

**Левданский А. Э., Ширко А. В., Чиркун Д. И.**

**ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА  
ПРАКТИКУМ**

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

**Левданский А. Э., Ширко А. В., Чиркун Д. И.**

# **ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

## **Практикум**

Допущена Министерством образования Республики Беларусь  
в качестве учебного пособия  
для студентов технологических специальностей учреждений,  
которые обеспечивают получение высшего образования

Минск 2010

УДК 621.01+531,8(076,5)

ББК 30.12я73

Л 34

Рецензенты:

заведующий кафедрой строительной механики БелГУТа  
доктор физ.-мат. наук, профессор *Э.И. Старовойтов*;

профессор кафедры инженерной графики БГУИР,  
доктор технических наук, профессор *В. М. Сурин*

**Левданский, А. Э.**

Л 55 Прикладная механика. Практикум : учебное пособие для студентов технологической специальности / А. Э. Левданский, А. В. Ширко, Д. И. Чиркун. – Мн. : БГТУ, 2010. – 124 с.

ISBN 985-434-

В пособии освещены такие важные в практическом отношении вопросы как растяжение стержневых систем, поперечный изгиб балок, кручение торсионных валов, устойчивость упругих систем, внецентренное растяжение (сжатие) стержней, расчет валов работающих на совместное действие изгиба и кручения. Представлены необходимые теоретические сведения и приведены примеры решения задач. Материал изложен достаточно кратко, однако содержит все базовые принципы изучаемой дисциплины.

Предназначено для студентов вузов технологических специальностей, изучающих дисциплину «Прикладная механика».

УДК 621.01+531,8(076,5)

ББК 30.12я73

© Левданский А.Э., Ширко А.В.,

Чиркун Д.И., 2010

© УО «Белорусский государственный  
технологический университет», 2010

ISBN 985-434-

Учебное издание

**Левданский Александр Эдуардович**  
**Ширко Алексей Владимирович**  
**Чиркун Дмитрий Иванович**

**Прикладная механика**

Учебное пособие

Редактор Е. И. Гоман

Подписано в печать 2010. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .  
Тираж 600 экз. Заказ .

Учреждение образования  
«Белорусский государственный технологический университет».  
220050. Минск, Свердлова, 13а.  
ЛИ № 02330/0133255 от 30.04.2004.

Отпечатано в лаборатории полиграфии учреждения образования  
«Белорусский государственный технологический университет».  
220050. Минск, Свердлова, 13.  
ЛП № 02330/0056739 от 22.01.2004.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	4
Как пользоваться данным пособием .....	5
Требования к выполнению и оформлению расчетно-проектировочных работ .....	6
1. Используемые величины. Единицы измерений и их преобразования .....	7
2. Теоретические сведения и примеры решения задач .....	10
2.1. Основные критерии работоспособности конструкций .....	10
2.2. Внутренние силовые факторы. Метод сечений .....	11
2.3. Виды расчетов в механике материалов .....	13
2.4. Центральное растяжение (сжатие) .....	14
2.5. Статически неопределимые задачи при растяжении (сжатии) .....	20
2.6. Геометрические характеристики сечений .....	26
2.7. Изгиб .....	28
2.8. Сдвиг .....	45
2.9. Кручение .....	46
2.10. Устойчивость сжатых стержней .....	53
2.11. Внецентренное растяжение (сжатие) .....	65
2.12. Совместное действие изгиба и кручения .....	76
3. Задания к расчетно-проектировочным работам .....	87
3.1. Задание 1. Центральное растяжение .....	87
3.2. Задание 2. Статически неопределимые задачи при растяжении .....	87
3.3. Задание 3. Поперечный изгиб .....	87
3.4. Задание 4. Кручение .....	88
3.5. Задание 5. Устойчивость сжатых стержней .....	88
3.6. Задание 6. Внецентренное растяжение (сжатие) .....	89
3.7. Задание 7. Совместное действие изгиба и кручения .....	89
Приложение 1. Сортамент прокатной стали .....	116
Приложение 2. Геометрические характеристики простых сечений .....	120
Приложение 3. Коэффициент снижения допускаемого напряжения .....	122
Приложение 4. Стандартный ряд диаметров валов .....	122
Приложение 5. Пример оформления титульного листа .....	123
Литература .....	124

## ВВЕДЕНИЕ

Соппротивление материалов в рамках общего курса прикладной механики является одной из основных общеобразовательных инженерных дисциплин и играет существенную роль при формировании инженера почти любой специальности. Зачастую, от не совсем добросовестных студентов приходится слышать одну и ту же фразу: «А нам это не пригодится в нашей специальности!» Предвосхищая данную реплику, можно сказать следующее: «Уважаемые студенты, Вы в первую очередь получаете *образование*, а не специальность!» И сопротивление материалов, наряду с другими общеинженерными дисциплинами, призвана выработать у студента способность мыслить, мыслить именно в инженерном русле, уметь использовать полученные знания, справляться с нестандартными ситуациями. Это достаточно сложная задача, поэтому при выполнении расчетно-проектировочных работ студент должен действовать не по заранее написанному шаблону (решенной на практическом занятии задаче), а шаг за шагом обдумывать каждое свое действие при решении своей задачи, только так он научится мыслить самостоятельно, творчески и с пользой.

Данное пособие написано таким образом, что у студента при выполнении расчетно-проектировочных работ практически отпадает необходимость пользоваться многочисленными справочниками, все справочные данные, которые могут потребоваться для решения задач расчетных работ, размещены в приложениях этого пособия. Кроме того, в пособии достаточно подробно отражены необходимые для решения теоретические сведения. Безусловно, пособие не является курсом лекций по дисциплине, однако оно может служить хорошим дополнением при подготовке к экзамену.

Хотелось бы выразить надежду, что выполнение программы курса прикладной механики не ляжет тяжким бременем на студенческие плечи, а будет интересным и полезным, как для студентов, так и для преподавателей.

## КАК ПОЛЬЗОВАТЬСЯ ДАННЫМ ПОСОБИЕМ

Пособие структурно разбито на три части. *В первой части* изложены сведения об используемых величинах, единицах измерений и их преобразованиях. *Во второй части* представлены теоретические сведения, необходимые для выполнения заданий расчетно-проектировочных работ. Материал изложен достаточно кратко, однако содержит все базовые принципы изучаемой дисциплины. Изложение сопровождается весьма информативными рисунками, из которых интуитивно понятен смысл рассматриваемого вопроса. После каждой разобранной темы приводятся примеры задач с *подробнейшим* пояснением хода их решений. *В третьей части* размещены технические задания на выполнение работ, варианты заданий в виде соответствующих расчетных схем и исходных данных. В *приложениях* пособия содержатся все необходимые табличные данные для решения задач.

На практических занятиях студент уже должен обладать, по крайней мере, *эскизными знаниями* по соответствующей теме занятия. Подготовка к занятию осуществляется с использованием лекционного материала и соответствующего раздела данного пособия, при этом, перед занятием студент *самостоятельно разбирает* задачи, приведенные в пособии, *отрабатывает навыки* на практическом занятии, и *закрепляет* их, выполняя свой вариант задания расчетной работы.

Перед выполнением расчетно-проектировочных работ студент должен **ОБЯЗАТЕЛЬНО** *ознакомиться с требованиями к выполнению и оформлению работ*, расположенных на следующей странице пособия.

## ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ

1) Студент выполняет необходимое количество заданий, в соответствии со своими номером схемы и исходными данными, которые задаются преподавателем каждому студенту индивидуально.

2) Расчетно-проектировочная работа выполняется на белой бумаге формата А4 на одной стороне листа. Сдается в скрепленном виде (скоросшиватель, файл, степлер и т. п.).

3) Титульный лист оформляется согласно образцу, приведенному в приложении 5 (см. стр.124), набранный на компьютере, либо написанный четко от руки.

4) Текст задания выполняется темными чернилами, четким подчерком. Рисунки выполняются карандашом с применением чертежных принадлежностей.

5) Каждая работа должна включать следующие структурные элементы:

а) *тема задания* и полное условие задачи с исходными данными;

б) *схема*, для которой проводится решение с обязательным указанием на ней численных значений всех величин, необходимых для расчета;

в) *решение* должно быть обязательно с краткими пояснениями без сокращения слов и с выделением основных этапов расчета. При выполнении этого пункта следует все расчетные формулы написать сначала в общем (буквенном) виде, а затем вместо букв проставить их численные значения в системе СИ и записать конечный результат с указанием его размерности.

г) *заключение*, в котором приводятся и обосновываются результаты расчетов.

Работы, не оформленные в соответствии с указанными требованиями, возвращаются преподавателем без проверки.



# 1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Приведем основные используемые в сопротивлении материалов величины и их единицы измерения (табл. 1).

Таблица 1

Некоторые основные геометрические и физические  
величины и их единицы измерения (СИ)

Величины		Обозначение единицы
Обозначения	Наименование	
$l, a, b, c$	Длина	м
$A$	Площадь поперечного сечения	$\text{м}^2$
$S_x, S_y$	Статические моменты сечения	$\text{м}^3$
$I_x, I_y$	Осевые моменты инерции сечения	$\text{м}^4$
$I_p$	Полярный момент инерции сечения	$\text{м}^4$
$W_x, W_y$	Осевые моменты сопротивления сечения	$\text{м}^3$
$W_p$	Полярный момент сопротивления сечения	$\text{м}^3$
$i_x, i_y$	Радиусы инерции сечения	м
$F$	Внешняя сила	Н
$N$	Внутренняя продольная сила	Н
$Q_x, Q_y$	Внутренние поперечные силы	Н
$m$	Внешний изгибающий момент	Н·м
$T$	Внешний крутящий момент	Н·м
$M_{кр}$	Внутренний крутящий момент	Н·м
$M_x, M_y$	Внутренние изгибающие моменты	Н·м
$q$	Распределенная нагрузка	Н/м
$\sigma$	Нормальные напряжения	Па=Н/м <sup>2</sup>
$\tau$	Касательные напряжения	Па=Н/м <sup>2</sup>
$E$	Модуль упругости первого рода (модуль Юнга)	Па=Н/м <sup>2</sup>
$G$	Модуль упругости второго рода (модуль сдвига)	Па=Н/м <sup>2</sup>
$\mu$	Коэффициент приведения длины	б/р

В рамках выполнения расчетно-проектировочных работ студенты зачастую сталкиваются с трудностями перевода единиц измерения высоких порядков. Как, *например* 1 см<sup>4</sup> перевести в 1 м<sup>4</sup> и обратно? В этом случае нет необходимости вспоминать, что в 1 см 0,01 м. Необходимо знать приставки перед основными единицами и множитель, который соответствует этой приставке (см. табл. 2).

Приставки и множители для образования десятичных кратных и дольных единиц

Множитель	Приставки		Обозначение	
	русская	международная	русское	международное
$10^{12}$	тера	Tera	Т	T
$10^9$	гига	Giga	Г	G
$10^6$	мега	Mega	М	M
$10^3$	кило	kilo	к	k
$10^2$	гекто	hecto	г	h
$10^1$	дека	deca	да	da
$10^{-1}$	деци	deci	д	d
$10^{-2}$	санتي	centi	с	c
$10^{-3}$	милли	milli	м	m
$10^{-6}$	микро	micro	мк	$\mu$
$10^{-9}$	нано	nano	н	n
$10^{-12}$	пико	pico	п	p

Что означает в нашем примере «с» перед «метром» – это приставка «санти», множитель, ей соответствующий  $10^{-2}$ . Все, что остается сделать при переводе  $1 \text{ см}^4$  в  $1 \text{ м}^4$  – это заменить приставку «с» на ее множитель  $10^{-2}$ . К примеру, нам необходимо перевести  $6 \text{ см}^4$  в  $\text{м}^4$ , получаем

$$6 \text{ см}^4 = 6 (10^{-2} \text{ м})^4 = 6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Перевести  $3 \text{ мм}^3$  в  $\text{м}^3$ . Помним, что приставке «м» (милли) соответствует множитель  $10^{-3}$  (см табл. 1)

$$3 \text{ мм}^3 = 3 \cdot (10^{-3} \text{ м})^3 = 3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3.$$

Перевести  $800 \text{ см}^2$  в  $\text{м}^2$ :

$$800 \text{ см}^2 = 800 \cdot (10^{-2} \text{ м})^2 = 800 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 8 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$

Теперь *обратный перевод*. Необходимо перевести  $\text{м}^3$  в  $\text{см}^3$ . В этом случае наоборот мы дописываем к «м» приставу «с» (множитель  $10^{-2}$ ). И чтобы результат не изменился, мы должны домножить получившийся «см» на  $10^2$ . К примеру, нам необходимо перевести  $4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$  в  $\text{см}^3$ , получаем

$$4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 4 \cdot 10^{-5} (10^2 \text{ см})^3 = 4 \cdot 10^{-5} \cdot 10^6 \text{ см}^3 = 40 \text{ см}^3.$$

Перевести  $8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$  в  $\text{мм}^4$ :

$$8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4 = 8 \cdot 10^{-3} (10^3 \text{ мм})^4 = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{12} \text{ мм}^4 = 8 \cdot 10^9 \text{ мм}^4.$$

Перевести  $12 \cdot 10^{-4} \text{ см}^4$  в  $\text{мм}^4$ :

$$12 \cdot 10^{-4} \text{ см}^4 = 12 \cdot 10^{-4} (10^1 \text{ мм})^4 = 12 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 \text{ мм}^4 = 12 \text{ мм}^4.$$

Еще один важный момент! При подстановке численных значений физических величин в расчетные формулы необходимо помнить, что *численные значения должны быть подставлены в единицах СИ*.

*Например*, стержень длиной  $l = 60 \text{ см}$  и площадью поперечного сечения  $A = 12 \text{ мм}^2$  растягивается силами  $F = 2 \text{ кН}$ . Определить удлинение стержня  $\Delta l$ , если он изготовлен из стали, для которой модуль упругости первого рода  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

*Решение.* Данная задача решается с помощью закона Гука, который в данном случае можно записать в виде

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}.$$

В эту формулу численные значения величин должны быть подставлены в единицах СИ, т. е. необходимо перевести кН в Н,  $\text{мм}^2$  в  $\text{м}^2$ , МПа в Па и т. д.

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} = 30 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 3 \text{ мм}.$$

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### 2.1. Основные критерии работоспособности конструкций

Детали машин, элементы конструкций должны удовлетворять определенным требованиям, без выполнения которых их работа невозможна. Эти критерии называются *критериями работоспособности*. К основным критериям работоспособности относятся прочность, жесткость и устойчивость.

*Прочность* – способность деталей и элементов инженерных сооружений не разрушаться под действием внешней нагрузки.

Математически этот критерий формулируется с помощью *условия прочности*, которое в общем виде представляется неравенством

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Максимальное напряжение  $\sigma_{\max}$ , возникающее в конструкции, не должно превышать допускаемое напряжение  $[\sigma]$ . Выполнение данного условия гарантирует, что данная конструкция не разрушится под действием внешней нагрузки.

*Жесткость* – способность деталей и элементов инженерных сооружений сопротивляться изменению формы и размеров, вызванных внешней нагрузкой. При заданных нагрузках деформации не должны превышать определенных величин, установленных в соответствии с требованиями к конструкции.

Математически этот критерий формулируется с помощью *условия жесткости*, которое в общем виде представляется неравенством

$$\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon].$$

Максимальная деформация  $\varepsilon_{\max}$ , возникающая в конструкции, не должна превышать допускаемой деформации  $[\varepsilon]$ . Выполнение данного условия гарантирует, что деформация конструкции не превысит заданной величины.

*Устойчивость* – способность элементов конструкции сохранять первоначальную форму равновесия под действием внешней нагрузки.

Математически этот критерий формулируется с помощью *условия устойчивости*, которое в общем виде представляется неравенством

$$\sigma \leq [\sigma]_y.$$

Напряжения, которые возникают в сжатых стержнях под действием внешней нагрузки, не должны превышать допускаемое напряжение на устойчивость. Выполнение данного условия гарантирует, что элемент конструкции не потеряет первоначальную форму равновесия, т.е. будут устойчивы под действием внешней нагрузки.

Это основные критерии, удовлетворение которых гарантирует работоспособность данной конструкции или детали. Наша задача научиться пользоваться условиями прочности, жесткости и устойчивости, уметь определять напряжения и деформации при различных видах нагружения деталей и конструкций.

## 2.2. Внутренние силовые факторы. Метод сечений

Внутренние силы являются одними из основных объектов изучения в сопротивлении материалов, так как знание их позволяет определять *напряжения и деформации*, а по ним, в свою очередь, судить о прочности и жесткости конструкции.

Внутренние силы определяются с помощью *метода сечений*. Если известна внешняя нагрузка, действующая на тело, то с помощью метода сечений всегда можно определить внутренние силы (см. рис. 1).

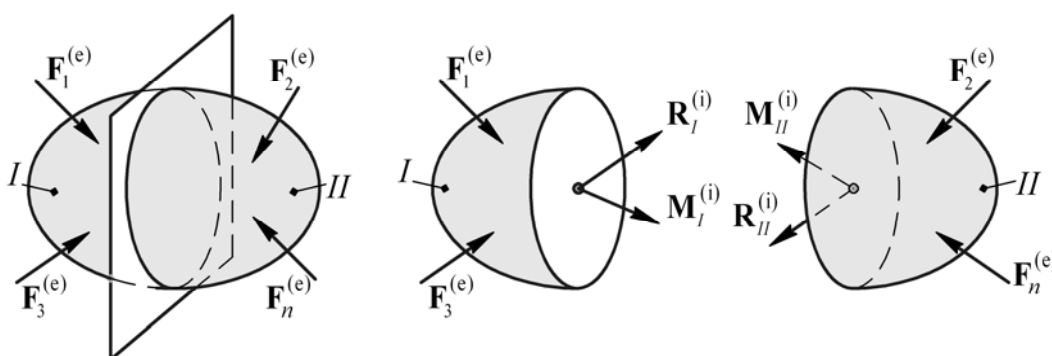


Рис.1. Метод сечений

*Основная идея метода сечений* заключается в следующем: если тело находится в равновесии, то в равновесии будет находиться и любая его мысленно рассматриваемая часть. Эта часть тела будет находиться в равновесии под действием внешних сил, приложенных к ней, и внутренних сил, возникающих в сечении. Внутренние силы для тела как целого (левая часть рисунка 1) для *мысленно* отсеченной части тела (для I или II правый рисунок) рассматриваются как внешние. Это позволяет включать их в уравнения равновесия отсеченной части точно так же, как и действующие на нее внешние силы и, решая эти уравнения, получать

главный вектор и главный момент внутренних сил. Внешние силы помечены индексом «e» (от англ. external – внешний), внутренние – индексом «i» (от англ. internal – внутренний).

*Примечание.* Составление уравнений равновесия возможно только для свободных тел (частей тел). Поэтому при рассмотрении нагружения закрепленных тел, их вначале условно делают свободными (выделяют объект равновесия), отбрасывая связи и заменяя их действие реакциями связи.

Если ввести систему координат (как показано на рис. 2) и спроецировать на нее главный вектор и главный момент внутренних сил, мы получим шесть проекций (три проекции главного вектора и три проекции главного момента, рис. 2).

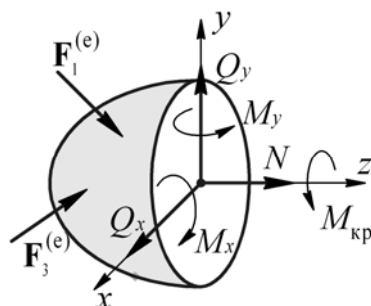


Рис. 2. Внутренние силовые факторы

Эти проекции называются *внутренними силовыми факторами* и имеют свои обозначения:  $N$  – продольная сила,  $Q_x$ ,  $Q_y$  – поперечные силы,  $M_{кр}$  – крутящий момент,  $M_x$ ,  $M_y$  – изгибающие моменты.

В соответствии с количеством внутренних силовых факторов одновременно действующих в поперечном сечении различают *простое* и *сложное* нагружение.

Нагружение называется *простым*, если в поперечном сечении элемента конструкции возникает только *один внутренний силовой фактор*. Различают четыре вида простых нагружений

- 1) *центральное растяжение (сжатие)* – в поперечном сечении действует только продольная сила  $N$ ;
- 2) *чистый сдвиг* – в поперечном сечении действует только поперечная сила  $Q$ ;
- 3) *чистый изгиб* – в поперечном сечении действует только изгибающий момент  $M_{из} = M_x$  или  $M_{из} = M_y$ .

- 4) *кручение* – в поперечном сечении действует только крутящий момент  $M_{кр} = M_z$

Нагружение называется *сложным*, если в поперечном сечении одновременно возникают *несколько внутренних силовых факторов*. Мы рассмотрим три вида сложного нагружения:

- 1) *поперечный изгиб* – в поперечном сечении одновременно действуют поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M_{из}$
- 2) *внецентренное растяжение (сжатие)* – в поперечном сечении одновременно действуют продольная сила  $N$  и изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ .
- 3) *совместное действие изгиба и кручения* – в поперечном сечении одновременно действуют изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$ , крутящий момент  $M_{кр}$  и поперечные силы  $Q_x$ ,  $Q_y$ .

### 2.3. Виды расчетов в механике материалов

Как правило, любое условие (прочности, жесткости, устойчивости) позволяет делать три вида расчета: проверочный, конструкторский и определение допускаемой нагрузки. Рассмотрим подробнее эти виды расчета на примере условия прочности, которое при простых видах нагружения можно записать в общем виде

$$\text{напряжение} = \frac{\text{внутренний силовой фактор}}{\text{геометрическая характеристика сечения}} \leq [\text{напряжение}] \quad (1)$$

При *проверочном расчете* геометрические размеры конструкции заданы. В этой конструкции определяется *опасное сечение* (сечение, в котором возникает максимальный внутренний силовой фактор) и в этом сечении определяются максимальные напряжения. Если неравенство (1) удовлетворяется, то это означает, что конструкция *не разрушится* под действием заданной нагрузки. Если неравенство не удовлетворяется, то необходимо вносить изменения в конструкцию, либо уменьшать внешнюю нагрузку.

При *конструкторском расчете* из условия прочности определяется *геометрическая характеристика сечения* (площадь  $A$ , момент сопротивления  $W$ ) и далее подбирается необходимое сечение.

При *определении допускаемой нагрузки* из условия прочности определяется *допускаемое значение внутреннего силового фактора*, по которому рассчитывается допускаемая внешняя нагрузка.

Чаще всего при конструкторском расчете пользуются условием прочности, а условие жесткости используют в качестве проверочного.

## 2.4. Центральное растяжение (сжатие)

*Центральное растяжение (сжатие)* – это такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении стержня возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила  $N$  (остальные составляющие главного вектора и главного момента внутренних сил равны нулю, см. пункт 2.2). Растяжение (сжатие) называется *центральным*, так как линии действия внешних продольных сил  $F$  проходят через центры тяжести сечений стержня, т.е. силы действуют вдоль продольной оси стержня.

При растяжении (сжатии) в каждой точке поперечного сечения стержня возникают только *нормальные* напряжения  $\sigma$ , которые определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (2)$$

Эти напряжения одинаковы в каждой точке поперечного сечения, т.е. они распределены по сечению *равномерно* и направлены перпендикулярно плоскости этого сечения (см. рис. 3)

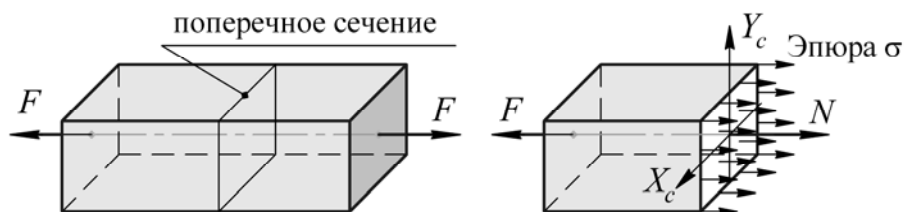


Рис. 3. Центральное растяжение стержня. Распределение нормальных напряжений в поперечном сечении стержня (эпюра  $\sigma$ )

Из формулы (2) видно, что максимальные напряжения будут в сечении, где действует максимальная продольная сила  $N_{\max}$  – это сечение будет *опасным*.

*Условие прочности при центральном растяжении (сжатии)* выражает требование, чтобы максимальное расчетное напряжение в стержне не превышало значения допускаемого напряжения



$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]. \quad (3)$$

Условие жесткости формулируется на основании закона Гука и выражает требование, чтобы расчетное удлинение стержня не превышало допускаемого удлинения

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \leq [\Delta l]. \quad (4)$$

Условие прочности (3) позволяют решать следующие задачи (см. пункт 2.3):

1) Проверять прочность стержня (проверочный расчет), т. е. определять по заданным нагрузке и размерам поперечного сечения стержня максимальные напряжения и сравнивать их с допускаемыми. Максимальные напряжения не должны отклоняться от допускаемых более чем на  $\pm 5\%$ . Перенапряжение больше этого значения недопустимо с точки зрения прочности, а недонапряжение свидетельствует о перерасходе материала.

2) Определять размеры поперечного сечения стержня (конструкторский расчет) по известным нагрузке и допускаемому напряжению:

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}.$$

3) Определять допускаемую продольную силу по заданным размерам поперечного сечения стержня и известному допускаемому напряжению:

$$[N] \leq A[\sigma].$$

Определив допускаемую внутреннюю продольную силу и установив ее связь с внешней нагрузкой (методом сечений), можно определить и допускаемую внешнюю нагрузку.

Следует иметь в виду, что сжатые стержни кроме расчета на прочность в наиболее ослабленном сечении должны также рассчитываться на устойчивость (см. пункт 2.10), так как при определенном значении сжимающей силы может произойти выпучивание (продольный изгиб) сжатого стержня.

Аналогичные задачи можно решать с помощью условия жесткости (4). На практике, как правило, конструкторский расчет осуществляется из условия прочности, а проверочный расчет делается из условия жесткости.

**Пример 1.** К конструкции, указанной на рис. 4, подвешен груз массой  $m=1000$  кг. Брус  $AB$  абсолютно жесткий, удерживается в равновесии при помощи стержня  $CD$ . Материал стержня  $CD$  – сталь Ст. 3, для которой  $[\sigma]=160$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Геометрические параметры конструкции известны:  $a = 2$  м;  $b = 1$  м;  $c = 1$  м;  $\alpha = 45^\circ$ .

