

УДК 536.248.2:518.5

А. А. АНДРИЖИЕВСКИЙ

**К ВОПРОСУ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ  
 ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ  
 ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ**

В последнее время в связи с проблемой создания и эксплуатации энергетических установок высокой теплонпряженности особую актуальность приобрело изучение гидродинамической неустойчивости системы парогенерирующих каналов [1]. Подобное явление возникает при определенном сочетании тепловых и динамических характеристик каналов и проявляется в виде незатухающих пульсаций расходов и давлений теплоносителя и соответственно температур поверхностей теплообмена.

Экспериментальное исследование неустойчивости на модельных и натуральных образцах парогенераторов является крайне затруднительным и, кроме того, связано с опасностью разрушения экспериментальной установки. Поэтому представляется более перспективным численное выделение гранич областей устойчивой и неустойчивой работы парогенерирующих каналов посредством решения на ЭВМ описывающей их системы нестационарных одномерных уравнений сохранения. «Безопасность» подобного моделирования очевидна, и оно позволяет исследовать поведение реальной конструкции в широком диапазоне ее термодинамических параметров.

Примером указанного подхода могут служить разработка и реализация на ЭВМ математической модели нестационарного двухфазного химически реагирующего потока [2, 3]. Приведенная в [2] система уравнений сохранения массы и тепловой энергии для наиболее сложной области двухфазного движения — кризиса кипения второго рода [4] — имеет вид

$$\frac{\partial \rho_{сМ}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{W})_{сМ} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho i)_{сМ}}{\partial t} + \text{div}(\rho i \mathbf{W})_{сМ} = \text{div} \mathbf{q}_и, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho_e'' \varphi)}{\partial t} + \text{div}[(\rho_e'' \mathbf{W}'' \varphi)] = \frac{1}{r} \text{div}(\mathbf{q}_{и1} + \mathbf{q}_{и2}),$$

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \text{div}(\rho_k \mathbf{W}_k) = \nu_k I_i,$$

где

$$\rho_{сМ} = \rho_e'' \varphi + \rho_s' (1 - \varphi); \quad (\rho \mathbf{W})_{сМ} = \rho_e'' \varphi \mathbf{W}'' + \rho_s' (1 - \varphi) \mathbf{W}';$$

$$(\rho i)_{сМ} = (\rho_e'' i_e'') \varphi + (\rho_s' i_s') (1 - \varphi); \quad (\rho i \mathbf{W})_{сМ} = (\rho_e'' i_e'') \varphi \mathbf{W}'' +$$

$$+ (\rho_s' i_s') (1 - \varphi) \mathbf{W}';$$

$$\rho_e^* = \sum_{k=1}^4 \rho_k; \quad \rho_e^* W'' = \sum_{k=1}^4 \rho_k W_k.$$

К системе (1) присоединяются уравнения движения капельной влаги и двухфазного потока, а также уравнения, описывающие сопряженные тепловые условия на поверхности теплообмена и в материале стенок парогенерирующего канала [5]:

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} = - \frac{\theta_m}{\rho_m c_m} + \frac{1,205}{0,205} \frac{\partial \langle T_m \rangle}{\partial t} + \frac{\langle T_m \rangle - T_c}{0,205\tau}. \quad (2)$$

$$\frac{\partial \langle T_m \rangle}{\partial t} = \frac{\theta_m}{\rho_m c_m} - \frac{q_w S}{V_m \rho_m c_m}. \quad (3)$$

При решении подобных (1)–(3) систем уравнений возникают трудности выделения физической неустойчивости двухфазной системы на фоне численной неустойчивости ее математического аналога. Это в свою очередь предъявляет дополнительные требования к выбору численного метода и оптимальных шагов интегрирования исходных уравнений на ЭВМ. В частности, авторы работы [5], рассматривая более упрощенную (по сравнению с [2]) математическую модель химически инертного двухфазного потока, вынуждены были тем не менее сделать ряд преобразований исходной системы уравнений (например, введение специфической системы координат и переход от локального к интегральному выражению уравнения сохранения количества движения), позволяющих исключить численную неустойчивость их решения при сравнительно небольших затратах машинного времени. Проведенный в [5] анализ условий устойчивости системы уравнений сохранения в рамках задачи описания гидродинамической устойчивости работы системы эквивалентных парогенерирующих каналов с химически инертным теплоносителем позволил рекомендовать следующие предельные шаги численного интегрирования по пространственной и временной координатам — 1 м и 0,1 с.

