совпадают с одной и той же вертикальной линией связи.

Отметим, что *проецирующие* прямые также являются прямыми уровня. Так, горизонтально проецирующая прямая является вместе с тем фронталью и профильной прямой, фронтально проецирующая прямая – горизонталью и профильной прямой, а



профильно проецирующая – горизонталью и фронталью.

Прямые уровня проецируются без искажения на параллельную им плоскость проекций. Поэтому на плоскости проекций  $\pi_1$  не искажаются горизонтали, на плоскости  $\pi_2$  – фронтали, а на плоскости  $\pi_3$  – профильные прямые.

Одновременно с этим на поле  $\pi_1$  можно измерить углы  $\beta$  и  $\gamma$  наклона горизонтали к плоскостям проекций  $\pi_2$  и  $\pi_3$ , на поле  $\pi_2$  – углы  $\alpha$  и  $\gamma$  наклона фронтали к плоскостям  $\pi_1$  и  $\pi_3$ , а на поле  $\pi_3$  – углы  $\alpha$  и  $\beta$  наклона профильной прямой к плоскостям проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$ .

В плоскости общего положения можно провести бесчисленное множество горизонталей, фронталей и профильных прямых, при этом все горизонтали будут параллельны между собой, точно также будут параллельны между собой фронтали и профильные прямые.

Плоскость, параллельная какой-нибудь плоскости проекций, называется *плоскостью уровня*, так как все точки этой плоскости одинаково удалены от плоскости проекций.

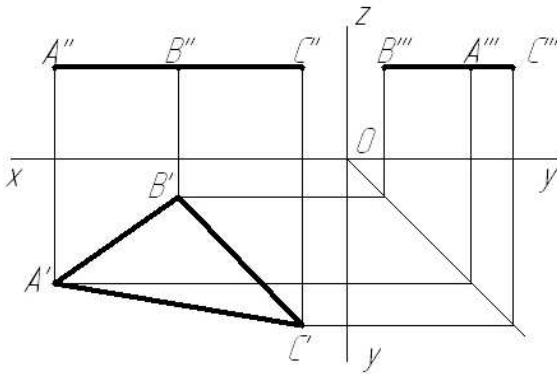


Рис. 25

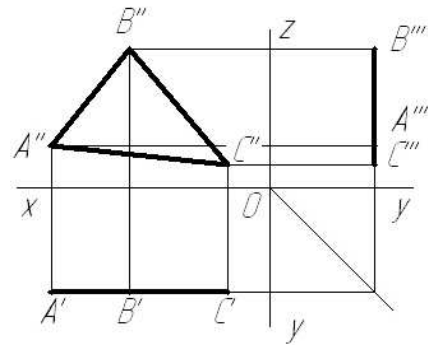


Рис. 26

Плоскость  $ABC$ , заданная треугольником, параллельная горизонтальной плоскости проекций  $\pi_1$ , называется *горизонтальной плоскостью уровня* (рис. 25).

Та же плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций  $\pi_2$ , называется *фронтальной плоскостью уровня* (рис. 26).

Плоскость, параллельная профильной плоскости  $\pi_3$ , называют *профильной плоскостью уровня* (рис. 27).

Каждая плоскость уровня является в то же время проецирующей плоскостью.

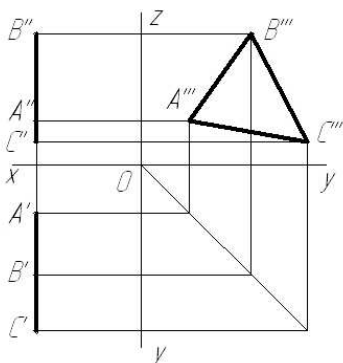


Рис. 27

Так, горизонтальная плоскость является вместе с тем фронтально и профильно проецирующей плоскостью, фронтальная плоскость уровня является горизонтально и профильно проецирующей, а профильная плоскость уровня является горизонтально и фронтально проецирующей плоскостью.

Плоскости уровня на комплексном чертеже задаются одним следом: горизонтальная – фронтальным; фронтальная – горизонтальным; профильная – горизонтальным или фронтальным.

Все фигуры, лежащие в плоскостях уровня, проецируются без искажения на плоскость, которой они параллельны.

## Лекция 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ

### Следы прямой линии

*Следом прямой* линии называются точки пересечения этой прямой с плоскостями проекций.

Чтобы найти фронтальный след прямой  $AB$  (рис. 28), необходимо продолжить ее горизонтальную проекцию  $A'B'$  до пересечения с осью  $x$  в точке  $N'$ , а затем из точки  $N'$  провести вертикальную линию связи до пересечения с линией, являющейся продолжением фронтальной проекции  $A''B''$  прямой  $AB$ , в точке  $N''$ . Точка  $N''$  является *фронтальным следом* прямой  $AB$ .

Для нахождения горизонтального следа необходимо продолжить фронтальную проекцию  $A''B''$  до пересечения с осью  $x$  в точке  $M''$ . Из точки  $M''$  проводится вертикальная линия связи до пересечения с продолжением горизонтальной проекции  $A'B'$  прямой  $AB$  в точке  $M'$ . Точка  $M'$  является *горизонтальным следом* прямой  $AB$ .

Чтобы построить следы прямой  $AB$  на эюре (рис. 29), необходимо выполнить те же построения (рис. 28): продлить горизонтальную проекцию прямой до пересечения с осью  $x$  в точке  $N'$ . Из точки  $N'$  восстановить перпендикуляр до пересечения с фронтальной проекцией прямой в точке  $N''$ .

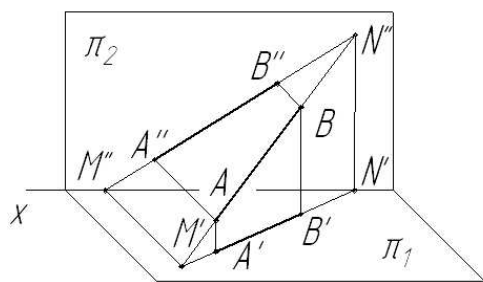


Рис. 28

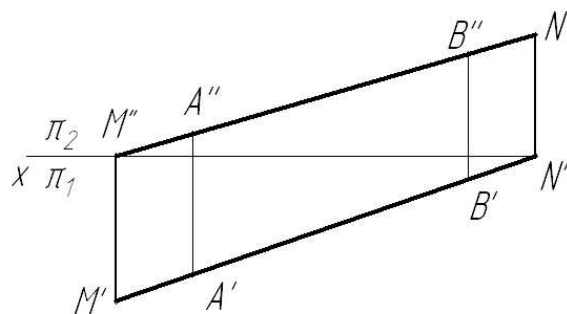


Рис. 29

Аналогично для построения горизонтального следа прямой  $AB$  надо продолжить до пересечения с осью  $x$  ее фронтальную проекцию (точка  $M''$ ). Из точки пересечения восстановить перпендикуляр до пересечения с продолжением горизонтальной проекции прямой (точка  $M'$ ).

Следует помнить, что прямая, параллельная какой-либо плоскости проекций, след на этой плоскости иметь не может, так как она с этой плоскостью не пересекается.

### Следы плоскости

Прямые, по которым плоскость  $P$  пересекает плоскости проекций, называются *следами* этой плоскости (рис. 30).

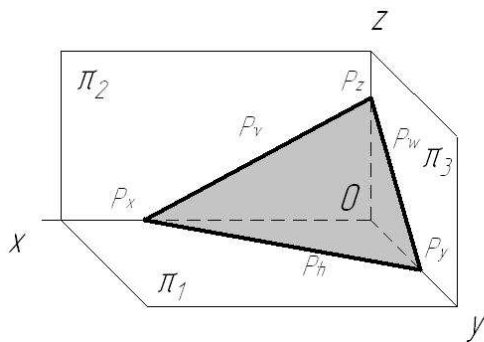


Рис. 30

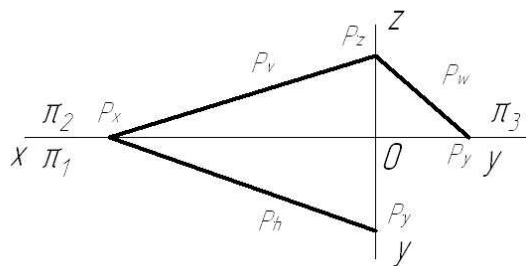


Рис. 31

На рис. 31 приведен эюр плоскости  $P$  в системе  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ , что подтверждает возможность задания любой плоскости на эюре ее следами. Следует иметь в виду, что фронтальная проекция фронтального следа плоскости совпадает с самим следом, а горизонтальная проекция его – с осью  $x$ . Аналогично горизонтальная проекция горизонтального следа совпадает с самим следом, а фронтальная проекция горизонтального следа – с осью  $x$ .

### Прямая и точка в плоскости

*Прямая принадлежит плоскости* в следующих случаях:

- если она проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости;
- если она проходит через точку, принадлежащую данной плоскости, и параллельна какой-либо прямой, находящейся в этой плоскости или ей параллельной.

*Прямая принадлежит плоскости, заданной следами, если:*

- а) следы прямой находятся на одноименных следах плоскости (рис. 32, 33);
- б) она параллельна одному из следов плоскости и имеет с другим следом общую точку (рис. 34, 35).

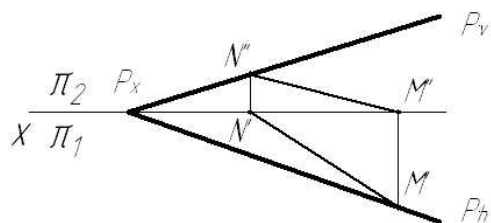


Рис. 32

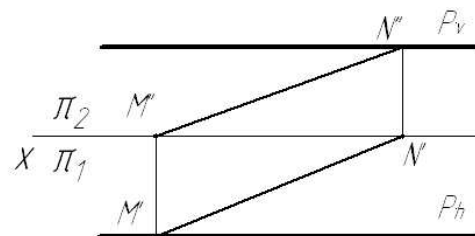


Рис. 33

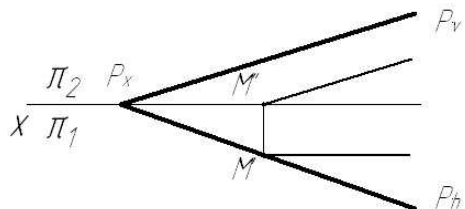


Рис. 34

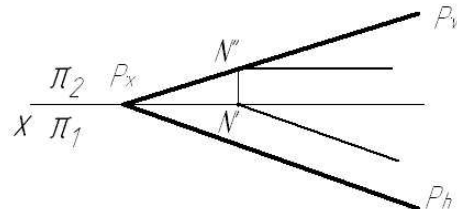


Рис. 35

Прямая в плоскости может быть построена не только тогда, когда плоскость задана следами, но и при любой другой форме задания плоскости. В качестве примера на рис. 36 построена прямая в плоскости, заданной двумя параллельными прямыми  $m$  и  $n$ . Вначале проводим произвольную горизонтальную или фронтальную проекцию прямой  $AB$ , которая пересекает параллельные прямые в точках  $1$  и  $2$ .

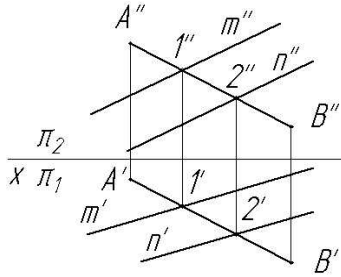


Рис. 36

Если проводим фронтальную проекцию прямой, то получаем проекции точек  $1''$  и  $2''$ , по которым находим горизонтальные проекции точек  $1'$  и  $2'$ , а через них проводим горизонтальную проекцию прямой  $AB$ . Если построение начинается с горизонтальной проекции прямой, то по проекциям точек  $1'$  и  $2'$  находятся проекции  $1''$  и  $2''$ .

Точка принадлежит плоскости, если она лежит на прямой, принадлежащей данной плоскости. Для проверки принадлежности точки плоскости через одну из ее проекций проводят прямую линию, принадлежащую данной плоскости, а затем рассмотренным выше способом строится вторая проекция данной прямой. Если вторая проекция точки лежит на вновь построенной проекции прямой, то она принадлежит плоскости. В противном случае точка не принадлежит заданной плоскости.

### Определение натуральной величины отрезка прямой

Необходимость определения натуральных величин отрезков прямых встречается при решении большинства метрических задач.

Натуральная величина отрезка может быть определена следующими способами:

- способом прямоугольного треугольника;
- вращением вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций;
- переменной плоскостей проекций.

*Способ прямоугольного треугольника.* Расстояние между двумя точками  $A$  и  $B$  определяется длиной отрезка прямой, заключенного между этими точками (рис. 37).

Из свойств прямоугольного проецирования известно, что проекция отрезка будет равна (конгруэнтна) оригиналу лишь в том случае, когда он параллелен плоскости проекций:

$$([AB] \parallel \pi_1) \leftrightarrow [A'B'] = [AB];$$

$$([AB] \perp \pi_2) \leftrightarrow [A''B''] = [AB].$$

Во всех остальных случаях отрезок проецируется на плоскость с искажением. При этом проекция отрезка всегда меньше его длины.

Для установления зависимости между длиной отрезка прямой и длиной его проекции рассмотрим рис. 37. В прямоугольном четырехграннике  $ABB'A'$  (углы при вершинах  $A'$  и  $B'$  прямые) боковыми сторонами являются отрезок  $AB$  и его горизонтальная проекция  $A'B'$ , а основаниями – отрезки  $AA'$  и  $BB'$ , по величине равные удалениям концов  $A$  и  $B$  от горизонтальной плоскости проекций  $\pi_1$ .

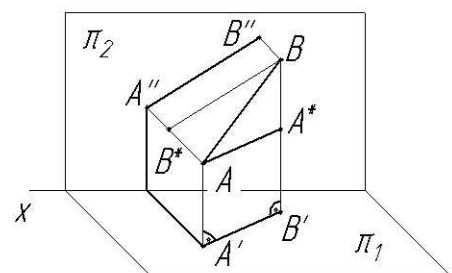


Рис. 37

Проведем в плоскости прямоугольного четырехгранника  $ABB'A'$  через точку  $A$  прямую  $AA^*$ , параллельную горизонтальной проекции отрезка  $A'B'$ . Получим прямоугольный треугольник  $AA^*B$ , у которого катет  $AA^*$  равен  $A'B'$ , а катет  $BA^*$  равен разности аппликат концов отрезка:

$$[BA^*] = [BB'] - [AA'].$$

Гипотенуза этого треугольника равна длине отрезка  $AB$ :

$$[AB]^2 = [A'B']^2 + ([BB'] - [AA'])^2.$$

Зависимость между длиной отрезка и его фронтальной проекцией может быть установлена с помощью треугольника  $ABB^*$ , в котором гипотенуза равна длине отрезка, один из катетов – фронтальной проекции отрезка, а другой – разности удалений концов отрезка от фронтальной плоскости проекций:

$$[AB]^2 = [B''A'']^2 + ([AA''] - [BB''])^2.$$

На рис. 38 отрезок прямой  $AB$  представлен на эпюре проекциями  $A'B'$  и  $A''B''$ . Для нахождения

натуральной величины отрезка из любой точки ( $A$  или  $B$ ) на любой проекции проводятся линии, перпендикулярные к последней, и на них откладываются отрезки  $\Delta z$  (если построение осуществляется на горизонтальной проекции) или  $\Delta y$  (если построение осуществляется на фронтальной проекции). На рис. 38 рассматриваемые линии проведены из проекций точек  $A'$  и  $B'$ .  $A_0B'$  и  $A''B_0$  – натуральные величины отрезка  $AB$ .

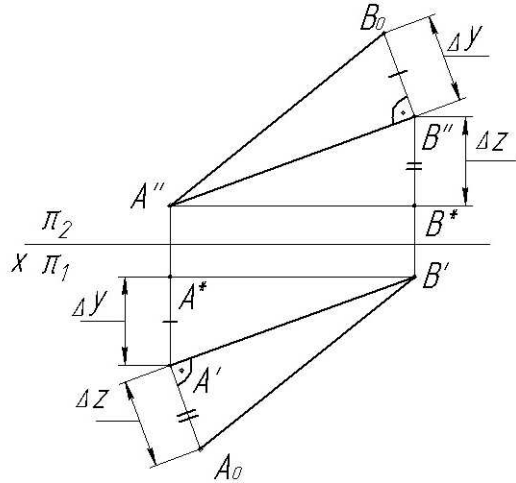


Рис. 38

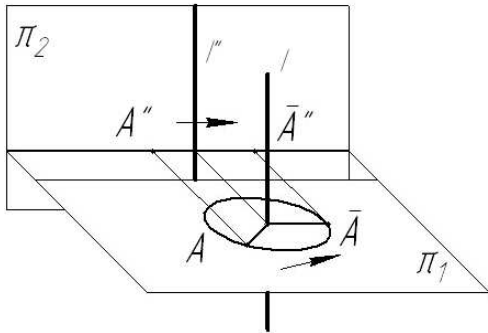


Рис. 39

Способ вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, заключается в том, что заданная точка, линия или плоская фигура, расположенные перед плоскостями проекций  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  и  $\pi_3$ , вращаются вокруг оси, перпендикулярной к одной из плоскостей проекций, до требуемого положения относительно одной из них. При вращении каждая точка будет перемещаться по соответствующей траектории.

Рассмотрим вращение простейшего геометрического элемента – точки  $A$  (рис. 39). Ось вращения  $I$  будет перпендикулярна к плоскости  $\pi_1$ . При вращении около оси точка  $A$  перемещается по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Точка пересечения этой плоскости с осью вращения называется центром вращения.

Так как окружность, по которой движется точка  $A$ , расположена в плоскости, параллельной плоскости  $\pi_1$ , то горизонтальная проекция этой окружности является ее действительным видом, а фронтальная проекция – отрезком прямой, параллельной оси  $x$  (рис. 40). Вращение отрезка прямой около оси, перпендикулярной к плоскости проекций, можно рассматривать как вращение двух точек этого отрезка.

Построение на комплексном чертеже упрощается, если ось вращения провести через какую-либо конечную точку вращаемого отрезка прямой. В этом случае достаточно повернуть только одну точку отрезка, так как другая точка, расположенная на оси вращения, остается неподвижной.

Пусть требуется определить способом вращения действительную длину отрезка  $AB$  прямой общего положения (рис. 41). Через конец отрезка  $A$  проведем ось вращения  $I$ , перпендикулярную к плоскости  $\pi_1$ . Вращаем вокруг этой оси второй конец отрезка – точку  $B$ . Чтобы получить на комплексном чертеже действительную длину отрезка, надо повернуть его так, чтобы он стал параллелен плоскости  $\pi_2$ . После вращения горизонтальная проекция отрезка занимает положение, параллельное оси  $x$ .

Из точки  $A'$  радиусом  $A'B'$  описываем дугу окружности до пересечения ее с прямой, проведенной из точки  $A'$  параллельно оси  $x$ . Точка пересечения  $\bar{B}'$  – новая горизонтальная проекция точки  $B$ . Фронтальную проекцию  $\bar{B}''$  находим при помощи проекционной линии связи, проведенной из точки  $\bar{B}'$ , при ее пересечении с прямой, проведенной из точки  $B''$  параллельно оси  $x$ . Соединив точки  $A''$  и  $\bar{B}''$ , получим действительную длину отрезка  $AB$ .

*Способ перемены плоскостей проекций.* На комплексном чертеже (рис. 42) новая плоскость  $\pi_4$  проведена параллельно горизонтальной проекции отрезка  $A'B'$  или ее можно провести параллельно фронтальной проекции  $A''B''$ .