**Требуется:**

- 1) из условия прочности определить диаметр стержня  $CD$ ;
- 2) проверить конструкцию на жесткость (перемещение правого края бруса  $AB$  в вертикальном направлении не должно превышать 5 мм) и, при необходимости, пересчитать диаметр стержня  $CD$  из условия жесткости.

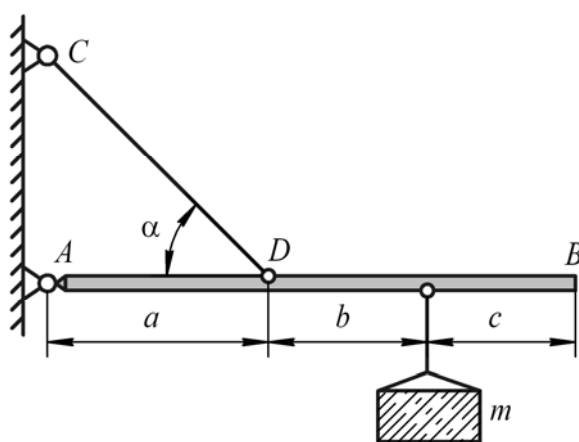


Рис. 4. Схема конструкции

*Решение*

1. *Подбор сечения из условия прочности.* Выделяем объект равновесия (тело, освобожденное от связей, действие которых на тело заменено реакциями связей). В рассматриваемой задаче объектом равновесия является брус  $AB$  (рис. 5). Согласно методу сечений (см. пункт 2.2) рассекаем стержень  $CD$  в произвольном месте. В рассматриваемом сечении будет действовать продольная сила  $N$ , которую мы условно направляем от сечения. Связь, наложенную шарнирно-неподвижной опорой, заменяем двумя составляющими реакции связи  $R_A^z, R_A^y$ . Силу тяжести груза  $G = mg$  приводим в точку  $E$ . Расчетная схема составлена.

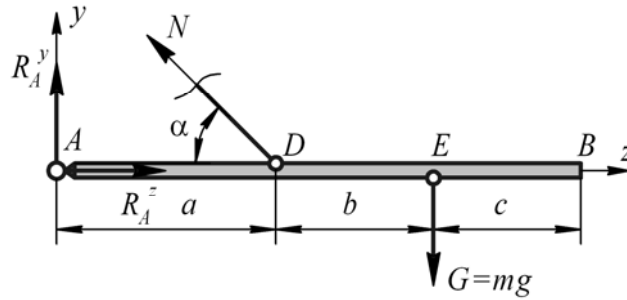


Рис. 5. Расчетная схема

Для определения продольной силы  $N$  в стержне  $CD$  воспользуемся уравнением равновесия. Сумма моментов всех сил относительно точки  $A$  должна быть равна нулю

$$\sum_k M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -G(a+b) + N \sin \alpha = 0.$$

Из этого уравнения определяем усилие в стержне  $CD$ .

$$N = \frac{G(a+b)}{a \sin \alpha} = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot (2+1)}{2 \cdot 0,707} = 20,8 \text{ кН.}$$

Следует отметить, что из уравнений равновесия можно также найти и составляющие реакции в шарнирной неподвижной опоре  $A$ , однако согласно условию задачи в их определении нет необходимости.

Для проведения конструкторского расчета стержня  $CD$  (подбора размеров поперечного сечения) воспользуемся условием прочности при центральном растяжении (сжатии) (3)

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma].$$

Конструкторский расчет заключается в том, что из условия прочности определяется геометрическая характеристика сечения (см. пункт 2.6) При центральном растяжении (сжатии) этой характеристикой является площадь поперечного сечения

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}. \quad (5)$$

Очевидно, что вдоль стержня  $CD$  продольная сила  $N$  не изменяется, поэтому  $N_{\max} = N$ .

По условию задачи поперечное сечение стержня  $CD$  круглое. Площадь круга  $A = \pi d^2/4$ . В итоге, разрешая неравенство (5) относи-

тельно диаметра  $d$ , имеем

$$d \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 20,8 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 12,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 12,8 \text{ мм}.$$

Если стержень круглого поперечного сечения будет изготовлен диаметром  $d \geq 12,8$  мм, то можно гарантировать, что он *не разрушится* под действием приложенной внешней нагрузки.

2. *Проверочный расчет на жесткость.* Вторая часть задачи заключается в проверке жесткости рассматриваемой конструкции. По условию задачи жесткость будет обеспечена, если под действием внешних сил вертикальное перемещение правого края бруса  $AB$  (точка  $B$ ) не будет превышать  $\delta_B = 5$  мм. Запишем условие жесткости (4) для стержня  $CD$ :

$$\Delta l_{CD} = \frac{N l_{CD}}{EA} \leq [\Delta l_{CD}], \quad (6)$$

где  $\Delta l_{CD}$  – фактическое удлинение стержня  $CD$ ,  $[\Delta l_{CD}]$  – допускаемое удлинение, которое очевидно связано с максимально допустимым перемещением правого края бруса  $AB$ ,  $l_{CD} = a/\cos \alpha = 2,83$  м – длина недеформированного стержня  $CD$  (см. рис. 4).

Так как диаметр стержня был определен из условия прочности, а  $A = \pi d^2/4$ , то фактическое удлинение стержня  $CD$  будет

$$\Delta l_{CD} = \frac{N l_{CD}}{EA} = \frac{4N l_{CD}}{E\pi d^2} = \frac{4 \cdot 20,8 \cdot 10^3 \cdot 2,83}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot (12,8 \cdot 10^{-3})^2} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,3 \text{ мм}.$$

Рассчитаем допускаемое удлинение  $[\Delta l_{CD}]$  стержня  $CD$ , т.е. удлинение, при котором точка  $B$  переместится на расстоянии 5 мм. Для этого изобразим конструкцию в деформированном виде (см рис. 6). Под действием силы  $G$  брус  $AB$  будет поворачиваться относительно шарнирно-неподвижной опоры  $A$ . При этом все точки изначально ненагруженного бруса  $AB$  (кроме точки  $A$ ) переместятся по дугам окружности в новое положение, показанное на рис. 6 штриховым контуром. Так как рассматриваемые деформации являются малыми, то при дальнейших расчетах с большой степенью точности полагаем, что углы, определяющие положение стержня до деформации (угол  $\alpha$ ) остаются неизменным и после деформации, а перемещение точек бруса происходит по прямым вертикальным линиям (см. рис. 6).

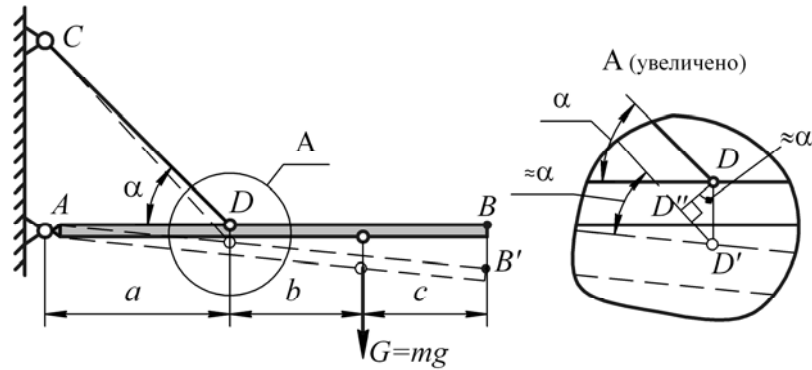


Рис. 6. Конструкция в деформированном виде

Так как брус  $AB$  абсолютно жесткий (согласно условию задачи), то вертикальное перемещение точки  $D$  определяем исходя из подобия треугольников  $ABB'$  и  $ADD'$  (треугольники прямоугольные и имеют общий угол).

$$\frac{BB'}{(a+b+c)} = \frac{DD'}{a} \Rightarrow DD' = BB' \frac{a}{(a+b+c)} = \delta_B \frac{a}{(a+b+c)}.$$

Искомое допускаемое удлинение стержня  $[\Delta l_{CD}] = D'D''$  определяется из прямоугольного треугольника  $DD'D''$

$$\begin{aligned} [\Delta l_{CD}] = D'D'' &= DD' \sin \alpha = \delta_B \frac{a}{(a+b+c)} \sin \alpha = \\ &= 5 \frac{2}{(2+1+1)} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,8 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Очевидно, что условие жесткости (6) не выполняется, так как

$$\Delta l_{CD} = 2,3 \text{ мм} > [\Delta l_{CD}] = 1,8 \text{ мм.}$$

Работоспособность конструкции требует одновременное выполнение и условия прочности и условия жесткости. В нашем случае условие жесткости не выполняется, поэтому сделаем конструкторский расчет из условия (6)

$$A \geq \frac{Nl_{CD}}{E[\Delta l_{CD}]}. \quad (7)$$

Так как сечение стержня круглое, из условия (7) получаем расчетный диаметр стержня  $CD$

$$d \geq \sqrt{\frac{4Nl_{CD}}{\pi E[\Delta l_{CD}]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 20,8 \cdot 10^3 \cdot 2,83}{3,14 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1,8 \cdot 10^{-3}}} = 14,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 14,4 \text{ мм.}$$

*Заключение.* Таким образом, окончательно принимаем к проекту диаметр стержня  $CD$   $d = 14,4$  мм, который удовлетворяет и условию прочности, и условию жесткости конструкции (см. пункт 2.1).

## **2.5. Статически неопределимые задачи при растяжении (сжатии)**

Системы, в которых неизвестные реактивные силы могут быть определены с помощью *только уравнений равновесия* (уравнений статики), называются *статически определимыми*. Для того чтобы система была статически определимой, число неизвестных не должно превышать числа уравнений статики, которые можно сформулировать для данной системы. Так, плоская произвольная система сил, для которой можно записать *три* независимых уравнения равновесия будет *статически определимой*, если она будет содержать *три* неизвестные силы. Для пространственной системы сил можно сформулировать шесть уравнений равновесия (три уравнения для сил и три уравнения для моментов), поэтому для статической определимости такая система может содержать шесть неизвестных сил. Например, в ранее рассмотренной задаче (пример 1) конструкция из бруса  $AB$  и стержня  $CD$  является статически определимой, так как количество неизвестных сил равно числу независимых уравнений статики.

Если число неизвестных реактивных сил больше, чем количество уравнений статики, которые можно сформулировать для рассматриваемой системы, то система становится *статически неопределимой*.

На практике статически неопределимые системы встречаются довольно часто. Например, в стержневых конструкциях вводят дополнительные или «лишние» стержни для повышения жесткости системы. Здесь термин «лишний» стержень или, в общем, «лишняя» связь следует понимать как некоторый элемент конструкции, который не является необходимым для сохранения равновесия, т.е. без «лишней» связи конструкция сохраняет свою работоспособность и может находиться в равновесии, однако жесткость и прочность ее в этом случае, как правило, значительно ниже. Число «лишних» неизвестных *определяет степень статической неопределимости*. Если система имеет одну, две и т.д. «лишних связей», то ее называют один раз, два раза и т.д. статически неопределимой.

*Степень статической неопределимости системы определяется разностью между числом неизвестных, подлежащих определению, и числом уравнений статики. Степень статической неопределимости фактически показывает число дополнительных уравнений, которые необходимо сформулировать, чтобы полная система уравнений оказалась замкнутой (решаемой). Следовательно, для решения статически неопределимых задач необходимо, в дополнение к уравнениям статики, составлять уравнения совместности деформаций. Любой материал под действием внешней нагрузки в той или иной степени деформируется. Если между деформациями отдельных элементов конструкции установить геометрическую взаимосвязь, т.е. составить уравнения совместности деформаций, то, используя закон Гука, можно определить зависимости между внутренними усилиями в этих же элементах. Эти дополнительные зависимости позволяют совместно с уравнениями статики раскрыть статическую неопределимость и найти все неизвестные силы в системе. Количество дополнительных уравнений должно быть равно степени статической неопределимости.*

Решение статически неопределимых задач проводят в четыре этапа.

1. *Статическая сторона задачи.* Составляют возможные для данной системы уравнения равновесия. Определяют степень статической неопределимости системы.

2. *Геометрическая сторона задачи.* Представляют систему в деформированном виде и устанавливают связь между деформациями отдельных элементов конструкции. Полученные уравнения называются уравнениями совместности деформаций.

3. *Физическая сторона задачи.* В уравнениях совместности деформаций выражают деформации через неизвестные усилия на основании закона Гука.

4. *Синтез.* Решают совместно полученные уравнения относительно искомых неизвестных усилий.

**Пример 2.** К конструкции, указанной на рис. 7, подвешен груз массой  $m=1000$  кг. Брус  $AB$  абсолютно жесткий, удерживается в равновесии при помощи стержней  $CD$  и  $KD$  одинакового поперечного сечения. Материал стержней – сталь Ст. 3, для которой  $[\sigma]=160$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Геометрические параметры конструкции известны:  $a=2$  м;  $b=1$  м;  $c=1$  м;  $\alpha=45^\circ$ . Требуется из условия прочности определить диаметры стержней  $CD$  и  $KD$ .

Поставленная задача аналогична рассмотренной в примере 1, с той лишь разницей, что для *повышения жесткости* в конструкцию введена «лишняя» связь – дополнительный стержень  $DK$  (рис. 7). Исходные данные остались прежними. Это позволит проанализировать влияние «лишней» связи на прочность и жесткость конструкции.

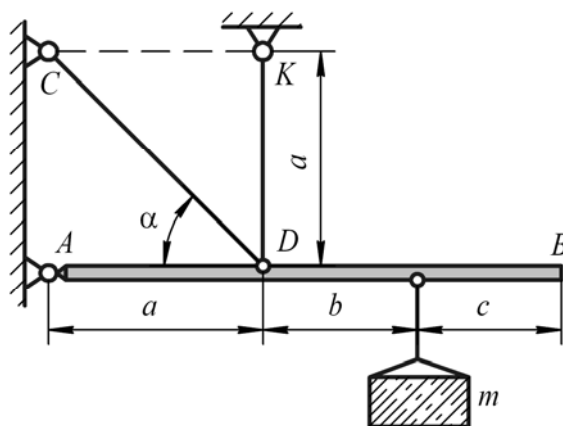


Рис. 7. Схема конструкции

### Решение

1. *Статическая сторона задачи.* Выделяем объект равновесия – брус  $AB$  (рис. 7). Согласно методу сечений (см. пункт 2.2) рассекаем стержни  $CD$  и  $KD$  в произвольных местах. В сечениях стержней будут действовать продольные силы:  $N_1$  и  $N_2$ . Связь, наложенную шарнирно-неподвижной опорой, заменяем двумя составляющими реакции связи  $R_A^z, R_A^y$ . Силу тяжести груза  $G = mg$  приводим к точке  $E$ . Расчетная схема составлена (рис. 8).

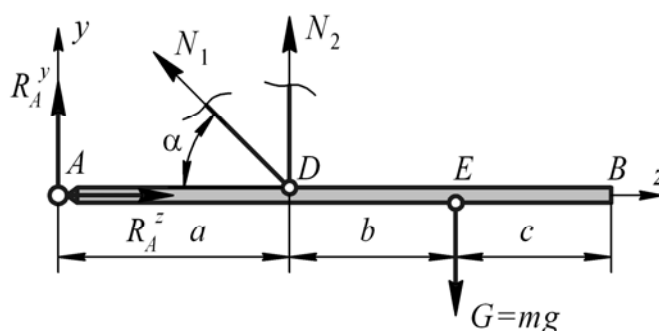


Рис. 8. Расчетная схема

Вводим систему координат  $uz$ . Для плоской произвольной системы сил, показанной на рис. 8, можно составить *три* уравнения равновесия.



$$\sum_k F_{kz} = 0; \quad R_A^z - N_1 \cos \alpha = 0; \quad (i)$$

$$\sum_k F_{ky} = 0; \quad R_A^y - G + N_2 = 0; \quad (ii)$$

$$\sum_k M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad G(a+b) - N_2 a - N_1 a \sin \alpha = 0. \quad (iii)$$

Полученная система уравнений имеет *четыре* неизвестных силы. Находим *степень статической неопределенности системы* как разницу между числом неизвестных и числом уравнений статики. Очевидно, что степень статической неопределенности равна единице, т. е. *система один раз статически неопределима*. Для того, чтобы система оказалась замкнутой, ее необходимо дополнить еще одним уравнением, которое получим *на основе уравнения совместности деформаций*.

2. *Геометрическая сторона задачи*. Установим взаимосвязь между деформациями стержней  $CD$  и  $KD$ . Для этого рассмотрим конструкцию после нагружения силой  $G$ , т.е. *в деформированном виде* (рис. 9). Отметим, что деформации считаются *малыми*, поэтому значения углов, определяющих положения стержней до деформации, остаются практически таким же и после деформации.

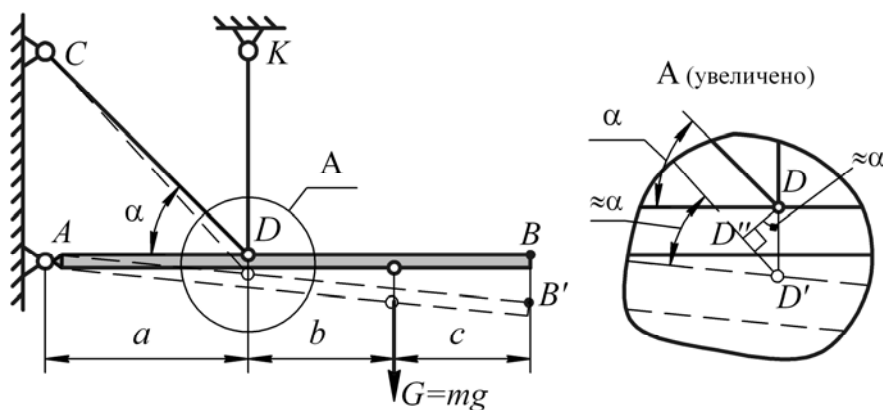


Рис. 9. Система в деформированном виде

Из рис. 9 видно, что стержень  $KD$  растягивается и его абсолютное удлинение  $\Delta l_{KD} = DD'$ . Стержень  $CD$  тоже растягивается, но при этом поворачивается относительно точки  $C$ . В этом случае абсолютное удлинение стержня  $CD$   $\Delta l_{CD} = D'D''$ .

Так как треугольник  $DD'D''$  прямоугольный (здесь учтено, что при малых деформациях угол  $\alpha$  не изменяется), то между абсолютными деформациями стержней  $CD$  и  $KD$  нетрудно установить взаимосвязь (см. увеличенный рис. 9).

$$\Delta l_{CD} = \Delta l_{KD} \sin \alpha .$$

Это уравнение является *уравнением совместности деформаций*. Оно устанавливает связь между деформациями в стержнях  $CD$  и  $KD$ .

3. *Физическая сторона задачи*. Выразим величины абсолютных деформаций стержней через внутренние усилия *при помощи закона Гука*.

$$\frac{N_1 l_{CD}}{EA} = \frac{N_2 l_{KD}}{EA} \sin \alpha .$$

Так как стержни изготовлены из одинакового материала и имеют одинаковое поперечное сечение, то произведение  $EA$  можно сократить. Длина стержня  $CD$   $l_{CD} = a\sqrt{2}$ , длина стержня  $KD$   $l_{KD} = a$ , угол  $\alpha = 45^\circ$ . Тогда

$$N_1 a \sqrt{2} = N_2 a \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow N_1 = \frac{N_2}{2} . \quad (\text{iv})$$

4. *Синтез*. Уравнение (iv) совместно с уравнениями равновесия образуют замкнутую систему уравнений, из которой определим усилия  $N_1$  и  $N_2$ . Из уравнения моментов (iii), выражая  $N_2$  через  $N_1$  на основе (iv), получим

$$G(a+b) - 2N_1 a - N_1 a \sin \alpha = 0 .$$

$$N_1 = \frac{G(a+b)}{2a + a \sin \alpha} = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot (2+1)}{2 \cdot 2 + 2 \cdot 0,707} = 5,44 \text{ кН} .$$

Из уравнения (iv)

$$N_2 = 2N_1 = 2 \cdot 5,44 = 10,88 \text{ кН} .$$

*Замечание*. В статически неопределимых задачах усилия в элементах конструкций зависят не только от внешней нагрузки, но и от материала, из которого изготовлены эти элементы, и площадей их поперечных сечений (в общем случае в уравнении (iv) произведение  $EA$  не сокращается).

Определим диаметры стержней  $CD$  и  $KD$  из условия прочности. При этом следует учесть, что размеры поперечного сечения обоих

стержней должны быть одинаковыми. Иначе сокращение на  $EA$  при получении уравнения (iv) становится неправомерным и, в конечном итоге, действительные усилия в стержнях будут отличаться от расчетных.

Расчет диаметра стержней ведем по наиболее нагруженному стержню  $KD$  (т.к.  $N_2=2N_1$ ), соответственно второй стержень  $CD$  будет недогружен.

Из условия прочности (3)

$$A \geq \frac{N_2}{[\sigma]}.$$

По условию задачи поперечное сечение стержня  $CD$  круглое. Площадь круга  $A = \pi d^2/4$ . В итоге расчетный диаметр стержней  $CD$  и  $KD$

$$d = \sqrt{\frac{4N_2}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10,88 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 9,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 9,3 \text{ мм}.$$

Очевидно, что по сравнению с задачей из примера 1 расчетный диаметр стержней уменьшился, что естественно, так как они оба воспринимают внешнюю нагрузку.

Проверим *жесткость конструкции*. В примере 1 было указано, что для обеспечения жесткости конструкции удлинение стержня  $CD$   $\Delta l_{CD}$  не должно превышать допускового значения  $[\Delta l_{CD}] = 1,8$  мм.

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_1 l_{CD}}{EA} = \frac{4N_1 l_{CD}}{E\pi d^2} = \frac{4 \cdot 5,44 \cdot 10^3 \cdot 2,83}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot (9,3 \cdot 10^{-3})^2} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,1 \text{ мм}.$$

Из расчета видно, что *жесткость* конструкции при добавлении дополнительной («лишней») связи *увеличивается* (в примере 1  $\Delta l_{CD} = 2,3$  мм). Очевидно, что условие жесткости в этом примере выполняется, т. к.  $\Delta l_{CD} < [\Delta l_{CD}]$ .

Аналогичный результат получится, если проверять жесткость конструкции по стержню  $KD$  (см. уравнение совместности деформаций).

Оценим теперь расход материала на изготовление стержней в обоих случаях.

Объем стержня  $CD$  в примере 1

$$V_1 = \frac{\pi d^2}{4} l_{CD} = \frac{3,14 \cdot (14,4 \cdot 10^{-3})^2}{4} 2\sqrt{2} = 4,61 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Объем обеих стержней в рассматриваемом примере

$$V_2 = \frac{\pi d^2}{4} (l_{CD} + l_{KD}) = \frac{3,14 \cdot (9,3 \cdot 10^{-3})^2}{4} (2\sqrt{2} + 2) = 3,29 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Процент экономии материала при введении дополнительной связи составит

$$\frac{V_1 - V_2}{V_1} 100\% = \frac{4,61 \cdot 10^{-4} - 3,29 \cdot 10^{-4}}{4,61 \cdot 10^{-4}} 100\% = 29\%.$$

*Заключение.* Таким образом, введение «лишней» связи в конструкцию помимо повышения жесткости конструкции, позволяет снизить расход материала на ее изготовление.

## 2.6. Геометрические характеристики сечений

В расчетах на прочность, жесткость и устойчивость используются определенные геометрические характеристики поперечных сечений. К ним относятся:

- 1) площадь поперечного сечения  $A = \int_A dA$ ;
- 2) статические моменты сечения  $S_x = \int_A y dA$ ,  $S_y = \int_A x dA$ ;
- 3) моменты инерции
  - а) осевые  $I_x = \int_A y^2 dA$ ,  $I_y = \int_A x^2 dA$ ;
  - б) центробежный  $I_{xy} = \int_A xy dA$ ;
  - в) полярный  $I_p = \int_A \rho^2 dA$ ;
- 4) моменты сопротивления  $W_x = I_{xc}/y_{\max}$ ,  $W_y = I_{yc}/x_{\max}$ ;
- 5) радиусы инерции  $i_x = I_{xc}/A$ ,  $i_y = I_{yc}/A$ .

Формулы, для вычислений этих характеристик для простых сечений приведены в приложении 2.

*Все расчеты в сопротивлении материалов производятся относительно главных центральных осей* – оси, проходящие через центр тяжести сечения и относительно которых центробежный момент инерции равен нулю. Для простых сечений определение положения этих осей не представляет труда, однако в конструкциях часто применяются балки сложного поперечного сечения. В пределах нашего курса

са мы будем сталкиваться со сложными поперечными сечениями, имеющими одну ось симметрии, например, такими, как показано на рис. 10.

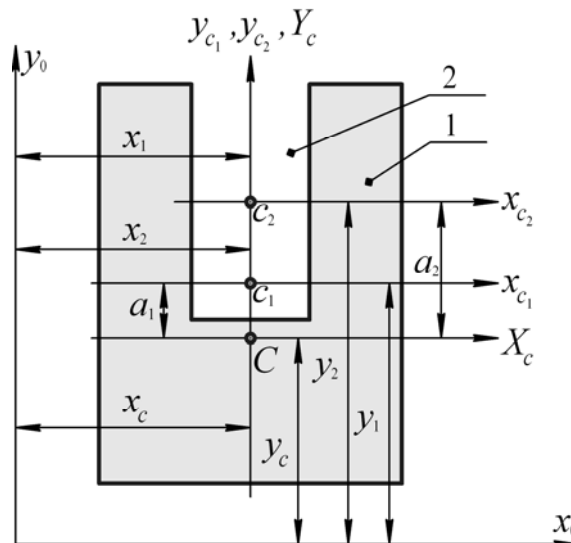


Рис. 10. Сложное поперечное сечение

Если сложное сечение можно разложить на простые элементы (на рис. 10 сплошной прямоугольник 1 и прямоугольный вырез 2), то *площадь поперечного сечения*, очевидно, рассчитывается по формуле

$$A = \sum A_i, \quad (8)$$

где  $A_i$  – площадь  $i$ -го элемента. *Замечание:* если элемент является вырезом, то его площадь берется со знаком «-».