Однако применительно к математической модели химически реагирующего двухфазного потока [2] и, в частности, к системе (1)–(3) подобные рекомендации не дают ощутимого эффекта. Это связано в первую очередь с введением в математическую модель предельных режимов двухфазного течения — областей поверхностного кипения и кризиса кипения второго рода — и с нелинейностью теплофизических свойств диссоциирующего теплоносителя даже в области равновесной реакции  $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2$  [6]. Кроме того, наличие в химически реагирующей двухфазной системе фазовых и химических превращений приводит к ее повышенной физической, особенно при низких и средних давлениях [3], (и соответственно численной) неустойчивости описывающих эту систему дифференциальных уравнений. При этом наиболее трудные условия счета создаются в момент перехода от начального стационарного распределения всех параметров парогенерирующего канала к возмущенному (нестационарному) состоянию двухфазной системы.

В связи с изложенным выше в [2, 3] был предпринят поиск наиболее рациональной с точки зрения точности счета и затрат машинного времени численной схемы и ее последующей модификации применительно к конкретной задаче численного исследования гидродинамической устойчивости двухфазных диссоциирующих потоков. Как показали результаты реализации на ЭВМ систем уравнений типа (1)–(3), в наибольшей степени этим условиям удовлетворяет явная разностная схема, положенная в основу метода Эйлера [7].

В общем виде эту схему можно представить уравнением

$$\frac{y_t - y_0}{t - t_0} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dy}{dt} \right)_t + \left( \frac{dy}{dt} \right)_0 \right], \quad (4)$$

где

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad (5)$$

$y_0, y_t$  — обобщенные координаты двухфазного потока в последовательные моменты времени  $t_0$  и  $t$  (рис. 1). Под обобщенной координатой в данной задаче понимается одна из зависимых переменных  $z(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $T_c(t)$  и  $T_m(t)$ .

При решении (5) с использованием (4) предполагается, что

$$\left( \frac{dy}{dt} \right)_t \simeq \frac{dy_1}{dt} = f(y_1, t),$$

где

$$y_1 = y_0 + (t - t_0) \left( \frac{dy}{dt} \right)_0. \quad (6)$$

Необходимая степень приближения к точному решению уравнения (5) обеспечивается в методе Эйлера не итерационным рядом сходящихся величин, а выбором соответствующего шага численного интегрирования по обобщенным координатам ( $y, t$ ).

Отмеченная особенность метода Эйлера ограничивает возможности его применения при решении уравнений динамики двухфазного потока, отличающихся резко выраженной численной неустойчивостью в области высоких паросодержаний ( $\varphi$ ). Описанная ниже процедура совершенствования данной разностной схемы позволяет частично снять эти ограничения.

Предполагая точное выполнение равенства (4) для интервала времени  $[t_0, t_1]$ , определим новый интервал времени  $[t_1, t]$  как

$$(t - t_1) = t - \left\{ t_0 + [2(y_1 - y_0)] / \left[ \frac{dy_1}{dt} + \left( \frac{dy}{dt} \right)_0 \right] \right\}. \quad (7)$$

Тогда с учетом (7) уравнение (4) преобразуется к виду

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dy_2}{dt} + \frac{dy_1}{dt} \right) \left\{ (t - t_0) - [2(y_1 - y_2)] / \left[ \frac{dy_1}{dt} + \left( \frac{dy}{dt} \right)_0 \right] \right\},$$

где

$$y_2 = y_0 + \frac{(t - t_0)}{2} [f(y_1, t) + f(y_0, t_0)],$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f(y_2, t),$$

или для  $n$ -го итерационного шага

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{(\Delta t)_{n-1}}{2} [f(y_n, t) + f(y_{n-1}, t)], \quad (8)$$

где

$$(\Delta t)_{n-1} = t - t_{n-2} - [2(y_{n-1} - y_{n-2})] / \left( \frac{dy_{n-1}}{dt} + \frac{dy_{n-2}}{dt} \right); \quad (9)$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f(y_n, t).$$

Последовательный ряд  $\{y_n\}$  обрывается при выполнении условия  $|(y_{n+1} - y_n)/y_n| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданная точность решения уравнения (5).