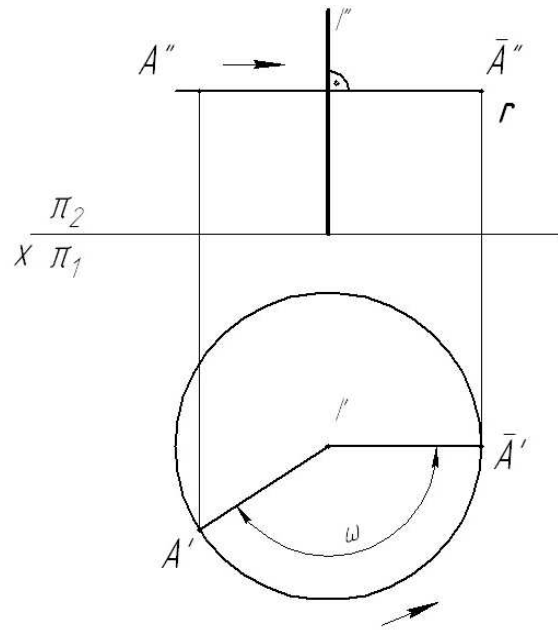


Рис. 40

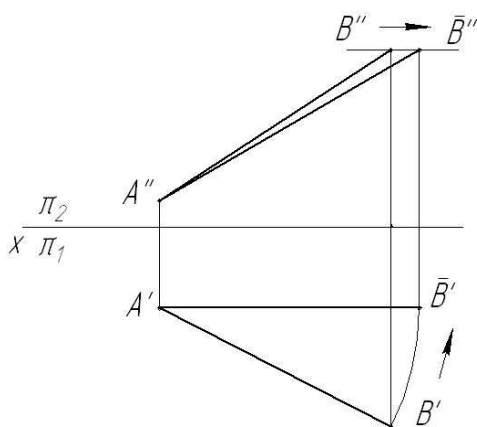


Рис. 41

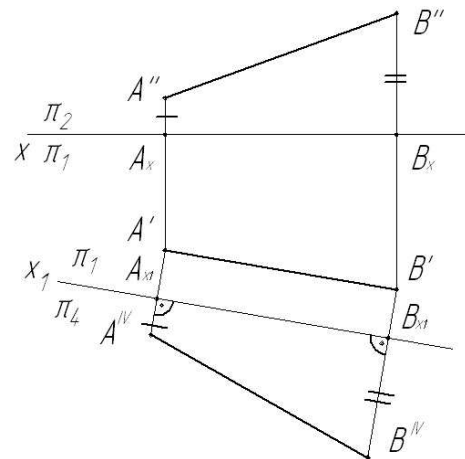


Рис. 42

Плоскость  $\pi_4$  в пересечении с плоскостью проекций  $\pi_1$  образует новую ось проекций  $x_1$ . Из точек  $A'$  и  $B'$  проводятся новые линии проекционной связи, перпендикулярные к оси

$x_l$ , которые пересекают последнюю в точках  $A_{x_l}$  и  $B_{x_l}$ . Из данных точек на проведенных линиях откладываем отрезки  $A_x A''$  и  $B_x B''$  (см. фронтальную проекцию) и получаем точки  $A^{IV}$  и  $B^{IV}$ . Отрезок  $A^{IV} B^{IV}$  является натуральной величиной отрезка  $AB$ .

## Лекция 3. ПОВЕРХНОСТИ

### Поверхность. Способы задания поверхности

*Поверхность* – это множество всех последовательных положений движущейся линии. Эта линия, называемая *образующей*, при движении может сохранять или изменять свою форму. Движение образующей может быть подчинено какому-либо закону или быть произвольным. В первом случае поверхность будет *закономерной*, а во втором – *случайной* (незакономерной).

Закон движения образующей обычно определяется другими линиями, называемыми *направляющими*, по которым скользит образующая при своем движении, а также характером движения образующей. Например, поверхность  $Q$  на рис. 43 – поверхность, образованная перемещением образующей  $l$  по неподвижным направляющим линиям  $m$ .

В некоторых случаях одна из направляющих может превращаться в точку (вершина у конической поверхности) или находиться в бесконечности (цилиндрическая поверхность).

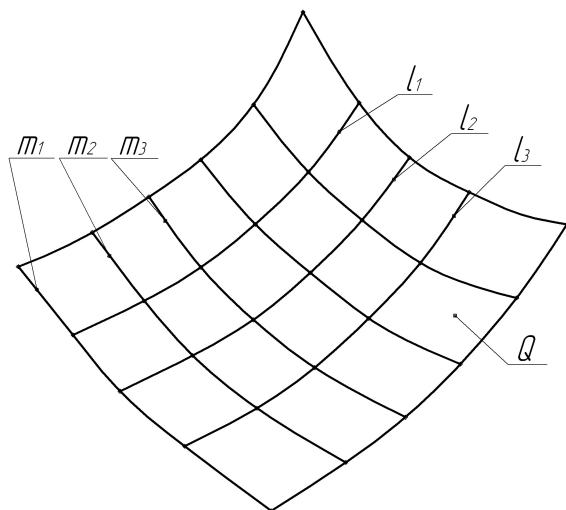


Рис. 43

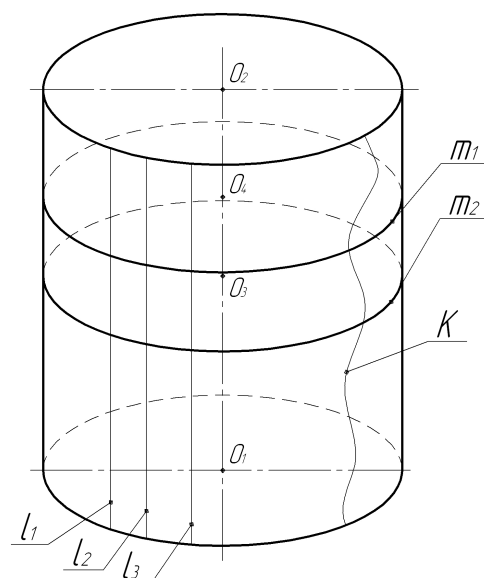


Рис. 44

Одна и та же поверхность может быть получена различными способами. Например, цилиндрическая поверхность (рис. 44) может быть получена в результате движения прямолинейной образующей  $l$  по кривой направляющей параллельно некоторому наперед заданному положению (ось  $O_1$ ,  $O_2$ ) или движением кривой направляющей  $m$  по прямолинейной образующей. Могут быть и другие способы образования цилиндрической поверхности. В практике из всех возможных способов образования поверхности за основной принимают наиболее простой. Например, для цилиндрической поверхности за образующую принимают прямую линию.

В итоге для каждой поверхности необходимо знать некоторую совокупность данных, однозначно ее определяющих. К этим данным относятся как геометрические элементы поверхности (форма образующей, форма направляющих), так и закон перемещения образующей. Совокупность геометрических элементов, определяющих поверхность, называют *определителем поверхности*, учитывая, что закон перемещения образующей определяется названием поверхности.



В зависимости от формы образующей и закона ее перемещения в пространстве поверхности можно разделить на следующие группы:

- *линейчатые* – поверхности, образующей которых является прямая линия;
- *нелинейчатые* – поверхности с криволинейной образующей;
- *поверхности вращения*, образуемые вращением произвольной образующей вокруг неподвижной оси;
- *поверхности, образованные поступательным движением образующей*, например, призматические и цилиндрические, называемые также *поверхностями переноса*.

*Поступательным* называют такое движение, при котором все точки движущегося предмета перемещаются параллельно некоторому заданному направлению и имеют одинаковую скорость.

### Гранные поверхности и многогранники

*Гранные поверхности* – поверхности, образованные перемещением прямолинейной образующей по ломаной линии, например *пирамидальные* и *призматические* поверхности.

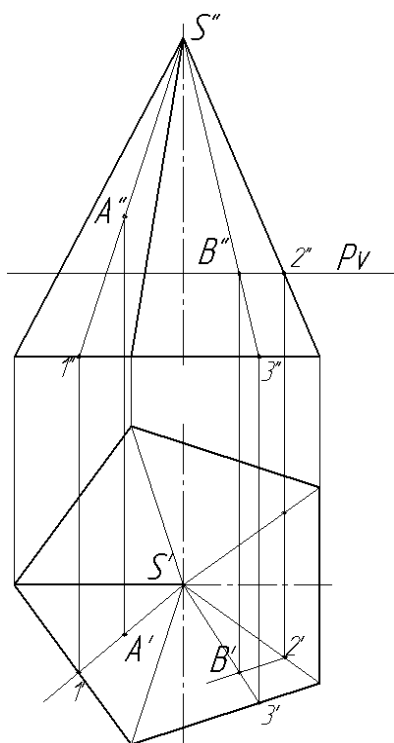


Рис. 45

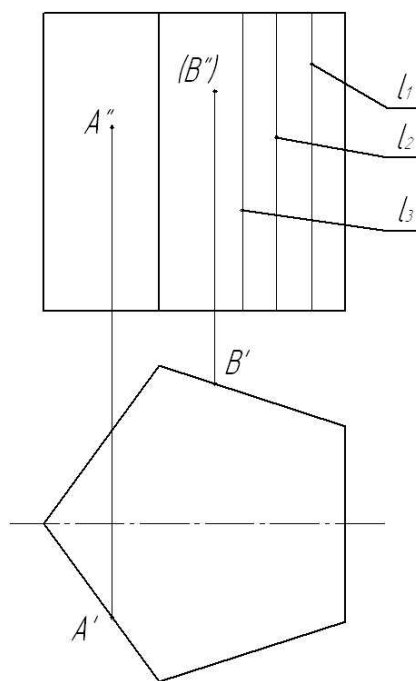


Рис. 46

*Пирамида* – многогранник, имеющий *основание*, *грани* и *ребра* (линии пересечения боковых граней), пересекающиеся в одной точке (*вершина пирамиды*).

*Пирамидальная поверхность* – поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по ломаной направляющей, при этом одна точка образующей неподвижна (рис. 45).

Элементы пирамидальной поверхности: образующая, направляющая, вершина, грань и ребра (линии пересечения смежных граней).

Определитель пирамидальной поверхности включает вершину и направляющую. Зная их положение, можно провести любую образующую пирамидальной поверхности.

*Призма* – многогранник, у которого две грани (основания) одинаковые и взаимно параллельные, а остальные грани (боковые) – параллелограммы. Призма называется прямой, если ее ребра перпендикулярны к плоскости основания, и наклонной – если не перпендикулярны.

*Призматическая поверхность* – поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по ломаной направляющей, при этом образующая перемещается параллельно некоторому наперед заданному направлению (рис. 46).

Элементы призматической поверхности: образующая, направляющая, грани и ребра (линии пересечения граней).

Определитель призматической поверхности включает образующую и направляющую. Зная их положение, можно провести любую дополнительную образующую.

Если призматические поверхности перпендикулярны к плоскости проекций, то такую поверхность называют проецирующей.

Из числа гранных поверхностей выделяют группу *многогранников* – замкнутых поверхностей, образованных некоторым количеством граней.

### **Поверхности вращения**

*Поверхности вращения* – поверхности, образованные вращением линии (образующей) вокруг прямой (оси вращения).

При образовании поверхности вращения любая точка образующей описывает в пространстве окружность. Эти окружности называют *параллелями*. Плоскости параллелей всегда перпендикулярны к оси вращения. Параллель наименьшего диаметра называется *горлом*, а наибольшего – *экватором*. Линии пересечения поверхности вращения с плоскостью, проходящей через ось вращения, называются *меридианами*.

Если у поверхности вращения образующая – прямая линия, то получаем линейчатую поверхность вращения, например коническую, а если кривая, то нелинейчатую, например сферу.

*Цилиндрическая поверхность вращения* (рис. 47) – поверхность, образованная вращением прямолинейной образующей вокруг параллельной ей прямой – оси.

*Коническая поверхность вращения* (рис. 48) – поверхность, образованная вращением прямолинейной образующей вокруг пересекающейся с ней прямой – осью.

*Сфера* (рис. 49) – поверхность, образованная вращением окружности вокруг ее диаметра.

### **Точки и линии на поверхности**

Для нахождения недостающей проекции точки, принадлежащей многограннику или кривой поверхности, необходимо построить какую-либо линию на заданной поверхности, проходящую через заданную проекцию точки, построить проекцию вспомогательной линии, а затем построить искомую проекцию точки. В качестве таких линий могут быть выбраны образующие, параллели, меридианы и др.

В ряде случаев, если поверхность тела проецирующая, т.е. перпендикулярна к одной из плоскостей проекций, отсутствующие на чертеже проекции точек могут быть найдены без дополнительных построений, так как поверхность обладает *собирательным* свойством.

Рассмотрим примеры построения точек, расположенных на пирамиде, призме, цилиндрической и конической поверхностях, а также сфере.

Условимся, что поверхность не имеет толщины, а точки и линии, лежащие на

поверхности, не могут войти внутрь поверхности и выйти за ее пределы.

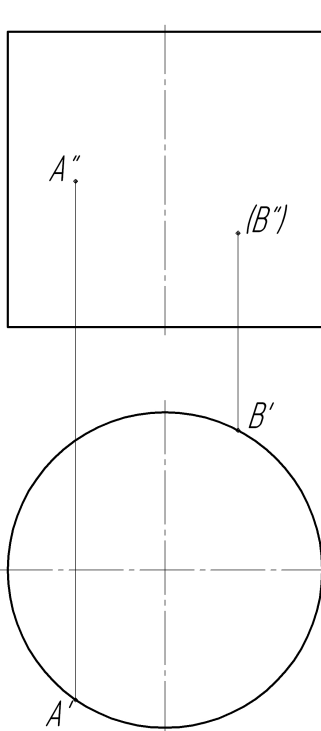


Рис. 47

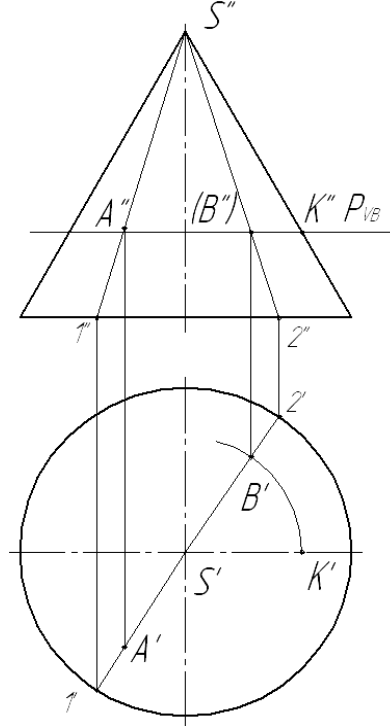


Рис. 48

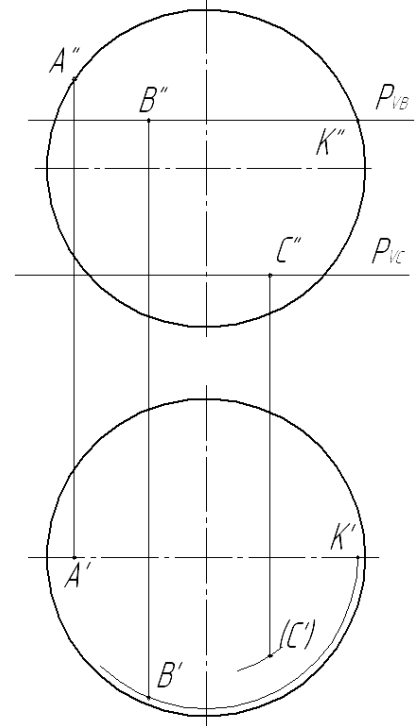


Рис. 49

Поэтому все точки, расположенные на поверхностях призмы и цилиндра, на горизонтальной проекции поверхности распределяются по периметру основания (многогранника или окружности) с учетом их видимости. Видимая на фронтальной проекции часть поверхности расположена на горизонтальной плоскости ниже оси симметрии, невидимая – выше оси симметрии. С учетом видимости опускаем из проекций точек на фронтальной проекции линии связи до пересечения с линиями основания призмы или цилиндра на горизонтальной плоскости проекций.

При нахождении проекций точек, расположенных на поверхности пирамиды или конуса, необходимо пользоваться одним из рассмотренных ниже способов.

*Способ образующих.* Проводим из вершины пирамиды или конуса образующую через проекцию точки  $A''$  до ее пересечения с основанием пирамиды или конуса на фронтальной проекции точки  $I''$  (рис. 46, 48). Затем с учетом видимости находим горизонтальную проекцию точки  $I'$  в месте пересечения линии связи с основанием пирамиды или конуса на горизонтальной проекции. Через проекции вершины  $S'$  и точки  $I'$  проводим горизонтальную проекцию образующей  $S'I'$ . Из точки  $A''$  опускаем линию проекционной связи до пересечения с линией  $S'I'$ . Точка пересечения  $A'$  линии связи с проекцией образующей  $S'I'$  и будет искомой точкой.

*Способ плоскостей уровня.* В зависимости от вида поверхности (пирамида – рис. 46, конус – рис. 48 или сфера – рис. 49) в сечении образуется многогранник или окружность. Проекция искомой точки лежит на одной из сторон многогранника или окружности (учитывается фактор видимости точки).

Рассмотрим пример нахождения горизонтальной проекции точки  $B$  на трех перечисленных поверхностях.

При пересечении пирамиды (рис. 46) горизонтальной плоскостью уровня, проведенной через проекцию точки  $B''$ , в сечении образуется пятигранник, стороны которого на горизонтальной проекции будут параллельны сторонам основания пирамиды,

а вершины (а следовательно, и размер стороны многогранника в сечении) определяются как точки пересечения вертикальной линии связи, проведенной из точки  $2''$  (точка пересечения плоскости уровня с гранью пирамиды), и ребер пирамиды. Из точки  $2'$  проводится линия, параллельная основанию пирамиды, а из точки  $B''$  – вертикальная линия связи. Точка пересечения этих линий и будет искомой проекцией  $B'$ . Если точка  $B$  невидима, то линия, параллельная основанию пирамиды, проводится из точки  $2_1'$ .

При пересечении конуса (рис. 48) и сферы (рис. 49) плоскостями уровня в сечении образуются окружности. Радиус окружности равен расстоянию от оси конуса или сферы до точки пересечения плоскости с образующей (точка  $K$ ). На горизонтальной проекции поверхностей указанным радиусом проводится дуга (вычерчивать всю окружность нет необходимости) выше или ниже горизонтальной оси (с учетом видимости точек). Из фронтальных проекций точки  $B''$  проводятся вертикальные линии связи до пересечения с дугами. Точка пересечения дуги и линии связи и будет искомой проекцией  $B'$ . Невидимые проекции точек заключены в круглые скобки ( $B''$  – на конусе,  $C''$  – на сфере).

Прямые линии на поверхности многогранников остаются отрезками прямых на всех его проекциях. Нахождение проекций этих линий заключается в нахождении проекций крайних точек отрезка.

Прямые линии, проведенные на одной из проекций поверхности вращения, на других проекциях превращаются в кривые линии. Для их построения обычно используются промежуточные точки (чем их больше, тем точнее будут построены проекции). Найденные проекции точек соединяются с помощью лекала плавными линиями.

## Лекция 4. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ

### Пересечение многогранников плоскостью частного положения

Проекции сечения многогранника плоскостью строятся следующими способами:

- нахождением точек пересечения ребер многогранника с плоскостью, т. е. нахождением вершин многогранников;
- нахождением линий пересечения граней многогранника с секущей плоскостью, т. е. нахождением сторон многоугольника.

*Пересечение призмы плоскостью частного положения.* Сечение геометрического тела плоскостью частного положения представляет собой плоскую фигуру, ограниченную линиями, все точки которых принадлежат как секущей плоскости, так и поверхности тела.

На рис. 50 представлена прямая пятигранная призма, рассеченная фронтально проецирующей плоскостью (обозначена фронтальным следом  $P_V$ ). Для построения проекций фигуры сечения необходимо найти проекции точек пересечения плоскости с ребрами и соединить их прямыми линиями. Фронтальные проекции искомых точек находятся в местах пересечения фронтальных проекций ребер со следом  $P_V$  (точки  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ ,  $4''$  и  $5''$ ).