*Положение центральных осей* (оси, проходящие через центр тяжести сечения) определяется по формулам (9)

$$x_c = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}, \quad y_c = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}, \quad (9)$$

где  $x_i$  и  $y_i$  – координаты, отсчитываемые от начальных осей  $x_0, y_0$  до центра тяжести  $i$ -го элемента соответственно (координаты центра тяжести  $i$ -го элемента в системе начальных осей  $x_0, y_0$ ). Выбор начальных осей абсолютно произволен и для удобства его лучше совмещать с осями какого-нибудь  $i$ -го элемента.

Если одна из центральных осей совпадает с осью симметрии сечения, то эти центральные оси будут *главными центральными осями* (оси  $X_c, Y_c$  на рис. 10).

Моменты инерции относительно главных центральных осей для симметричных сечений представляются в виде

$$I_{X_C} = \sum (I_{x_{ci}} + a_i^2 A_i), \quad I_{Y_C} = \sum (I_{y_{ci}} + b_i^2 A_i), \quad (10)$$

где  $I_{x_{ci}}$ ,  $I_{y_{ci}}$  – моменты инерции простого  $i$ -го элемента относительно осей, проходящих через его центр тяжести. *Замечание:* если элемент является вырезом, то его моменты инерции берутся со знаком «-».  $a_i = y_i - y_C$ ,  $b_i = x_i - x_C$  – координаты, отсчитываемые от главных центральных осей  $X_C$ ,  $Y_C$  до центра тяжести  $i$ -го элемента (координаты центра тяжести  $i$ -го элемента в системе главных центральных осей  $X_C$ ,  $Y_C$ ).

## 2.7. Изгиб

*Изгибом* называется такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении балки возникает изгибающий момент  $M_{из} = M_x$ , если изгиб происходит в плоскости  $YZ$  или  $M_{из} = M_y$ , если изгиб происходит в плоскости  $XZ$ . Если изгибающий момент является единственным внутренним силовым фактором, то изгиб называется *чистым*. Если в поперечном сечении балки помимо изгибающего момента возникает поперечная сила  $Q$ , то изгиб называется *поперечным*.

При изгибе балки всегда возникают растянутые и сжатые волокна (см. рис. 11).

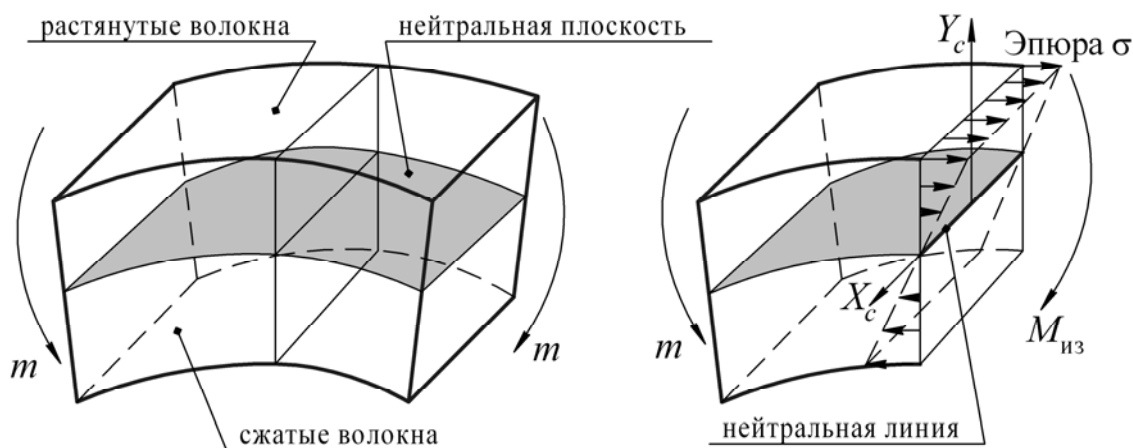


Рис. 11. Изгиб балки. Распределение нормальных напряжений в поперечном сечении балки при изгибе (эпюра  $\sigma$ )

Между областью растяжения и сжатия существует слой, в котором длина волокон не изменяется. Этот слой называется *нейтральной*

плоскостью (слоем). Пересечение поперечного сечения балки с нейтральной плоскостью происходит по линии, которая называется *нейтральной линией* (рис. 11).

При изгибе в точках поперечного сечения стержня возникают *нормальные напряжения*  $\sigma$ , которые определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_{\text{из}} \cdot y}{I_{Xc}}, \quad (11)$$

где  $y$  – расстояние от нейтральной линии до рассматриваемой точки,  $I_{Xc}$  – момент инерции сечения относительно главной центральной оси  $X_C$  (см. пункт 2.6). *При плоском поперечном изгибе нейтральная линия всегда совпадает с одной из главных центральных осей* (на рис. 11 нейтральная линия совпадает с осью  $X_C$ ).

Формула (11) показывает, что нормальные напряжения при изгибе распределены по высоте сечения неравномерно и изменяются по линейному закону. По одну сторону от нейтральной линии возникают напряжения растяжения, по другую – напряжения сжатия (на рис. 11 выше нейтральной линии возникают напряжения растяжения, ниже – напряжения сжатия).

Из формулы (11) видно, что напряжения равны нулю на нейтральной линии (при  $y = 0$ ,  $\sigma = 0$ ) и принимают наибольшее значение в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии (при  $y = y_{\text{max}}$ ,  $\sigma = \sigma_{\text{max}}$ ).

На основе (11) можно сформулировать *условие прочности при изгибе*. Максимальные напряжения, которые возникают в *опасном сечении* (сечение, в котором изгибающий момент  $M_{\text{из}}$  максимален) в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии (*опасные точки*), не должны превышать допустимого напряжения

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{из}}^{\text{max}} \cdot y_{\text{max}}}{I_{Xc}} \leq [\sigma]. \quad (12)$$

При подборе сечений для балок с поперечным сечением, симметричным относительно нейтральной линии (круг, двутавр, швеллер и т.д.) удобно пользоваться другой формой записи условия прочности (12) через момент сопротивления

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{из}}^{\text{max}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (13)$$

где  $W_x = I_{Xc} / y_{\text{max}}$  – момент сопротивления сечения относительно оси  $X_C$ .

Условие прочности при изгибе позволяет решать три вида задач (см. пункт 2.3):

1) *Производить проверочный расчет.* При этом определяются напряжения в опасных точках  $\sigma_{\max}$  и сравниваются с допускаемым  $[\sigma]$ . Допускается превышение  $[\sigma]$  на 5% (перегрузка) и недогрузка 10%.

2) *Определять размеры поперечного сечения (конструкторский расчет).* Из условия прочности (13) определяется геометрическая характеристика сечения – момент сопротивления  $W_x$

$$W_x \geq \frac{M_{\text{из}}^{\max}}{[\sigma]}.$$

3) *Находить допускаемый изгибающий момент*

$$[M_{\text{из}}] \leq W_x [\sigma],$$

а по нему допускаемую внешнюю нагрузку.

Для того, чтобы воспользоваться условиями прочности (12) или (13), нужно знать максимальный изгибающий момент  $M_{\text{из}}^{\max}$ . Он определяется из *эюр* внутренних силовых факторов.

При плоском поперечном изгибе от действий внешних нагрузок в поперечном сечении балки возникают поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M_{\text{из}}$ , которые определяются методом сечений (см. пункт 2.2) с использованием *правила знаков* (см. рис. 12, рис. 13).

*Правило знаков для Q.* Внешняя поперечная сила входит в уравнение для определения поперечной силы  $Q$  со знаком «+», если она стремится повернуть отсеченную часть балки (левую или правую) по ходу часовой стрелки и со знаком «-», если против хода часовой стрелки (см. рис. 12).

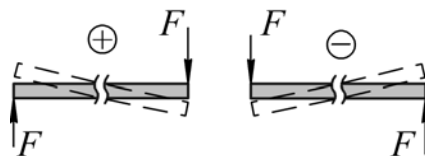


Рис. 12. Правило знаков для  $Q$

Чтобы *определить поперечную силу Q* в сечении балки, нужно записать алгебраическую сумму внешних поперечных сил (согласно правилу знаков) действующих справа или слева от рассматриваемого сечения (см. правило знаков на рис. 12 и примеры 3, 4).



*Правило знаков для  $M_{из}$ .* Момент внешней силы и сосредоточенный внешний момент входят в уравнение для определения изгибающего момента  $M_{из}$  со знаком «+», если они вызывают сжатие верхних волокон балки, и со знаком «-», если вызывают сжатие нижних волокон (см. рис. 13), т. е. *эюра изгибающих моментов строится на сжатых волокнах.*

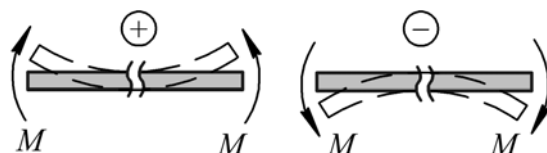


Рис. 13. Правило знаков для  $M_{из}$

Для определения изгибающего момента  $M_{из}$  в сечении балки нужно записать алгебраическую сумму моментов внешних сил и внешних сосредоточенных моментов относительно рассматриваемого сечения (согласно правилу знаков), действующих справа или слева от сечения (см. примеры 3, 4).

Большинство ошибок при решении задач связано с построением эюр поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M_{из}$ . Для проверки правильности их построения приведем *основные правила проверки.*

*Правила проверки эюры  $Q$ .*

- 1) При проверке эюры  $Q$  слева направо эюра делает «скачок» в точке приложения внешней поперечной силы на величину этой силы и в направлении этой силы (реакции опор тоже относятся к внешним силам).
- 2) На участке балки, где действует равномерно распределенная нагрузка, поперечная сила  $Q$  изменяется по линейному закону (см. примеры 3, 4), на остальных участках поперечная сила постоянна.

*Правила проверки эюры  $M_{из}$ .*

- 1) Эюра  $M_{из}$  делает «скачок» в точке приложения внешнего сосредоточенного момента на величину этого момента (реактивный момент в заделке также является внешним).
- 2) На участке балки, где действует равномерно распределенная нагрузка, изгибающий момент  $M_{из}$  изменяется по квадратичному закону, т.е. эюра на этом участке представляет собой ветвь параболы, выпуклость которой направлена навстречу распределенной нагрузке.

*Замечание.* Если под равномерно распределенной нагрузкой на эюре  $Q$  имеется точка, где поперечная сила равна нулю, то на эюре  $M_{из}$  в этой точке будет *максимум или минимум.* Для нахождения по-

ложения этой точки следует уравнение поперечной силы  $Q(z)$  на этом участке приравнять к нулю и определить значение  $z$ . Затем это расстояние необходимо подставить в уравнение изгибающего момента  $M_{из}(z)$  для этого участка и определить численное значение максимума или минимума (см. примеры 3, 4).

**Пример 3.** Для балки, показанной на рис. 14, построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента. Из условия прочности на изгиб подобрать сечение балки (круглое, прямоугольное с соотношением сторон,  $h/b = 2$  двутавровое). Сделать вывод, какое из сечений будет наиболее рациональным. Допускаемое напряжение принять  $[\sigma] = 160$  МПа.

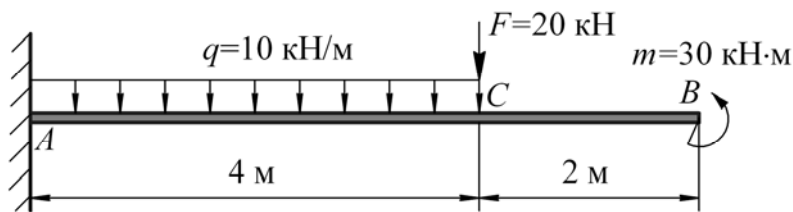


Рис. 14. Балка с защемленным концом

*Решение*

В общем случае решение задачи состоит из трех этапов. Сначала необходимо определить реакции связей. Затем требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. На заключительном этапе следует определить опасное сечение и подобрать размеры необходимого сечения.

1. *Определение реакций связей.* В качестве объекта равновесия выбираем балку  $AB$  (см. рис. 15). Указываем реакции в заделке ( $R_A^y$ ,  $R_A^z$ ) и реактивный момент  $m_A$ . В результате получили плоскую произвольную систему сил, действующих на балку  $AB$ . Неизвестные реакции определим, составив три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kz} = 0; \quad R_A^z = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_A^y - F - q \cdot 4 = 0;$$

$$R_A^y = F + q \cdot 4 = 20 + 40 = 60 \text{ кН};$$

$$\sum M_A(\mathbf{F}_k) = 0; \quad m_A - q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - F \cdot 4 + m = 0;$$

$$m_A = q \cdot 8 + F \cdot 4 - m = 80 + 80 - 30 = 130 \text{ кНм.}$$

Для проверки правильности произведенных расчетов убедимся в том, что соблюдается уравнение моментов относительно произвольной точки, к примеру, относительно точки  $C$ :

$$\sum M_C(\mathbf{F}_k) = 0; \quad -R_A^y \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + m_A + m = 0;$$

$$-240 + 80 + 130 + 30 = 0.$$

Условие равновесия выполнено, следовательно, реакции определены верно.

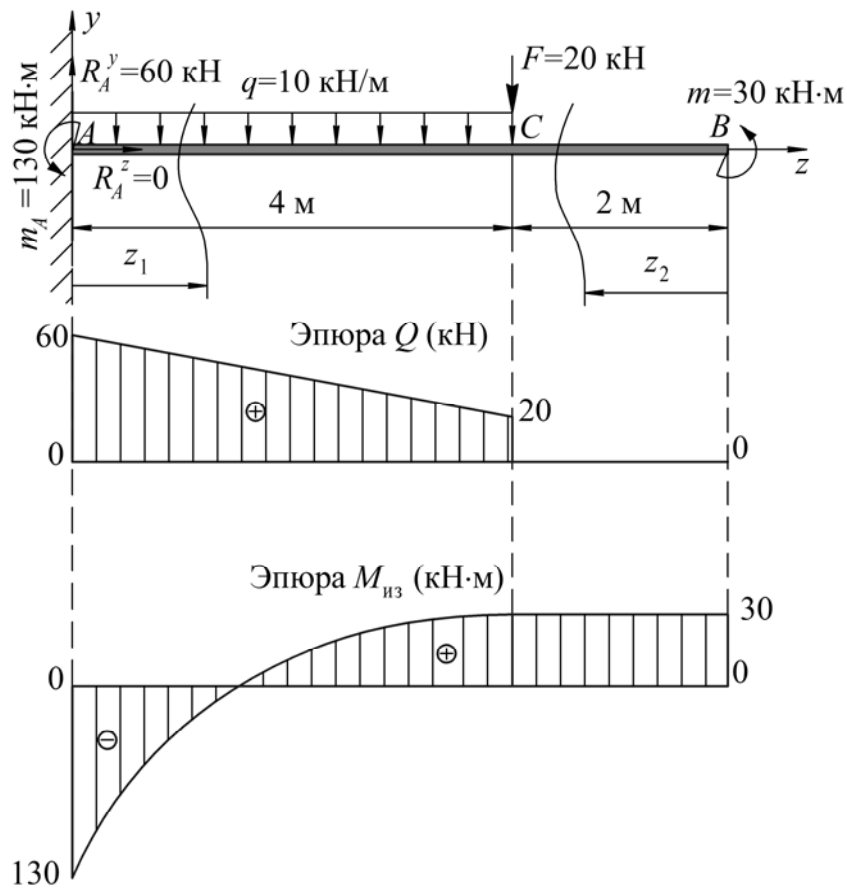


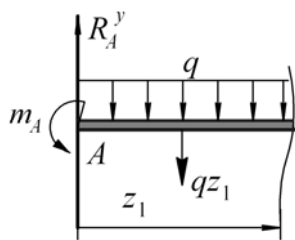
Рис. 15. Эпюры внутренних силовых факторов

2. Построение эпюр внутренних силовых факторов. При построении эпюр балка мысленно рассекается на участки. Сечения про-

водятся между точками приложения внешних нагрузок (см. рис. 15) и изменяются в пределах своих участков. Причем рассматривать можно как правую, так и левую части рассеченной балки.

Составим уравнения для поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M_{из}$  в сечениях на каждом из участков (см. пункт 2.7, стр. 30) и рассчитаем их значения на краях интервалов.

Участок 1  $0 \leq z_1 \leq 4$  м.



$$Q(z_1) = R_A^y - qz_1;$$

$$Q(z_1 = 0) = R_A^y = 60 \text{ кН};$$

$$Q(z_1 = 4) = 60 - 10 \cdot 4 = 20 \text{ кН}.$$

$$M_{из}(z_1) = R_A^y z_1 - qz_1 \frac{z_1}{2} - m_A;$$

$$M_{из}(z_1 = 0) = -m_A = -130 \text{ кНм};$$

$$M_{из}(z_1 = 4) = 60 \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 - 130 = 30 \text{ кНм}.$$

В поперечном сечении  $z_1$  возникают внутренние силы (внутренние силовые факторы, см. пункт 2.2), которые уравнивают внешнюю нагрузку слева от сечения. Внутренняя продольная сила  $N(z_1) = 0$ , так как нет внешних продольных сил. В поперечном сечении  $z_1$  возникает внутренняя поперечная сила  $Q(z_1)$ , которая уравнивает все внешние поперечные силы ( $R_A^y$ ,  $qz_1$ ). Внутренний изгибающий момент  $M_{из}(z_1)$  уравнивает внешний сосредоточенный момент  $m_A$  и моменты внешних сил  $R_A^y$  и  $qz_1$ .

Поясним подробнее как составляется уравнение  $Q(z_1) = R_A^y - qz_1$ . При составлении этого уравнения пользуемся правилом знаков (см. рис. 12). Сила  $R_A^y$  стремится поворачивать рассматриваемую часть балки по часовой стрелке относительно сечения  $z_1$ , поэтому согласно правилу знаков она входит в уравнение со знаком «+». Равнодействующая равномерно распределенной нагрузки  $qz_1$  стремится поворачивать рассматриваемую часть балки против часовой стрелки относительно сечения  $z_1$ , поэтому входит в уравнение для  $Q(z_1)$  со знаком «-».

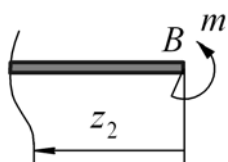
Теперь поясним, как составляется уравнение для изгибающего момента  $M_{из}(z_1) = R_A^y z_1 - qz_1 \frac{z_1}{2} - m_A$ . Сила  $R_A^y$  вызывает сжатие верхних волокон балки (балка изгибается вверх), поэтому момент этой силы относительно сечения ( $R_A^y z_1$ ) согласно правилу знаков (см. рис. 13) вхо-

дит в уравнение со знаком «+». Равнодействующая равномерно распределенной нагрузки  $qz_1$  вызывает сжатие нижних волокон балки (балка изгибается вниз, см. рис. 11), поэтому момент этой силы  $qz_1 \frac{z_1}{2}$  входит в уравнение со знаком «-». Внешний изгибающий момент  $m_A$  вызывает сжатие нижних волокон балки (балка изгибается вниз см. рис. 11), поэтому он входит в уравнение со знаком «-».

Заметим, что функция  $Q(z_1)$  линейно зависит от координаты  $z_1$ , т. е. график ее представляет прямую линию. Функция  $M_{из}(z_1)$  квадратичная, графиком ее является парабола, ветви которой направлены вниз, так как перед квадратичным членом  $qz_1^2/2$  стоит знак «-» (см. рис.15).

Аналогичным образом записываются уравнения внутренних силовых факторов в сечении  $z_2$ :

#### Участок 2



$$0 \leq z_2 \leq 2 \text{ м.}$$

$$Q(z_2) = 0.$$

$$M_{из}(z_2) = m = 30 \text{ кНм.}$$

Внутренняя поперечная сила  $Q(z_1)$  на этом участке равна нулю, так как отсутствуют внешние поперечные силы (нет внешних сил – не будет и внутренних).

*Замечание.* Для балки с защемленным концом не обязательно искать реакции в заделке, а можно сразу строить эпюры внутренних сил, двигаясь от свободного конца.

*Примечание.* Построенные эпюры (рис. 15) полезно проверить согласно правилам проверки эпюр, приведенных в пункте 2.7, стр. 31.

3. *Подбор сечения.* По эпюре изгибающих моментов определяется *опасное сечение* – сечение, в котором изгибающий момент максимален *по модулю*. В данной задаче опасным сечением является сечение в точке А, изгибающий момент, действующий в этом сечении,  $M_{из}^{max} = 130 \text{ кНм}$ .

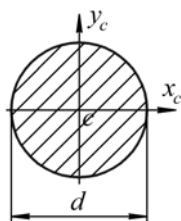
Для проведения конструкторского расчета воспользуемся условием прочности при изгибе (13)

$$\sigma_{max} = \frac{M_{из}^{max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

При конструкторском расчете из условия прочности определяется геометрическая характеристика сечения (см. пункт 2.3, 2.6). При изгибе этой характеристикой является осевой момент сопротивления  $W_x$

$$W_x \geq \frac{M_{\text{из}}^{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{130 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,812 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 812,5 \text{ см}^3.$$

Определим диаметр *круглого сечения*. Момент сопротивления  $W_x$  для круга (см. приложение 2) вычисляется по формуле



$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \Rightarrow$$

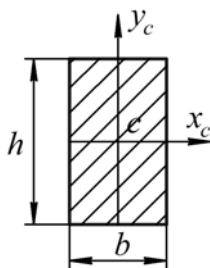
$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 812,5}{3,14}} = 20,6 \text{ см.}$$

Из рассматриваемых сечений наиболее *рациональным* будет то сечение, на изготовление которого расходуется *меньше материала* при обеспечении *той же прочности* конструкции. Расход материала пропорционален площади сечения, поэтому *наиболее рациональным* будет сечение, у которого *площадь сечения наименьшая*.

Площадь круглого сечения

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (20,6)^2}{4} = 331,1 \text{ см}^2.$$

Определим размеры *прямоугольного сечения*. Момент сопротивления  $W_x$  для прямоугольника (см. приложение 2) вычисляется по формуле  $W_x = bh^2/6$ . Так как  $h = 2b$  (по условию задачи), то



$$W_x = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3} \Rightarrow$$

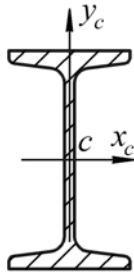
$$b = \sqrt[3]{\frac{3W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 812,5}{2}} = 10,7 \text{ см,}$$

$$h = 2b = 2 \cdot 10,7 = 28,7 \text{ см.}$$

Площадь прямоугольного сечения

$$A = bh = 21,8 \cdot 10,7 = 228,98 \text{ см}^2.$$

Определим номер *двутавра*. Двутавр является стандартным профилем, его номер выбирается по таблице, приведенной в приложении 1, в зависимости от необходимого момента сопротивления  $W_x$ .



Из таблицы выбираем двутавр №40, у которого  $W_x = 953 \text{ см}^3$ . Но для обеспечения прочности достаточен момент сопротивления  $812,5 \text{ см}^3$  поэтому двутавр №40 будет *недогружен*. Подсчитаем фактические максимальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{из}}^{\max}}{W_x} = \frac{130 \cdot 10^3}{953 \cdot 10^{-6}} = 136 \cdot 10^6 \text{ Па} = 136 \text{ МПа}.$$

Процент недогрузки

$$\frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} 100\% = \frac{160 - 136}{160} 100\% = 15\% .$$

Этот процент недогрузки превышает допустимый интервал (см. пункт 2.7, *проверочный расчет*, стр. 30). Будет иметь место перерасход материала, поэтому возьмем меньший двутавр №36 (приложение 1), у которого  $W_x = 743 \text{ см}^3$ .

Фактические максимальные напряжения в этом случае будут

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{из}}^{\max}}{W_x} = \frac{130 \cdot 10^3}{743 \cdot 10^{-6}} = 175 \cdot 10^6 \text{ Па} = 175 \text{ МПа}.$$

Процент перегрузки

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100\% = \frac{175 - 160}{160} 100\% = 9\% .$$

Этот процент недогрузки также не допустим (см. пункт 2.6, *проверочный расчет*) из-за высокого риска разрушения конструкции, поэтому окончательно выбираем двутавр №40, тем самым создавая дополнительный запас прочности.

Площадь поперечного сечения двутавра №40 (см. приложение 1)

$$A = 72,6 \text{ см}^2.$$

*Заключение.* Сравнивая площади круглого, прямоугольного и двутаврового сечения, можно сделать вывод, что наиболее рациональным сечением является двутавровое сечение, даже с учетом того, что двутавровая балка будет недогружена на 15% .

**Пример 4.** Для балки из стали Ст. 3 показанной на рис. 16, построить эпюры внутренних силовых факторов. Проверить балку на прочность. Сечение балки указано на рис. 16 справа. Допускаемое напряжение принять  $[\sigma] = 160$  МПа.

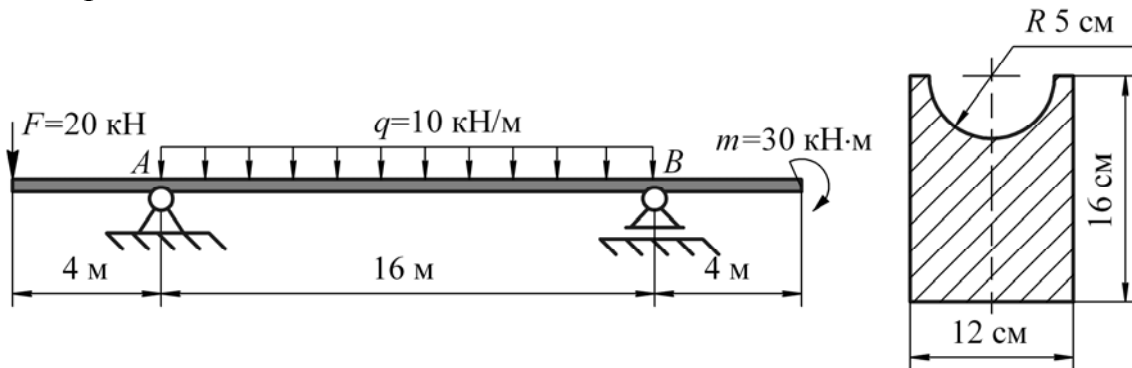


Рис. 16. Балка на двух опорах

### Решение

Аналогично задаче, рассмотренной в примере 3, сначала необходимо определить реакции связей, затем построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. На заключительном этапе следует проверить балку на прочность.