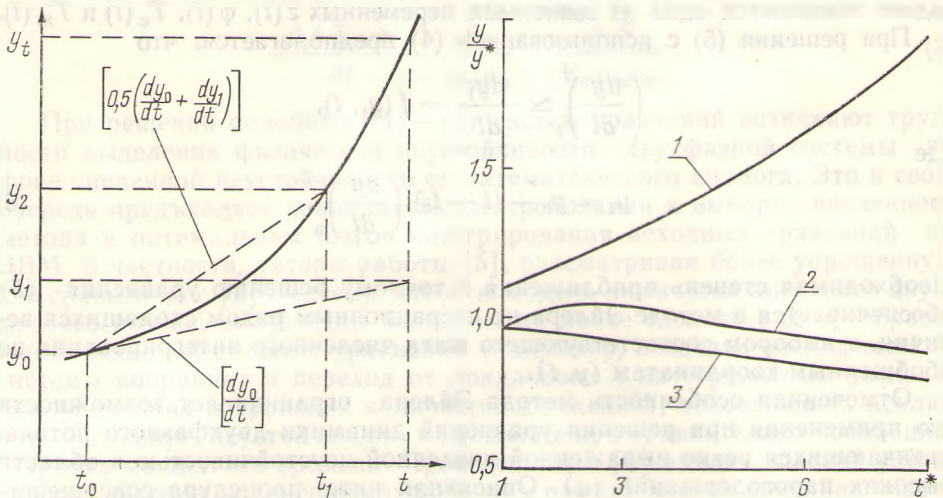


Рис. 1. Модификация численного метода

Рис. 2. Сравнение решений уравнения (10) методом Эйлера и по модифицированной разностной схеме: 1 — методом Эйлера; 2 — с использованием первых двух членов итерационного ряда (8); 3 — полного итерационного ряда (8);  $y^*$  — точное решение уравнения (10)

На рис. 2 для иллюстрации возможностей модифицированной разностной схемы представлено отношение приближенного и точного решения уравнения

$$\frac{dy}{dt} = y \quad (10)$$

методом Эйлера (кривая 1) и по соотношениям (8), (9) (кривые 2, 3). Кривая 2 получена с использованием только двух первых членов итерационного ряда  $\{y_n\}$ .

Следует отметить, что уравнение (10) выбрано в данном случае из-за его относительной внешней простоты, возможности наглядного представления результатов приближенного и точного решения и, самое главное, оно отображает наиболее характерный в задаче описания гидродинамической неустойчивости парогенерирующего канала тип экспоненциальной зависимости нестационарных величин.

Из рис. 2 видно, что в случае использования модифицированной разностной схемы достигается большая степень соответствия приближенного и точного решения исходного уравнения.

Последующая модификация численного метода в [3] заключалась в том, что для нулевого члена итерационного ряда (8) выбиралось не

соотношение (6), а приближенное аналитическое решение исходного уравнения.

Например, при интегрировании системы (2), (3) предполагалось, что на интервале времени  $[t_0, t_1]$  величина  $\frac{\partial^2 \langle T_m \rangle}{\partial t^2}$  более малого порядка, чем  $\frac{\partial^2 T_c}{\partial t^2}$ , т.е.

$$\frac{\partial \langle T_m \rangle}{\partial t} \approx \left( \frac{\partial \langle T_m \rangle}{\partial t} \right)_{t^*} = \text{const}, \quad (11)$$

где  $t^* \in [t_0, t_1]$ . Тогда приближенное решение уравнения (2) в данном сечении парогенерирующего канала в случае

$$\frac{d\theta_m}{dt} = 0 \quad (12)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} (\Delta T)_{c,m} = -\tau \left\{ \left[ \frac{d(\Delta T)_{c,m}}{dt} \right]_{t_0} \exp \left[ -\frac{(t_1 - t_0)}{0,205\tau} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\theta_m}{\rho_m c_m} - \left( \frac{d \langle T_m \rangle}{dt} \right)_{t^*} \right\}, \end{aligned}$$

где  $(\Delta T)_{c,m} = T_c - \langle T_m \rangle_{t^*}$ ;  $\langle T_m \rangle_{t^*} = \langle T_m \rangle_{t_0} + (t^* - t_0) \left( \frac{d \langle T_m \rangle}{dt} \right)_{t^*}$ .