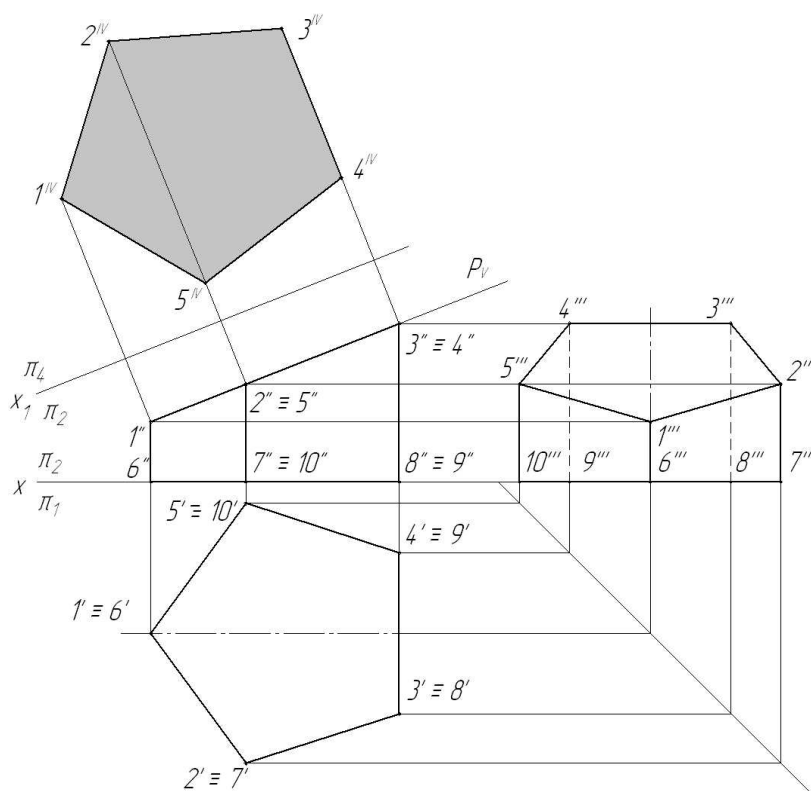


Рис. 50

Горизонтальные проекции точек пересечения ( $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ ,  $4'$  и  $5'$ ) находятся на горизонтальных проекциях ребер и определяются с помощью линий связи. С помощью линий связи строим профильные проекции точек.

Соединив последовательно найденные проекции точек, строим профильную

проекцию сечения.

Действительные размеры фигуры сечения определяются одним из известных способов – переменной плоскостей проекций или вращением.

Используем для решения поставленной задачи метод перемены плоскости проекций. Фронтальную плоскость проекций  $\pi_2$  заменим на новую плоскость  $\pi_4$ , параллельную фронтальному следу  $P_V$ . Плоскость  $\pi_4$  образует с плоскостью  $\pi_1$  ось  $x_1$ .

Для нахождения натуральной величины сечения выполняются следующие построения:

– из фронтальных проекций точек  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ ,  $4''$  и  $5''$  проводятся линии перпендикулярные к оси  $x_1$ ;

– откладывается от оси  $x_1$  отрезок, равный расстоянию от оси  $x$  до горизонтальной оси симметрии основания призмы, и через полученные точки проводится линия – ось симметрии натурального сечения;

– из точек пересечения линий с осью симметрии натурального сечения откладываются с горизонтальной проекции симметрично отрезки  $2'5'$  и  $3'4'$ ;

– находим точки  $2^{IV}$ ,  $5^{IV}$ ,  $3^{IV}$  и  $4^{IV}$  (точка  $1^{IV}$  лежит на оси симметрии).

Соединив последовательно точки  $1^{IV}$ ,  $2^{IV}$ ,  $3^{IV}$ ,  $4^{IV}$  и  $5^{IV}$ , получим натуральную величину сечения.

*Разверткой* называется плоская фигура, полученная при совмещении геометрического тела с одной плоскостью, без разрывов и наложения граней или иных элементов поверхности друг на друга (рис. 51).

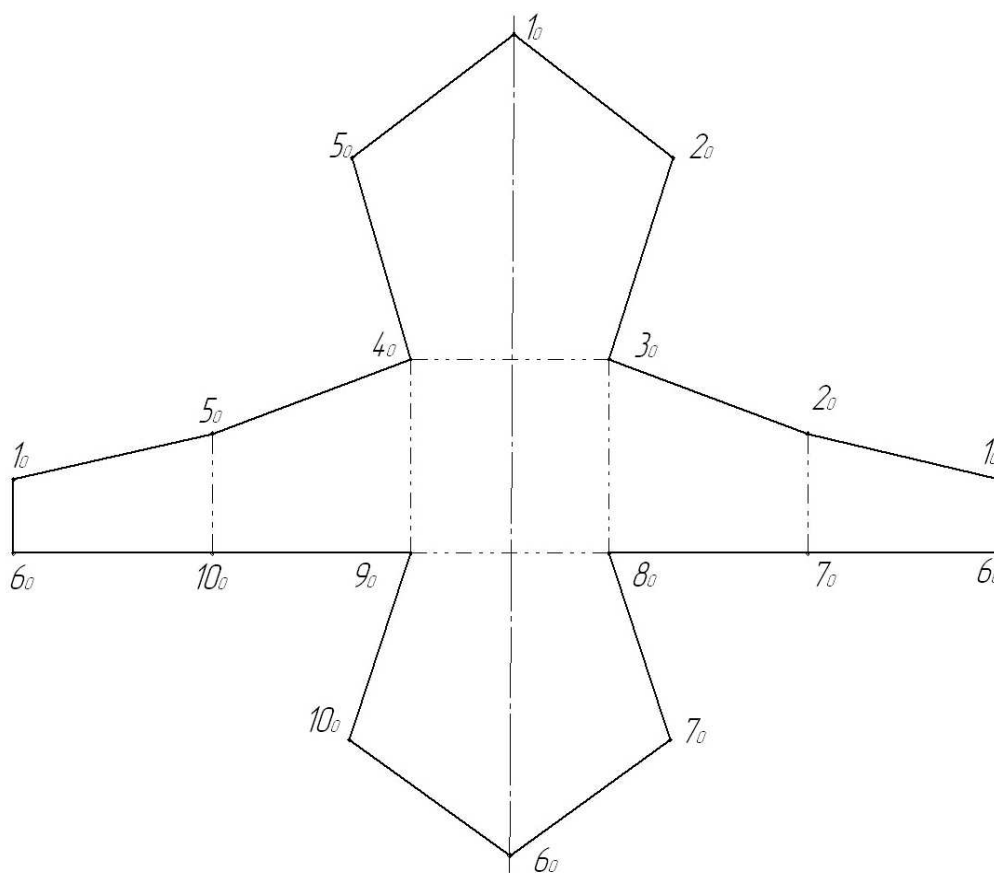


Рис. 51

Развертка боковой поверхности призмы с основанием и натуральной фигурой сечения выполняется в такой последовательности (рис. 51):

– проводится горизонтальная линия, на которой от произвольной точки  $6_0$

откладывается пять отрезков, равных размеру сторон основания призмы, –  $6_010_0$ ,  $10_09_0$ ,  $9_08_0$ ,  $8_07_0$ ,  $7_06_0$ ;

– из точек  $6_0$ ,  $10_0$ ,  $9_0$ ,  $8_0$ ,  $7_0$  проводятся вверх вертикальные линии, на которых откладываются соответственно отрезки, равные длине ребер (замеряются на фронтальной или профильной проекциях), и отмечаются точки  $1_0$ ,  $5_0$ ,  $4_0$ ,  $3_0$ ,  $2_0$  и  $1_0$ ;

– через середину развертки боковой поверхности проводится вертикальная осевая линия и известными способами строится в нижней части развертки основание призмы (точки  $9_0$ ,  $10_0$ ,  $6_0$ ,  $7_0$  и  $8_0$ ), а в верхней части – натуральная величина сечения (точки  $4_0$ ,  $5_0$ ,  $1_0$ ,  $2_0$  и  $3_0$ );

– соединяем найденные точки контурной линией, а точки  $5_0$  и  $10_0$ ,  $4_0$  и  $9_0$ ,  $3_0$  и  $8_0$ ,  $2_0$  и  $7_0$ ,  $4_0$  и  $3_0$ ,  $9_0$  и  $8_0$  штрихпунктирными линиями с двумя точками (линии перегиба – места расположения ребер призмы).

*Сечение пирамиды плоскостью частного положения.* Правильная шестигранный пирамида (рис. 52) пересечена фронтально проецирующей плоскостью  $P_V$ , заданной фронтальным следом  $P_V$ . Отметим на фронтальной проекции пирамиды точки пересечения плоскости с ребрами пирамиды  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$  (видимые проекции точек) и  $4''$ ,  $5''$ ,  $6''$  (невидимые проекции точек).

Горизонтальные проекции указанных точек находятся на пересечении вертикальных линий связи с горизонтальной проекцией соответствующего ребра –  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ ,  $4'$ ,  $5'$  и  $6'$ .

Нахождение профильных проекций точек очевидно и не требует дополнительных пояснений.

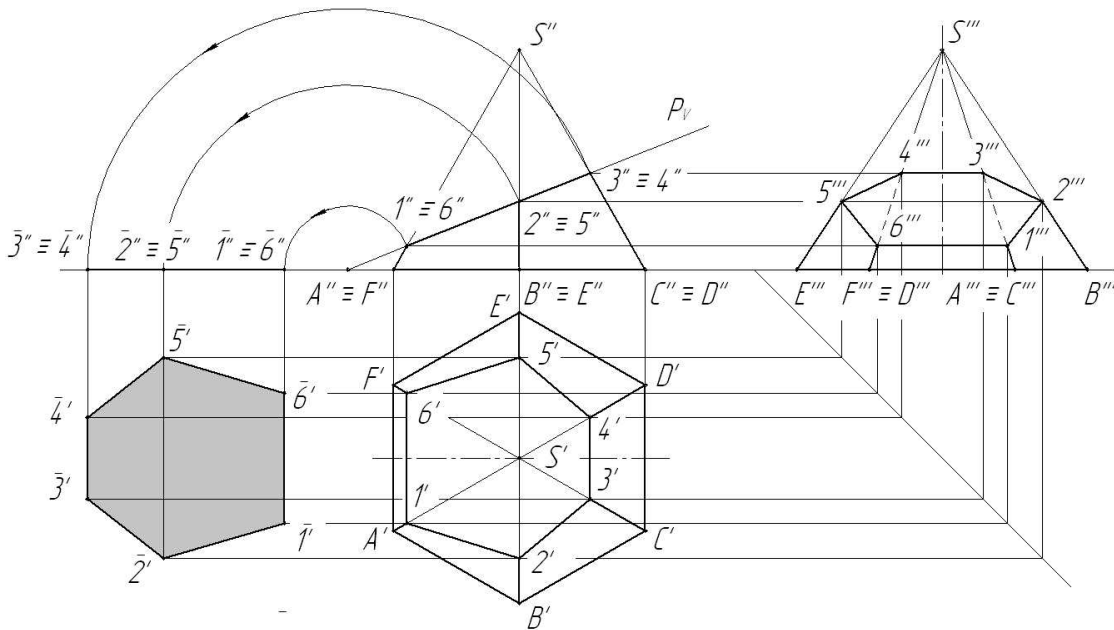


Рис. 52

Соединив последовательно проекции точек прямыми линиями, получим проекции горизонтального и профильного сечений пирамиды.

Для нахождения натуральной величины сечения воспользуемся методом вращения. За центр вращения принимается точка  $G_x''$  (точка пересечения следа секущей плоскости с осью  $x$ ). Радиусами, равными расстояниям от точки  $G_x''$  до точек  $1''$  ( $6''$ ),  $2''$  ( $5''$ ) и  $3''$  ( $4''$ ), проводим дуги до пересечения с осью  $x$  – точки  $\bar{1}''$ ,  $\bar{2}''$ ,  $\bar{3}''$ ,  $\bar{4}''$ ,  $\bar{5}''$  и  $\bar{6}''$ . Из указанных точек проведем вертикальные линии связи, которые, при пересечении с горизонтальными линиями связи, проведенными из точек

$1', 2', 3', 4', 5'$  и  $6'$  горизонтальной проекции сечения, определяют размеры и форму натурального сечения пирамиды –  $\bar{1}', \bar{2}', \bar{3}', \bar{4}', \bar{5}'$  и  $\bar{6}'$ .

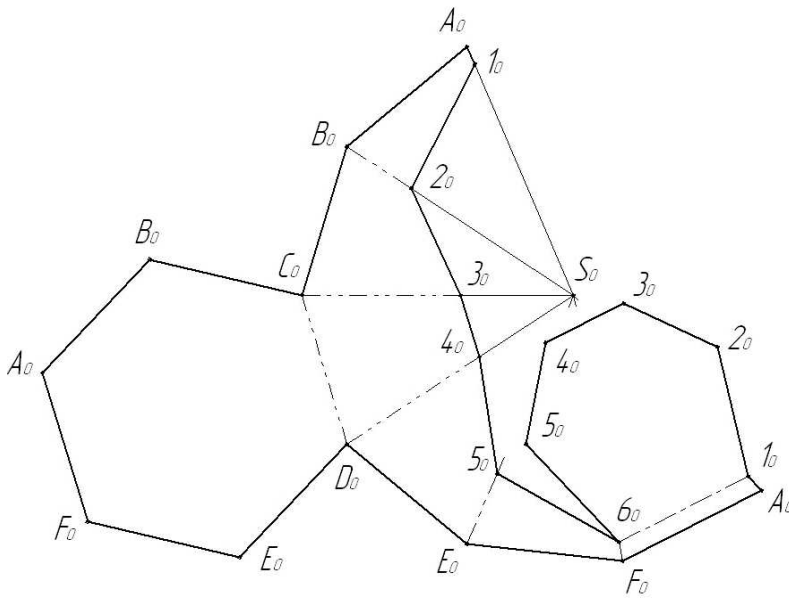


Рис. 53

Для построения развертки поверхности пирамиды (рис. 53) выбираем произвольную точку  $S_0$  (условную вершину пересеченной пирамиды). Положение точки  $S_0$  определяется лишь рациональным расположением развертки на формате чертежа. Из точки  $S_0$  радиусом, равным натуральной длине ее ребра, параллельного одной из плоскостей проекций (в рассматриваемом примере – крайние ребра на профильной проекции), проводим дугу, на которой из произвольно

выбранной точки  $A_0$  откладываем шесть отрезков, равных длине стороны основания пирамиды. Полученные точки  $A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0$  соединяем отрезками прямых линий, а также тонкими линиями с вершиной  $S_0$ .

Разрез боковой поверхности пирамиды осуществлен по ребру  $SA$ . Выше уже отмечалось, что натуральную величину имеют ребра  $S'''E'''$  и  $S'''B'''$ , поэтому при построении развертки проекции всех точек с помощью горизонтальных линий связи переносятся на одно из этих ребер. Так, положение точки  $1_0$  находится путем откладывания от точки  $A_0$  отрезка, равного длине отрезка  $E'''1_1'''$  ( $E'''6_1'''$ ).

Точки 2 и 5 лежат на ребрах, имеющих натуральную длину, поэтому на развертке боковой поверхности откладываем из точек  $B_0$  и  $E_0$  соответственно отрезки  $B'''2'''$  и  $E'''5'''$ . Точки  $3'''$  и  $4'''$  по линии связи также переносим на ребро  $S'''E'''$  и откладываем на развертке из точек  $C_0$  и  $D_0$  отрезок  $E'''3_1''' \equiv E'''4_1'''$ . Соединяем точки  $1_0, 2_0, 3_0, 4_0, 5_0$  и  $6_0$  прямыми линиями.

Далее из вершин  $C_0$  и  $D_0$  развертки строим фигуру основания (шестигранник), а из точек  $1_0$  и  $6_0$  – натуральную величину сечения.

Места перегиба (ребра и линии  $C_0D_0$  и  $1_06_0$ ) вычерчиваем штрихпунктирными линиями с двумя точками.

### Пересечение призмы и пирамиды прямыми линиями

На рис. 54 прямоугольная призма пересечена прямой  $AB$ . Необходимо определить точки входа и выхода прямой линии и ее видимость.

Грани призмы на горизонтальной проекции проецируются в прямые линии. Поэтому, используя горизонтально проецирующую плоскость  $P$ , находим точки пересечения проекции  $A'B'$  прямой линии с гранями призмы – точки  $M'$  и  $N'$ . По вертикальным линиям связи находим фронтальные проекции точек  $M$  и  $N$  –  $M''$  и  $N''$ . Из горизонтальной проекции видно, что в точке  $M$  прямая входит в призму, а в точке  $N$  выходит из нее. Поэтому отрезок  $MN$  линии  $AB$  будет невидим.

На рис. 55 приведен пример пересечения трехгранной пирамиды прямой  $DE$ .



Для нахождения точек входа и выхода прямой в грани пирамиды через фронтальную проекцию прямой  $D''E''$  проводим фронтально проецирующую плоскость  $P$  (фронтальный след плоскости  $P_V$ ), которая рассечет ребра пирамиды в точках  $1''$ ,  $2''$  и  $3''$ .

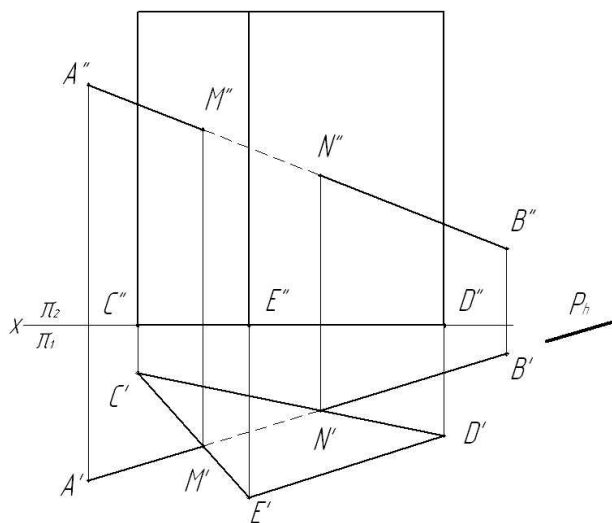


Рис. 54

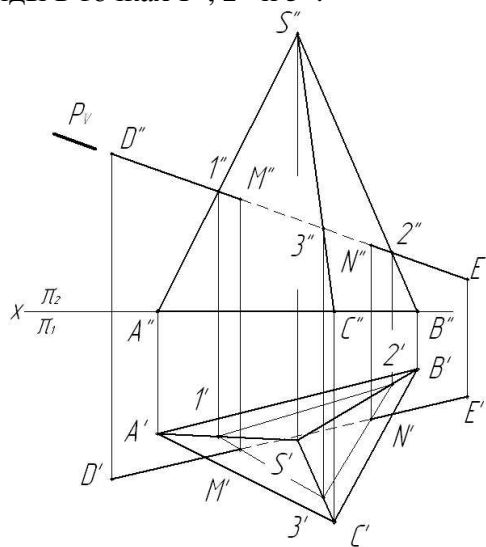


Рис. 55

По вертикальным линиям проекционной связи находим положение горизонтальных проекций точек пересечения –  $1'$ ,  $2'$  и  $3'$ . Соединив горизонтальные проекции точек получим в сечении треугольник, по которому плоскость  $P$  пересекает пирамиду. Проекция точек входа и выхода прямой в грани пирамиды  $M'$  и  $N'$  находятся на пересечении проекции прямой  $D'E'$  со сторонами треугольника  $1'2'3'$ . По линиям проекционной связи находим фронтальные проекции точек  $M''$  и  $N''$ . Участок прямой  $MN$  находится внутри пирамиды, поэтому невидим.