1. *Определение реакций связей.* В качестве объекта равновесия выбираем балку  $AB$  (см. рис. 17). Указываем составляющие реакции в шарнирно-неподвижной опоре  $A$  ( $R_A^y$ ,  $R_A^z$ ) и реакцию связи в шарнирно-подвижной опоре  $B$  ( $R_B$ ). В результате получили плоскую произвольную систему сил, действующих на балку  $AB$ . Неизвестные реакции определим, составив три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kz} = 0; \quad R_A^z = 0;$$

$$\sum M_A(\mathbf{F}_k) = 0; \quad F \cdot 4 - q \cdot 16 \cdot 8 + R_B \cdot 16 - m = 0;$$

$$R_B = \frac{-F \cdot 4 + q \cdot 16 \cdot 8 + m}{16} = \frac{-20 \cdot 4 + 10 \cdot 16 \cdot 8 + 30}{16} = 76,9 \text{ кН};$$

$$\sum M_B(\mathbf{F}_k) = 0; \quad F \cdot 20 - R_A^y \cdot 16 + q \cdot 16 \cdot 8 - m = 0;$$

$$R_A^y = \frac{F \cdot 20 + q \cdot 16 \cdot 8 - m}{16} = \frac{20 \cdot 20 + 10 \cdot 16 \cdot 8 - 30}{16} = 103,1 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности произведенных расчетов убедимся в том, что соблюдается уравнение суммы проекций сил на ось  $y$ .



$$\sum F_{ky} = 0; \quad -F + R_A^y - q \cdot 16 + R_B = 0;$$

$$-20 + 103,1 - 10 \cdot 16 + 76,9 = 0.$$

Условие равновесия выполнено, следовательно, реакции определены верно.

2. *Построение эпюр внутренних силовых факторов.* Построение эпюр производится по той же схеме и тем же правилам, которые подробно описаны в примере 3 и пункте 2.7., стр. 30.

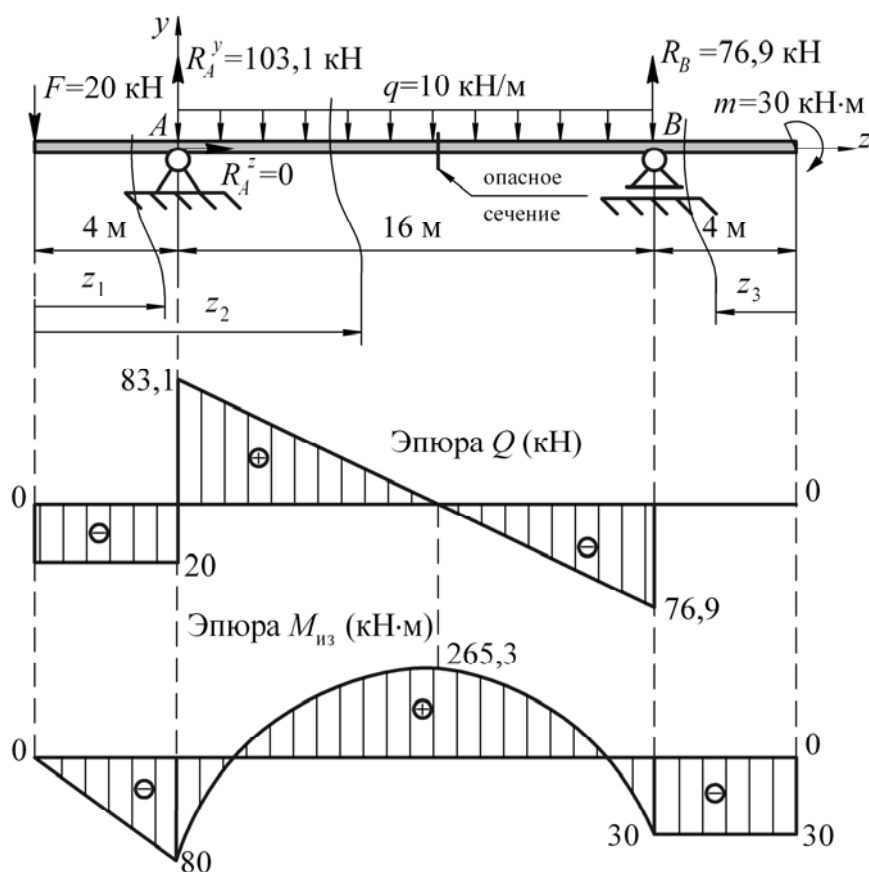
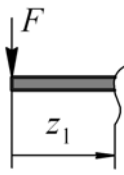


Рис. 17. Эпюры внутренних силовых факторов

В данном примере балка разбита сечениями на три участка (см. рис. 17). Сечения  $z_1$  и  $z_2$  отсчитываются от левого конца балки, а сечение  $z_3$  от правого. При определении внутренних силовых факторов нет никакой разницы, какую часть балки рассматривать, справа от сечения или слева. Результат будет одинаковым. Необходимо стремиться к тому, чтобы уравнения внутренних силовых факторов, записанные для рассматриваемого сечения, были наиболее компактными.

### Участок 1



$$0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м.}$$

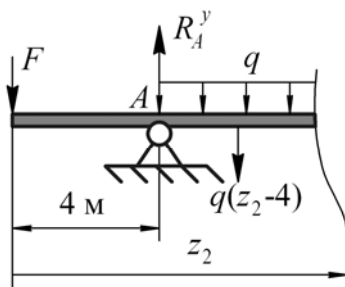
$$Q(z_1) = -F = -20 \text{ кН.}$$

$$M_{\text{из}}(z_1) = -Fz_1;$$

$$M_{\text{из}}(z_1 = 0) = 0;$$

$$M_{\text{из}}(z_1 = 4) = -20 \cdot 4 = -80 \text{ кНм.}$$

### Участок 2



$$4 \text{ м} \leq z_2 \leq 20 \text{ м.}$$

$$Q(z_2) = -F - q(z_2 - 4) + R_A^y;$$

$$Q(z_2 = 4) = -20 + 103,1 = 83,1 \text{ кН.}$$

$$Q(z_2 = 20) = -20 - 160 + 103,1 = -76,9 \text{ кН.}$$

$$M_{\text{из}}(z_2) = -Fz_2 - q(z_2 - 4) \frac{(z_2 - 4)}{2} + R_A^y(z_2 - 4);$$

$$M_{\text{из}}(z_2 = 4) = -20 \cdot 4 = -80 \text{ кНм.}$$

$$M_{\text{из}}(z_2 = 20) = -20 \cdot 20 - 10 \cdot 16 \cdot 8 + 103,1 \cdot 16 = -30 \text{ кНм.}$$

Эпюра изгибающего момента на втором участке имеет вид параболы, ветви которой направлены вниз, причем эта парабола *будет иметь максимум* в точке, где поперечная сила равна нулю. Определим координату этой точки, приравняв  $Q(z_1)$  нулю.

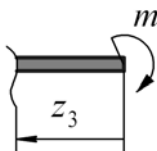
$$Q(z_2) = 0; \quad -F - q(z_2 - 4) + R_A^y = 0;$$

$$z_2 = z_{\text{max}} = \frac{-F + R_A^y + q \cdot 4}{q} = \frac{-20 + 103,1 + 10 \cdot 4}{10} = 12,3 \text{ м.}$$

В этой точке эпюра изгибающего момента на участке 2 будет иметь максимальное значение (см. рис.17).

$$M_{\text{из}}(z_2 = z_{\text{max}}) = -20 \cdot 12,3 - 10 \frac{(12,3 - 4)^2}{2} + 103,1(12,3 - 4) = 265,3 \text{ кНм.}$$

### Участок 3



$$0 \leq z_3 \leq 4 \text{ м.}$$

$$Q(z_3) = 0.$$

$$M_{\text{из}}(z_3) = -m = -30 \text{ кНм.}$$

*Примечание.* Построенные эпюры поперечной силы и изгибающего момента (рис. 17) необходимо *проверить* согласно правилу проверки эпюр, приведенные в пункте 2.7, стр. 31.

3. *Проверка прочности.* По эпюре изгибающих моментов определяется *опасное сечение* – это сечение, в котором изгибающий момент максимален *по модулю*. В рассматриваемой задаче  $M_{из}^{max} = 265,3$  кНм (см. рис. 17).

Для проверки прочности воспользуемся условием прочности при изгибе (12)

$$\sigma_{max} = \frac{M_{из}^{max} y_{max}}{I_{Xc}} \leq [\sigma].$$

При проверочном расчете определяются максимальные напряжения в балке  $\sigma_{max}$  и сравниваются с допускаемыми напряжениями  $[\sigma]$ . *Максимальные напряжения* будут возникать в *опасных точках*, которые находятся в опасном сечении и наиболее удалены от нейтральной линии. Рассмотрим опасное сечение (в котором  $M_{из}^{max} = 265,3$  кНм), найдем положение опасных точек (наиболее удаленных от нейтральной линии) и значение момента инерции относительно главной центральной оси  $I_{Xc}$  (см. рис. 18).

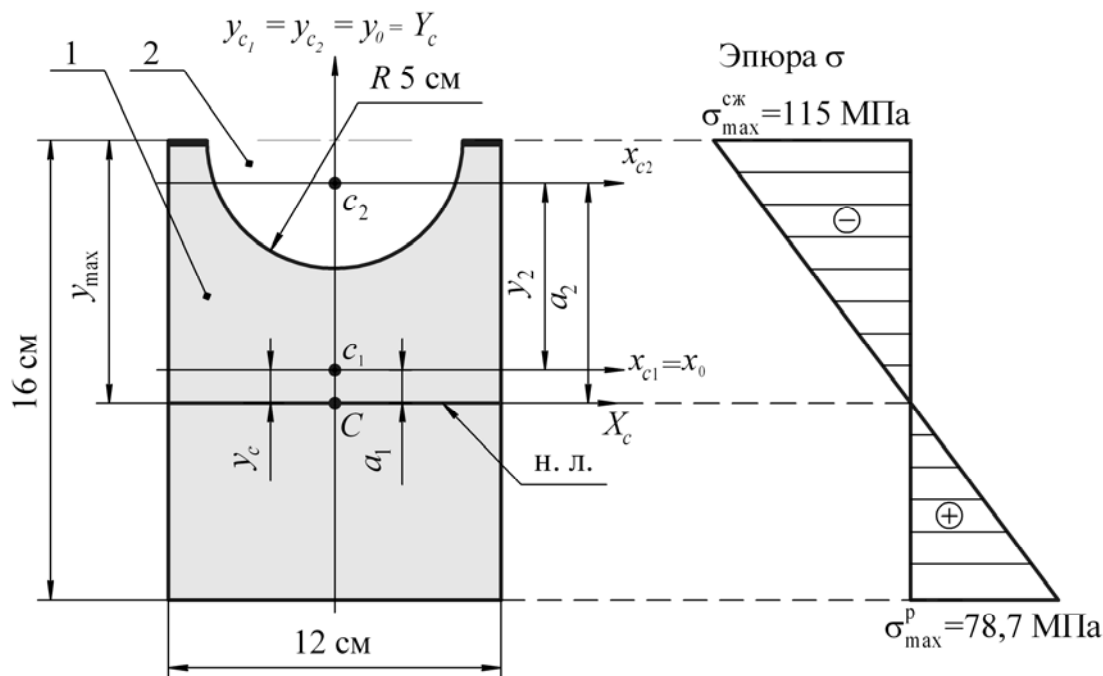


Рис. 18. Опасное сечение балки

Сечение можно разложить на простые элементы: сплошной прямоугольник 1 и вырез в виде полукруга 2. Определяем положения центров тяжести каждого из элементов. Центр тяжести прямоугольника  $c_1$  лежит на пересечении диагоналей. Центр тяжести полукруга  $c_2$  находится на его оси симметрии на расстоянии  $2d/(3\pi)$  от основания (см. приложение 2). Через центры тяжести элементов проводим оси координат  $x_{c1}, y_{c1}$  и  $x_{c2}, y_{c2}$  соответственно (см. рис. 18), причем таким образом, что  $y_{c1}$  и  $y_{c2}$  совпадают с осью симметрии сечения.

Для определения координат центра тяжести сечения и положения главных центральных осей необходимо ввести начальные оси  $x_0, y_0$  (см. пункт 2.6, стр. 27) Их выбор абсолютно произволен, но для удобства дальнейших вычислений совместим начальные оси  $x_0, y_0$  с осями, проходящими через центр тяжести прямоугольника  $x_{c1}, y_{c1}$  (рис. 18).

Координаты центра тяжести сечения  $x_C, y_C$  определим по формулам (9). Понятно, что центр тяжести сечения будет лежать на оси  $y_0$  (т. к. она совпадает с осью симметрии), т. е.  $x_C = 0$ .

$$y_C = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2},$$

где  $y_1$  – координата, отсчитываемая от начальной оси  $x_0$  до оси  $x_{c1}$  (с учетом знака) естественно  $y_1 = 0$  т. к. эти оси совпадают;  $y_2$  – координата, отсчитываемая от начальной оси  $x_0$  до оси  $x_{c2}$

$$y_2 = \frac{16}{2} - \frac{2d}{3\pi} = \frac{16}{2} - \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 3,14} = 5,9 \text{ см.}$$

$A_1, A_2$  – площади элементов 1 и 2 соответственно. Необходимо помнить замечание в пункте 2.6., стр. 28, если элемент является вырезом, то его площадь берется со знаком «-».

$$A_1 = 16 \cdot 12 = 192 \text{ см}^2, \quad A_2 = -\pi d^2/8 = -3,14 \cdot 10^2/8 = -39,3 \text{ см}^2.$$

Координаты центра тяжести

$$y_C = \frac{5,9 \cdot (-39,3)}{192 + (-39,3)} = -1,5 \text{ см.}$$

Точка с координатами  $x_C = 0$  и  $y_C = 1,5$  см. является центром тяжести сечения (см. рис. 18). Через эту точку проведем центральные оси  $X_C, Y_C$ . Т. к. ось  $Y_C$  совпадает с осью симметрии сечения, то оси  $X_C, Y_C$  являются главными центральными осями. Как отмечалось в пункте 2.7, стр. 29, при поперечном изгибе нейтральная линия всегда совпа-

дает с одной из главных центральных осей. По условию задачи изгиб происходит в плоскости  $YZ$ , поэтому *нейтральная линия* совпадает с осью  $X_C$ .

Зная положение нейтральной линии можно определить *расстояние до наиболее удаленных точек сечения, опасных точек* (см. рис. 18).

$$y_{\max} = y_{\max}^{\text{сж}} = 16/2 + 1,5 = 9,5 \text{ см.}$$

Именно в этих точках будут действовать максимальные напряжения в сечении (на рис. 18 их положение указано жирными линиями). Причем в рассматриваемом примере максимальными (по модулю) будут *сжимающие напряжения*.

Области сжатия и растяжения в сечениях определяется по эпюре изгибающих моментов. *Эпюра изгибающих моментов строится на сжатых волокнах*, поэтому если эпюра моментов оказывается над нейтральной плоскостью (положительные значения  $M_{\text{из}}$ ), то и область сжатия в сечении будет находиться над нейтральной линией, соответственно под нейтральной линией будет область растяжения. И наоборот, если эпюра изгибающих моментов оказывается под нейтральной плоскостью (отрицательные значения  $M_{\text{из}}$ ), то в сечении область сжатия будет под нейтральной линией, а область растяжения над ней.

В рассматриваемом примере согласно эпюре изгибающих моментов в опасном сечении (рис. 17) область сжатия находится выше нейтральной линии.

Теперь определим значение момента инерции относительно оси  $X_C$ . Согласно формуле (10), пункт 2.6

$$I_{X_C} = \sum (I_{x_{ci}} + a_i^2 A_i) = (I_{x_{c1}} + a_1^2 A_1) + (I_{x_{c2}} + a_2^2 A_2),$$

где  $I_{x_{c1}} = bh^3/12 = 12 \cdot 16^3/12 = 4096 \text{ см}^4$  – момент инерции прямоугольника 1 относительно оси  $x_{c1}$ ;  $I_{x_{c2}} = -0,00686d^4 = -0,00686 \cdot 10^4 = -68,6 \text{ см}^4$  – момент инерции полукруга 2 относительно оси  $x_{c2}$  (см. приложение 2). Знак «-» поставлен в соответствии с замечанием в пункте 2.6, стр. 28.

$$a_1 = y_1 - y_C = 1,5 \text{ см}, \quad a_2 = y_2 - y_C = 5,9 - (-1,5) = 7,4 \text{ см.}$$

Тогда момент инерции

$$\begin{aligned} I_{X_C} &= (I_{x_{c1}} + a_1^2 A_1) + (I_{x_{c2}} + a_2^2 A_2) = \\ &= (4096 + 1,5^2 \cdot 192) + (-68,6 + 7,4^2 \cdot (-39,3)) = 2307 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Определим напряжения в опасных точках. Напомним, что все вычисления производятся в единицах СИ, правила перевода единиц измерения приведены в разделе 1, стр. 7.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{из}}^{\max} y_{\max}}{I_{Xc}} = \frac{265,3 \cdot 10^3 \cdot 9,5 \cdot 10^{-2}}{2307 \cdot 10^{-8}} = 115 \cdot 10^6 \text{ Па} = 115 \text{ МПа.}$$

*Заключение.* Условие прочности  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$  выполняется, это означает, что рассматриваемая конструкция *не разрушится* под действием указанной нагрузки.

*Примечание.* Эпюра распределения напряжений по высоте сечения показана на рис. 18. Отмечалось, что в рассматриваемом примере максимальные напряжения в сечении возникают в области сжатия  $\sigma_{\max} = \sigma_{\max}^{\text{сж}} = 115 \text{ МПа}$ . Пластичные материалы (в нашем примере сталь Ст. 3) одинаково сопротивляются напряжениям сжатия и напряжениям растяжения. Поэтому проверка их прочности осуществляется по наибольшим напряжениям в сечении, вне зависимости, будут ли это напряжения сжатия или растяжения. Однако, если балка изготовлена из хрупкого материала, который лучше сопротивляется напряжениям сжатия, чем напряжениям растяжения, то проверка прочности таких балок проводится отдельно для точек, в которых возникают наибольшие напряжения растяжения и точек, в которых возникают наибольшие напряжения сжатия. Для рассматриваемого примера максимальные напряжения в области растяжения определим из подобия треугольников (т. к. согласно (11) напряжения в сечении распределены по линейному закону, см. рис. 18)

$$\frac{\sigma_{\max}^{\text{сж}}}{\sigma_{\max}^{\text{р}}} = \frac{y_{\max}^{\text{сж}}}{y_{\max}^{\text{р}}},$$

где  $y_{\max}^{\text{р}} = 6,5 \text{ см}$  – расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения в области растяжения;  $y_{\max}^{\text{сж}} = 9,5 \text{ см}$  – расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения в области сжатия. Тогда

$$\sigma_{\max}^{\text{р}} = \sigma_{\max}^{\text{сж}} \frac{y_{\max}^{\text{р}}}{y_{\max}^{\text{сж}}} = 115 \frac{6,5}{9,5} = 78,7 \text{ МПа.}$$

Напряжения растяжения условно считаются положительными, сжатия – отрицательными (см. рис. 18).

## 2.8. Сдвиг

*Сдвиг* (чистый) – это такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении стержня возникает только один внутренний силовой фактор – поперечная сила  $Q = Q_x$  или  $Q = Q_y$  (остальные внутренние силовые факторы равны нулю).

При сдвиге одна часть элемента стержня сдвигается относительно другой (см. рис. 19).

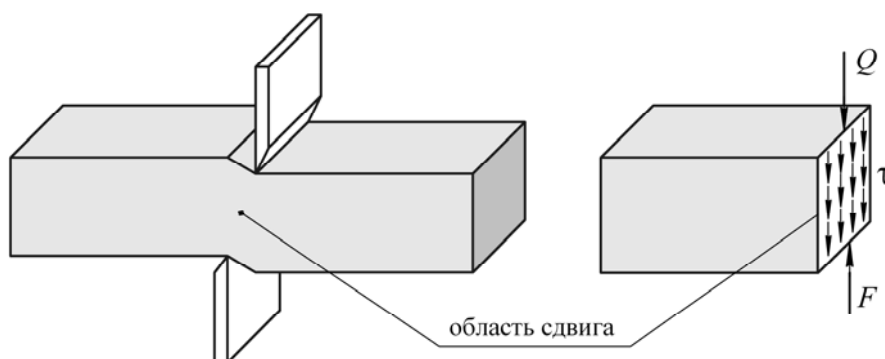


Рис. 19. Сдвиг. Распределение касательных напряжений в поперечном сечении стержня при сдвиге (эпюра  $\tau$ )

При сдвиге (чистом) в каждой точке поперечного сечения в области сдвига возникают только *касательные* напряжения  $\tau$  (рис. 19), которые определяются по формуле

$$\tau = \frac{Q}{A}. \quad (14)$$

Считается, что эти напряжения одинаковы в каждой точке поперечного сечения, т. е. напряжения при чистом сдвиге распределены по сечению *равномерно* и *лежат в плоскости* этого сечения (рис. 19).

*Условие прочности при сдвиге* выражает требование, чтобы максимальное расчетное напряжение в стержне не превышало значения допустимого напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{A} \leq [\tau]. \quad (15)$$

Условие прочности при сдвиге (15) (как и любое другое условие прочности) позволяют решать три вида задач (см. пункт 2.3): проверочные расчет, конструкторский расчет и расчет допустимой нагрузки.

## 2.9. Кручение

*Кручение* – это такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении стержня возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M_{кр}$  (остальные составляющие главного вектора и главного момента внутренних сил равны нулю, см. пункт 2.2).

При кручении в точках поперечного сечения стержня возникают только *касательные* напряжения  $\tau$  (см. рис. 20).

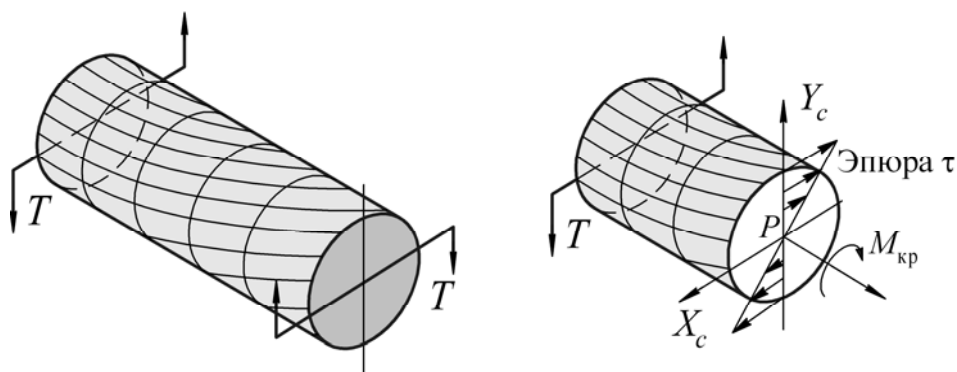


Рис. 20. Кручение стержня. Распределение касательных напряжений в круглом поперечном сечении стержня при кручении (эпюра  $\tau$ )

В рамках нашего курса будем рассматривать кручение стержней *только круглого поперечного сечения*. Касательные напряжения, в отличие от нормальных (см. рис. 3, 11, 20), действуют в плоскости сечения и определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_{кр} \rho}{I_p}, \quad (16)$$

где  $\rho$  – расстояние от центра кручения до точки, в которой определяется напряжение;  $I_p$  – полярный момент инерции.

Формула (16) показывает, что касательные напряжения при кручении стержней круглого поперечного сечения распределены в сечении неравномерно (по линейному закону). Напряжения равны нулю в центре кручения (при  $\rho = 0$ ,  $\tau = 0$ ) и принимают наибольшие значения в точках наиболее удаленных от центра кручения (при  $\rho = \rho_{max} = d/2$ ,  $\tau = \tau_{max}$ ), см. рис. 20. *Во всех точках поперечного сечения находящихся на одинаковом расстоянии  $\rho$  от центра кручения напряжения будут одинаковы.*

На основании (16) можно сформулировать *условие прочности при*



*кручении*. Максимальные напряжения  $\tau_{\max}$ , возникающие в опасном сечении (где крутящий момент максимален) не должны превышать допускаемого напряжения.

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (17)$$

где  $W_p = I_p / \rho_{\max}$  – полярный момент сопротивления (см. приложение 2).

Условие прочности при кручении позволяет решать три рода задач (см. пункт 2.3):

1) Производить *проверочный расчет*. При этом геометрические размеры стержня и внешняя нагрузка известны. Требуется определить максимальные напряжения в стержне  $\tau_{\max}$  и сравнить их с допускаемыми  $[\tau]$ .

2) *Определять размеры поперечного сечения (конструкторский расчет)*. Из условия прочности (17) определяется геометрическая характеристика сечения – полярный момент сопротивления  $W_p$

$$W_p \geq \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{[\tau]}.$$

3) *Находить допускаемый крутящий момент*. При этом геометрические размеры стержня заданы и требуется определить допускаемую нагрузку, при которой стержень останется прочным.

$$[M_{\text{кр}}] \leq W_p [\tau].$$

Для того чтобы воспользоваться условиями прочности (17) нужно знать максимальный крутящий момент  $M_{\text{кр}}^{\max}$ . Он определяется из *эюры* крутящего момента.

Чтобы *определить внутренний крутящий момент*  $M_{\text{кр}}$  в сечении стержня, нужно воспользоваться методом сечений (см. пункт 2.2) и записать алгебраическую сумму внешних крутящих моментов действующих справа или слева от рассматриваемого сечения. При определении знака внешнего крутящего момента условно задаются положительным и отрицательным направлением вращения.

*Правило проверки эюры*  $M_{\text{кр}}$ . Эюра  $M_{\text{кр}}$  делает скачок в точке приложения внешнего крутящего момента на величину этого момента (крутящий момент в жесткой заделке тоже относятся к внешним моментам).

Помимо расчета на прочность, валы рассчитываются также и на

жесткость, ограничивая относительные углы закручивания некоторой допускаемой величиной  $[\theta]$ .

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{GI_p} \leq [\theta]. \quad (18)$$

Из условия жесткости (18) можно решать те же задачи, что из условия прочности, но, как правило, из условия прочности выполняют конструкторский расчет, а по условию жесткости осуществляют проверку.

**Пример 5.** Для двухступенчатого торсионного вала, показанного на рис. 21, определить диаметры каждой ступени, если допускаемое напряжение  $[\tau] = 45 \text{ МПа}$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ , а относительный угол закручивания не должен превышать  $1^\circ$  на метр длины ( $[\theta] = 1^\circ/\text{м}$ ). Построить эпюры крутящих моментов и углов закручивания.