При невыполнении условия (12) приближенное решение уравнения (2) находится с учетом конкретного вида функции  $\theta_m = f(z, t)$ .

Правомерность допущения (11) подтверждается результатами численного исследования поведения системы (1)—(3) (в общем случае полной системы уравнений сохранения, приведенной в [2]) в широком диапазоне изменения термодинамических параметров двухфазного диссоциирующего потока. Подобное соотношение  $\frac{\partial T_c}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \langle T_m \rangle}{\partial t}$ , очевидно,

связано с тепловой инерцией и высокой теплопроводностью материала стенок парогенерирующего канала.

В заключение необходимо отметить, что изложенная модификация разностной схемы Эйлера позволила значительно (в зависимости от термодинамических условий в 2—10 раз) сократить время поиска устойчивого решения системы нестационарных уравнений сохранения в задаче численного исследования гидродинамической устойчивости двухфазного химически реагирующего потока [2, 3].

### Обозначения

$t$  — время;  $z$  — пространственная координата;  $W$  — скорость;  $T$  — температура;  $\varphi$  — объемное паросодержание потока;  $S$  — поверхность;  $V$  — объем;  $q$  — удельный тепловой поток;  $\theta$  — объемный источник тепла;  $\rho$  — плотность;  $i$  — энтальпия;  $c$  — теплоемкость;  $\tau$  — время теплового запаздывания;  $\nu$  — произведение молекулярной массы на стехиометрическое число;  $I$  — источник массы, скорость реакции диссоциации;  $y$  — обобщенная координата;  $f$  — произвольная функция;  $\langle f \rangle$  — средняя по толщине стенки канала величина.

Индексы: " — пар; ' — жидкость;  $e$  — эффективное значение; см — двухфазная смесь;  $s$  — линия насыщения;  $m$  — материал стенки канала; и — испарение; и1, и2 — испарение на поверхности теплообмена и в ядре потока; с — поверхность теплообмена;  $k=1, 2, 3, 4$  — компоненты химически реагирующей смеси  $N_2O_4, NO_2, NO$  и  $O_2$ ;  $i=I, II$  — стадии реакции  $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2 \rightleftharpoons 2NO + O_2$ .

## Summary

The difficulties encountered in determination of the hydrodynamic instability regions of two-phase (and, in particular, chemically reacting) flows in the presence of numerical instability of their mathematical analog are discussed. The method is proposed to reduce the time of search for stable solution of the system of one-dimensional unsteady-state conservation equations under extreme conditions of the physical problem considered.

## Литература

1. Морозов И. И., Герлига В. А. Устойчивость кипящих аппаратов.— М.: Атомиздат, 1969, 280 с.
2. Андрижиевский А. А., Михалевиц А. А., Немцев В. А. Динамическая устойчивость двухфазного химически реагирующего потока. I. Математическая модель.— Вестн АН БССР. Сер. физ.-энерг. наук, 1977, № 4, с. 58—65.
3. Андрижиевский А. А., Баталова Е. Т., Михалевиц А. А., Немцев В. А. Динамическая устойчивость двухфазного химически реагирующего потока. II. Численное исследование.— Вестн АН БССР. Сер. физ.-энерг. наук, 1979, № 2, с. 85—88.
4. Дорошук В. Е. Кризисы теплообмена при кипении воды в трубах.— М.: Энергия, 1970, 167 с.
5. Хабенский В. Б., Балдина О. М. Исследование уравнений динамики парогенерирующего канала.— Труды ЦКТИ, 1969, вып. 98, с. 44—59.
6. Физико-химические и теплофизические свойства химически реагирующей системы  $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2 \rightleftharpoons 2NO + O_2$ / Под ред. В. Б. Нестеренко.— Мн.: Наука и техника, 1976, 344 с.
7. Поттер Д. Вычислительные методы в физике.— М.: Мир, 1975, 392 с.

Институт ядерной энергетики  
АН БССР

Поступила в редакцию  
05.09.79