## Лекция 5. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ

### Пересечение поверхностей вращения плоскостями частного положения

Линия пересечения кривой поверхности плоскостью представляет собой плоскую кривую, которая может распадаться на прямые линии в случае пересечения плоскости с линейчатой поверхностью по ее образующим. Обычно построение этой линии производят по ее отдельным точкам.

Основным способом построения точек линии пересечения поверхности вращения с плоскостью является способ вспомогательных секущих плоскостей, пересекающих данную поверхность по некоторым линиям, которые должны быть графически простыми – прямыми или окружностями. Точки пересечения этих линий, являясь общими для поверхности вращения и секущей плоскости, будут точками искомой линии пересечения.

Так как линии пересечения каждой из вспомогательных секущих плоскостей с заданной поверхностью вращения и пересекающей ее плоскостью являются конкурирующими линиями, то построение точек линий пересечения поверхностей вращения с плоскостью производится теми же способами, которые используются при нахождении проекций точек и прямых линий на поверхности.

*Пересечение цилиндрической поверхности плоскостью частного положения.* Вид фигуры сечения цилиндрической поверхности плоскостью частного положения зависит от положения секущей плоскости.

При пересечении кругового цилиндра плоскостью частного положения в сечении могут получиться:

- *окружность*, если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра;
- *эллипс*, если секущая плоскость наклонена к оси цилиндра;
- *прямоугольник*, если секущая плоскость параллельна оси цилиндра.

Построение плоского сечения прямого кругового цилиндра аналогично построению плоского сечения призмы, поскольку прямой круговой цилиндр можно рассматривать как прямую призму с бесчисленным количеством ребер – образующих цилиндра. На рис. 56 приведены три проекции прямого кругового цилиндра, пересеченного фронтально проецирующей плоскостью  $P$ , заданной фронтальным следом. Из комплексного чертежа видно, что плоскость  $P$  пересекает не только боковую поверхность, но и верхнее основание цилиндра. Как известно, плоскость, расположенная под углом к оси цилиндра, пересекает его по эллипсу. Следовательно, фигура сечения в данном случае представляет собой часть эллипса. Фронтальная проекция фигуры сечения совпадает с фронтальным следом плоскости  $P_V$ . Горизонтальная проекция сечения совпадает с горизонтальной проекцией основания цилиндра.

Для построения профильной проекции сечения необходимо предварительно найти проекции его точек. Например, для нахождения горизонтальной проекции точки  $b$  проведем через ее фронтальную проекцию  $b''$  линию связи до пересечения с горизонтальной проекцией окружности основания (точка  $b'$ ). При помощи линий связи по двум имеющимся проекциям  $b'$  и  $b''$  находим профильную проекцию  $b'''$ . Полученные таким образом профильные проекции точек фигуры сечения соединяем кривой линией по лекалу.

Натуральную величину сечения определим способом перемены плоскостей проекций. Новую ось проекций  $x_1$  проведем параллельно фронтальному следу  $P_V$  на произвольном расстоянии.

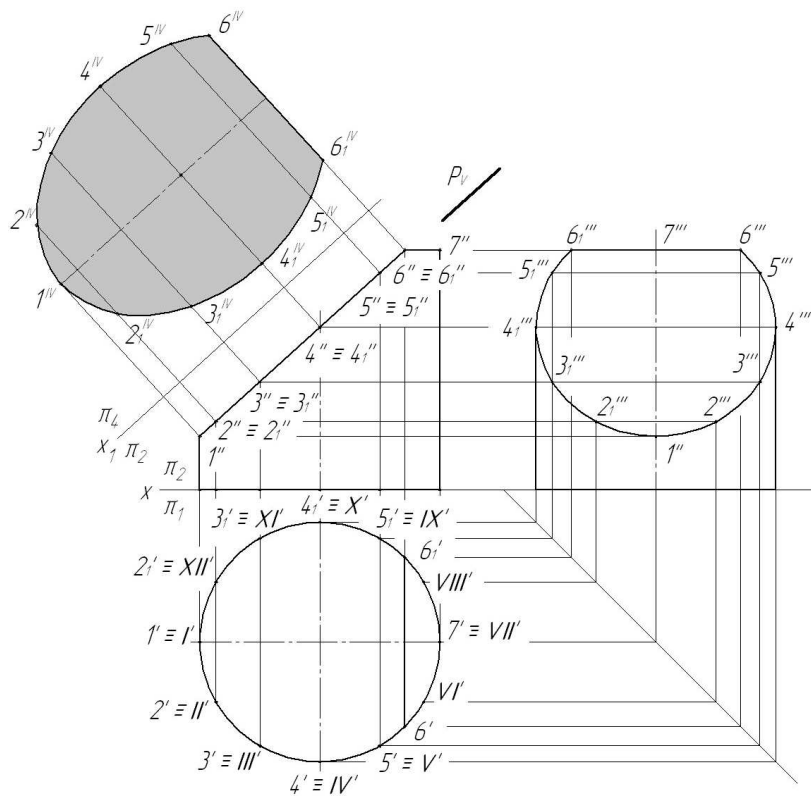


Рис. 56

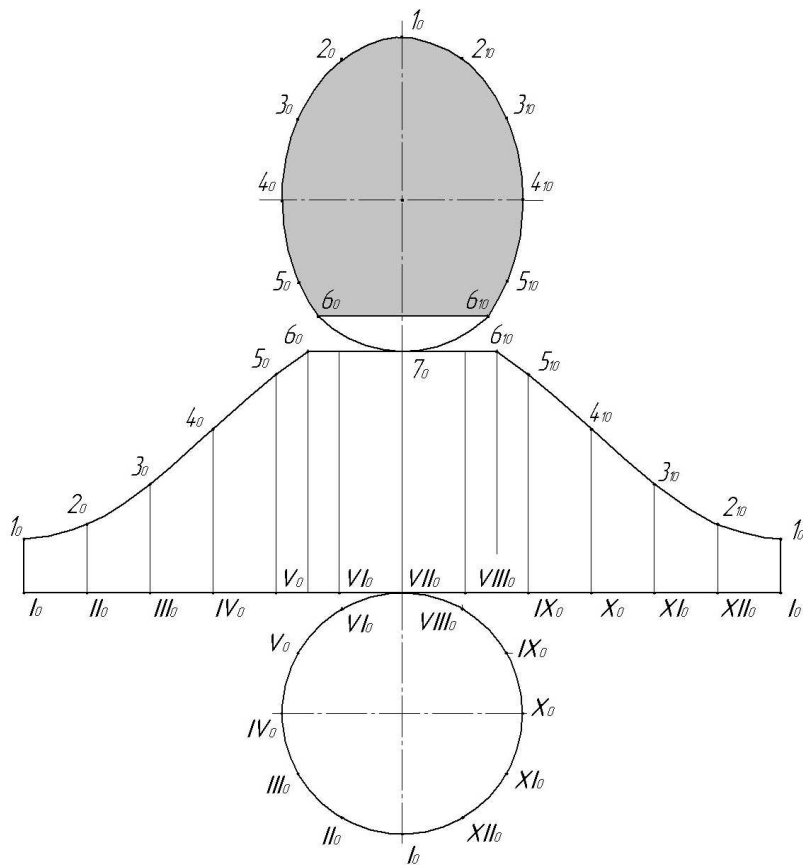


Рис. 57

Из точек пересечения поверхности цилиндра с плоскостью ( $1''$ ,  $2'' \equiv 2_1''$ ,  $3'' \equiv 3_1''$ ,  $4'' \equiv 4_1''$ ,  $5'' \equiv 5_1''$  и  $6'' \equiv 6_1''$ ) проводим линии перпендикулярные к новой оси  $x_1$  и откладываем от данной оси на этих линиях расстояния, равные расстоянию перечисленных точек сечения от оси  $x$  на горизонтальной проекции цилиндра (координата  $y$ ).

Соединив найденные точки  $1^{IV}$ ,  $2^{IV}$ ,  $3^{IV}$ ,  $4^{IV}$ ,  $5^{IV}$ ,  $6^{IV}$ ,  $6_1^{IV}$ ,  $5_1^{IV}$ ,  $4_1^{IV}$ ,  $3_1^{IV}$ ,  $2_1^{IV}$  по лекалу плавными линиями, получим натуральную величину сечения цилиндра плоскостью  $P$ .

Развертка поверхности цилиндра строится следующим образом: проводится горизонтальная линия (произвольно, но обеспечивая рациональное расположение чертежа с учетом пристроенного основания цилиндра и натуральной величины сечения), на которой из точки  $I_0$  (рис. 57) откладывается 12 одинаковых отрезков, равных расстояниям (хордам) между точками деления (обозначены римскими цифрами), расположенными на окружности.

Из точек деления  $I_0$ ,  $II_0$ ,  $III_0$  и т. д. проводят вертикальные линии, на которых откладываются расстояния от основания цилиндра до точек сечения  $1''(1''')$ ,  $2''(2''')$ ,  $3''(3''')$  и т.д. Полученные точки  $1_0$ ,  $2_0$ ,  $3_0$ ,  $4_0$ ,  $5_0$  и  $6_0$ , а также симметричные им точки  $2_{10}$ ,  $3_{10}$ ,  $4_{10}$ ,  $5_{10}$  и  $6_{10}$  соединяют с помощью лекала плавными линиями. Точки  $6_0$  и  $6_{10}$  соединяют прямой линией. Основание цилиндра располагается на оси симметрии развертки и касается горизонтальной линии в точке  $VII_0$ . Натуральная величина сечения строится в верхней части развертки симметрично относительно ее оси.

*Пересечение конической поверхности плоскостью частного положения.* При различном положении секущей плоскости  $\alpha$  по отношению к оси прямого кругового конуса получаются различные фигуры сечения:

- *окружность*, если секущая плоскость перпендикулярна к оси конуса;
- *эллипс*, если секущая плоскость наклонена к оси и пересекает образующие конуса;
- *треугольник*, если секущая плоскость проходит через вершину конуса;
- *парабола*, если секущая плоскость параллельна одной из образующих;
- *гипербола*, если секущая плоскость параллельна двум образующим.

Построение плоского сечения конуса аналогично построению сечения пирамиды, так как конус можно рассматривать как пирамиду с бесчисленным количеством ребер – образующих конуса (рис. 58).

Основание конуса на горизонтальной проекции (окружность) разделим на 12 равных частей и обозначим точки деления римскими цифрами ( $I'$ ,  $II'$ ,  $III'$  и т. д.). Соединим вершину конуса  $S'$  (центр окружности) и точки деления тонкими линиями. Из точек  $I'$ ,  $II'$ ,  $III'$ ... проведем вертикальные линии связи до пересечения с основанием конуса на фронтальной проекции.

На рис. 58 показан порядок построения на примере точки  $II'$ . Вертикальная линия связи пересекает основание конуса на фронтальной проекции в точке  $A''$ . Соединим точку  $A''$  с проекцией вершины конуса  $S''$ . Линия  $A''S''$  пересечет след плоскости  $P_V$ , а следовательно и фронтальную проекцию сечения конуса, в точке  $2''$ . Подобные построения выполняются для всех остальных точек деления. Из полученных фронтальных проекций точек  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ ... проводим вертикальные линии связи до пересечения с одноименными линиями  $I'S'$ ,  $II'S'$ ,  $III'S'$ ... и находим горизонтальные проекции точек сечения конуса  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ ... Соединим полученные точки плавной линией. Профильные проекции точек сечения находятся по линиям проекционной связи.

Натуральную величину сечения найдем, используя способ замены плоскостей проекций. Плоскость проекций  $\pi_1$  заменим плоскостью  $\pi_4$ , которая проводится параллельно фронтальному следу  $P_V$ , а значит и сечению конуса, и образует с плоскостью  $\pi_2$  ось  $x_1$ . Из точек  $1''$ ,  $2'' \equiv 2_1''$ ,  $3'' \equiv 3_1''$ ,  $4'' \equiv 4_1''$ ... проводим линии, перпендикулярные оси  $x_1$ . На расстоянии, равном расстоянию от оси  $x$  до горизонтальной оси основания конуса

на его горизонтальной проекции (координата  $y$ ), проводим линию, параллельную оси  $x_1$  (ось симметрии натурального сечения). Переносим с горизонтальной проекции расстояния от оси симметрии до точек  $2'$  ( $2_1'$ ),  $3'$  ( $3_1'$ ) и  $4'$  ( $4_1'$ )... на ось  $x_1$ . Находим точки  $1^{IV}$ ,  $2^{IV}$ ,  $3^{IV}$ ,  $4^{IV}$ ... и симметричные им точки  $2_1^{IV}$ ,  $3_1^{IV}$ ,  $4_1^{IV}$ ... Соединив найденные точки, находим натуральную величину сечения.

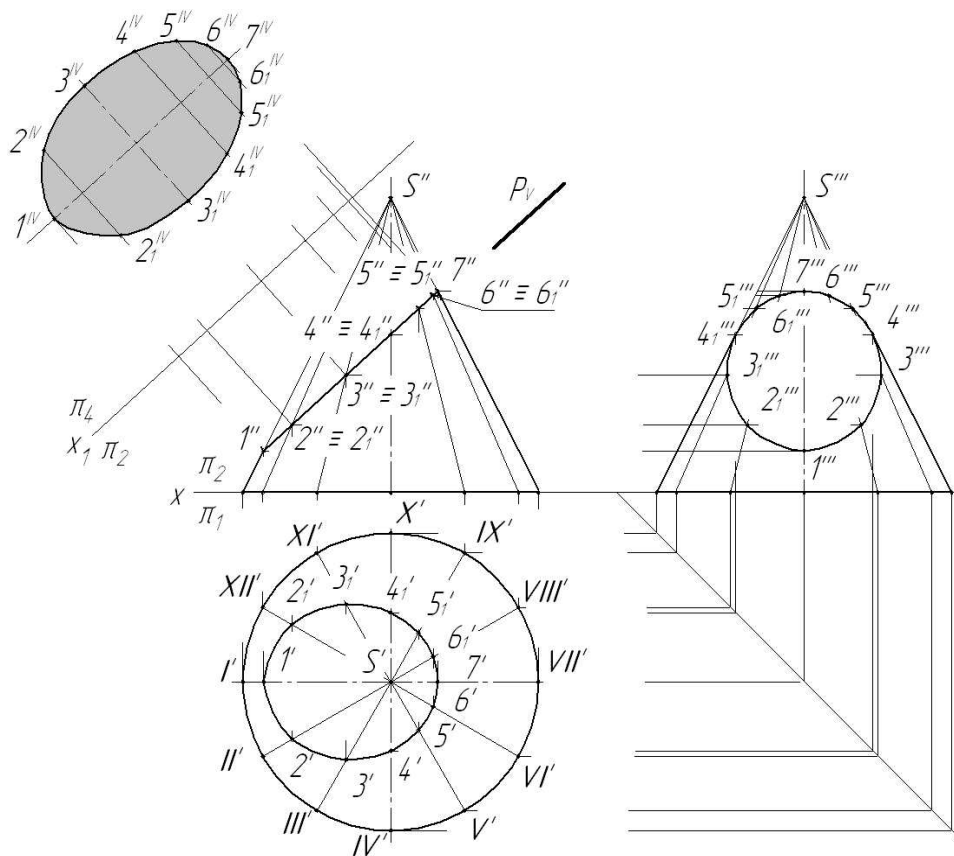


Рис. 58

Развертку поверхности конуса (рис. 59) строим следующим образом. Проводим осевую линию и выбираем на ней произвольную точку  $S_0$ . Из точки  $S_0$  радиусом, равным длине образующей конуса, проводим дугу.

Угол развертки  $\alpha$  можно определить по формуле

$$\alpha = \pi d/L,$$

где  $d$  – диаметр основания конуса;  $L$  – натуральная длина образующей конуса.

С целью упрощения построение развертки осуществляем следующим образом. Из точки  $VII_0$  пересечения дуги с осевой линией отложим вправо и влево по шесть отрезков, равных расстоянию между двумя соседними точками ( $I_0$ ,  $II_0$  и т. д., рис. 58), и обозначим эти точки. Соединим полученные точки  $I_0$ ,  $II_0$ ,  $III_0$ ... тонкими линиями с точкой  $S_0$ .

Для нахождения точки  $I_0$  откладываем на линиях  $S_0I_0$  отрезок, равный длине образующей от основания конуса до проекции точки  $I''$  на фронтальной проекции.

Для нахождения натуральных длин образующих до точек  $2''$ ,  $3''$ ,  $4''$ ... переносим эти точки по горизонтальным линиям проекционной связи на образующую, имеющую натуральную величину (на рис. 58 – левая образующая на профильной проекции конуса), с последующим переносом этих величин на развертку.

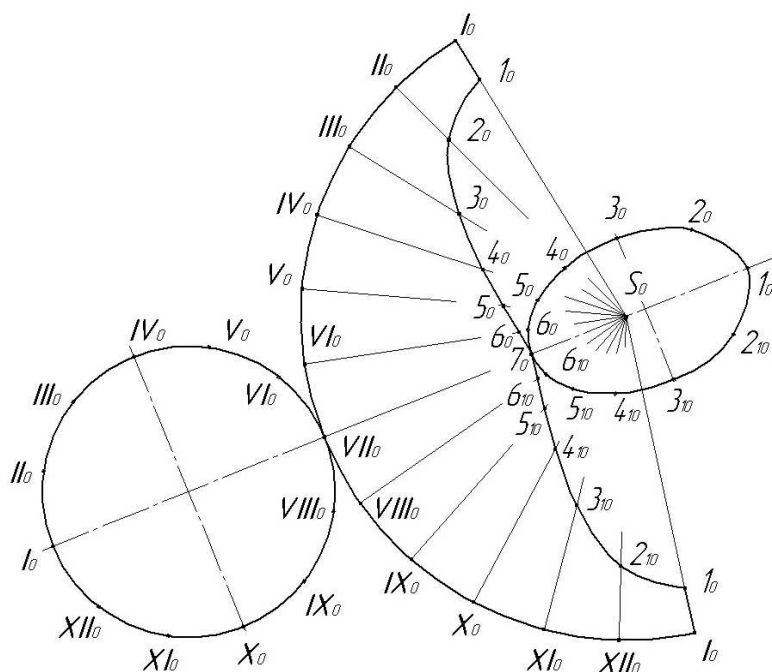


Рис. 59

Основание конуса вычерчивается в нижней части развертки, а натуральное сечение – в ее верхней части симметрично общей оси симметрии развертки.

### Пересечение цилиндрической, конической и сферической поверхностей прямой линией

*Пересечение цилиндрической поверхности прямой линией.* На рис. 60 представлен прямоугольный круговой цилиндр, пересеченный прямой общего положения  $AB$ . Горизонтальная проекция кругового цилиндра представляет собою окружность, поэтому горизонтальные проекции всех точек, расположенных на цилиндрической поверхности, в том числе и двух искомых точек пересечения, будут расположены также на этой окружности (точки  $M'$  и  $N'$ ). По вертикальным линиям связи находим фронтальные проекции искомых точек  $M''$  и  $N''$ . Отрезок  $MN$ , находящийся внутри цилиндра, невидим.