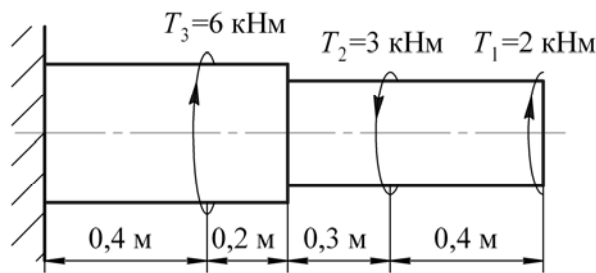


Рис. 21. Торсионный двухступенчатый вал.

### Решение

В общем случае решение задачи состоит из трех этапов. Сначала построим эпюру крутящего момента и из условия прочности определим диаметры ступеней. Затем проверим вал на жесткость, и, если потребуется, пересчитаем диаметры по условию жесткости. На заключительном этапе построим эпюру углов закручивания.

1. *Построение эпюры крутящего момента.* При построении эпюры вал мысленно рассекается на участки. Сечения проводятся между точками приложения внешних крутящих моментов (см. рис. 22) и изменяются в пределах своих участков. Причем рассматривать можно как правую, так и левую части рассеченного вала, однако чтобы дополнительно не искать момент в заделке мы будем рассматривать часть вала справа от сечения (см. рис. 22).

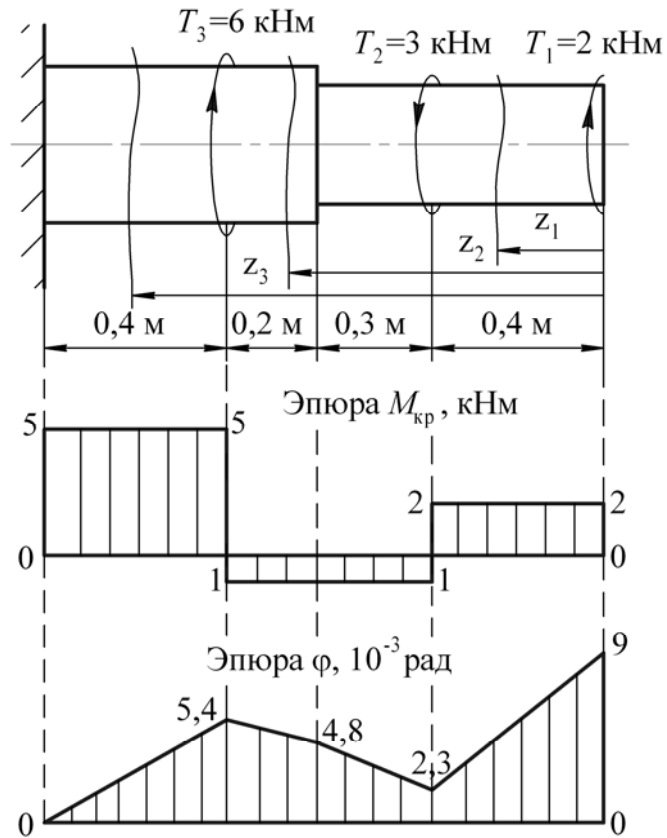
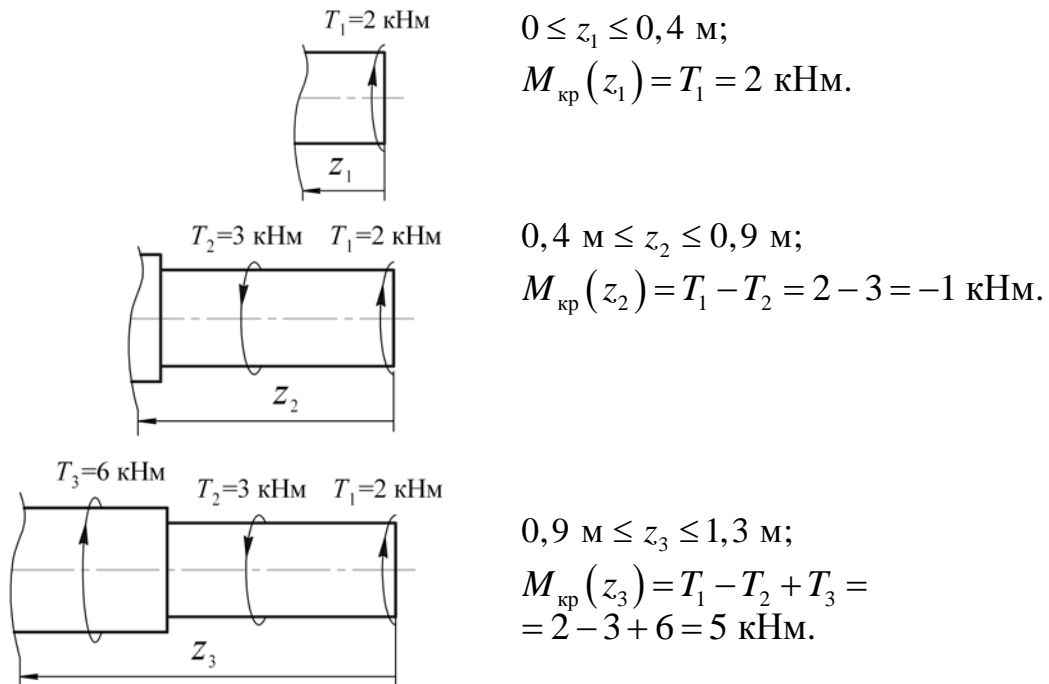


Рис. 22. Эпюры крутящего момента  $M_{кр}$  и углов закручивания  $\varphi$

Составим уравнения для крутящего момента  $M_{кр}$  в сечениях на каждом из участков (см. пункт 2.9, стр. 47).



2. *Определение диаметров ступеней вала.* Диаметры ступеней определим из условия прочности при кручении (17)

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{W_p} \leq [\tau].$$

При подборе сечения из условия прочности определяется геометрическая характеристика сечения (см. пункт 2.3, 2.9). При кручении этой характеристикой является полярный момент сопротивления  $W_p$

$$W_p \geq \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{[\tau]}.$$

Полярный момент сопротивления круглого сечения  $W_p = \pi d^3/16$  (см. приложение 2). Тогда расчетная формула будет иметь вид

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{кр}}^{\max}}{\pi[\tau]}}. \quad (19)$$

Определим максимальное значение крутящего момента на каждой из ступеней. Из эпюры крутящего момента (см. рис. 22) видно, что на первой ступени  $M_{\text{кр}}^{\max(I)} = 5$  кНм, а на второй  $M_{\text{кр}}^{\max(II)} = 2$  кНм.

На основании (19) диаметр первой ступени

$$d_I \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{кр}}^{\max(I)}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 45 \cdot 10^6}} = 8,3 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 83 \text{ мм}.$$

Диаметр второй ступени

$$d_{II} \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{кр}}^{\max(II)}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 45 \cdot 10^6}} = 6,1 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 61 \text{ мм}.$$

Изготовив вал по диаметрам  $d_I$  и  $d_{II}$ , полученным из условия прочности, можно гарантировать, что вал *не разрушится* под действием указанной нагрузки.

3. *Проверка жесткости вала.* Жесткость вала будет обеспечена, если будет выполнено условие (18)

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{GI_p} \frac{180}{\pi} \leq [\theta]. \quad (20)$$

Множитель  $180/\pi$  переводит значение относительного угла закручивания из радиан в градусы. Согласно приложению 2 полярный момент инерции круга  $I_p = \pi d^4/32$ .

Для первой ступени  $I_p^{(I)} = \pi d_I^4/32 = 465,7 \text{ см}^4$ , для второй ступени  $I_p^{(II)} = \pi d_{II}^4/32 = 135,9 \text{ см}^4$ .

Относительный угол закручивания первой ступени

$$\theta_{\max}^{(I)} = \frac{M_{\text{кр}}^{\max(I)}}{GI_p^{(I)}} \frac{180}{\pi} = \frac{5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 465,7 \cdot 10^{-8}} \frac{180}{3,14} = 0,77^\circ/\text{м}.$$

Условие жесткости для первой ступени  $\theta_{\max}^{(I)} \leq [\theta]$  выполняется, т. е. деформации в первой ступени *не превысят* допустимого значения.

*Заключение.* Таким образом, первая ступень имеющая диаметр  $d_{II} = 83 \text{ мм}$  будет одновременно удовлетворять и условию прочности (17) и условию жесткости (20) (см. пункт 2.1).

Относительный угол закручивания второй ступени

$$\theta_{\max}^{(II)} = \frac{M_{\text{кр}}^{\max(II)}}{GI_p^{(II)}} \frac{180}{\pi} = \frac{2 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 135,9 \cdot 10^{-8}} \frac{180}{3,14} = 1,1^\circ/\text{м}.$$

Условие жесткости для второй ступени не выполняется, так как  $\theta_{\max}^{(II)} = 1,1 > [\theta] = 1$ , т. е. фактическая деформация во второй ступени превысит допустимое значение. Вторая ступень, имеющая диаметр  $d_{II} = 61 \text{ мм}$  будет прочной, но не жесткой.

Произведем перерасчет диаметра второй ступени из условия жесткости (20), при этом определяется геометрическая характеристика сечения – полярный момент инерции  $I_p^{(II)}$ .

$$I_p^{(II)} \geq \frac{M_{\text{кр}}^{\max(II)}}{G[\theta]} \frac{180}{\pi}.$$

Так как  $I_p^{(II)} = \pi d_{II}^4/32$ , то окончательно получаем расчетную формулу для определения диаметра второй ступени *из условия жесткости*

$$d_{II} \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{\text{кр}}^{\max(II)}}{\pi G[\theta]} \frac{180}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 1} \cdot \frac{180}{3,14}} = 6,2 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 62 \text{ мм}.$$

*Заключение.* Вторая ступень, имеющая диаметр  $d_{II} = 62 \text{ мм}$  будет

одновременно удовлетворять и условию прочности (17) и условию жесткости (20) (см. пункт 2.1).

4. *Построение эпюры углов закручивания.* Эпюра углов закручивания строится *от заделки*. Углы закручивания определяются на однородных участках (где постоянен крутящий момент и полярный момент инерции сечения) с помощью *закона Гука при кручении*

$$\Delta\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GI_p},$$

который определяет угол поворота между двумя сечениями, находящимися на расстоянии  $l$  друг от друга. Рассчитаем произведение  $GI_p$  для каждой из ступеней.

$$GI_p^{(I)} = G \frac{\pi d_I^4}{32} = 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot \frac{3,14 \cdot (83 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 3,7 \cdot 10^5 \text{ Нм}^2,$$

$$GI_p^{(II)} = G \frac{\pi d_{II}^4}{32} = 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot \frac{3,14 \cdot (62 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Нм}^2.$$

*Замечание.* Обратите внимание, что если диаметр ступени был пересчитан из условия жесткости, то и полярный момент инерции сечения этой ступени измениться.

В рассматриваемой задаче однородных участков 4 ( $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DE$ , см. рис. 22). Рассчитаем углы поворотов сечений  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$ .

$$\varphi_A = 0,$$

т. к. сечения  $A$  не имеет возможности поворачиваться (жесткая заделка). Угол поворота сечения  $B$  в *общем случае*

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{BA} = \varphi_A + \frac{M_{\text{кр}}^{(AB)} l_{AB}}{GI_p^{(I)}}.$$

Угол поворота сечения  $B$  равен сумме угла поворота сечения  $A$  и относительного угла поворота сечения  $B$  относительно  $A$ .  $M_{\text{кр}}^{(AB)} = 5 \text{ кНм}$  – крутящий момент на участке  $AB$  (определяется из эпюры крутящего момента *с учетом знака*, см. рис. 22),  $l_{AB} = 0,4 \text{ м}$  – длина участка  $AB$ .

$$\varphi_B = 0 + \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{3,7 \cdot 10^5} = 5,4 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Аналогичным образом рассчитываются углы поворота сечений  $C$ ,  $D$  и  $E$ .

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{CB} = \varphi_B + \frac{M_{\text{кр}}^{(BC)} l_{BC}}{GI_p^{(I)}} = 5,4 \cdot 10^{-3} + \frac{-1 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{3,7 \cdot 10^5} = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

*Замечание.* Обратите внимание, что  $M_{\text{кр}}^{(BC)} = -1$  кНм. При определении углов закручивания в формулы подставляются значения крутящих моментов со знаками, определяемыми из эпюры крутящих моментов.

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{DC} = \varphi_C + \frac{M_{\text{кр}}^{(CD)} l_{CD}}{GI_p^{(II)}} = 4,8 \cdot 10^{-3} + \frac{-1 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{1,2 \cdot 10^5} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \varphi_{ED} = \varphi_D + \frac{M_{\text{кр}}^{(DE)} l_{DE}}{GI_p^{(II)}} = 2,3 \cdot 10^{-3} + \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{1,2 \cdot 10^5} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

По численным значениям углов поворота сечений  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$  построена эпюра углов закручивания  $\varphi$  (см. рис. 22). Из эпюры видно, что под действием приложенной нагрузки свободный конец вала повернется относительно неподвижной заделки на угол  $\varphi = 9 \cdot 10^{-3}$  рад или  $0,5^\circ$ .

## 2.10. Устойчивость сжатых стержней

Во многих случаях проектирования инженерных конструкций недостаточно расчета на прочность и жесткость для безопасной работы отдельных элементов. Наряду с проблемой обеспечения прочности и жесткости элементов конструкции стоит проблема их *устойчивости* (см. пункт 2.1).

*Устойчивость* – способность упругих систем сохранять под нагрузкой свою *первоначальную* форму равновесия.

Система, потерявшая устойчивость, стремится перейти в новое устойчивое состояние. Этот переход может сопровождаться большими перемещениями, что вызывает быстрое нарастание напряжений и может привести к возникновению пластических деформаций или полному разрушению конструкций.

Рассмотрим стержень, на который действует продольная сжимающая сила  $F$  (см. рис. 23).

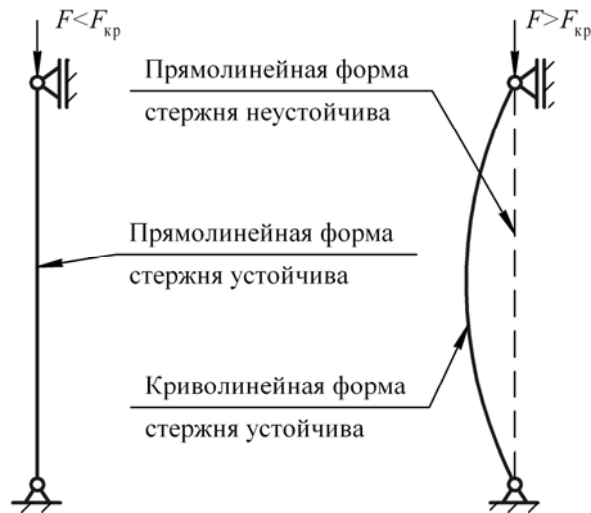


Рис. 23. Формы равновесия сжатого стержня

В зависимости от соотношения сжимающей силы  $F$  и критической  $F_{кр}$  возможны следующие варианты:

1) если сила  $F$  не превышает некоторого значения *критической силы*  $F_{кр}$  ( $F < F_{кр}$ , см. рис. 23), то прямолинейная форма стержня является *устойчивой*. Это означает, к примеру, что если внешней поперечной силой создать прогиб в стержне, а затем убрать эту силу, то стержень вернется к первоначальной прямолинейной форме;

2) если сила  $F$  превышает критическую силу  $F_{кр}$  ( $F > F_{кр}$ , см. рис. 23), то прямолинейная форма стержня оказывается *неустойчивой*, и стержень будет стремиться перейти к новой устойчивой форме равновесия – криволинейной. Как отмечалось, этот переход может сопровождаться большими перемещениями, что приводит к росту напряжений и возможному разрушению конструкции;

3) промежуточное состояние между устойчивым и неустойчивым положением равновесия наблюдается при  $F = F_{кр}$  – это так называемое *безразличное* положение равновесия. В этом случае стержень может иметь как прямолинейную форму, так и криволинейную.

Из указанного выше следует, что *критическая сила* – это наименьшая сила, при которой стержень теряет устойчивость (первоначальную форму равновесия).

*Замечание.* Следует иметь в виду, что *потеря устойчивости еще не означает потери прочности*. Например, потеря устойчивости стержней, изготовленных из хрупкого материала, в большинстве случаев приводит к их разрушению, однако, если стержни изготовлены из пластичного материала, потеря устойчивости не всегда приводит к их



разрушению и даже к появлению пластических деформаций.

Так как при сжатии стержня напряжения  $\sigma = F / A$ , то все вышесказанное можно перефразировать в терминах напряжений. Дальнейшее описание произведем именно в этих терминах.

Для безопасной работы конструкции, которая имеет сжатые стержни, наряду с расчетами из условий прочности и жесткости, необходим расчет из условия устойчивости (см. пункт. 2.1).

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]_y, \quad (21)$$

где  $[\sigma]_y$  – допускаемое напряжение на устойчивость.

$$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}. \quad (22)$$

Формула (22) показывает, что допускаемое напряжение на устойчивость  $[\sigma]_y$  должно быть таким, чтобы конструкция работала не на пределе своих возможностей (когда фактические напряжения  $\sigma$  достигают критических значений  $\sigma_{кр}$ ), а с некоторым запасом, который задается коэффициентом запаса устойчивости  $n_y$ . К примеру, для стали  $n_y = 1,8-3,0$ .

Как определить критические напряжения  $\sigma_{кр}$ ? Понятно, что они будут зависеть от геометрических размеров элементов конструкции. Например, если сжимать длинную линейку, то она потеряет устойчивость (перейдет от прямолинейной формы к криволинейной) при гораздо меньших напряжениях, чем короткая, при прочих равных параметрах.

Впервые задача определения критических напряжений  $\sigma_{кр}$  была решена Эйлером и носит его имя

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (23)$$

где  $\lambda$  – безразмерная величина, которая называется *гибкостью стержня* и определяется по формуле

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \quad (24)$$

где  $\mu$  – коэффициент приведения длины (зависит от способа закрепления стержня),  $l$  – длина стержня,  $i_{\min} = \sqrt{I_{\min}/A}$  – наименьший главный радиус инерции сечения. Произведение  $\mu l$  называется *приведенная длина стержня*.

Значения коэффициента приведения длины для некоторых способов закрепления стержня указаны на рис. 24.

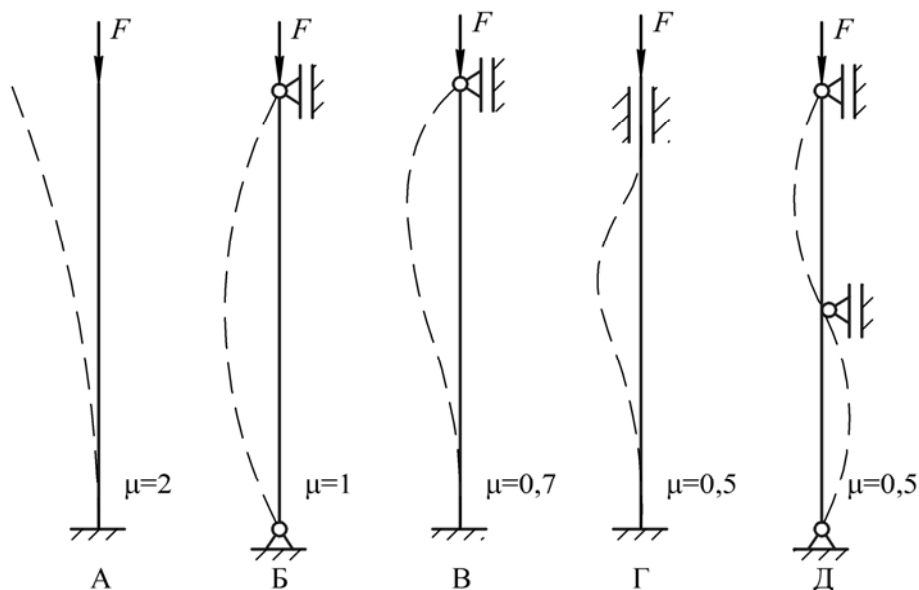


Рис. 24. Значения коэффициента приведения длины  $\mu$

Формула Эйлера (23) имеет пределы своей применимости. Она дает правильные значения критических напряжений, если они не превышают предела пропорциональности материала, т. е.  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$ . К примеру, для стали марки Ст. 3, для которой  $\sigma_{пц} = 200$  МПа, формула (23) будет справедлива при гибкостях стержня

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 100,$$

т. е. формулой Эйлера можно пользоваться на участке гиперболы показанной на рис. 25 сплошной линией. При гибкости  $\lambda < 100$  формулой Эйлера пользоваться нельзя, так как она дает завышенные значения критических напряжений (штриховая линия на рис. 25). В этом случае значение критического напряжения вычисляется согласно опытным данным Ф. С. Ясинского по эмпирической формуле

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (25)$$

где  $a$  и  $b$  – коэффициенты, которые зависят от материала, из которого изготовлен стержень. Для стали Ст. 3  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа. Для других материалов значения этих коэффициентов принимают иные значения, величины которых приведены в справочниках.

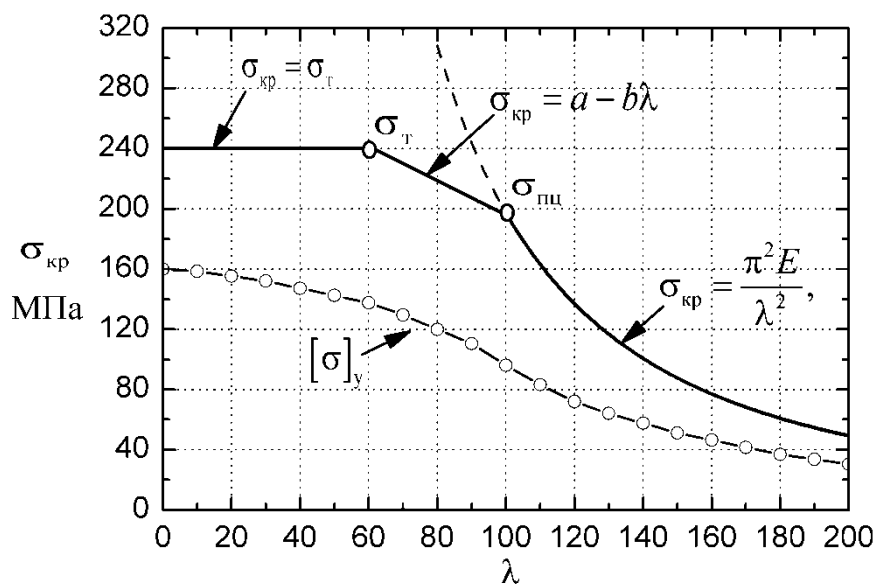


Рис. 25. Зависимость критических напряжений  $\sigma_{кр}$  от гибкости стержня  $\lambda$  для стали Ст. 3

При некоторых значениях гибкости  $\lambda$  величина  $\sigma_{кр}$ , вычисленная по формуле (25) становится равной предельному (опасному) напряжению при сжатии (для пластичных материалов пределу текучести  $\sigma_T$ ), см. рис. 25.

$$\sigma_{кр} = \sigma_T. \quad (26)$$

Для стали Ст. 3 ( $\sigma_T = 240$  МПа) это значение гибкости  $\lambda \approx 61$ . Стержни, у которых  $\lambda < 61$ , называют *стержнями малой гибкости*. Такие стержни практически не теряют устойчивость и их рассчитывают на прочность (точнее, при малых гибкостях расчет на устойчивость переходит в расчет на прочность, т. к. в этом случае  $[\sigma]_y \approx [\sigma]_{сж}$ ).

Таким образом, график  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$  для стали марки Ст. 3, показанный на рис. 25 состоит из трех участков:

- 1)  $\lambda \geq 100$  ( $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$ ) – *стержни большой гибкости*. Такие стержни рассчитывают на устойчивость по формуле Эйлера (23);
- 2)  $61 \leq \lambda < 100$  ( $\sigma_{пц} < \sigma_{кр} \leq \sigma_T$ ) – *стержни средней гибкости*. Эти стержни рассчитывают на устойчивость по формуле Ясинского (25);
- 3)  $\lambda < 61$  ( $\sigma_{кр} = \sigma_T$ ) – *стержни малой гибкости*. Такие стержни практически не теряют устойчивость, и их расчет можно проводить из условия прочности (3).

Условие устойчивости при центральном растяжении (сжатии) (3) формально похоже на условие прочности (21), однако имеется существенное отличие. При сжатии стержня допускаемое напряжение на сжатие  $[\sigma]_{сж}$  зависит только от материала, из которого изготовлен стержень. В условии устойчивости допускаемое напряжение на устойчивость  $[\sigma]_y$ , помимо материала стержня, зависит от его гибкости. Это хорошо видно из рис. 25, с увеличением гибкости стержня уменьшается критическое (опасное) напряжение, следовательно, будет уменьшаться и рассчитанное по нему допускаемое напряжение на устойчивость (см. формулу (22)).

На практике при расчете на устойчивость принято  $[\sigma]_y$  определять не по формуле (22), а через допускаемое напряжение на сжатие  $[\sigma]_{сж}$

$$[\sigma]_y = \varphi[\sigma]_{сж}, \quad (27)$$

где  $\varphi = \sigma_{кр}/\sigma_T$  – коэффициент снижения допускаемого напряжения. Согласно зависимости  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$  (рис. 25) коэффициент  $\varphi$  изменяется в пределах от 0 до 1. Коэффициент  $\varphi$  зависит от гибкости и для наиболее часто встречающихся материалов приведен в приложении 3. График  $[\sigma]_y = f(\lambda)$  на рис. 25 построен по формуле (27) для стали Ст. 3. Видно, что для стержней малой гибкости, при  $\lambda < 61$   $[\sigma]_y \approx [\sigma]_{сж} = 160$  МПа и расчет на устойчивость переходит в расчет на прочность.

*Замечание.* Если стержень не в одном из сечений не имеет ослаблений (отверстий, выточек, вырезов), то выполнение условия устойчивости (21) гарантирует выполнение условия прочности (3), так как всегда  $[\sigma]_y \leq [\sigma]_{сж}$ . Если же какое-нибудь сечение имеет ослабления, то для него дополнительно необходима проверка прочности.