*Пересечение конической поверхности прямой линией.* На рис. 61 показан один из способов нахождения точек пересечения прямой  $AB$  с поверхностью прямого кругового конуса. На фронтальной проекции прямой  $AB$  ( $A''B''$ ) выбирается произвольная точка  $K$  ( $K''$ ), которая соединяется с вершиной конуса  $S$  ( $S''$ ) прямой  $S''K''$ . Известным способом находят горизонтальные следы точек  $F'$  и  $M'$  пересекающихся прямых ( $AB$  и  $SK$ ) – продолжают фронтальные проекции  $S''K''$  и  $A''B''$  до пересечения с осью  $x$  в точках  $F''$  и  $M''$ , из последних проводятся линии связи до пересечения с горизонтальными проекциями линий ( $S'K'$  и  $A'B'$ ) в точках  $F'$  и  $M'$ . Соединяют точки  $F'$  и  $M'$  прямой линией, которая пересечет основание конуса (окружность) в точках  $E'$  и  $D'$ . Соединяют точки  $E'$  и  $D'$  с вершиной  $S'$  прямыми линиями, которые пересекут горизонтальную проекцию прямой  $A'B'$  в точках  $1'$  и  $2'$  – искомых горизонтальных проекциях точек входа и выхода прямой линии. По вертикальным линиям проекционной связи находят фронтальные проекции точек  $1''$  и  $2''$ . Отрезок прямой  $AB$ , расположенный между точками  $1$  и  $2$ , невидим (находится внутри конуса).

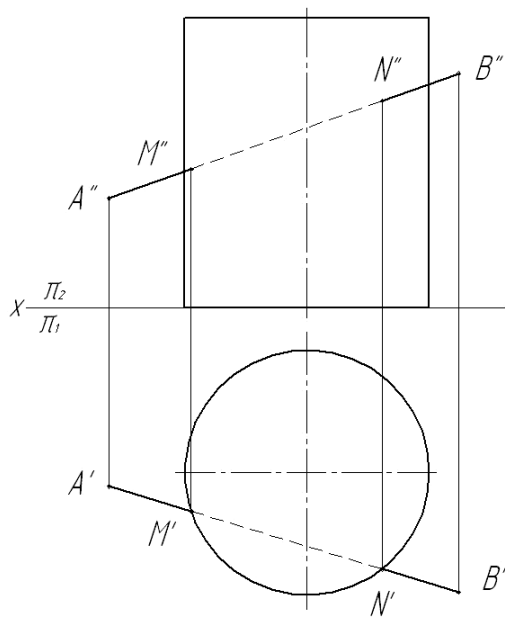


Рис. 60

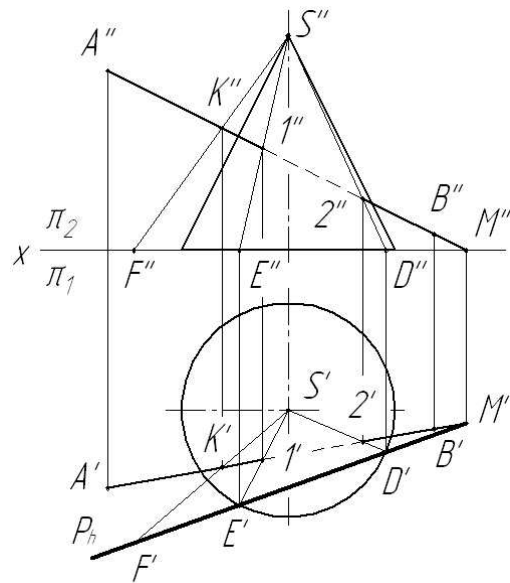


Рис. 61

*Пересечение сферической поверхности прямой линией.* Точки пересечения прямой  $AB$  с поверхностью сферы (рис. 62) найдем, используя фронтально проецирующую плоскость  $P$ , выраженную следом  $P_h$ , проходящую через данную прямую.

Вспомогательная плоскость  $P$  пересекает сферу по окружности, которая проецируется на плоскость  $\pi_1$  в виде эллипса, что затрудняет построение. Поэтому в данном случае целесообразно применить, например, способ перемены плоскостей проекций. Новую плоскость проекций выберем так, чтобы вспомогательная плоскость  $P$  была ей параллельна, т. е. следует провести новую ось проекций  $x_1$  так, чтобы она была параллельна фронтальной проекции  $A''B''$  прямой  $AB$  – фронтальному следу  $P_v$ , (на рис. 62 они совпадают).

Затем строим новую горизонтальную проекцию  $A^{IV}B^{IV}$  прямой  $AB$  и новую горизонтальную проекцию окружности диаметра, по которому плоскость  $P$  пересекает сферу. На пересечении новых горизонтальных проекций прямой и окружности лежат новые горизонтальные проекции двух искомых точек  $M^{IV}$  и  $N^{IV}$ . Обратным построением определяем фронтальные ( $M''$  и  $N''$ ) и горизонтальные ( $M'$  и  $N'$ ) проекции точек  $M$  и  $N$  пересечения прямой  $AB$  с поверхностью сферы.

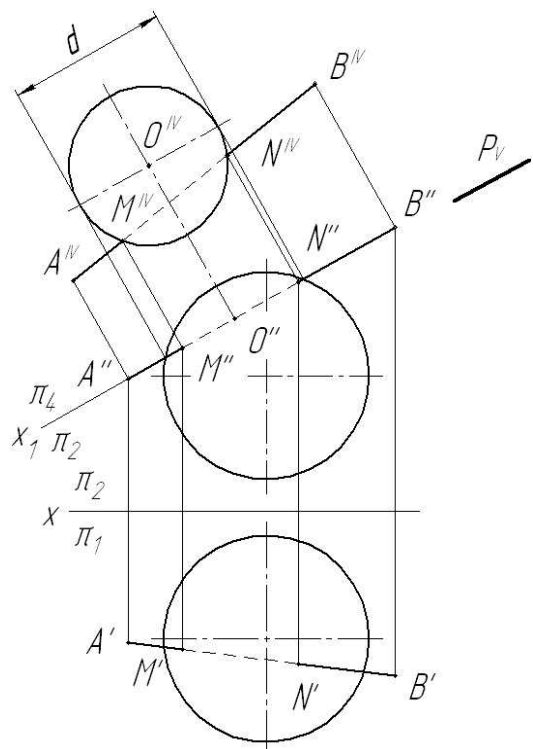


Рис. 62

## Лекция 6. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

### АксонOMETРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Прямоугольные (ортогональные) проекции не дают пространственного изображения предмета. Чтобы по ортогональным проекциям детали представить ее вид, надо «прочитать» чертеж. Иногда при составлении технических чертежей возникает необходимость наглядного представления предмета, когда предмет изображается на чертеже в трех измерениях, а не в двух, как это делается в прямоугольных проекциях. Для таких изображений применяют метод аксонометрического проецирования (аксон – ось, метрео – измерение).

Сущность метода аксонометрического измерения заключается в том, что данный предмет вместе с осями прямоугольных координат, к которым он отнесен в пространстве, пучком лучей проецируется на некоторую плоскость так, что ни одна из его координатных осей не проецируется на нее в точку, а значит сам предмет спроецируется на эту плоскость в трех измерениях.

На рис. 63 на некоторую плоскость  $P$  спроецирована находящаяся в пространстве система координат  $x, y, z$ . Проекции  $x_P, y_P, z_P$  осей координат на плоскость  $P$  называются аксонометрическими осями.

На осях координат в пространстве отложены равные отрезки  $|OA| = |OB| = |OC|$ . Как видно из чертежа, их проекции на плоскость  $P$  в общем случае не равны самим отрезкам и не равны между собой. Это значит, что размеры предмета в аксонометрических проекциях по всем трем осям искажаются.

Коэффициенты искажений:

$$K_x = O_P A_P / OA; K_y = O_P B_P / OB; K_z = O_P C_P / OC.$$

Эти коэффициенты отражают искажение отрезков по осям. Величина показателей

искажения и соотношение между ними зависят от расположения плоскости проекций и от направления проецирования. Возможны три варианта соотношения показателей искажения размеров по осям:

- показатели искажения по всем трем осям одинаковы – *изометрическая* аксонометрия;
- показатели искажения по двум осям равны между собой, а третий не равен – *диметрическая* проекция;
- показатели искажения по всем трем осям не равны между собой – *триметрическая* аксонометрия.

В зависимости от направления проецирования по отношению к плоскости проекций аксонометрические проекции подразделяются на:

- *прямоугольные* – проецирующие лучи составляют с плоскостью проекций прямой угол;
- *косоугольные* – направление проецирующих лучей произвольное.

Показатели искажения и направление проецирования связаны между собой следующей зависимостью:

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha,$$

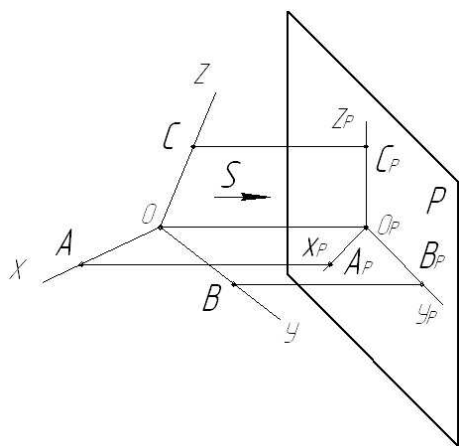


Рис. 63



где  $\alpha$  – угол наклона проецирующих лучей к плоскости проекций.

В случае прямоугольного проецирования, когда  $\alpha = 90^\circ$  и  $\operatorname{ctg}\alpha = 0$ , имеем:

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 2.$$

Для косоугольного и прямоугольного проецирования сумма квадратов двух любых показателей искажения не может быть меньше единицы.

Вышесказанное подтверждается теоремой Польке-Шварца. Она доказывает, что любые три прямые, расположенные в одной плоскости и проходящие через одну точку, могут быть приняты за аксонометрические оси, на которых могут быть выбраны любые показатели искажения  $K_x, K_y, K_z$ , лишь бы сумма их квадратов была не меньше двух, а сумма квадратов двух любых из них была не меньше единицы.

Стандартные аксонометрические проекции, применяемые в чертежах всех отраслей промышленности, устанавливаются ГОСТ 2.317-69.

*Прямоугольные аксонометрические проекции.*

*Прямоугольная изометрическая проекция.* Изометрическую проекцию выполняют с равными искажениями по осям  $x, y, z$ , т. е. принимают коэффициенты искажения равными:

$$K_x = K_y = K_z = K,$$

а следовательно:

$$3K^2 = 2.$$

Решив приведенное выше уравнение, получаем  $K = 0,82$ . Это означает, что в прямоугольной изометрии все размеры изображаемого предмета изменяются в 0,82 раза (рис. 64).

Так как  $K_x = K_y = K_z$ , то  $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$ , а следовательно  $\alpha = \beta = \gamma$ .

Равенство углов говорит о том, что отрезки  $x_p z_p, x_p y_p, y_p z_p$  равны между собой, а следовательно и углы  $\angle x_p o_p z_p, \angle x_p o_p y_p, \angle y_p o_p z_p$  так же равны между собой и каждый из них равен  $120^\circ$ . Положение аксонометрических осей приведено на рис. 65. На практике, при построении изометрической проекции не применяют показатель искажения равный 0,82, а заменяют приведенными показателями, равными единице ( $K = 1$ ).

*Прямоугольная диметрическая проекция.* Положение аксонометрических осей приведено на рис. 66.

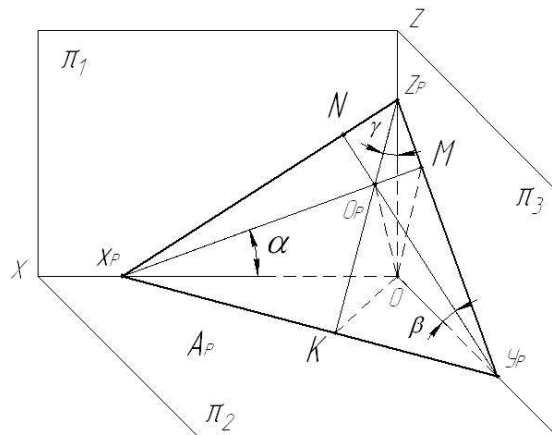


Рис. 64

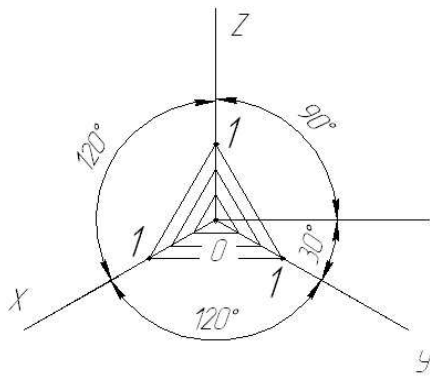


Рис. 65

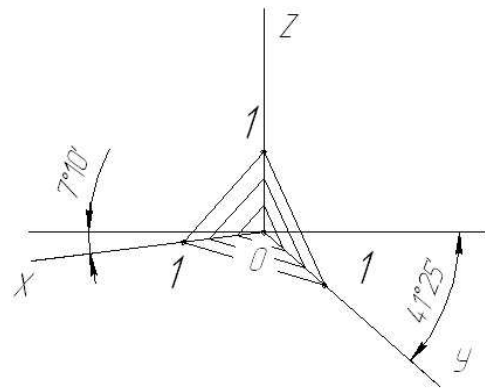


Рис. 66

В прямоугольной диметрии искажения по осям  $Ox$  и  $Oz$  одинаковы, т.е.  $K_x = K_z = K$ . Третий показатель  $K_y$  может иметь бесконечное множество значений, однако он принимается равным 0,5 от  $Ox$  ( $Oz$ ).

Имеем:

$$2K^2 + K^2/4 = 2.$$

Следовательно:

$$K_x = K_z = 0,94; K_y = 0,47.$$

На практике коэффициенты искажения по осям  $x$  и  $z$  принимают, в соответствии с ГОСТ 2.317-69, равными 1, а по оси  $y$  – 0,5.

Расчетный угол между горизонтальной линией и осью  $Ox$  равен  $7^\circ 10'$  (соотношение 1 : 8), а между горизонтальной линией и осью  $Oy$  –  $41^\circ 25'$  (соотношение 7 : 8).

*Косоугольные аксонометрические проекции.*

*Фронтальная косоугольная изометрическая проекция.* Положение аксонометрических осей приведено на рис. 67. Угол наклона оси  $Oy$  к горизонтальной линии обычно принимается равным  $45^\circ$ . Стандарт допускает проведение оси  $Oy$  к горизонтальной линии под углом  $30^\circ$  или  $60^\circ$ . Ее выполняют без искажения по осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

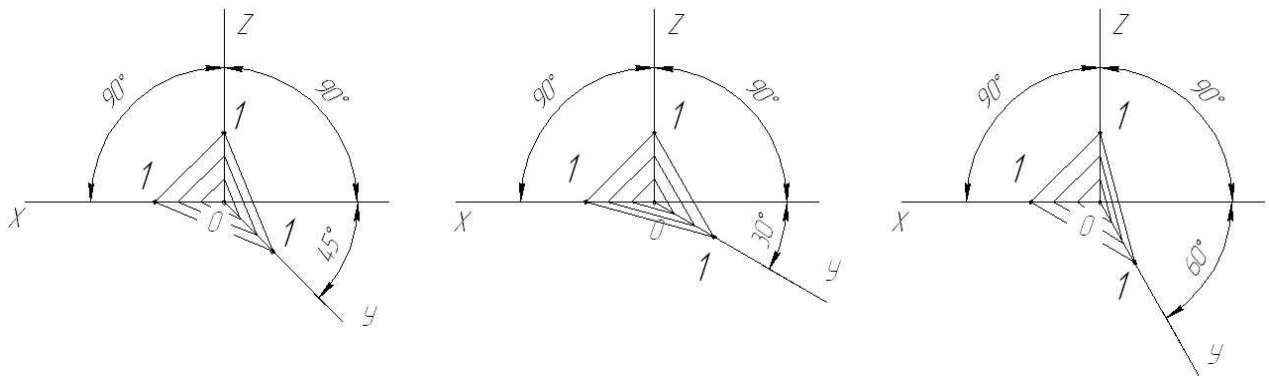


Рис. 67

*Горизонтальная косоугольная изометрическая проекция.* Положение аксонометрических осей приведено на рис. 68. Угол наклона оси  $Oy$  к горизонтальной линии обычно равен  $30^\circ$ . Допускается проводить ось  $Oy$  под углом  $45^\circ$  или  $60^\circ$ , сохраняя угол  $90^\circ$  между осями  $Ox$  и  $Oy$ . Горизонтальную косоугольную изометрическую проекцию выполняют без искажения по осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

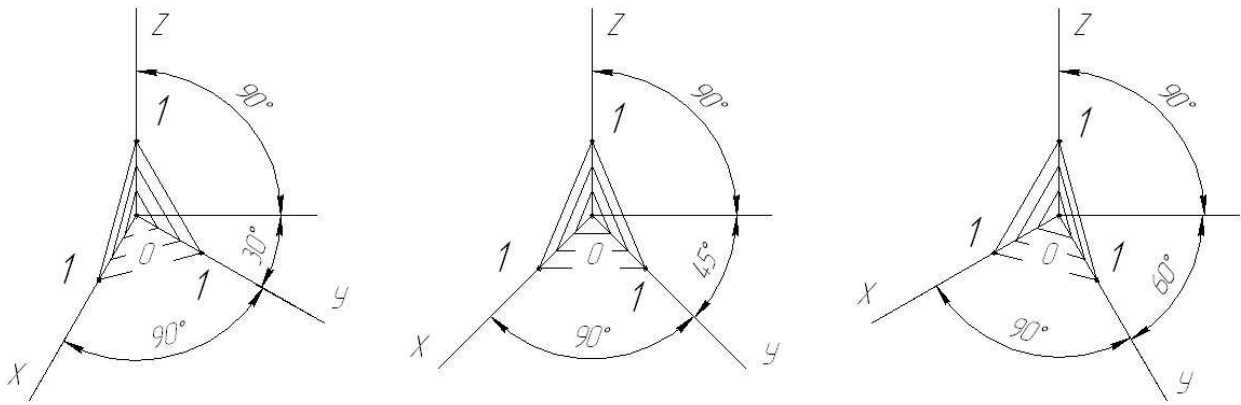


Рис. 68

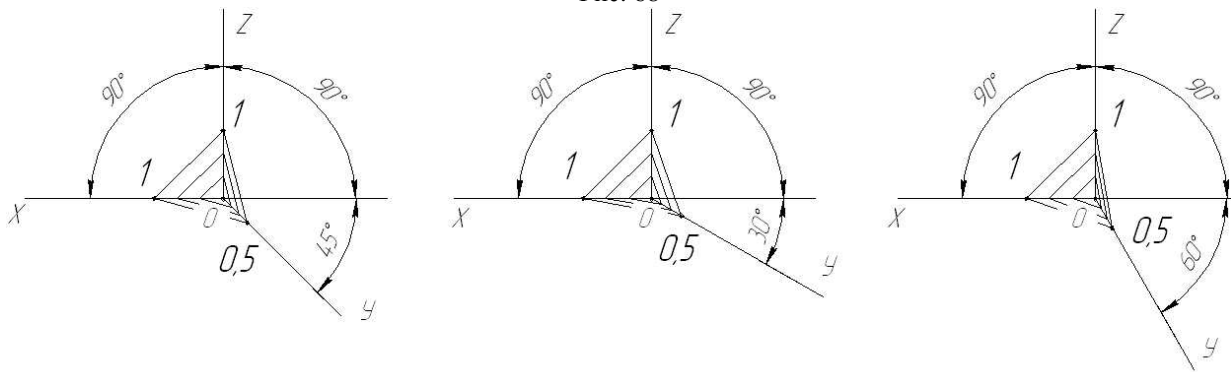


Рис. 69

*Фронтальная диметрическая проекция.* Положение аксонометрических осей приведено на рис. 69. Угол наклона оси  $Oy$  к горизонтальной линии должен быть равен  $45^\circ$ . Стандарт допускает возможность проведения оси  $Oy$  под углом  $30^\circ$  или  $60^\circ$ . Коэффициент искажения по оси  $Oy$  равен  $0,5$ , а по осям  $Ox$  и  $Oz$  – единице.

### Способы построения овала в прямоугольной аксонометрической изометрии

В практике построения аксонометрических проекций деталей приходится строить аксонометрические проекции окружностей. В большинстве случаев плоскости окружностей бывают параллельными какой-либо плоскости проекций ( $\pi_1$ ,  $\pi_2$  или  $\pi_3$ ).

Рассмотрим варианты построения окружности в изометрических аксонометрических проекциях (рис. 70).

Чтобы иметь более наглядное представление о расположении и величине осей эллипсов, в которые проецируются окружности, последние вписаны в грани куба. Точки касания эллипсов находятся на середине ребер куба. Кроме этих четырех точек можно указать еще четыре точки, принадлежащие концам большого и меньшего диаметров эллипса (большая и меньшая оси).

В прямоугольных изометрических проекциях направления больших осей эллипсов

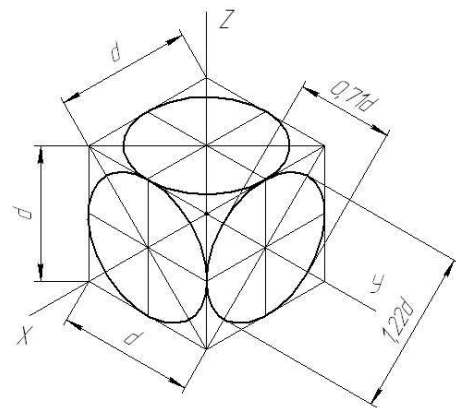


Рис. 70

перпендикулярны к свободным аксонометрическим осям – в горизонтальной плоскости к оси  $Oz$ , во фронтальной плоскости к оси  $Oy$ , в профильной плоскости к оси  $Ox$ , а малые оси эллипсов совпадают по направлению со свободными аксонометрическими осями.

В практике, учитывая определенные сложности в построении эллипса, вместо него вычерчивают овал, что незначительно влияет на точность изображения.

На рис. 71 и 72 представлены два способа построения овала.

*Способ построения овала по промежуточным точкам.* При рассмотрении прямоугольной изометрической проекции установлено (рис. 71), что большая ось овала равняется  $1,22d$  ( $d$  – диаметр окружности), а меньшая ось –  $0,71d$ .

Так как в горизонтальной плоскости большая ось перпендикулярна оси  $Oz$ , то она расположена горизонтально, меньшая ось совпадает по направлению с осью  $Oz$ . Откладываем на горизонтальной линии отрезок, равный  $1,22d$ , а на оси  $Oz$  – отрезок  $0,71d$ . Таким образом, находим четыре точки будущего овала. Остальные четыре точки расположены на осях  $Ox$  и  $Oy$ . Расстояние между ними равно диаметру окружности  $d$ . Соединив найденные 8 точек плавной кривой, получим искомый овал.

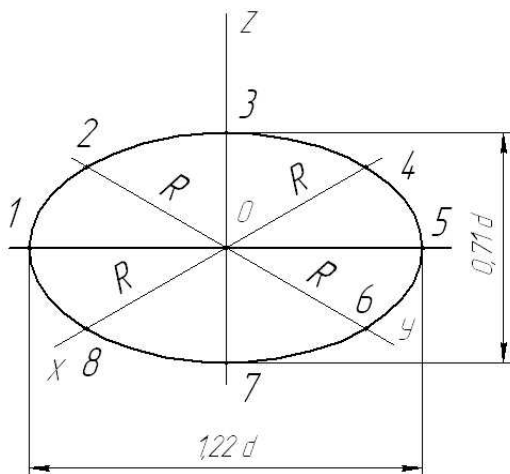


Рис. 71

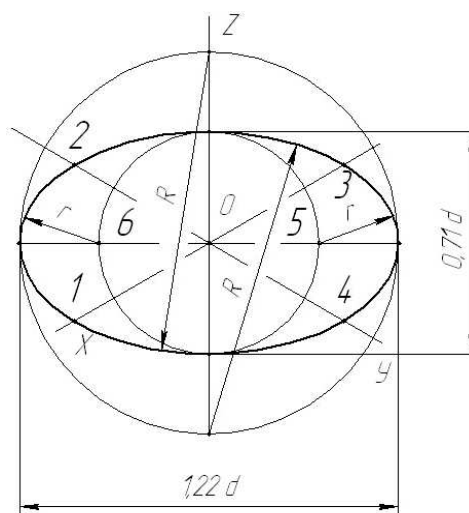


Рис. 72

*Способ построения овала с помощью дуг окружности.* Диаметрами, равными  $1,22d$  (размер большой оси) и  $0,71d$  (размер меньшей оси), проведем две окружности (рис. 72). Через центр этих окружностей проведем оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ .

Из точек пересечения окружности диаметра  $1,22d$  (большой окружности) с вертикальной осью как из центров проводим дуги радиусом, равным расстоянию от этих точек до дальних точек пересечения окружности радиусом  $0,71d$  (малой окружности) с вертикальной осью, до их пересечения с осями  $Ox$  и  $Oy$  (точки 1, 2, 3 и 4).

Затем из точек пересечения малой окружности с горизонтальной осью как из центров радиусом, равным разности радиусов большой и малой окружностей, проводим дуги до их пересечения в точках 1, 2, 3, 4 с осями  $Ox$  и  $Oy$ , т. е. до сопряжения с ранее проведенными дугами, и получаем искомый овал.

## Лекция 7. ВИНТОВЫЕ ЛИНИИ. РЕЗЬБЫ

### Винтовые линии

Винтовое движение какой-либо точки в простейшем случае представляет результат ее равномерного поступательного движения вдоль оси с одновременным равномерным вращением вокруг нее. Если подобное движение совершает какая-либо линия, то образуется винтовая поверхность.

Наиболее распространенными видами винтовых линий являются цилиндрические и конические винтовые линии, хотя винтовая линия может быть построена на любой поверхности вращения.

*Цилиндрическая винтовая линия* – это линия, описываемая точкой, совершающей равномерное движение вдоль образующей цилиндра, которая, в свою очередь, вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси цилиндра.

На рис. 73 показано построение проекций цилиндрической винтовой линии и ее развертки (справа). Фронтальной проекцией цилиндрической винтовой линии является *синусоида*, горизонтальной – *окружность*.

*Винтовые линии бывают правые и левые.* Если подъем винтовой линии осуществляется против часовой стрелки, будет левая винтовая линия, по часовой – правая. На рис. 73 изображена правая винтовая линия.

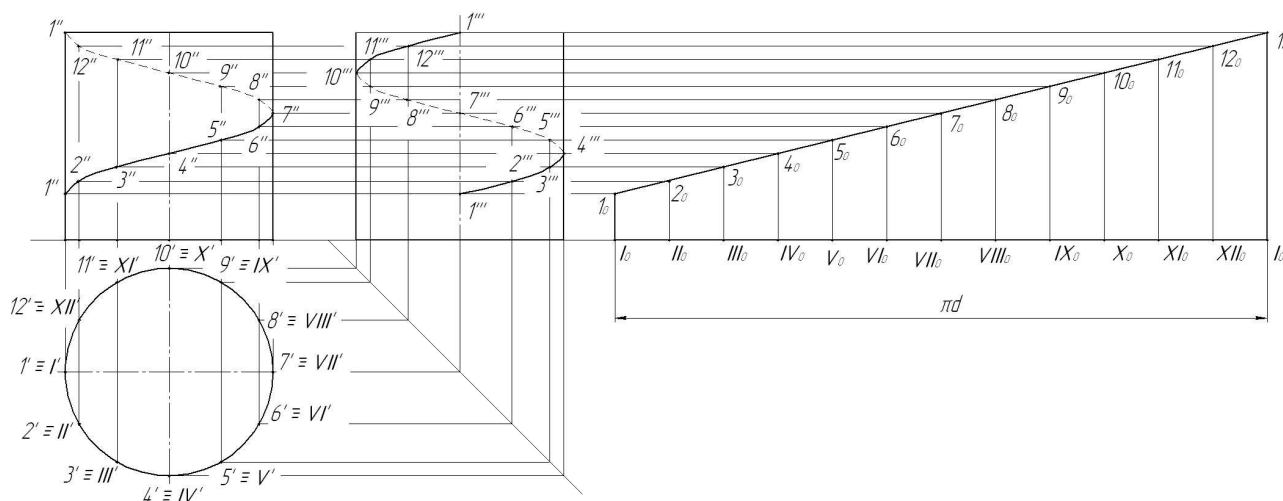


Рис. 73

У винтовой линии различают следующие элементы – *виток*, *шаг* и *угол подъема*. *Виток* – это часть винтовой линии, описываемая точкой за один оборот образующей вокруг оси цилиндра. *Шаг* ( $P$ ) – расстояние между начальной и конечной точками витка, измеренное вдоль образующей цилиндра. *Угол подъема* ( $\alpha$ ) винтовой линии – это угол, определяемый выражением

$$\alpha = \arctg P/\pi d,$$

где  $P$  – шаг винтовой линии;  $d$  – диаметр окружности основания цилиндра.

Развертка цилиндрической винтовой линии представляет собой прямую. Угол между винтовой линией и образующими цилиндра для данной винтовой линии остается постоянным.

## Резьбы

Если к поверхности прямого кругового цилиндра прикасается одной стороной плоская произвольная фигура так, что ее плоскость проходит через ось цилиндра, то в результате винтового движения фигуры без изменения ее положения относительно оси цилиндрической поверхности получается винтовой выступ. Цилиндр с винтовым выступом называется *цилиндрическим винтом*, а винтовой выступ – *резьбой винта*.

Фигура, образующая винтовой выступ, называется *профилем резьбы*. В зависимости от формы профиля резьбы, образующего винтовой выступ, винты могут быть с треугольной, трапецеидальной, прямоугольной, квадратной и другой резьбой.

При всем многообразии резьбовые соединения могут быть отнесены к одному из двух следующих типов:

1) соединения, осуществляемые непосредственным свинчиванием соединяемых деталей, без применения специальных соединительных частей;

2) соединения, осуществляемые с помощью специальных соединительных деталей, таких как болты, винты, шпильки, фитинги и пр.

Резьбы классифицируются по нескольким признакам:

– в зависимости от формы профиля (метрическая, трапецеидальная и т. п.);  
– в зависимости от формы поверхности (цилиндрическая, коническая);  
– в зависимости от расположения на поверхности резьбы (наружная, внутренняя);  
– по эксплуатационному назначению – на крепежные (метрическая, дюймовая); крепежно-уплотнительные (трубная, коническая); ходовые (трапецеидальная, упорная) и др.;

– в зависимости от направления винтовой линии (правая и левая);

– по числу заходов (однозаходная, многозаходная).

*Цилиндрическая резьба* – резьба, образованная на цилиндрической поверхности.

*Коническая резьба* – резьба, образованная на конической поверхности.

*Наружная резьба* – резьба, образованная на наружной цилиндрической или конической поверхности.

*Внутренняя резьба* – это резьба, образованная на внутренней цилиндрической или конической поверхности. В резьбовом соединении внутренняя резьба является охватываемой поверхностью.

*Правая резьба* – резьба, образованная контуром вращающимся по часовой стрелке и перемещающимся вдоль оси в направлении наблюдателя. На чертеже правая резьба не поясняется.

*Левая резьба* – резьба, образованная контуром, вращающимся против часовой стрелки и перемещающимся вдоль оси в направлении от наблюдателя.

*Метрическая резьба*. Метрическая резьба является крепежной резьбой и выполняется в соответствии с требованиями действующих стандартов – ГОСТ 8724-81, ГОСТ 9150-81, ГОСТ 24705-81, ГОСТ 16093-81 и др.

Профилем метрической резьбы является равносторонний треугольник с углом при вершине  $60^\circ$ . Метрические резьбы изготавливаются с крупным и мелким шагом. Крупный шаг на чертежах не указывается. Например:  $M10$ , где  $M$  – символ обозначения метрической резьбы,  $10$  – наружный (внутренний) диаметр резьбы.

Резьба с мелким шагом обозначается буквой  $M$  с указанием номинального диаметра и шага, например –  $M10 \times 0,75$ .

Для левой резьбы после условного обозначения ставятся прописные буквы  $LH$ , например –  $M10LH$  или  $M36 \times 1,5LH$ .

Многозаходные резьбы должны обозначаться буквой  $M$ , номинальным диаметром, числовым значением хода и в скобках числовым значением шага ( $P$ ), например –

$M36 \times 3(P1,5)$  или  $M36 \times 3(P1,5)LH$ .

На рис. 74 приведены примеры вычерчивания и обозначения метрической резьбы (наружной и внутренней).

Границу резьбы на изображении стержня (наружной) проводят по линии наружного диаметра резьбы сплошной основной линией, внутренний диаметр резьбы вычерчивается сплошной тонкой линией.

На виде с торца (слева) наружный диаметр резьбы вычерчивается в виде окружности сплошной основной линией, внутренний диаметр в виде дуги  $\approx 270^\circ$  сплошной тонкой линией. Необходимо обратить внимание, что дуга не должна начинаться или заканчиваться на осевых линиях. Фаски на виде слева не вычерчиваются.

При вычерчивании внутренней резьбы внутренний диаметр проводят сплошной основной линией, а наружный – сплошной тонкой. Штриховка выполняется до основной линии (внутреннего диаметра).

**Коническая дюймовая резьба** (ГОСТ 6111-52). Конические резьбы находят широкое применение в промышленности. Профиль конической дюймовой резьбы – равносторонний треугольник с углом при вершине  $60^\circ$ .

С помощью конических резьб получают герметичные соединения, не требующие применения уплотнительных средств. Для таких соединений характерно более равномерное распределение нагрузок, а также сокращение времени на сборку и разборку соединения. Конические резьбы выполняют на конических поверхностях (конусность 1 : 16). Коническую дюймовую резьбу обозначают буквой *K* с добавлением диаметра резьбы (в дюймах) и номера ГОСТа ( $K1/4''$  ГОСТ 6111-52).

Примеры вычерчивания и обозначения наружной (верхний рисунок) и внутренней конических дюймовых резьб приведены на рис. 75.

**Резьба трапецидальная** (ГОСТ 9484-81). Профиль – равнобокая трапеция с углом между боковыми сторонами  $30^\circ$ . Используется в качестве ходовой резьбы. Примеры обозначения:  $Tr40 \times 6$ ;  $Tr40 \times 8(P4)$ , где *Tr* – символ обозначения трубной резьбы; 40 – наружный диаметр резьбы; 6 и *P4* – шаг резьбы; 8 – ход резьбы.

Условное изображение трапецидальной резьбы не отличается от метрической резьбы.

**Трубная цилиндрическая** (ГОСТ 6357-73) и **трубная коническая** (ГОСТ 6211-69) резьбы. Профиль цилиндрической и конической трубных резьб – равнобедренный треугольник с углом при вершине  $55^\circ$ . Цилиндрическая резьба выпускается двух классов точности – А и В, которые должны указываться при ее обозначении.

Символом цилиндрической

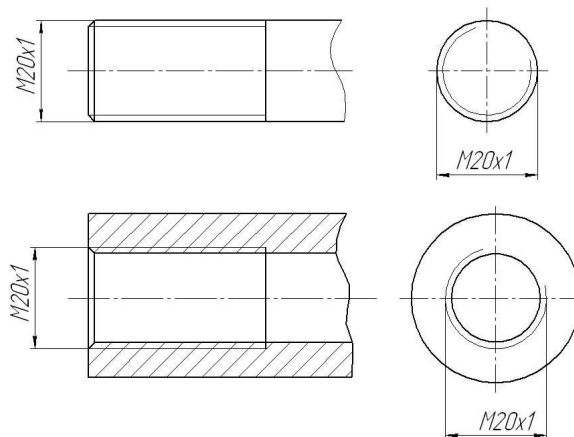


Рис. 74

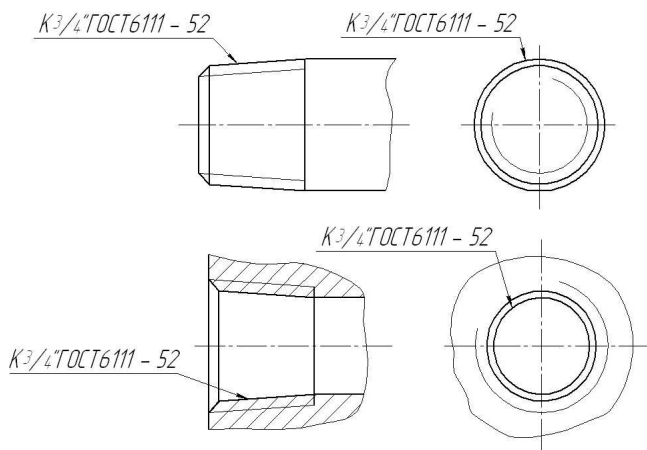


Рис. 75

трубной резьбы служит буква *G*, конической – *R* для наружной резьбы и *Rc* для внутренней резьбы.

Примеры обозначения внутренней трубной цилиндрической резьбы представлены на рис. 76, а трубной внутренней конической резьбы на рис. 77. Из приведенных обозначений видно, что трубная резьба измеряется в дюймах.

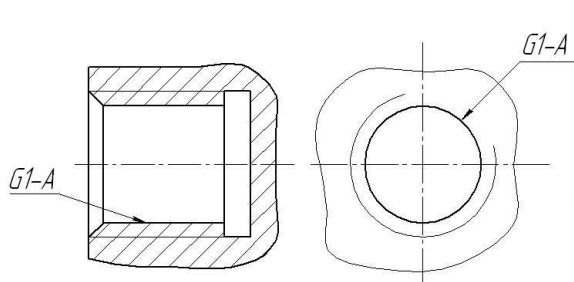


Рис. 76

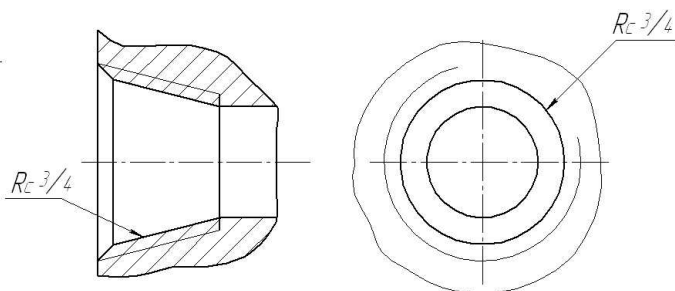


Рис. 77

*Резьба упорная* (ГОСТ 10177-62). Применяется преимущественно в тех случаях, когда необходимо передавать усилие в одном направлении, например в тисках, домкратах, прессах и т. п. Профиль резьбы – неравнобочная трапеция с углом наклона рабочей стороны  $3^\circ$  и нерабочей –  $30^\circ$ . Символом для обозначения упорной резьбы является буква *S*.

Примеры обозначения трапецеидальной, упорной и специальной резьб приведены на рис. 78.

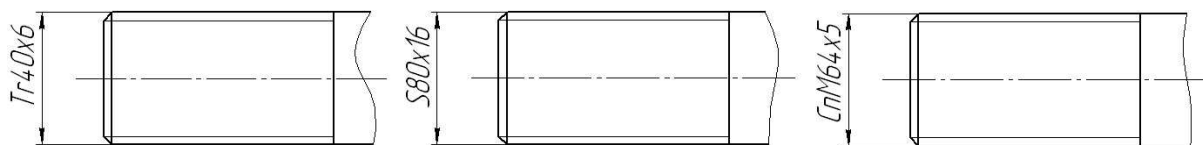


Рис. 78

Необходимо обратить внимание, что диаметры, фаски, шаги резьб и проточки под резьбу или недорез лимитируются соответствующими стандартами и не могут приниматься произвольно.



## Лекция 8. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

### Пересечение многогранников

Линия пересечения двух многогранников, называемая *линией перехода*, представляет собой некоторую пространственную ломаную линию, которая может распадаться на две и более отдельные части. Эти части могут быть, в частности, и плоскими многоугольниками.