Условие устойчивости (21), как отмечалось в пункте 2.3, позволяет решать три рода задач:

1) *Осуществлять проверку устойчивости стержня* (проверочный расчет). Стержень не потеряет устойчивость и будет работать безопасно под действием сжимающей силы, если фактические напряжения, возникающие в нем, не превысят допускаемого напряжения на устойчивость.

2) *Подбирать сечение* (конструкторский расчет):

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]_y} = \frac{F}{\varphi[\sigma]_{сж}}.$$

3) Рассчитывать допустимую нагрузку:

$$[F] \leq A[\sigma]_y = A\varphi[\sigma]_{сж}.$$

**Пример 6.** Произвести проверочный расчет и определить коэффициент запаса устойчивости для стержня нагруженного силой  $F = 90$  кН (рис. 26). Если условие устойчивости выполняется – рассчитать процент недогрузки, если не выполнится – определить допустимую нагрузку. Стержень изготовлен из стали Ст.3, допустимое напряжение на сжатие  $[\sigma]_{сж} = 160$  МПа.

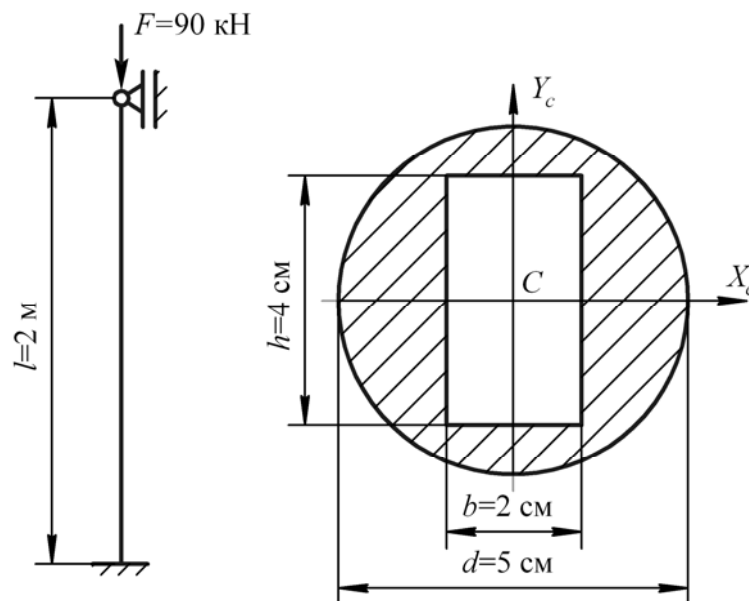


Рис. 26. Схема конструкции

*Решение*

Решение задачи состоит из двух этапов. Сначала проверим устойчивость стержня, а затем, в случае выполнения условия устойчивости, найдем коэффициент запаса устойчивости.

1. *Проверочный расчет на устойчивость.* Стержень, показанный на рис. 26 работает на сжатие, поэтому он обязательно должен быть проверен на устойчивость. Условие устойчивости имеет вид

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]_y,$$

где  $N$  – внутренняя продольная сила,  $N = F = 90$  кН;  $A$  – площадь поперечного сечения.

$$A = \frac{\pi d^2}{4} - bh = \frac{3,14 \cdot 5^2}{4} - 2 \cdot 4 = 11,63 \text{ см}^2.$$

Фактические напряжения, возникающие в стержне под действием внешней силы  $F$ , будут

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{90 \cdot 10^3}{11,63 \cdot 10^{-4}} = 77,4 \text{ МПа.}$$

Очевидно, что условие прочности выполняется, т.к.  $\sigma \leq [\sigma]_{\text{сж}}$ , однако выполнение этого условия еще не говорит о безопасности эксплуатации данной конструкции. Для безопасной работы необходимо и достаточно, чтобы  $\sigma \leq [\sigma]_y$ . Определим допускаемое напряжение на устойчивость.

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Коэффициент снижения допускаемого напряжения  $\varphi$  определяется по табл. приложения 3 для стали Ст. 3 в зависимости от гибкости стержня.

Гибкость стержня определяем по формуле

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}.$$

Коэффициент приведения длины  $\mu = 0,7$  зависит от способа закрепления стержня и определяется согласно рис. 24.  $i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}$  – наименьший главный радиус инерции сечения,  $I_{\min}$  – наименьший из двух моментов инерции относительно главных центральных осей. Значения главных моментов инерции

$$I_{Xc} = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bh^3}{12} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{64} - \frac{2 \cdot 4^3}{12} = 20 \text{ см}^4;$$

$$I_{Yc} = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{b^3 h}{12} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{64} - \frac{2^3 \cdot 4}{12} = 28 \text{ см}^4.$$

Очевидно, что для рассматриваемого сечения наименьший момент инерции будет относительно оси  $X_C$ , т.е.  $I_{\min} = I_{Xc} = 20 \text{ см}^4$ . Тогда радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{20}{11,63}} = 1,3 \text{ см.}$$

Гибкость стержня будет

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2}{1,3 \cdot 10^{-2}} = 107,7.$$

Найдем по таблице коэффициент снижения допускаемого напряжения  $\varphi$  для стали Ст. 3 (путем линейной интерполяции):

для  $\lambda_1 = 100$   $\varphi_1 = 0,6$ ;

для  $\lambda_2 = 110$   $\varphi_2 = 0,52$ ;

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) = 0,6 - \frac{0,6 - 0,52}{110 - 100} (107,7 - 100) = 0,54.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma]_y = \varphi[\sigma]_{\text{сж}} = 0,54 \cdot 160 = 86,4 \text{ МПа.}$$

*Примечание.* Более грубо  $[\sigma]_y$  для стали Ст. 3 можно оценить по графику представленному на рис. 25 при  $\lambda = 107,7$ .

Условие устойчивости выполняется, так как

$$\sigma = 77,4 \text{ МПа} < [\sigma]_y = 86,4 \text{ МПа.}$$

Из расчета видно, что если выполнено условие устойчивости и стержень не имеет ослабленных сечений, то условие прочности выполняется автоматически.

Процент недонапряжения

$$\frac{[\sigma]_y - \sigma}{[\sigma]_y} 100\% = \frac{86,4 - 77,4}{86,4} 100\% = 10,4\%.$$

2. *Определение коэффициента запаса устойчивости.* Коэффициент запаса показывает, во сколько раз критическое напряжение  $\sigma_{\text{кр}}$  превышает напряжение, фактически возникающее в стержне  $\sigma$ , т. е.

$$n_y = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma}.$$

Критические напряжения зависят от гибкости стержня и определяются либо по формуле Эйлера (23), либо по формуле Ясинского (25), либо равны опасному напряжению (26). Рассматриваемый стержень имеет гибкость  $\lambda = 107,7$ , следовательно, согласно рис. 25 расчет нужно вести по формуле Эйлера:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6}{107,7^2} = 170 \text{ МПа.}$$

Смысл критического напряжения состоит в том, что если в стержне возникнут напряжения, превышающие это критическое напряжение, то стержень потеряет устойчивость (первоначальную форму равновесия).

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma} = \frac{170}{77,4} = 2,2.$$

Коэффициент  $n_y = 2,2$  означает, что стержень до потери устойчивости способен выдержать нагрузку в 2,2 раза превышающую действующую  $F = 90$  кН.

*Заключение.* Рассматриваемый стержень устойчив под действием приложенной нагрузки, процент недогрузки составляет 10,4%, стержень работает с запасом устойчивости 2,2.

**Пример 7.** Произвести проверочный расчет и определить коэффициент запаса устойчивости для стержня нагруженного силой  $F = 300$  кН (рис. 27). Если условие устойчивости выполняется – рассчитать процент недогрузки, если не выполнится – определить допускаемую нагрузку. Стержень изготовлен из стали Ст. 3, допускаемое напряжение на сжатие  $[\sigma]_{\text{сж}} = 160$  МПа.

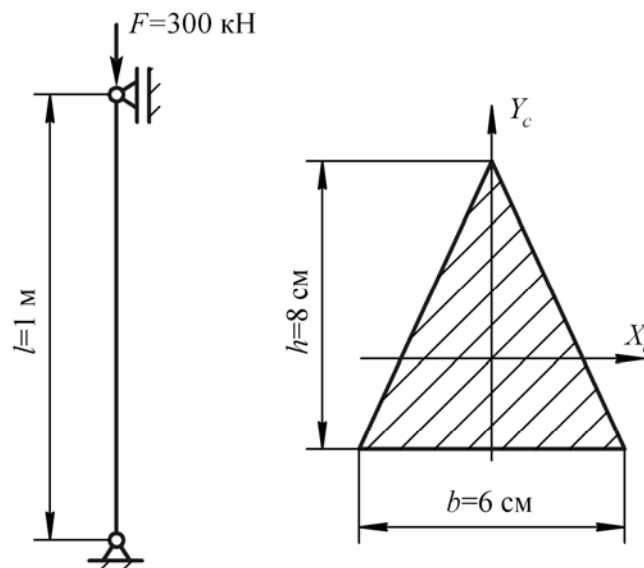


Рис. 27. Схема конструкции



### Решение

Решение задачи производится по схеме, приведенной в примере 6.

1. *Проверочный расчет на устойчивость.* Стержень, показанный на рис. 27 работает на сжатие, поэтому он обязательно должен быть проверен на устойчивость. Условие устойчивости имеет вид

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]_y,$$

где  $N$  – внутренняя продольная сила,  $N = F = 300$  кН;  $A$  – площадь поперечного сечения.

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ см}^2.$$

Фактические напряжения, возникающие в стержне под действием внешней силы  $F$ , будут

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{300 \cdot 10^3}{24 \cdot 10^{-4}} = 125 \text{ МПа}.$$

Очевидно, что условие прочности выполняется, т.к.  $\sigma \leq [\sigma]_{сж}$ , однако выполнение этого условия еще не говорит о безопасности эксплуатации данной конструкции. Для безопасной работы необходимо и достаточно, чтобы  $\sigma \leq [\sigma]_y$ . Определим допускаемое напряжение на устойчивость.

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma]_{сж}.$$

Коэффициент снижения допускаемого напряжения  $\varphi$  определяется по приложению 3 для стали Ст. 3 в зависимости от гибкости стержня.

Гибкость стержня определяем по формуле

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}.$$

Коэффициент приведения длины  $\mu = 1$  зависит от способа закрепления стержня и определяется согласно рис. 24.  $i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}$  – наименьший главный радиус инерции сечения. Определим значения главных моментов инерции

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{36} = \frac{6 \cdot 8^3}{36} = 85,3 \text{ см}^4; \quad I_{yc} = \frac{b^3h}{48} = \frac{6^3 \cdot 8}{48} = 36 \text{ см}^4.$$

Очевидно, что для рассматриваемого сечения  $I_{\min} = I_{Yc} = 36 \text{ см}^4$ , тогда радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{36}{24}} = 1,22 \text{ см.}$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 1}{1,22 \cdot 10^{-2}} = 82.$$

Найдем по таблице коэффициент снижения допускаемого напряжения  $\varphi$  для стали Ст. 3 (путем линейной интерполяции):

для  $\lambda_1 = 80$   $\varphi_1 = 0,75$ ;

для  $\lambda_2 = 90$   $\varphi_2 = 0,69$ ;

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{90 - 80} (82 - 80) = 0,74.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma]_{\text{сж}} = 0,74 \cdot 160 = 118,4 \text{ МПа.}$$

*Примечание.* Более грубо  $[\sigma]_y$  для стали Ст. 3 можно оценить по графику представленному на рис. 25 при  $\lambda = 61$ .

Условие устойчивости не выполняется, так как

$$\sigma = 125 \text{ МПа} > [\sigma]_y = 118,4 \text{ МПа.}$$

Если условие устойчивости *не выполняется*, то это означает, что высок риск потери устойчивости стержня, что может привести к его разрушению, хотя условие прочности (3) выполняется. Т.е. сжимающее усилие  $F = 300 \text{ кН}$  недопустимо велико. Определим *допускаемую внешнюю нагрузку*, которая обеспечит выполнение условия устойчивости (см. третий вид расчета из условия устойчивости, стр. 59)

$$[F] \leq A[\sigma]_y = 24 \cdot 10^{-4} \cdot 118,4 \cdot 10^6 = 284,16 \text{ кН.}$$

Естественно, что при такой внешней силе фактические напряжения будут

$$\sigma = \frac{[F]}{A} = [\sigma]_y = 118,4 \text{ МПа.}$$

В этом случае условие устойчивости (21) будет *выполнено*.

2. *Определение коэффициента запаса устойчивости.* Коэффициент запаса показывает, во сколько раз критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  превышает напряжение, фактически возникающее в стержне  $\sigma$ , т. е.

$$n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma}.$$

Критические напряжения зависят от гибкости стержня и определяются либо по формуле Эйлера (23), либо по формуле Ясинского (25), либо равны опасному напряжению (26). Рассматриваемый стержень имеет гибкость  $\lambda = 82$ , следовательно, согласно рис. 25 расчет нужно вести по формуле Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 82 = 216,5 \text{ МПа.}$$

*Замечание.* Можно показать, что при гибкости  $\lambda = 82$  формула Эйлера будет давать сильно завышенные значения критических напряжений  $\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2 = 3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 / 82^2 = 293,3 \text{ МПа.}$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma} = \frac{216,5}{118,4} = 1,8.$$

Коэффициент  $n_y = 1,8$  означает, что стержень до потери устойчивости способен выдержать нагрузку в 1,8 раза превышающую допускаемую  $[F] = 284,16 \text{ кН.}$

*Заключение.* Стержень, нагруженный сжимающей силой  $F = 300 \text{ МПа}$ , эксплуатировать нельзя, т. к. высок риск потери устойчивости конструкции. Стержень будет работать безопасно при допускаемой силе  $[F] = 284,16 \text{ МПа}$  и иметь запас устойчивости 1,8.

## 2.11. Внецентренное растяжение (сжатие)

Как известно (см. п. 2.4), центральное растяжение (сжатие) возникает в том случае, когда внешние силы действуют вдоль продольной оси стержня. Естественно, продольная нагрузка может быть приложена не в центре тяжести поперечного сечения стержня, а с некоторым смещением (эксцентриситетом) относительно главных осей сечения.

В этом случае имеет место *внецентренное растяжение (сжатие)* – такой вид нагружения, при котором вследствие внецентренно приложенной силы, в поперечных сечениях стержня возникают нормальная сила  $N$  и изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ .

Примеры элементов конструкций, поперечные сечения которых испытывают внецентренное растяжение или сжатие, приведены на рис. 28. Так, ножка стола может испытывать внецентренное сжатие (см. рис. 23 слева) при приложении нагрузки на столешницу с одной стороны. Либо деталь с галтелью (см. рис. 28 справа), когда средняя ее часть испытывает растяжение с изгибом.

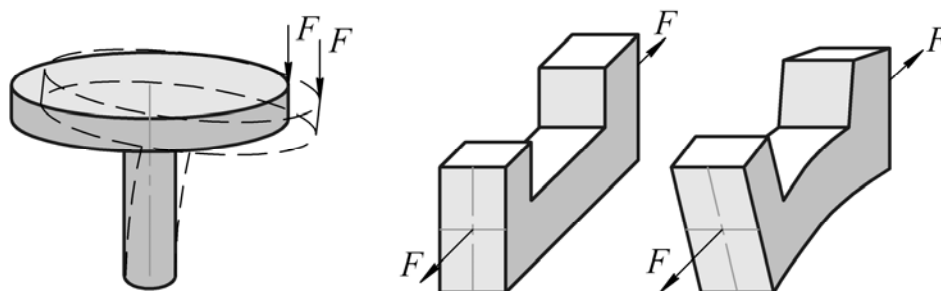


Рис. 28. Примеры внецентренного растяжения и сжатия

В общем случае внецентренное растяжение (сжатие) может быть приведено к центральному растяжению (сжатию) и косому изгибу (изгиб относительно главных центральных осей), если внешнюю силу перенести в центр тяжести сечения.

Рассмотрим короткий стержень прямоугольного поперечного сечения, нагруженной растягивающей силой  $F$ , приложенной в точке с координатами  $x_F$  и  $y_F$  (рис. 29).

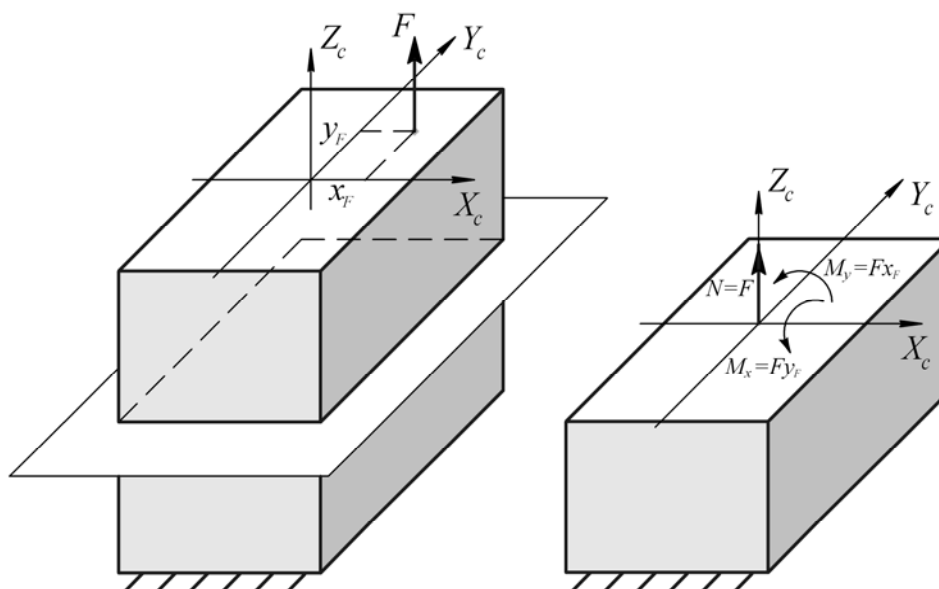


Рис. 29. Внецентренное растяжение

Рассечем стержень в произвольном месте горизонтальной плоскостью и покажем действующие в поперечном сечении внутренние силовые факторы (рис. 29 справа). В поперечном сечении будет действовать продольная сила  $N$ , приложенная в центре тяжести сечения, и изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ .

Полные напряжения, которые будут возникать в точках поперечного сечения, являются алгебраической суммой напряжений вызванных растяжением и напряжений вызванных изгибом. На основании *принципа независимости действия сил*, нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения будут определяться по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_{x_c}} y + \frac{M_y}{I_{y_c}} x, \quad (28)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения;  $I_{y_c}$ ,  $I_{x_c}$  – осевые моменты инерции сечения относительно главных центральных осей  $Y_C$  и  $X_C$  соответственно (см. пункт 2.5);  $y$ ,  $x$  – координаты рассматриваемой точки в системе главных центральных осей сечения.

С учетом того, что  $N = F$ ,  $M_x = Fy_F$ ,  $M_y = Fx_F$ , а также используя понятие радиуса инерции сечения  $i_x = \sqrt{I_{x_c} / A}$ ,  $i_y = \sqrt{I_{y_c} / A}$ , зависимость (28) записывается в более удобном для практических расчетов виде

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y}{i_x^2} + \frac{x_F x}{i_y^2} \right). \quad (29)$$

Знак перед формулой (29) следует выбирать согласно следующему правилу: если внешняя сила сжимает стержень, ставится знак «–», если растягивает – знак «+». В уравнении (29) значение выражения в скобках фактически показывает во сколько раз напряжение в рассматриваемой точке при внецентренном растяжении (сжатии) отличается от напряжения в этой же точке при центральном приложении внешней силы  $F$  (центральном растяжении (сжатии), см. пункт 2.4).

Используя зависимость (29) можно определить напряжение в любой точке поперечного сечения, однако, чтобы судить о прочности конструкции необходимо знать значения напряжений в *опасных точках*, т.е. точках, где величина нормальных напряжений достигает максимального значения. *Опасными точками* в поперечном сечении будут являться те точки, которые наиболее удалены от *нейтральной линии* (аналогично случаю плоского поперечного изгиба, см. пункт 2.7, пример 4).

Напряжения в точках, лежащих на нейтральной линии равны нулю, поэтому для определения уравнения нейтральной линии приравняем выражение (29) к нулю

$$1 + \frac{y_F y}{i_y^2} + \frac{x_F x}{i_x^2} = 0. \quad (30)$$

Для графического построения нейтральной линии необходимо знать положение двух точек, принадлежащих этой линии. Обычно определяют положение точек пересечения нейтральной линии с главными осями сечения. В этом случае одна из координат двух точек нейтральной линии уже известна, она равна нулю, а значение второй координаты получают при помощи зависимости (30)

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F}. \quad (31)$$

Таким образом, в системе главных центральных осей получаем две точки с координатами  $(0; y_0)$  и  $(x_0; 0)$  (см. рис. 30), принадлежащими нейтральной линии. Соединяя эти две точки прямой, находим положение нейтральной линии в сечении (рис. 30).

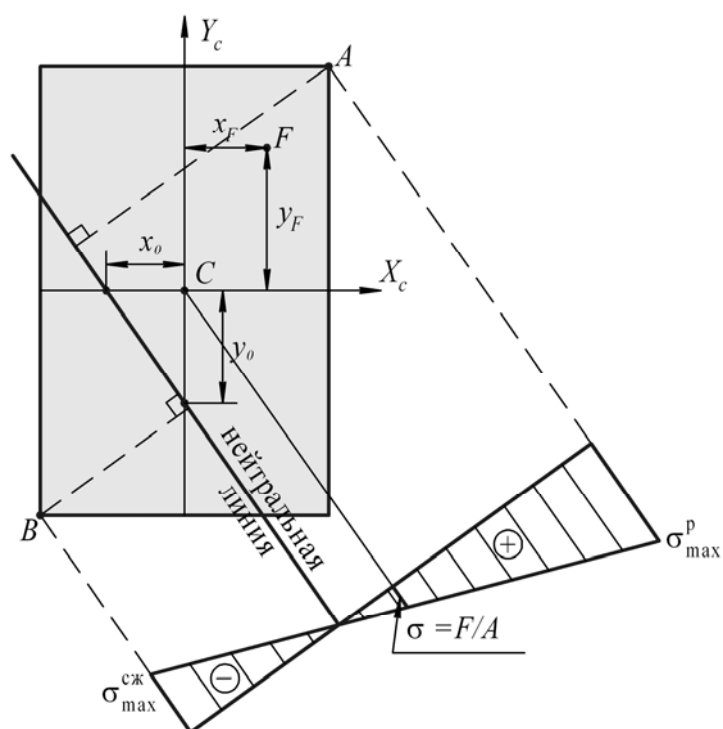


Рис. 30. Распределение напряжений по сечению при внецентренном растяжении (сжатии)

Из уравнений (30) следует:

- 1) нейтральная линия при внецентренном растяжении (сжатии) *никогда* не проходит через центр тяжести сечения;
- 2) положение нейтральной линии *не зависит* от направления и величины внешней силы, но *зависит* от точки ее приложения;
- 3) нейтральная линия и точка приложения внешней силы находятся по разные стороны относительно центра тяжести сечения;
- 4) нейтральная линия может как пересекать сечение, так и находиться за его пределами.

Нейтральная линия делит сечение на две области – область сжатия и область растяжения. Если материал стержня одинаково работает на растяжение и сжатие (большинство пластичных материалов), т.е.  $[\sigma]_{\text{сж}} = [\sigma]_{\text{р}} = [\sigma]$ , то *опасной будет являться одна точка*, наиболее удаленная от нейтральной линии вне зависимости от того, будут ли возникать в этой точке напряжения сжатия или напряжения растяжения. В рассматриваемом примере (рис. 30) опасной точкой является точка *A*.

*Условие прочности* при внецентренном растяжении стержня записывается в виде

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_A = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_A}{i_x^2} + \frac{x_F x_A}{i_y^2} \right) \leq [\sigma]. \quad (32)$$

Если материал стержня неодинаково работает на растяжение и сжатие (большинство хрупких материалов), т.е.  $[\sigma]_{\text{сж}} \neq [\sigma]_{\text{р}}$ , то *опасными будут две точки*, наиболее удаленная точка от нейтральной линии, в которой возникает напряжение сжатия и наиболее удаленная точка от нейтральной линии, в которой возникает напряжение растяжения. Для рассматриваемого сечения (рис. 30) опасными будут точка *A*, где возникает максимальное растягивающее напряжение  $\sigma_{\text{max}}^{\text{р}}$ , и точка *B*, в которой действует максимальное сжимающее напряжение  $\sigma_{\text{max}}^{\text{сж}}$ . В этом случае *условие прочности* необходимо записать отдельно для области сжатия и области растяжения

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{max}}^{\text{р}} = \sigma_A &= \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_A}{i_x^2} + \frac{x_F x_A}{i_y^2} \right) \leq [\sigma]_{\text{р}}; \\ \sigma_{\text{max}}^{\text{сж}} = \sigma_B &= \left| \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_B}{i_x^2} + \frac{x_F x_B}{i_y^2} \right) \right| \leq [\sigma]_{\text{сж}}. \end{aligned} \quad (33)$$

По рассчитанным напряжениям в опасных точках строится *эпюра нормальных напряжений в сечении*. Для этого необходимо продлить нейтральную линию, провести в произвольном месте перпендикулярно к ней отрезок, опустить к этому отрезку из опасных точек перпендикуляры (линии, параллельные нейтральной линии) и отложить на этих перпендикулярах значения наибольших растягивающих и сжимающих напряжений. Линия, соединяющая значения  $\sigma_{\max}^p$  и  $\sigma_{\max}^{сж}$  будет являться профилем эпюры нормальных напряжений в сечении (рис. 30). Эпюра напряжений позволяет, не прибегая к расчетам, графическим способом определить напряжение в любой произвольной точке сечения.

**Пример 8.** Проверить на прочность короткий стержень, нагруженный в точке *A* продольной силой  $F=40$  кН. Материал стержня – серый чугун  $[\sigma]_{сж} = 120$  МПа,  $[\sigma]_p = 40$  МПа. Схема нагружения и размеры поперечного сечения показаны на рис. 31.