Вершинами линий пересечения многогранников являются точки пересечения ребер первого многогранника с гранями второго, а также ребер второго многогранника с гранями первого. Сторонами или звеньями линий пересечения являются отрезки прямых, по которым пересекаются грани обоих многогранников.

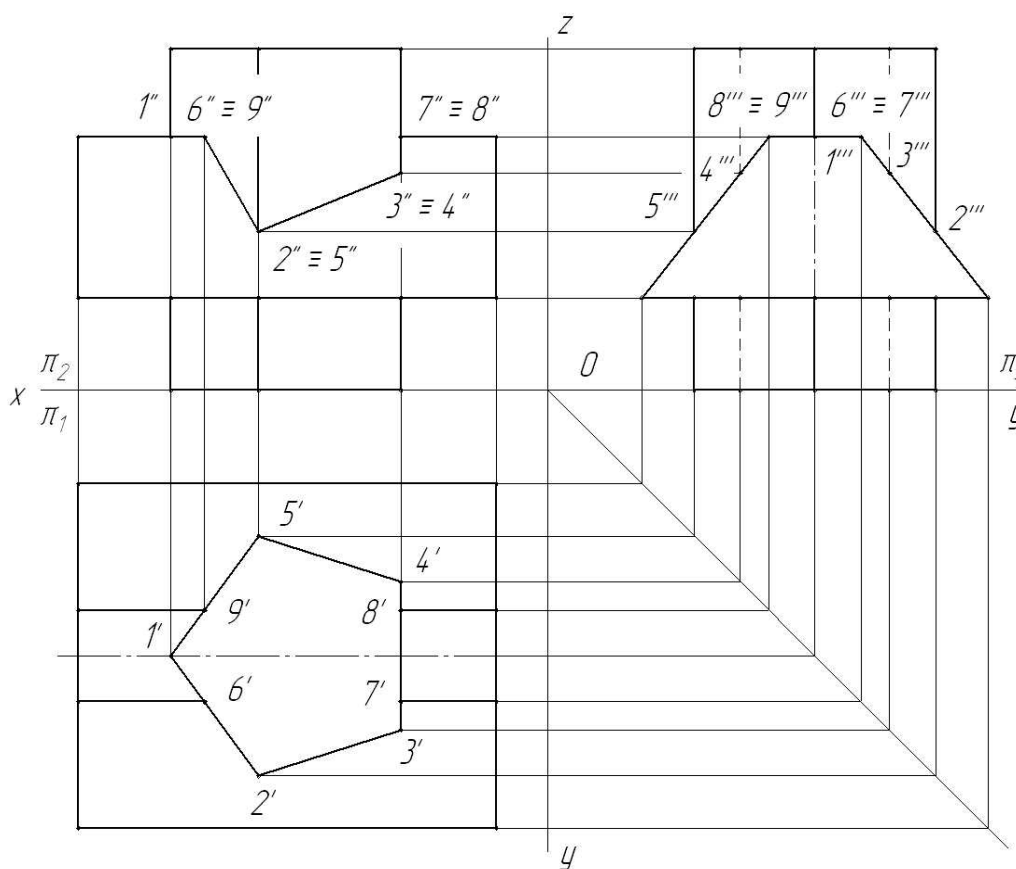


Рис. 79

Построение вершин линий пересечения многогранников сводится к многократному решению задачи о пересечении прямой с плоскостью, а построение сторон этих линий – к многократному решению задач о пересечении двух плоскостей. Обычно предпочитают находить вершины линий.

При этом очевидно, что только те пары вершин можно соединить отрезками прямых, которые лежат в одной и той же грани первого многогранника и в тоже время в одной и той же грани второго многогранника. Если же рассматриваемая пара вершин хотя бы в одном многограннике принадлежит разным граням, то такие вершины не соединяются.

Порядок соединения вершин линии пересечения в большинстве случаев легко определяется, если после построения выяснен вопрос видимости ребер обоих

многогранников.

*Пересечение поверхностей двух призм.* На рис. 79 представлены две прямые призмы – вертикальная пятигранная и горизонтальная четырехгранная. Определим линии их пересечения.

Горизонтальная и профильная проекции линии пересечения очевидны и совпадают с горизонтальной проекцией пятиугольника (основания вертикальной призмы) и с профильной проекцией четырехугольника (основания горизонтальной призмы). Фронтальную проекцию ломаной линии пересечения строим по точкам пересечения ребер одной призмы с гранями другой – точки  $1', 2', 3', 4', 5'$  на горизонтальной проекции, и точки  $6''', 7''', 8'''$  и  $9'''$  на профильной проекции. По горизонтальным и вертикальным линиям связи находим фронтальные проекции указанных точек –  $1'', 2'', 3'', 4'', 5'', 6'', 7'', 8''$  и  $9''$ . Соединив последовательно проекции точек  $1''$  и  $6''$ ,  $6''$  и  $2''$ ,  $2''$  и  $3''$ ,  $3''$  и  $7''$ ,  $7''$  и  $8''$ ,  $8''$  и  $4''$ ,  $4''$  и  $5''$ ,  $5''$  и  $9''$ ,  $9''$  и  $1''$ , получим искомую ломаную линию.

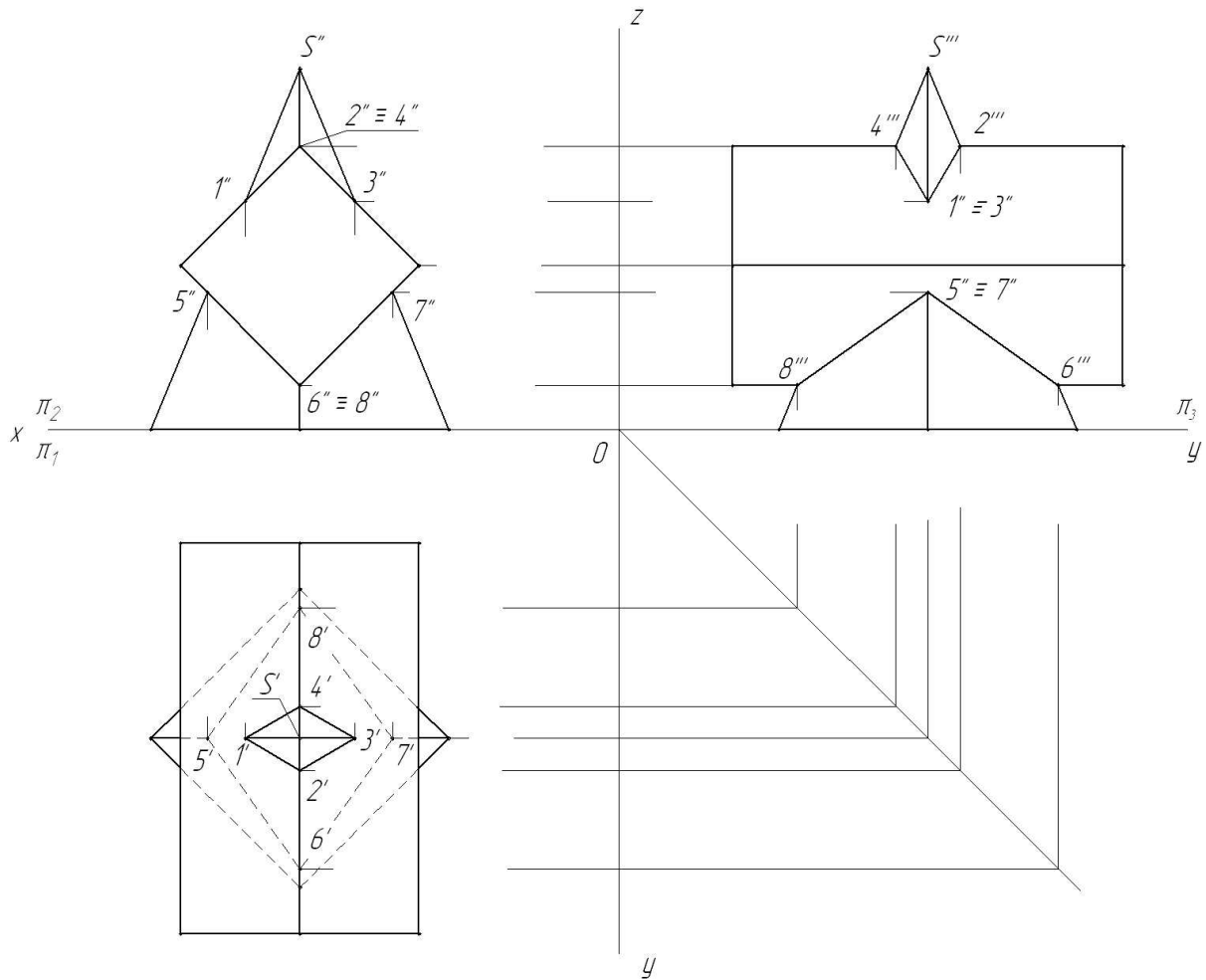


Рис. 80

*Пересечение призмы и пирамиды.* Линию пересечения четырехгранной призмы с четырехгранной пирамидой (рис. 80) строим по точкам – границам отрезков ломаной линии. Например, проекции точек  $1$  и  $3$  искомой линии находим следующим образом. Фронтальные проекции  $1''$  и  $3''$  очевидны (пересечение ребер пирамиды и граней призмы), профильные проекции  $1'''$  и  $3'''$  найдем, используя горизонтальные линии связи. По двум найденным проекциям точек находим их горизонтальные проекции  $1'$  и  $3'$ . В той же последовательности

находим проекции точек 2 и 4, расположенных на пересечении ребер призмы и пирамиды.

Проекции точек 5, 6, 7 и 8 найдем при помощи линий связи, проведенных с фронтальной проекции на горизонтальную и профильную.

Соединив последовательно на горизонтальной проекции проекции точек  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$  и  $4'$  (они видимы), а так же  $5'$ ,  $6'$ ,  $7'$  и  $8'$  (они невидимы) прямыми линиями, получим проекции искомых линий пересечения. На профильной проекции линии пересечения  $2''1''4''$ ,  $6''5''8''$  – видимы, а линии  $2''3''4''$  и  $6''7''8''$  невидимы.

### Пересечение поверхностей вращения

Линия пересечения двух поверхностей вращения в общем случае представляет собой пространственную кривую, которая может распадаться на две и более части. Эти части могут быть, в частности, и плоскими кривыми. Обычно линию пересечения двух поверхностей вращения строят по ее отдельным точкам.

Общим способом построения этих точек является способ поверхностей-посредников. Пересекая данные поверхности некоторой вспомогательной поверхностью и определяя линии ее пересечения с рассматриваемыми поверхностями, находим точки, принадлежащие искомой линии пересечения.

Наиболее часто в качестве поверхностей-посредников применяются плоскости или сферы, в зависимости от чего различают следующие способы построения линии пересечения двух поверхностей вращения:

– способ вспомогательных плоскостей (в основном вспомогательных плоскостей уровня);

– способ вспомогательных сфер.

*Способ вспомогательных плоскостей* применяется тогда, когда обе поверхности возможно пересечь по графически простым линиям (в основном по окружности).

*Способ вспомогательных сфер* целесообразно использовать при построении линии пересечения таких поверхностей, которые имеют общую плоскость симметрии, расположенную параллельно какой-либо плоскости проекций. При этом каждая из поверхностей должна содержать семейство окружностей, по которым ее могут пересекать вспомогательные сферы, общие для обеих поверхностей.

В некоторых случаях линии пересечения поверхностей второго порядка распадаются на плоские кривые второго порядка. Если заранее известен вид этих кривых, можно избежать трудоемкого построения линии пересечения по точкам, а провести построение этих кривых по их основным элементам.

*Пересечение поверхностей двух цилиндров.* При построении проекций линий пересечения поверхностей вращения вначале находятся так называемые *очевидные (опорные)* точки (без дополнительных графических построений). Затем определяются *характерные* точки, расположенные на *очерковых образующих* поверхностей вращения, отделяющих видимую часть линий перехода от невидимой. Все остальные точки линии пересечения называются *промежуточными*.

В общем случае при построении линий пересечения цилиндрических поверхностей чаще всего используются вспомогательные взаимно параллельные секущие плоскости или сферические поверхности.

В качестве вспомогательных плоскостей в рассматриваемом случае выбираем горизонтальные плоскости уровня, которые пересекают обе поверхности по простым линиям – прямым и окружностям, причем окружности расположены в плоскостях, параллельных плоскостям проекций.

При построении проекций линии пересечения двух цилиндров, оси которых

перпендикулярны (рис. 81), используем *безосный* способ проецирования.

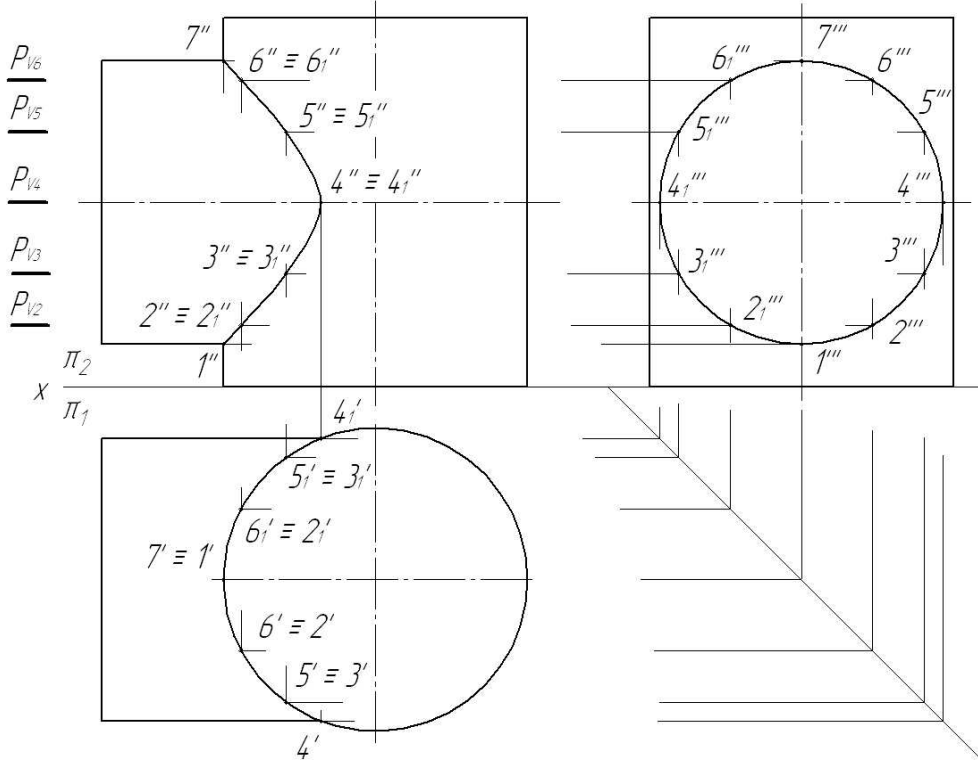


Рис. 81

Вначале, как отмечалось выше, находим проекции очевидных (опорных) точек  $1$  и  $7$  и характерной точки  $4$ . Промежуточные точки находим, используя вспомогательные взаимно параллельные плоскости уровня, пересекающие обе поверхности по образующим. Так, например, секущая плоскость уровня  $P_{V2}$  пересекает горизонтальный цилиндр по образующим в точках  $2$  и  $2_1$ , а вертикальный цилиндр по окружности. Используя профильные проекции указанных точек  $2'''$  и  $2_1'''$ , а так же линии связи и постоянную Монжа, находим горизонтальные проекции указанных точек. Затем известными способами находятся фронтальные проекции точек  $2''$  и  $2_1''$ . Аналогично находятся горизонтальные и фронтальные проекции точек  $3$ ,  $5$  и  $6$ .

Соединив найденные проекции точек  $1''$ ,  $2'' \dots 7''$ , получим видимую часть фронтальной проекции линии пересечения, а точки  $1''$ ,  $2_1''$ ,  $3_1'' \dots 7''$  – ее невидимую часть.

*Пересечение поверхностей цилиндра и конуса.* Пример построения линии пересечения прямого кругового усеченного конуса, имеющего вертикальную ось, с цилиндром, расположенным горизонтально, показан на рис. 82.

Определяем проекции очевидных точек  $1$  и  $7$ . Для определения промежуточных точек используем вспомогательные взаимно параллельные секущие плоскости – горизонтальные плоскости уровня, которые пересекают конус по окружности, а цилиндр – по образующим. Искомые точки находятся на пересечении образующих с окружностями.

Для определения, например, горизонтальных проекций точек  $2'$  и  $2_1'$  из центра горизонтальной проекции основания конуса проведем горизонтальную проекцию окружности диаметром  $d_2$ , по которой вспомогательная секущая плоскость пересекает конус.

Из профильных проекций точек  $2'''$  и  $2_1'''$  проводим на горизонтальную проекцию линии связи, которые пересекут окружность диаметром  $d_2$  в точках  $2'$  и  $2_1'$ . Подобным же образом найдем проекции остальных промежуточных точек. Имея горизонтальные и профильные проекции точек, по линиям связи находим их фронтальные проекции.

Соединив последовательно плавными линиями найденные точки, получим видимую и невидимую части линии пересечения.

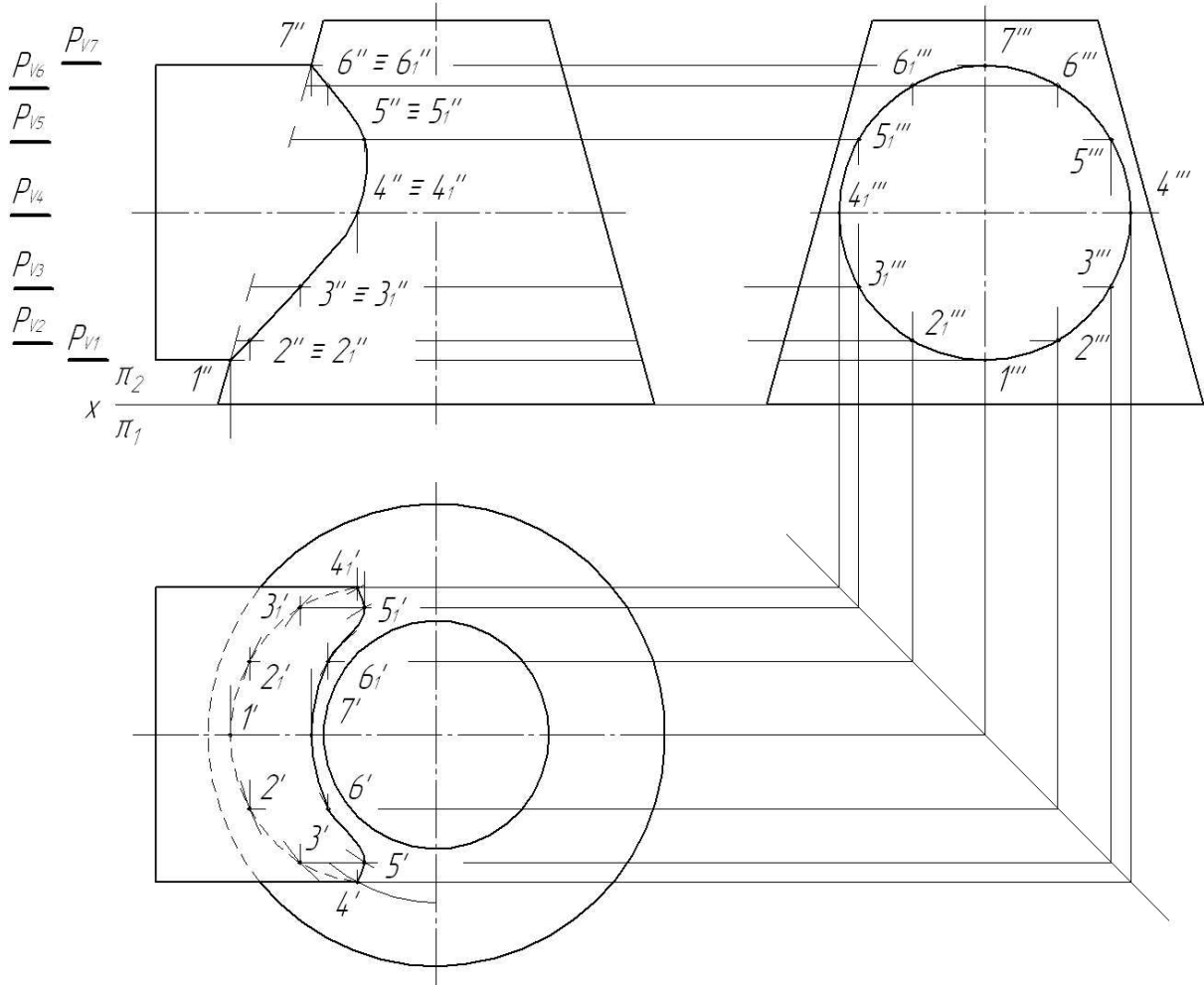


Рис. 82

*Построение линии пересечения поверхностей способом концентрических вспомогательных сфер.* Для построения линии пересечения поверхностей вместо вспомогательных секущих плоскостей при определенных условиях удобно применять вспомогательные секущие поверхности.