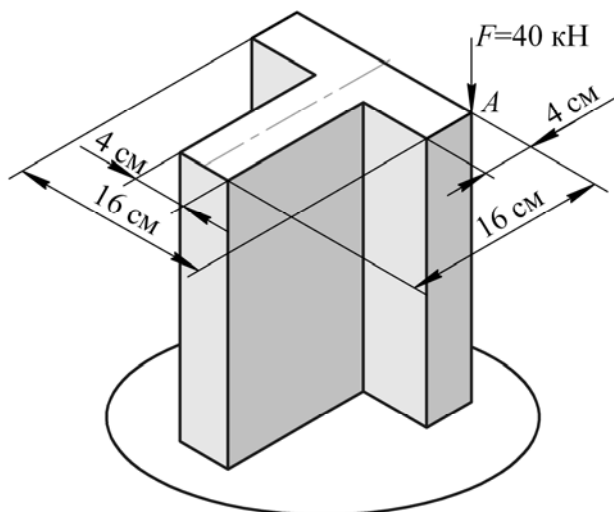


Рис. 31. Схема нагружения

### Решение

Так как материал стержня хрупкий и неодинаково работает на растяжение и сжатие, то *проверку прочности необходимо проводить для двух опасных точек* (в области растяжения и в области сжатия). Расчет напряжений производится по формуле (29). В рассматриваемом примере сила  $F$  сжимающая, поэтому в формуле (29) выбираем знак «-».

$$\sigma = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y}{i_x^2} + \frac{x_F x}{i_y^2} \right).$$



1. *Определение положения главных центральных осей сечения.*  
 Известно, что *главные центральные оси* – это оси, проходящие через центр тяжести сечения и центробежные моменты инерции относительно которых равен нулю (см. пункт 2.6). Главные центральные оси всегда совпадают с осями симметрии сечения, если они имеются. В нашем примере положение одной главной центральной оси известно (ось симметрии), а вторая, перпендикулярная ей, проходит через центр тяжести сечения.

Положение центра тяжести можно определить по формулам (9), см. пункт 2.6:

$$x_c = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}; \quad y_c = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}.$$

Разобьем сложное сечение (см. рис. 32) на две простые фигуры: верхний прямоугольник обозначим позицией 1, а нижний позицией 2.

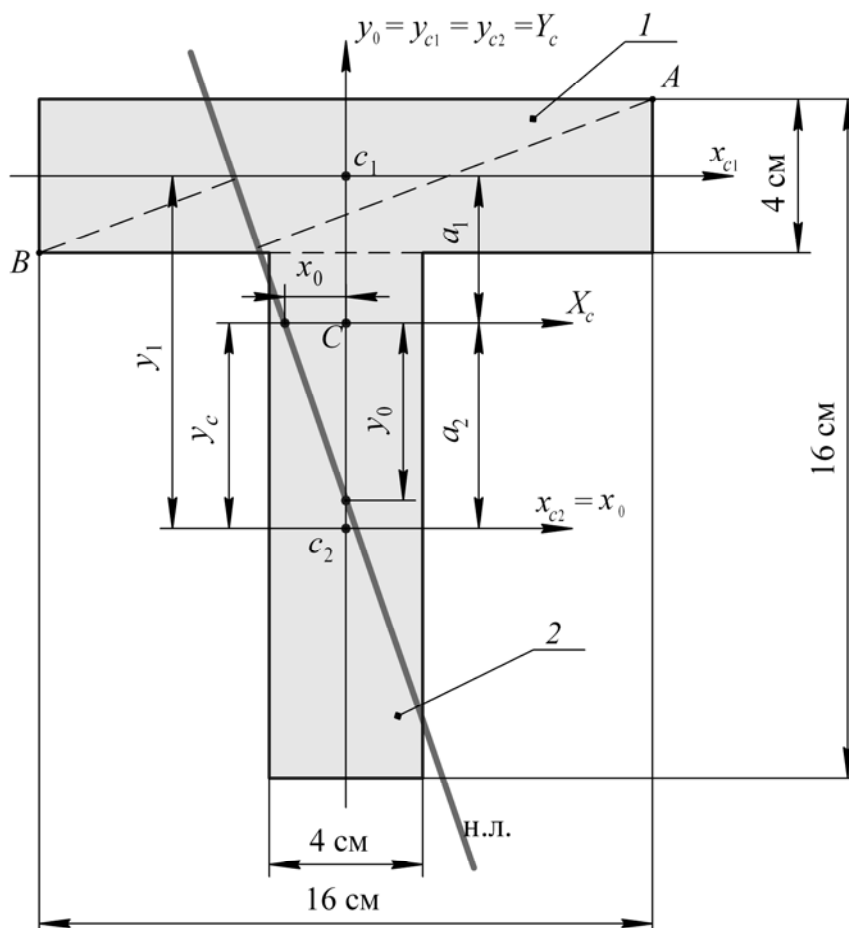


Рис. 32. Поперечное сечение стержня

В качестве *начальных осей*  $x_0, y_0$  выбираем оси, проходящие через центр тяжести прямоугольника 2. Тогда  $y_2 = 0, y_1 = 8 \text{ см}, x_1 = 0, x_2 = 0$ . Площади прямоугольников равны

$$A_1 = b_1 \cdot h_1 = 16 \cdot 4 = 64 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = b_2 \cdot h_2 = 4 \cdot 12 = 48 \text{ см}^2.$$

Общая площадь сечения  $A = A_1 + A_2 = 64 + 48 = 112 \text{ см}^2$ . Тогда

$$x_C = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = 0;$$

$$y_C = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{8 \cdot 64 + 0 \cdot 48}{64 + 48} = 4,6 \text{ см}.$$

Таким образом, центр тяжести сечения  $C$  в системе *начальных осей*  $x_0, y_0$  находится в точке с координатами  $(0; 4,6 \text{ см})$ . Через эту точку проводим *главные центральные оси*  $X_C, Y_C$ , таким образом, чтобы ось  $Y_C$  совпадала с осью симметрии сечения (см. рис. 32).

2. *Определение радиусов инерции сечения.* При расчете напряжений в формулу (29) входят квадраты радиусов инерции, которые вычисляются по формулам

$$i_x^2 = \frac{I_{X_C}}{A}; \quad i_y^2 = \frac{I_{Y_C}}{A}.$$

Определим осевые моменты инерции сечения относительно главных центральных осей  $X_C, Y_C$  по формулам (10) (см. пункт 2.6)

$$I_{X_C} = \sum (I_{x_{ci}} + a_i^2 A_i);$$

$$I_{Y_C} = \sum (I_{y_{ci}} + b_i^2 A_i).$$

Так как рассматриваемое сложное сечение разбито на два элемента, то вышеприведенные зависимости для нашего примера запишутся в виде:

$$I_{X_C} = (I_{x_{c1}} + a_1^2 A_1) + (I_{x_{c2}} + a_2^2 A_2);$$

$$I_{Y_C} = (I_{y_{c1}} + b_1^2 A_1) + (I_{y_{c2}} + b_2^2 A_2).$$

Осевые моменты инерции прямоугольников (рис. 32) относительно собственных главных центральных осей  $x_{ci}, y_{ci}$  равны (см. приложение 2)

$$I_{x_{c1}} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{16 \cdot 4^3}{12} = 85,3 \text{ см}^4; \quad I_{x_{c2}} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{4 \cdot 12^3}{12} = 576 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_{c1}} = \frac{b_1^3 h_1}{12} = \frac{16^3 \cdot 4}{12} = 1365 \text{ см}^4; \quad I_{y_{c2}} = \frac{b_2^3 h_2}{12} = \frac{4^3 \cdot 12}{12} = 64 \text{ см}^4.$$

Величины  $a_i$   $b_i$  – это координаты, отсчитываемые от главных центральных осей  $X_C$ ,  $Y_C$  до центра тяжести  $i$ -го элемента (см. пункт 2.6). Из рис. 32 нетрудно определить, что  $a_1 = 8 - 4,6 = 3,4$  см,  $a_2 = -4,6$  см,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ .

Тогда, осевые моменты инерции сечения относительно главных центральных осей  $X_C$ ,  $Y_C$  будут равны

$$I_{X_C} = (85,3 + 3,4^2 \cdot 64) + (576 + (-4,6)^2 \cdot 48) = 2417 \text{ см}^4.$$

$$I_{Y_C} = 1365 + 64 = 1429 \text{ см}^4.$$

Квадраты радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{I_{X_C}}{A} = \frac{2417}{112} = 21,5 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_{Y_C}}{A} = \frac{1429}{112} = 12,8 \text{ см}^2.$$

3. Построение нейтральной линии. Нейтральная линия необходима для определения положения опасных точек.

Координаты точек пересечения нейтральной линии с главными осями сечения  $X_C$ ,  $Y_C$  определяются по формулам (31)

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F}.$$

Координаты точки приложения силы в системе главных центральных осей  $X_C$ ,  $Y_C$  определяются из схемы сечения на рис. 32,  $x_F = 8$  см,  $y_F = 5,6$  см.

Тогда координаты пересечения нейтральной линии с осями  $X_C$ ,  $Y_C$

$$x_0 = -\frac{12,8}{8} = -1,6 \text{ см}; \quad y_0 = -\frac{21,5}{5,6} = -3,8 \text{ см}.$$

Получаем на главных центральных осях  $X_C$ ,  $Y_C$  две точки с координатами  $(-1,6; 0)$  и  $(0; -3,8)$ . Соединяем их прямой линией, которая и является нейтральной линией.

Зная положение нейтральной линии можно утверждать, что опасными точками в сечении будут точки  $A$  и  $B$ , т. к. они наиболее удалены от этой линии. Нейтральная линия делит сечение на две области:

область сжатия и область растяжения. При этом в точке  $A$  будут действовать максимальные сжимающие напряжения, а в точке  $B$  – максимальные растягивающие напряжения.

4. *Проверка прочности.* Определим напряжения в опасных точках по формуле (29) и проверим стержень на прочность.

$$\begin{aligned}\sigma_{\max}^{\text{сж}} = \sigma_A &= -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_A}{i_x^2} + \frac{x_F x_A}{i_y^2} \right) = \\ &= -\frac{40 \cdot 10^3}{112 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{5,6 \cdot 5,6}{21,5} + \frac{8 \cdot 8}{12,8} \right) = -3,57 \cdot 10^6 (7,46) = -26,6 \text{ МПа.} \\ |\sigma_{\max}^{\text{сж}}| &= 26,6 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{сж}} = 120 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Условие прочности для сжатых волокон стержня выполняется.

$$\begin{aligned}\sigma_{\max}^{\text{р}} = \sigma_B &= -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_B}{i_x^2} + \frac{x_F x_B}{i_y^2} \right) = \\ &= -\frac{40 \cdot 10^3}{112 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{5,6 \cdot 1,4}{21,5} + \frac{8 \cdot (-8)}{12,8} \right) = -3,57 \cdot 10^6 (-3,64) = 13,0 \text{ МПа.} \\ \sigma_{\max}^{\text{р}} &= 13,0 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{р}} = 40 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Условие прочности для растянутых волокон стержня выполняется. Следовательно, стержень *не разрушится* под действием приложенной внешней силы  $F$ .

*Замечание.* Значение выражения в скобках является безразмерной величиной, поэтому при его вычислении координаты точек и радиусы инерции должны иметь *одинаковую размерность*, например, «см». *Обратите внимание*, что значение выражения в скобках показываем во сколько раз напряжение в рассматриваемой точке при внецентренном сжатии превышает напряжение в этой же точке при центральном сжатии. Например, в нашем примере внецентренного сжатия напряжение в точке  $A$  в 7,46 раз выше напряжения, вызванного *той же силой*, но приложенной в центре тяжести сечения (центральное сжатие).

5. *Построение эпюры напряжений.* Эпюра напряжений в сечении показана на рис. 33. Обратите внимание, что при внецентренном растяжении (сжатии) напряжения распределены *неравномерно*, в отличии

от центрального растяжения сжатия (см. рис. 3), при котором напряжения по сечению распределены равномерно (пункт 2.4).

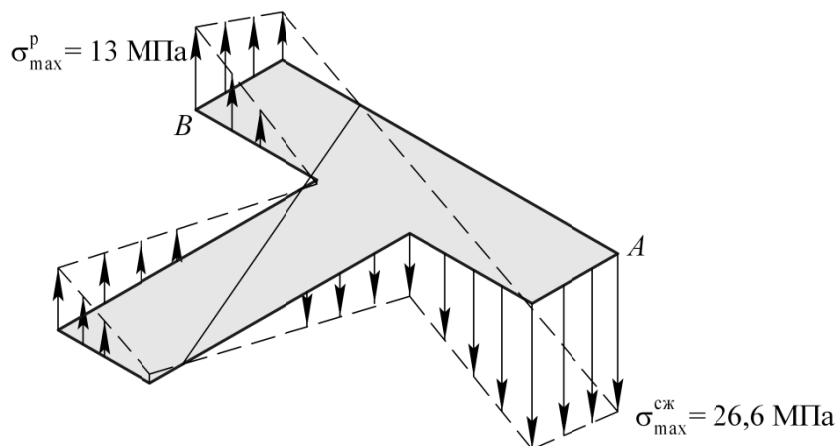


Рис. 33. Эпюра нормальных напряжений при внецентренном сжатии

Из рис. 33 видно, что напряжения на нейтральной линии равны нулю и принимают максимальные значения в точках наиболее удаленных от нейтральной линии. По одну сторону от нейтральной линии действуют напряжения растяжения (область растяжения), а по другую сторону – напряжения сжатия (область сжатия).

*Примечание.* При выполнении задания расчетно-проектировочной работы эпюра напряжений может быть построена *либо в аксонометрии*, как показано на рис. 33, *либо в плоскости*, как показано на рис. 30.

В качестве проверки правильности проведенных расчетов можно использовать соотношение, которое получается из подобия треугольников эпюры напряжений (рис. 30):

$$\frac{\sigma_{\max}^{\text{сж}}}{\sigma_{\max}^{\text{р}}} = \frac{\delta_{\max}^{\text{сж}}}{\delta_{\max}^{\text{р}}},$$

где  $\delta_{\max}^{\text{сж}}$ ,  $\delta_{\max}^{\text{р}}$  – расстояния от нейтральной линии до наиболее удаленных точек в области сжатия и растяжения соответственно (определяются по схеме сечения, вычерченной в масштабе).

*Закключение.* На основе проведенного проверочного расчета короткого стержня при внецентренном сжатии можно сделать заключение, что рассматриваемый стержень *не разрушится* под действием приложенной нагрузки, так как одновременно выполняются условия прочности по сжатым и растянутым волокнам.

## 2.12. Совместное действие изгиба и кручения

Изгиб в сочетании с кручением является наиболее распространенным видом нагружения *круглых* валов. На изгиб с кручением работают валы редукторов, коробок передач, торсионы и т. д. Прочностной расчет валов при таком нагружении является одним из наиболее распространенных в инженерной практике расчетов.

*Совместное действие изгиба и кручения* – это такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении вала одновременно возникают изгибающие моменты  $M_x, M_y$ , крутящий момент  $M_{кр}$ , и поперечные силы  $Q_x, Q_y$ .

На рис. 34 показан участок вала с закрепленным на нем шкивом ременной передачи. В поперечных сечениях вала возникает крутящий момент  $M_{кр}$ , изгибающий момент  $M_{из}$  и поперечная сила  $Q$ .

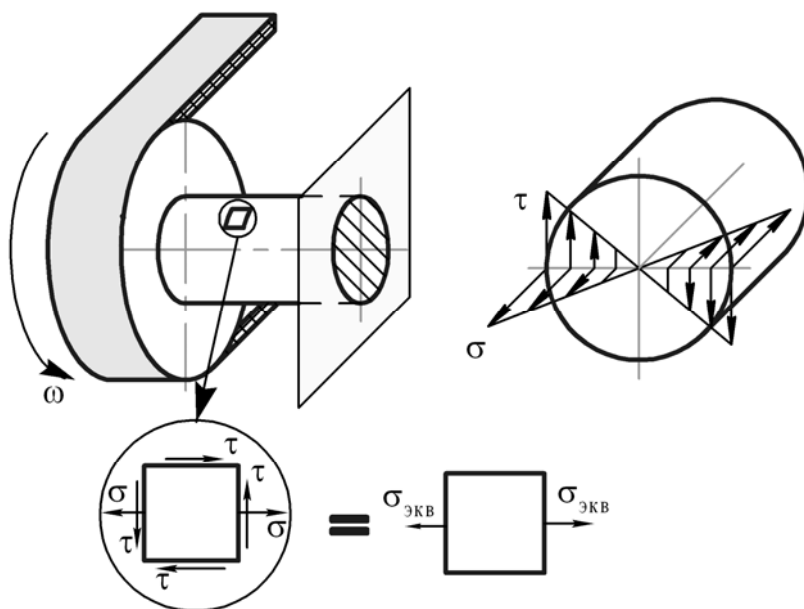


Рис. 34. Совместное действие изгиба и кручения

Расчет на прочность валов работающих при совместном действии изгиба и кручения производится по *опасным точкам*. Опасные точки находятся в *опасном сечении*, в котором достигают наибольших значений полный изгибающий момент  $M_{из}$  и крутящий момент  $M_{кр}$ . На рис. 34 в опасном сечении показана эпюра распределения нормальных напряжений  $\sigma$  от изгибающего момента  $M_{из}$  и касательных напряжений  $\tau$  от крутящего момента  $M_{кр}$ . Из эпюр видно, что максимальные напряжения как касательные, так и нормальные, возникают в точках

контура сечения. Эти точки и будут являться *опасными точками*.

Если в окрестности какой-либо точки вала выделить бесконечно малый элемент в виде кубика (см. рис. 34), то он будет находиться в *плоском напряженном состоянии*. Для того чтобы сформулировать условие прочности, необходимо перейти от плоского напряженного состояния к эквивалентному ему линейному напряженному состоянию (эквивалентное напряженное состояние, см. рис 34).

*Эквивалентное напряженное состояние* – это одноосное напряженное состояние, *равноопасное* с заданным напряженным состоянием.

Переход от заданного напряженного состояния к эквивалентному состоянию осуществляется с помощью *теорий прочности*.

Как правило, валы изготавливают из стали, поэтому их расчет рекомендуется проводить по *третьей* или *четвертой* теории прочности.

*Третья теория прочности.* Эквивалентное напряжение по третьей теории прочности при совместном действии изгиба и кручения определяются по формуле

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (34)$$

где  $\sigma = M_{\text{из}}/W_x$  – нормальные напряжения от изгибающего момента,  $\tau = M_{\text{кр}}/W_p$  – касательные напряжения от крутящего момента.

*Примечание.* Касательные напряжения  $\tau$  от поперечной силы  $Q$  не дают вклад в эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{экв}}$ .

Учитывая, что для круглого сечения справедливо равенство,  $W_p = 2W_x$  условие (34) приводится к виду

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \frac{\sqrt{M_{\text{из}}^2 + M_{\text{кр}}^2}}{W_x} = \frac{M_{\text{экв}}^{\text{III}}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где  $M_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{из}}^2 + M_{\text{кр}}^2}$  – *эквивалентный момент* по третьей теории прочности.

*Четвертая теория прочности.* Эквивалентное напряжение по четвертой теории прочности при совместном действии изгиба и кручения определяются по формуле

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (35)$$

Подставляя в (35) выражения для напряжений, и, учитывая, что  $W_p = 2W_x$  условие прочности приводится к виду

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \frac{\sqrt{M_{\text{из}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}}{W_x} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}^{IV}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где  $M_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \sqrt{M_{\text{из}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}$  – эквивалентный момент по четвертой теории прочности.

Четвертая теория прочности более предпочтительна, так как результаты расчетов по этой теории наиболее близки к экспериментальным данным для пластических материалов.

Условие прочности при совместном действии изгиба и кручения можно свести к общему виду

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}^{\text{max}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (36)$$

где  $M_{\text{ЭКВ}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эквивалентного момента, которое вычисляется по третьей или четвертой теории прочности.

Обратите внимание, что условие прочности при совместном действии изгиба и кручения (36) структурно похоже на условие прочности при изгибе (13).

При выполнении расчета вала работающего на совместное действие изгиба и кручения необходимо придерживаться следующего порядка:

- 1) определить крутящий момент, передаваемый шкивами и шестернями и построить эпюру крутящих моментов  $M_{\text{кр}}$ ;
- 2) определить силы, действующие на шкивы и шестерни, привести полученную систему сил к оси вала и определить проекции равнодействующей силы на вертикальную и горизонтальную плоскости;
- 3) построить эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  (в вертикальной и горизонтальной плоскостях);
- 4) построить эпюру суммарных изгибающих моментов  $M_{\text{из}}$ , и определить опасное сечение;
- 5) в опасном сечении рассчитать эквивалентный момент  $M_{\text{ЭКВ}}$  по третьей или четвертой теории прочности и из условия прочности (36) определить диаметр вала.

*Примечание.* Построение эпюр поперечных сил обычно не делают, так как влияние касательных напряжений от этих сил незначительно.



**Пример 9.** Ведущий вал одноступенчатого цилиндрического редуктора приводится во вращение от электродвигателя через ременную передачу. Вал опирается на два подшипниковых узла, на него посажены шкив 1 ременной передачи диаметром  $D_1 = 500$  мм и зубчатая шестерня 2 диаметром  $D_2 = 250$  мм (см. рис. 39). Размеры вала показаны на схеме (см. рис. 35). Материал вала – сталь 40 [ $\sigma$ ] = 100 МПа. Ремни ременной передачи направлены под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту и условно считаются параллельными. Натяжение набегающей на шкив 1 ветви ремня принять в  $\eta = 2$  раз больше, чем сбегаящей. Зубчатая шестерня 2 входит в зацепление с зубчатым колесом 3 ведомого вала в горизонтальной плоскости (на рис. 35 показан штриховым контуром). Радиальную составляющую усилия в зацеплении принять  $F_r = 0,4F_t$ . Передаваемая на вал мощность  $P = 10$  кВт. Угловая скорость вращения вала  $\omega = 50$  с<sup>-1</sup>.

**Требуется:**

- 1) определить диаметр вала из условия прочности, пользуясь четвертой теорией прочности;
- 2) расчетный диаметр вала округлить до ближайшего большего стандартного значения.

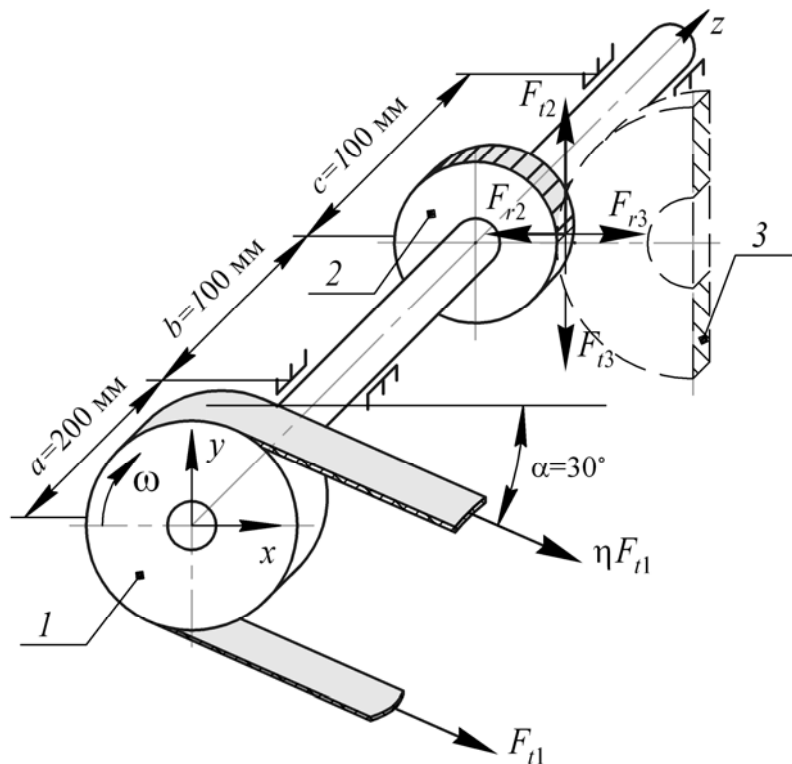


Рис. 35. Схема нагружения вала

Решение задачи производится по этапам, изложенным на стр. 78.

1. Построение эпюры крутящих моментов  $M_{кр}$ . Внешний крутящий момент  $T$  передается от шкива ременной передачи 1 через вал к зубчатому колесу 2 и определяется по формуле

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{10 \cdot 10^3}{50} = 200 \text{ Нм}.$$

С помощью метода сечений (пункт 2.2), можно показать, что внутренний крутящий момент  $M_{кр}$  в сечениях вала, расположенных между шкивом 1 и шестерней 2 равен внешнему моменту,  $M_{кр} = T$ . Строим эпюру крутящих моментов  $M_{кр}$  (см. рис. 36). Эпюра будет располагаться между шкивом 1 и шестерней 2. Свободный конец вала за шестерней 2 кручения не испытывает.

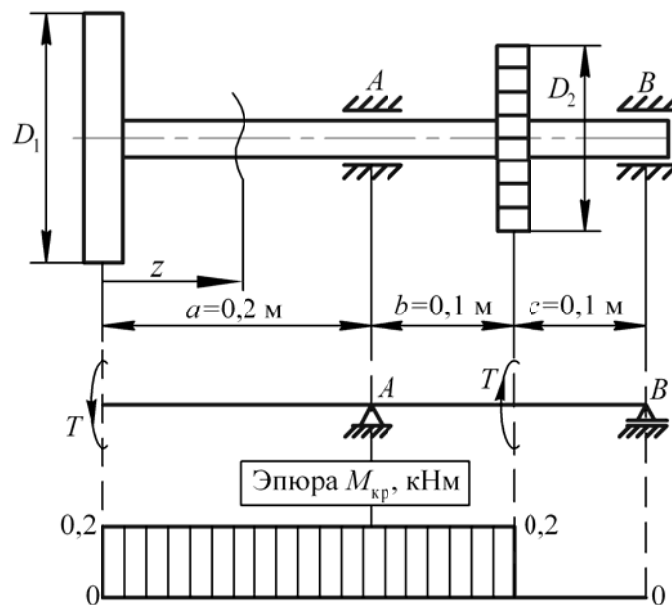


Рис. 36. Эпюра крутящего момента  $M_{кр}$

2. Определение сил, действующих на вал в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Усилия в ремне  $F_{t1}$ ,  $\eta F_{t1}$  и усилия в зубчатом зацеплении  $F_{t2}$ ,  $F_{r2}$  вызывают изгиб вала. Полный изгиб вала можно представить как результат изгиба в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. При этом в горизонтальной плоскости в поперечных сечениях будет действовать изгибающий момент  $M_y$ , а в вертикальной – момент  $M_x$ . Соответственно, для построения эпюр изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$  необходимо знать проекции внешних сил  $F_{t1}$ ,  $\eta F_{t1}$ ,  $F_{t2}$ ,  $F_{r2}$  на горизонтальную и вертикальную плоскости.