По сравнению с методом вспомогательных секущих плоскостей метод вспомогательных концентрических сфер имеет то преимущество, что, например, фронтальная проекция линии пересечения строится без применения двух других проекций пересекающихся поверхностей при произвольном расположении поверхностей.

Вспомогательные сферические поверхности для построения линии пересечения поверхностей вращения можно применять при следующих условиях:

- пересекающиеся поверхности должны быть только поверхностями вращения;
- оси поверхностей должны пересекаться, точка пересечения осей является центром вспомогательных сфер;
- оси поверхностей вращения должны быть параллельны какой-либо плоскости проекций.

На рис. 83 показано построение линии пересечения поверхностей двух цилиндров, оси которых пересекаются под острым углом. Вспомогательные

сферические поверхности проводим из точки  $O''$  пересечения осей цилиндров. Точки  $1''$  и  $5''$  являются очевидными.

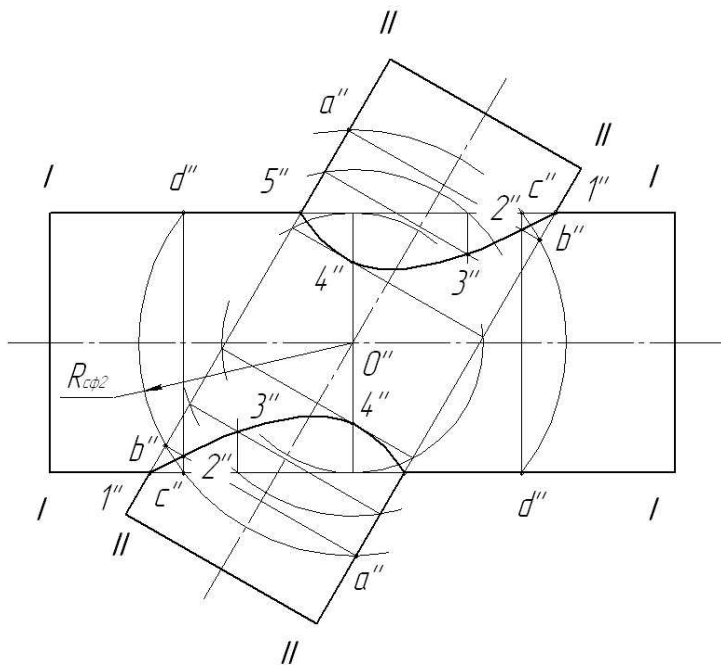


Рис. 83

Построим, например, фронтальную проекцию точки  $2''$  – промежуточной точки линии пересечения. Для этого из точки  $O''$  проведем сферическую поверхность радиусом  $R_2$ . Окружность радиусом  $R_2$  пересекает горизонтальный цилиндр в точках  $c''$  и  $d''$ , а наклонно расположенный цилиндр – в точках  $a''$  и  $b''$ . В пересечении отрезков, соединяющих точки  $a''$  и  $b''$ ,  $c''$  и  $d''$ , находим искомую точку  $2''$  линии пересечения. Аналогичным построением находим положение других промежуточных точек.

Пределы радиусов сферических поверхностей находим следующим образом (рис. 83). Наибольшая

окружность сферической поверхности должна пересекаться с контурными образующими  $I - I$  и  $II - II$ , а наименьшая должна быть касательной к одной из пересекающихся поверхностей и пересекаться с образующими другой поверхности.

На рис. 84 приведен пример построения линии пересечения прямого усеченного конуса и горизонтального прямого цилиндра. Принцип нахождения промежуточных точек линии пересечения такой же, как и в выше рассмотренном примере (рис. 83). Необходимо только принять во внимание, что наименьший радиус секущей сферы определяется размером перпендикуляра из точки  $O''$ , проведенного к сторонам конуса.

Если поверхности вращения описаны около шара, то они касаются шара по двум окружностям. Окружности пересекаются в двух точках. Плоскости, в которых лежат эти окружности, пересекаются по прямой, соединяющей точки пересечения линий касания конусов с шаром. Окружности проецируются на фронтальную плоскость проекций в виде прямых линий.

На рис. 85 два круговых цилиндра с осями, пересекающимися в точке  $O''$ , которые описаны около шара с центром так же в точке  $O''$ . Фронтальная проекция шара будет окружностью, касательной контурным образующим цилиндров. Линии пересечения этих цилиндров – эллипсы,

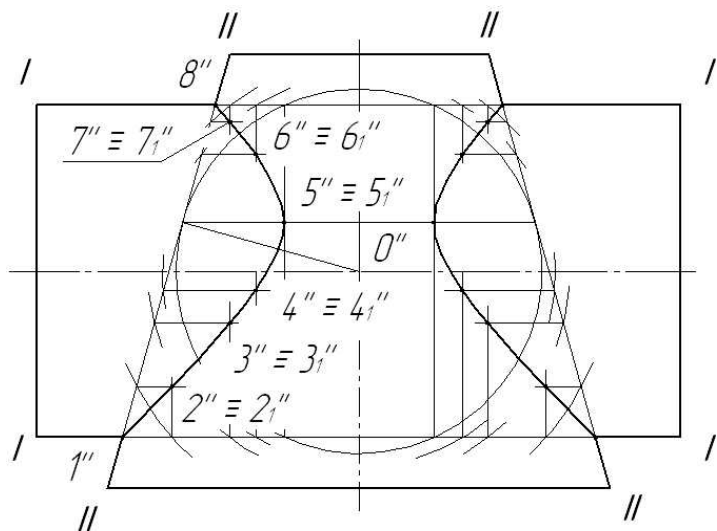


Рис. 84

фронтальные проекции которых изображаются в виде прямых  $a''b''$  и  $c''d''$ .

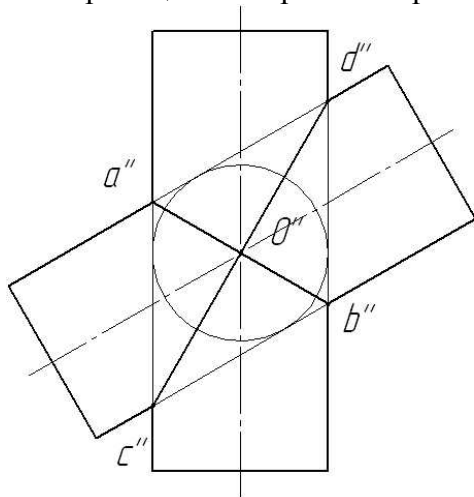


Рис. 85

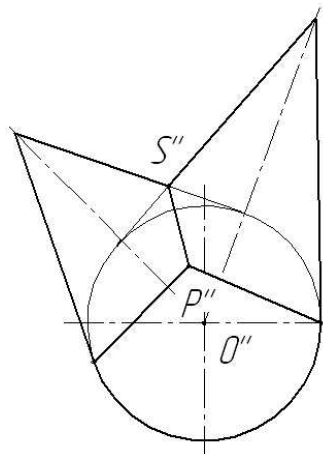


Рис. 86

Если два круговых конуса (рис. 86) с осями, пересекающимися в точке  $O''$ , описаны около шара с центром в той же точке  $O''$ , то фронтальная проекция шара будет окружностью, касательной к контурным образующим конусов. Линии пересечения этих конусов представляют собой эллипсы, фронтальные проекции которых изображаются в виде прямых линий.

## **Лекция 9. СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРОЕКТНО-КОНСТРУКТОРСКИХ И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ**

### **Актуальность рассматриваемого вопроса**

Анализ графического метода решения задач показывает, что между графическим и аналитическим способами решения имеется много общего.

Действительно, основными неопределяемыми понятиями математики являются точка и число. Множество точек определяют различные геометрические фигуры, которые являются предметом изучения в геометрии, а преобразование чисел, выраженных в символической форме, занимается алгебра.

Простейшей операцией в геометрии является движение, с помощью которого можно любую точку перенести в новое положение, установив между этими положениями (старым и новым) взаимное соответствие. Аналогичной операцией в алгебре служит преобразование, устанавливающее соответствие между числами и их многообразием. Изоморфизм между алгеброй и геометрией позволяет алгебре приобретать геометрическую форму и наоборот.

Различие между графическими построениями и алгебраическими преобразованиями, являющимися промежуточными операциями, есть лишь формальная сторона вопроса. Она не может служить поводом к утверждению о принципиальном отличии между графическим и аналитическим методами решения. Более существенным является то, что объединяет эти методы.

Основанием для такого объединения является:

- выполнение в определенной последовательности логических и графических (арифметических) операций;
- использование промежуточных результатов для выполнения последующих операций;
- корректировка процесса решения задач в зависимости от результатов промежуточных операций.

Следовательно, для осуществления процесса автоматизации выполнения графических работ необходимо иметь оборудование:

- способное обеспечить выполнение в определенной последовательности логических и арифметических операций;
- имеющее устройство для хранения исходных данных и промежуточных результатов;
- обеспечивающее автоматический выбор рационального продолжения процесса выполнения поставленной задачи.

Выполнение поставленной задачи посильно электронно-вычислительной машине (ЭВМ), в частности персональной (ПЭВМ), обеспечивающей выполнение операций:

- по выявлению на поле чертежа точек, принадлежащих линии;
- определению их координат;
- преобразованию последних из цифровой формы в электрическую.

Отмеченные выше преобразования могут быть реализованы с помощью преобразователя аналог-кода и счетчика координат.

Выявление точек, принадлежащих линиям чертежа, может быть выполнено посредством развертки с помощью светового (или электронного) анализирующего луча, который должен перемещаться по определенному закону, строка за строкой, просматривая все поле чертежа.



## **Современное состояние вопроса и обоснование эксплуатационных характеристик**

Развитие систем инженерной машинной графики (ИМГ) в значительной степени определяется достижениями в области машинной графики. Одной из первых существенных разработок в этой области является создание языка ART (Automatically Programmed Tools) во второй половине 50-х годов прошлого столетия.

Следующая концепция состояла в создании и использовании так называемого «светового пера».

Одновременно появились и поставщики систем графического моделирования. Развитие и совершенствование систем ИМГ проводилось по следующим направлениям:

- увеличение количества программных функций;
- переход от двухмерного черчения к трехмерному;
- переход к твердотельному моделированию.

Параллельно проводились работы по унификации, обеспечившие возможность сборки узла на чертеже из стандартных элементов, сопровождения процесса вычерчивания выпуском сопутствующей документации или выполнением необходимых расчетов.

По мере совершенствования системы ИМГ стали дифференцироваться в зависимости от уровня сложности и стоимости на системы высокого, среднего и низкого уровня (в основном персональные компьютеры – ПЭВМ).

Ведущее место в разработке систем ИМГ и их программного обеспечения занимает фирма AutoCAD Mechanical Desktop, которая обеспечила создание системообразующего комплексного продукта, обладающего достаточной собственной универсальностью и развитыми интерфейсными возможностями. Принятая в системе концепция открытости, предполагающая интеграцию с ведущими производителями программного обеспечения, делает ее устойчивой для построения функционально и организационно ориентированных сред (специализированных САПР).

Из русскоязычных версий наибольшее распространение находит система среднего уровня КОМПАС (фирма АСКОН, г. Санкт-Петербург), которая по основным параметрам не уступает аналогичным зарубежным системам.

Для обучения студентов и проведения научно-исследовательских работ в БГТУ целесообразно использовать системы ИМГ, обеспечивающие следующие условия:

- 1) открытость, т. е. пользователь должен иметь возможность страивать и надстраивать систему в зависимости от своих нужд;
- 2) равнодоступность пользователям (при обучении студентов) в базовом варианте САПР и исследователям в профессиональном варианте САПР;
- 3) работа со стандартными протоколами обмена и хранения информации;
- 4) работа с ЕСКД в требуемом объеме;
- 5) наличие функций моделирования и параметрического проектирования;
- 6) работа над проектом в многопользовательском режиме и функционирование на различных аппаратах и программных платформах.

### **Перспектива использования систем автоматизированного проектирования в университете и профессиональной деятельности будущих специалистов**

Проблема сквозного использования систем ИМГ на всех кафедрах университета на протяжении всего срока подготовки специалистов не только актуальна, но и требует более быстрого и более наполненного решения. Необходимо создавать систему подготовки специалистов, обеспечивающую использование графических методов в сквозном учебном

процессе.

Наиболее предпочтительным является выбор систем ИМГ, в которых инженерные решения первичны, поскольку у основных разработчиков (на различных кафедрах БГТУ) имеются собственные проекты и базы данных и менять их графическую среду нецелесообразно.

На кафедре инженерной графики БГТУ начинается знакомство студентов с основами САПР. В качестве базовой используется программный пакет системы среднего уровня AutoCAD2004 и последующих годов выпуска, а также программный пакет на базе системы КОМПАС.

Специалистами кафедры создан учебный лабораторный комплекс (в 2-х частях) под общим названием «Машинная графика», включающий полный цикл подготовки студентов различных специальностей – от построения примитивов (точка, отрезок, дуга и т. д.) до выполнения рабочих чертежей деталей и сборочных единиц с соблюдением требований единой системы конструкторской документации.

Развитие машинной графики позволило создать специализированные системы автоматизированного изготовления чертежей и другой технической документации на базе ПЭВМ. В университете созданы специализированные классы, оснащенные современными ПЭВМ и программной продукцией.

Практика показывает, что ПЭВМ с развитой системой машинной графики позволяют создавать комплексы, которые целесообразно использовать студентам для обучения основам начертательной геометрии и проекционного черчения, в дальнейшем – при выполнении курсовых и дипломных проектов, а преподавателям – при чтении лекций по изучаемым дисциплинам. При этом создаются принципиально новые возможности – построение одной проекции можно сопровождать автоматическим синхронным построением второй, третьей или одновременно второй и третьей проекций и аксонометрического изображения. Можно быстро построить большое количество изображений при изменении размеров элементарных пересекающихся поверхностей и исследовать выявляющиеся при этом закономерности. Применение способа вспомогательных секущих плоскостей можно показывать на примерах построения линий пересечения любых математически определенных поверхностей с любым расположением в пространстве. При этом будут демонстрироваться различные виды кривых линий, получающихся в сечениях. Возможна демонстрация кинематических способов образования поверхностей как на ортогональных проекциях, так и в аксонометрии с изменением параметров определителя поверхности и демонстрация фрагментов технологических процессов формообразования поверхностей элементов деталей.

В любой компьютерной графической системе имеется редактор чертежей или другой нормативно-технической документации. Он позволяет выводить документ на дисплей и обеспечивает выполнение команд на создание, изменение, просмотр, перенос содержания документа на графопостроитель или матричное печатающее устройство. Кроме перечисленного редактор чертежей содержит обширный набор команд редактирования, которые позволяют передвигать, копировать, повторять несколько раз, менять местами, зеркально отражать, частично или полностью стирать, поворачивать, а также растягивать или сжимать по вертикали и горизонтали произвольные объекты или группы объектов. Всем этим овладевают студенты в процессе обучения.

Большинство программ автоматизированного выполнения документации позволяет создавать условия для обмена информацией с другими объектами, находящимися на значительном расстоянии, что широко используется в народном хозяйстве.

Чтобы успешно справляться с поставленными задачами, молодые специалисты должны после окончания учебного заведения владеть всем выше рассмотренным в

совершенстве.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов С. К. Черчение. – М.: Машиностроение, 1989. – 304 с.
2. Бубенников А. В. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1985. – 288 с.
3. Горелик А. Г. Автоматизация инженерно-графических работ с помощью ЭВМ. – Минск: Высшэйшая школа, 1980. – 205 с.
4. Государственные стандарты ЕСКД: ГОСТ 2.101-68, ГОСТ 2.105-69, ГОСТ 2.301-68, ГОСТ 2.307-68 (пп.1,2), ГОСТ 2.308-79, ГОСТ 2.317-69.
5. Левицкий В. С. Машиностроительное черчение. – М.: Высшая школа, 1994. – 352 с.
6. Фролов С. А. Начертательная геометрия. – Москва: Машиностроение, 1983. – 240 с.
7. Чекмарев А. А., Осипов В. К. Справочник по машиностроительному черчению. – М.: Высшая школа, 1994. – 672 с.
8. Чекмарев А. А. Начертательная геометрия и черчение. – М.: Владос, 2005. – 472 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Лекция 1. Основные принципы ортогонального проецирования.....	4
Предмет и метод начертательной геометрии.....	4
Краткие сведения по истории развития начертательной геометрии.....	4
Принятые обозначения.....	5
Основные свойства проецирования.....	6
Основные свойства параллельного проецирования.....	6
Комплексный чертеж точки.....	8
Комплексный чертеж из трех ортогональных проекций.....	9
Система прямоугольных координат.....	10
Способы задания плоскости на чертеже.....	10
Расположение прямой и плоскости относительно плоскостей проекций.....	11
Лекция 2. Определение натуральной величины отрезка прямой.....	16
Следы прямой линии.....	16
Следы плоскости.....	16
Прямая и точка в плоскости.....	17
Определение натуральной величины отрезка прямой.....	18
Лекция 3. Поверхности.....	21
Поверхность. Способы задания поверхности.....	21
Гранные поверхности и многогранники.....	22
Поверхности вращения.....	23
Точки и линии на поверхности.....	23
Лекция 4. Пересечение многогранников плоскостью и прямой линией.....	26
Пересечение многогранников плоскостью частного положения.....	26
Пересечение призмы и пирамиды прямыми линиями.....	30
Лекция 5. Пересечение поверхностей вращения плоскостью и прямой линией.....	31
Пересечение поверхностей вращения плоскостями частного положения.....	31
Пересечение цилиндрической, конической и сферической поверхностей прямой линией.....	35
Лекция 6. Аксонометрические проекции.....	37
Аксонометрические проекции.....	37
Способы построения овала в прямоугольной аксонометрической изометрии.....	40
Лекция 7. Винтовые линии. Резьбы.....	42
Винтовые линии.....	42
Резьбы.....	43
Лекция 8. Взаимное пересечение поверхностей.....	46
Пересечение многогранников.....	46
Пересечение поверхностей вращения.....	48
Лекция 9. Состояние и перспективы автоматизации выполнения проектно- конструкторских и научно-исследовательских работ.....	53
Актуальность рассматриваемого вопроса.....	53
Современное состояние вопроса и обоснование эксплуатационных характеристик	54
Перспектива использования систем автоматизированного проектирования в университете и профессиональной деятельности будущих специалистов.....	54
Литература.....	56