Определим сначала величины всех внешних сил, действующих на шкив и шестерню согласно схеме нагружения (см. рис. 35).

Рассмотрим шкив 1. Шкив передает на вал крутящий момент  $T = 200$  Нм. Этот крутящий момент возникает за счет различного натяжения набегающей и сбегающей ветвей ремня (рис. 37) и определяется

$$T = \eta F_{t1} \frac{D_1}{2} - F_{t1} \frac{D_1}{2}.$$

Отсюда натяжение сбегающей ветви ремня

$$F_{t1} = \frac{2T}{D_1(\eta - 1)} = \frac{2 \cdot 200}{0,5(2 - 1)} = 800 \text{ Н} = 0,8 \text{ кН}.$$

Соответственно натяжение набегающей ветви ремня

$$\eta F_{t1} = 2 \cdot 0,8 = 1,6 \text{ кН}.$$

Система сил, действующих на шкив 1 (силы  $F_{t1}$  и  $\eta F_{t1}$ ), заменяется равнодействующей силой  $F_1$ , которая приводится к оси вала (см. рис. 37).

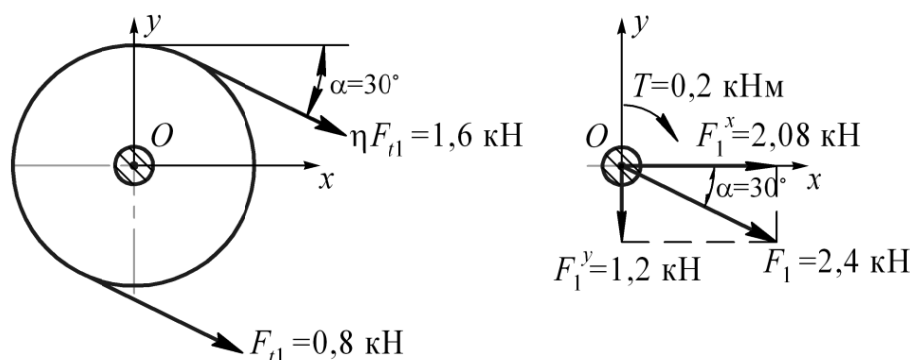


Рис. 37. Схема приведения сил, действующих на шкив 1, к оси вала

Проекция равнодействующей внешних сил будет равна алгебраической сумме проекций этих сил на рассматриваемую ось. При выбранной системе координат, проекции равнодействующей силы  $F_1$ , приведенной к оси вала, будут равны

$$F_1^x = F_{t1} \cos \alpha + \eta F_{t1} \cos \alpha = F_{t1} \cos \alpha (1 + \eta) = 0,8 \cdot 0,866 \cdot 3 = 2,08 \text{ кН};$$

$$F_1^y = -F_{t1} \sin \alpha - \eta F_{t1} \sin \alpha = -F_{t1} \sin \alpha (1 + \eta) = -0,8 \cdot 0,5 \cdot 3 = -1,2 \text{ кН};$$

*Замечание.* Значение проекции  $F_1^y$  отрицательное, это означает, что вектор силы  $F_1^y$  направлен в сторону противоположную положительному направлению оси  $y$  (как показано на рис. 37).

Рассмотрим шестерню 2. Вал передает шестерне 2 крутящий момент  $T = 200$  Нм. При этом, на шестерню 2, которая находится в прямозубчатом зацеплении, будет действовать усилие, которое раскладывается на окружное  $F_{t2}$ , и радиальное  $F_{r2}$  (рис. 35, 38). Крутящий момент  $T$  связан с окружной силой соотношением

$$T = F_{t2} \frac{D_2}{2}.$$

Отсюда окружная сила  $F_{t2}$  на шестерне 2

$$F_{t2} = \frac{2T}{D_2} = \frac{2 \cdot 200}{0,25} = 1600 \text{ Н} = 1,6 \text{ кН}.$$

Радиальная сила  $F_{r2}$  на шестерне 2 согласно условию задачи

$$F_{r2} = 0,4F_{t2} = 0,4 \cdot 1,6 = 0,64 \text{ кН}.$$

Система сил, действующих на шестерню 2 (силы  $F_{t2}$  и  $F_{r2}$ ), заменяется равнодействующей силой  $F_2$ , которая приводится к оси вала (см. рис. 38).

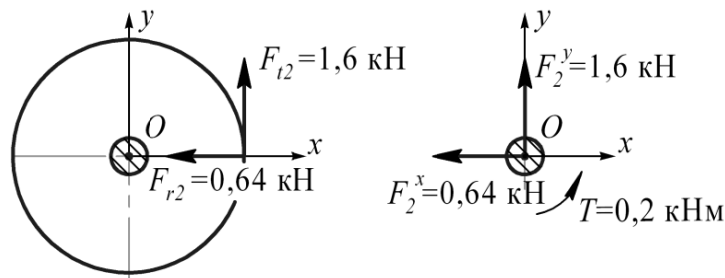


Рис. 38. Схема приведения сил, действующих на шестерню 2, к оси вала

Из схемы, изображенной на рис. 38 видно, что проекции равнодействующей силы, приведенной к оси вала, будут равны

$$F_2^x = -F_{r2} = -0,64 \text{ кН};$$

$$F_2^y = F_{t2} = 1,6 \text{ кН}.$$

*Замечание.* Значение проекции  $F_2^x$  отрицательное, это означает, что вектор силы  $F_2^x$  направлен в сторону противоположную положительному направлению оси  $x$ , как показано на рис. 38.

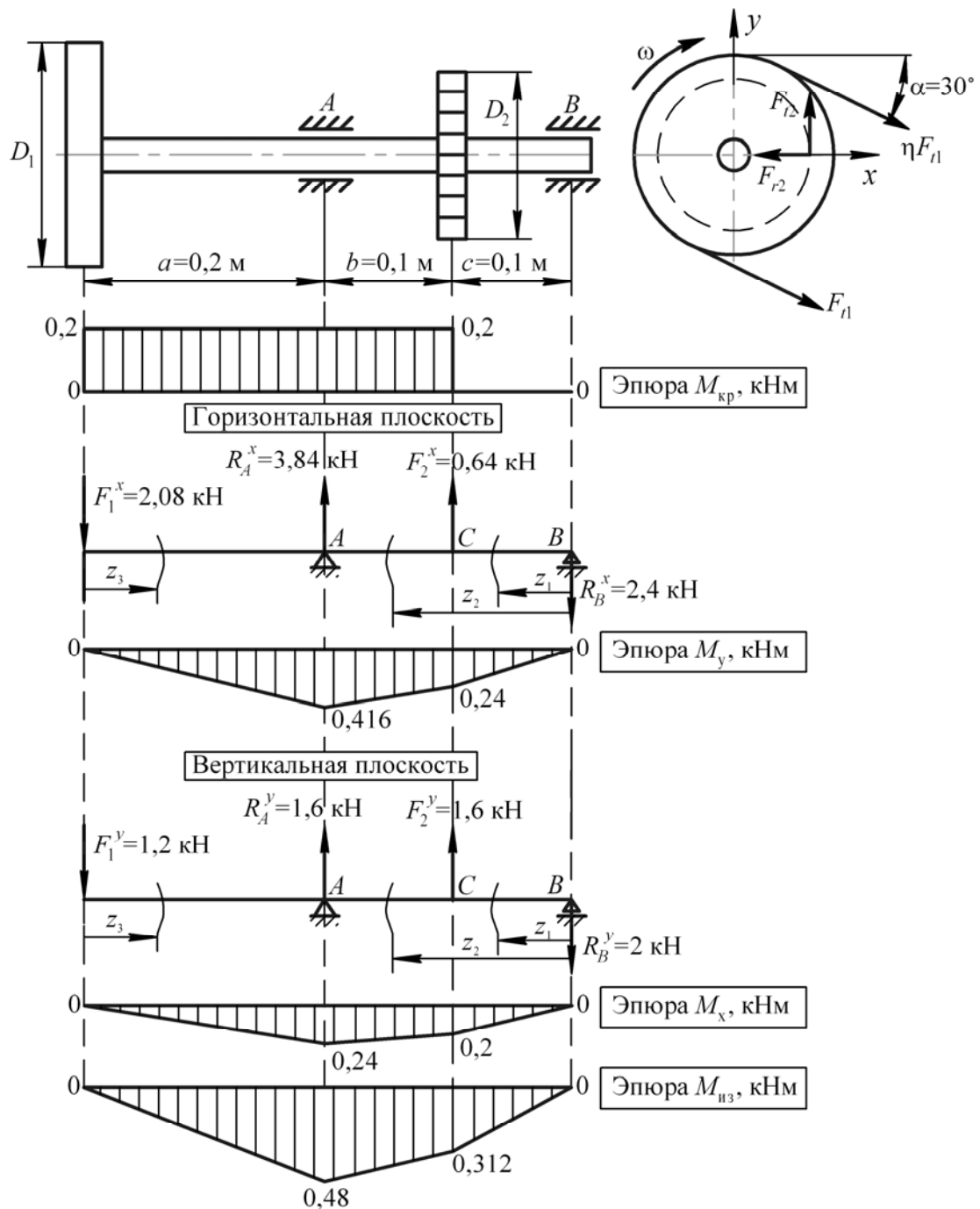


Рис. 39. Эпюры крутящего и изгибающих моментов

3. Построение эпюр изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ . Рассматриваем изгиб вала в горизонтальной плоскости. Составляем расчетную схему (см. рис. 39). На вал действуют две внешние силы  $F_1^x$  и  $F_2^x$ , а также реакции опор  $R_A^x$  и  $R_B^x$ . Определяем реакции опор из уравнений равновесия.

$$\sum_k M_A(\mathbf{F}_k) = 0; \quad F_1^x a + F_2^x b - R_B^x (b + c) = 0.$$

Отсюда

$$R_B^x = \frac{F_1^x a + F_2^x b}{(b + c)} = \frac{2,08 \cdot 0,2 + 0,64 \cdot 0,1}{(0,1 + 0,1)} = 2,4 \text{ кН}.$$

$$\sum_k M_B(\mathbf{F}_k) = 0; \quad F_1^x (a + b + c) - F_2^x c - R_A^x (b + c) = 0; .$$

$$R_A^x = \frac{F_1^x (a + b + c) - F_2^x c}{(b + c)} = \frac{2,08 \cdot (0,2 + 0,1 + 0,1) - 0,64 \cdot 0,1}{(0,1 + 0,1)} = 3,84 \text{ кН}.$$

Делаем проверку вычислений:

$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx} = 0 \quad - F_1^x + R_A^x + F_2^x - R_B^x &= 0; \\ -2,08 + 3,84 + 0,64 - 2,4 &= 0. \end{aligned}$$

Реакции опор определены верно.

Строим эпюру изгибающих моментов  $M_y$  (в горизонтальной плоскости). Определяем положение характерных сечений, которые имеют текущие координаты  $z_1, z_2, z_3$ . Используя метод сечений, составляем уравнения для изгибающего момента на каждом из участков (см. пункты 2.2 и 2.7).

$$0 \geq z_1 \geq 0,1 \text{ м};$$

$$M_y(z_1) = -R_B^x z_1; \quad M_y(z_1 = 0) = 0;$$

$$M_y(z_1 = 0,1) = -2,4 \cdot 0,1 = -0,24 \text{ кНм}.$$

$$0,1 \text{ м} \geq z_2 \geq 0,2 \text{ м};$$

$$M_y(z_2) = -R_B^x z_2 + F_2^x (z_2 - c); \quad M_y(z_2 = 0,1) = -0,24 \text{ кНм};$$

$$M_y(z_2 = 0,2) = -0,416 \text{ кНм}.$$

$$0 \geq z_3 \geq 0,2 \text{ м}$$

$$M_y(z_3) = -F_1^x z_3; \quad M_y(z_3 = 0) = 0;$$

$$M_y(z_3 = 0,2) = -2,08 \cdot 0,2 = -0,416 \text{ кНм}.$$

По полученным численным данным графически отображаем эпюру  $M_y$  (см. рис. 39).

Рассматриваем изгиб вала в вертикальной плоскости. Составляем расчетную схему (см. рис. 39). На вал действуют две внешние силы  $F_1^y$  и  $F_2^y$ , а также реакции опор  $R_A^y$  и  $R_B^y$ . Определяем реакции опор из уравнений равновесия.

$$\sum_k M_A(\mathbf{F}_k) = 0; \quad F_1^y a + F_2^y b - R_B^y (b + c) = 0.$$

$$R_B^y = \frac{F_1^y a + F_2^y b}{(b + c)} = \frac{1,2 \cdot 0,2 + 1,6 \cdot 0,1}{(0,1 + 0,1)} = 2 \text{ кН.}$$

$$\sum_k M_B(\mathbf{F}_k) = 0; \quad F_1^y (a + b + c) - F_2^y c - R_A^y (b + c) = 0;$$

$$R_A^y = \frac{F_1^y (a + b + c) - F_2^y c}{(b + c)} = \frac{1,2 \cdot (0,2 + 0,1 + 0,1) - 1,6 \cdot 0,1}{(0,1 + 0,1)} = 1,6 \text{ кН}$$

Делаем проверку вычислений:

$$\sum_k F_{kx} = 0; \quad -F_1^y + R_A^y + F_2^y - R_B^y = 0;$$

$$-1,2 + 1,6 + 1,6 - 2 = 0.$$

Реакции опор определены верно.

Строим эпюру изгибающих моментов  $M_x$  (в вертикальной плоскости). Определяем положение характерных сечений, которые имеют текущие координаты  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ . Составляем уравнения для изгибающего момента на каждом из участков (см. пункты 2.2 и 2.7).

$$0 \geq z_1 \geq 0,1 \text{ м};$$

$$M_x(z_1) = -R_B^y z_1; \quad M_x(z_1 = 0) = 0;$$

$$M_x(z_1 = 0,1) = -2 \cdot 0,1 = -0,2 \text{ кНм.}$$

$$0,1 \text{ м} \geq z_2 \geq 0,2 \text{ м};$$

$$M_x(z_2) = -R_B^y z_2 + F_2^y (z_2 - c); \quad M_x(z_2 = 0,1) = -0,2 \text{ кНм};$$

$$M_x(z_2 = 0,2) = -0,24 \text{ кНм.}$$

$$0 \geq z_3 \geq 0,2 \text{ м};$$

$$M_x(z_3) = -F_1^y z_3; \quad M_x(z_3 = 0) = 0;$$

$$M_x(z_3 = 0,2) = -1,2 \cdot 0,2 = -0,24 \text{ кНм.}$$

По полученным численным данным графически отображаем эпюру  $M_x$  (см. рис. 39).

4. Построение эпюры суммарных изгибающих моментов  $M_{из}$ . Величины суммарных изгибающих моментов для вала определяются как геометрическая сумма изгибающих моментов в горизонтальной и вертикальной плоскостях по формуле  $M_{из} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ .

Суммарный изгибающий момент в сечении вала на опоре А

$$M_{из}^A = \sqrt{(M_x^A)^2 + (M_y^A)^2} = \sqrt{0,416^2 + 0,24^2} = 0,48 \text{ кНм.}$$

Суммарный изгибающий момент в сечении вала в точке С

$$M_{из}^C = \sqrt{(M_x^C)^2 + (M_y^C)^2} = \sqrt{0,24^2 + 0,2^2} = 0,312 \text{ кНм.}$$

Очевидно, что по краям вала суммарный изгибающий момент будет равен нулю.

По полученным численным данным графически отображаем эпюру суммарных изгибающих моментов  $M_{из}$  (см. рис. 39).

Опасным сечением вала будет сечение в опоре А, так как здесь действует максимальный суммарный изгибающий момент,  $M_{из}^{max} = 0,48 \text{ кНм}$  и крутящий момент  $M_{кр} = 0,2 \text{ кНм}$ .

5. Определение эквивалентного момента  $M_{эkv}$  и диаметра вала. Рассчитаем в опасном сечении эквивалентный момент, который по четвертой теории прочности определяется как  $M_{эkv} = \sqrt{M_{из}^2 + 0,75M_{кр}^2}$ .

$$M_{эkv}^{max} = \sqrt{(M_{из}^{max})^2 + 0,75M_{кр}^2} = \sqrt{(0,48)^2 + 0,75 \cdot 0,2^2} = 0,51 \text{ кНм.}$$

Из условия прочности (36) определяем необходимый осевой момент сопротивления сечения вала

$$W_x \geq \frac{M_{эkv}^{max}}{[\sigma]} = \frac{0,51 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 5,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Так как для круглого сечения осевой момент сопротивления  $W_x = \pi d^3/32$ , то расчетный диаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 5,1 \cdot 10^{-6}}{3,14}} = 3,73 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 37,3 \text{ мм.}$$

Значение расчетного диаметра вала необходимо округлить до ближайшего большего стандартного значения (см. приложение 4).

*Заключение.* К проекту принимаем вал диаметром  $d_{ст} = 38 \text{ мм}$ .



### 3. ЗАДАНИЯ К РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧЫМ РАБОТАМ

#### 3.1. Задание 1. Центральное растяжение

Абсолютно жесткий брус, показанный на рис. 3.1, нагружен внешними силами  $F_1$  и  $F_2$ , закреплен шарнирно на опоре и удерживается в равновесии стальным стержнем. Допускаемое напряжение для материала стержня  $[\sigma] = 160$  МПа, модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Значения внешних сил  $F_1$ ,  $F_2$  и размеры конструкции даны в таблице 3.1.

Требуется:

- 1) определить диаметр стального стержня из условия прочности;
- 2) проверить конструкцию на жесткость, учитывая, что максимальное перемещение точки  $C$  бруса не должно превышать величины  $\delta_C$ . При необходимости, пересчитать диаметр стержня из условия жесткости.

#### 3.2. Задание 2. Статически неопределимые задачи при растяжении

Абсолютно жесткий брус  $ABC$ , показанный на рис. 3.2, закреплен шарнирно на опоре и удерживается в равновесии двумя стержнями одинакового поперечного сечения при помощи шарниров. Значения внешних сил  $F_1$  и  $F_2$ , а также размеры конструкции даны в табл. 3.2. Допускаемое напряжение для материала стержней  $[\sigma] = 160$  МПа.

Требуется:

- 1) определить все реактивные силы;
- 2) по наиболее нагруженному стержню определить площади поперечного сечения стержней и их диаметры.

#### 3.3. Задание 3. Поперечный изгиб

На рис. 3.3 даны две балки. Размеры балок, а также значения внешних сил следует взять из таблицы 3.3. Прочерк в таблице 3.3 указывает на то, что данный силовой фактор не действует на балку и показывать его на расчетной схеме не нужно.

Требуется:

- 1) построить для обеих балок эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M_{из}$ ;

- 2) для первой балки из условия прочности подобрать поперечное сечение в виде: а) круга, б) прямоугольника с соотношением сторон 2:1, в) двутавра. Материал балки – сталь Ст.3  $[\sigma] = 160$  МПа;
- 3) вторую балку проверить на прочность. Форму поперечного сечения принять согласно рис. 3.4, а размеры из таблицы 3.3. Материал балки – сталь Ст.3  $[\sigma] = 160$  МПа. Построить эпюру нормальных напряжений по высоте сечения (сечение вычертить в масштабе).

### 3.4. Задание 4. Кручение

К стальному валу приложены четыре крутящих момента:  $T_1, T_2, T_3, T_4$  (рис. 3.5). Стальной вал имеет сплошное сечение и выполнен ступенчатым с диаметрами ступеней  $d_1$  и  $d_2$ . Схему вала принять согласно рис. 3.5, численные данные взять из таблицы 3.4.

Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов;
- 2) определить диаметры ступеней вала  $d_1$  и  $d_2$  из условия прочности, если  $[\tau] = 100$  МПа (диаметры округлить до ближайших больших стандартных согласно приложению 4);
- 3) построить эпюру углов закручивания, если  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа;
- 4) проверить вал на жесткость, если допускаемый относительный угол закручивания  $[\theta] = 1^\circ / \text{м}$ , при необходимости определить диаметры ступеней вала  $d_1$  и  $d_2$  из условия жесткости.

### 3.5. Задание 5. Устойчивость сжатых стержней

Стальной стержень, поперечное сечение которого показано на рис. 3.6, нагружен продольной сжимающей силой  $F$ . Схема закрепления стержня представлена на рис. 21. Численные данные взять из таблицы 3.5. Стержень изготовлен из стали Ст. 3  $[\sigma]_{сж} = 160$  МПа.

Требуется:

- 1) произвести проверочный расчет стержня из условия устойчивости;
- 2) при выполнении условия устойчивости определить процент недогрузки; если условие устойчивости не выполняется, в этом случае определить допускаемую нагрузку;
- 3) определить коэффициент запаса устойчивости.

### 3.6. Задание 6. Внецентренное растяжение (сжатие)

Короткий стержень, поперечное сечение которого показано на рис. 3.7, нагружен продольной силой  $F$ , приложенной в точке  $A$ . Численные данные взять из таблицы 3.6. Допускаемое напряжение на растяжение для материала стержня  $[\sigma]_p = 30$  МПа, на сжатие  $[\sigma]_{сж} = 120$  МПа.

Требуется:

- 1) проверить стержень на прочность;
- 2) построить эпюру напряжений в сечении,

*Замечание:* при решении задачи вычертить поперечное сечение стержня в *масштабе* со всеми размерами, показать точку приложения силы, положение нейтральной линии и опасных точек.

### 3.7. Задание 7. Совместное действие изгиба и кручения

Механизм, схема которого представлена на рис. 3.8, состоит из вала, закрепленного на подшипниковых опорах, ведущего шкива диаметром  $D_1$  и ведомой прямозубой шестерни диаметром  $D_2$ . Механизм передает от электродвигателя к исполнительному звену (на схеме не показаны) мощность  $P$ . Вал вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Через шкив перекинут ремень, ветви которого условно считаются параллельными друг другу. Усилие натяжения набегающей ветви в  $\eta$  раз больше, чем сбегающей. На шестерню действуют окружная сила  $F_t$  и радиальная  $F_r$ . Величина радиальной силы зависит от типа зацепления, при решении задачи принять  $F_r = 0,4 F_t$ .

Требуется определить диаметр вала, пользуясь четвертой (энергетической) теорией прочности, если  $[\sigma] = 100$  МПа. Расчетный диаметр вала округлить до ближайшего большего стандартного согласно приложению 4.

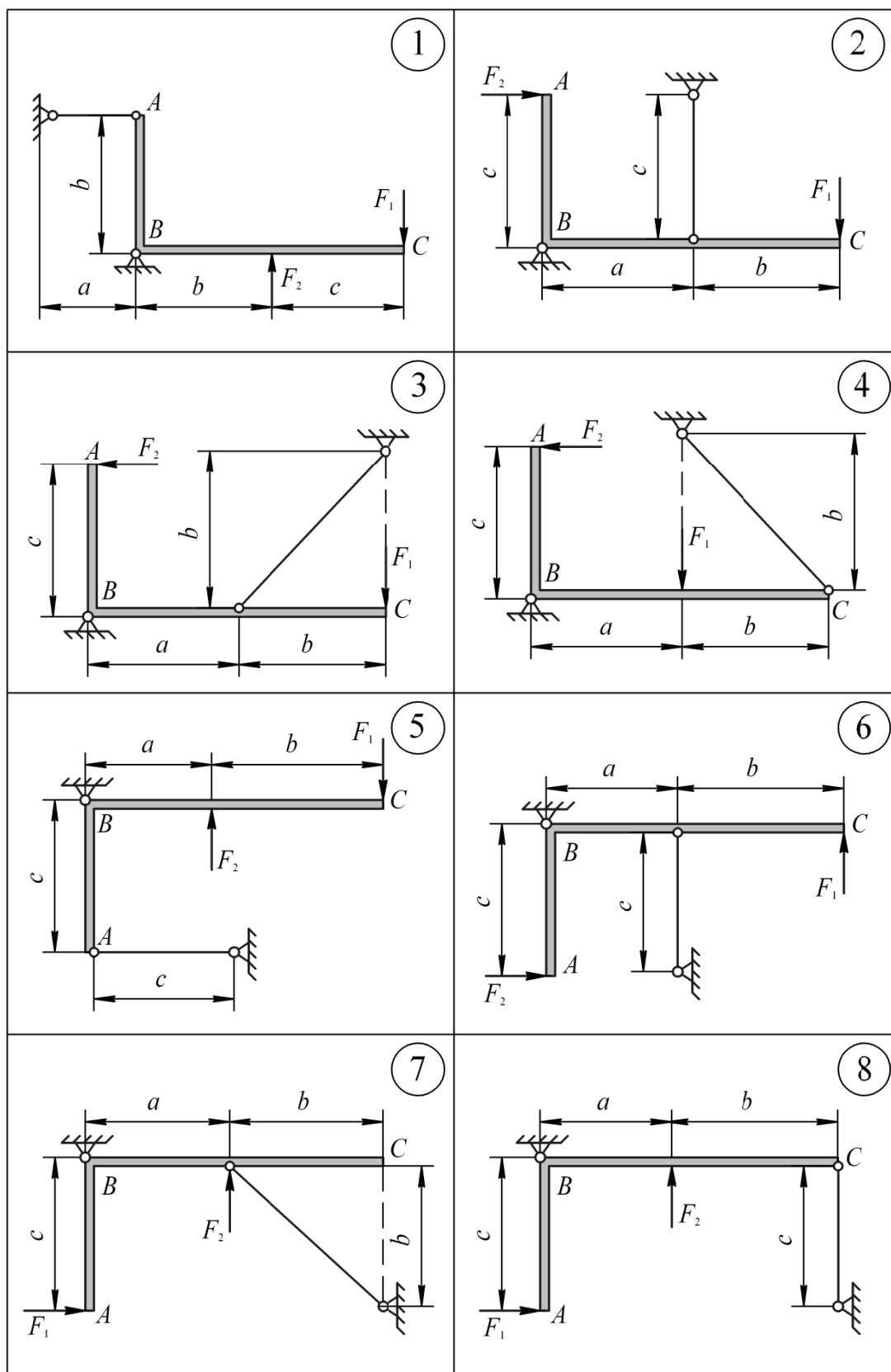


Рис. 3.1. Центральное растяжение

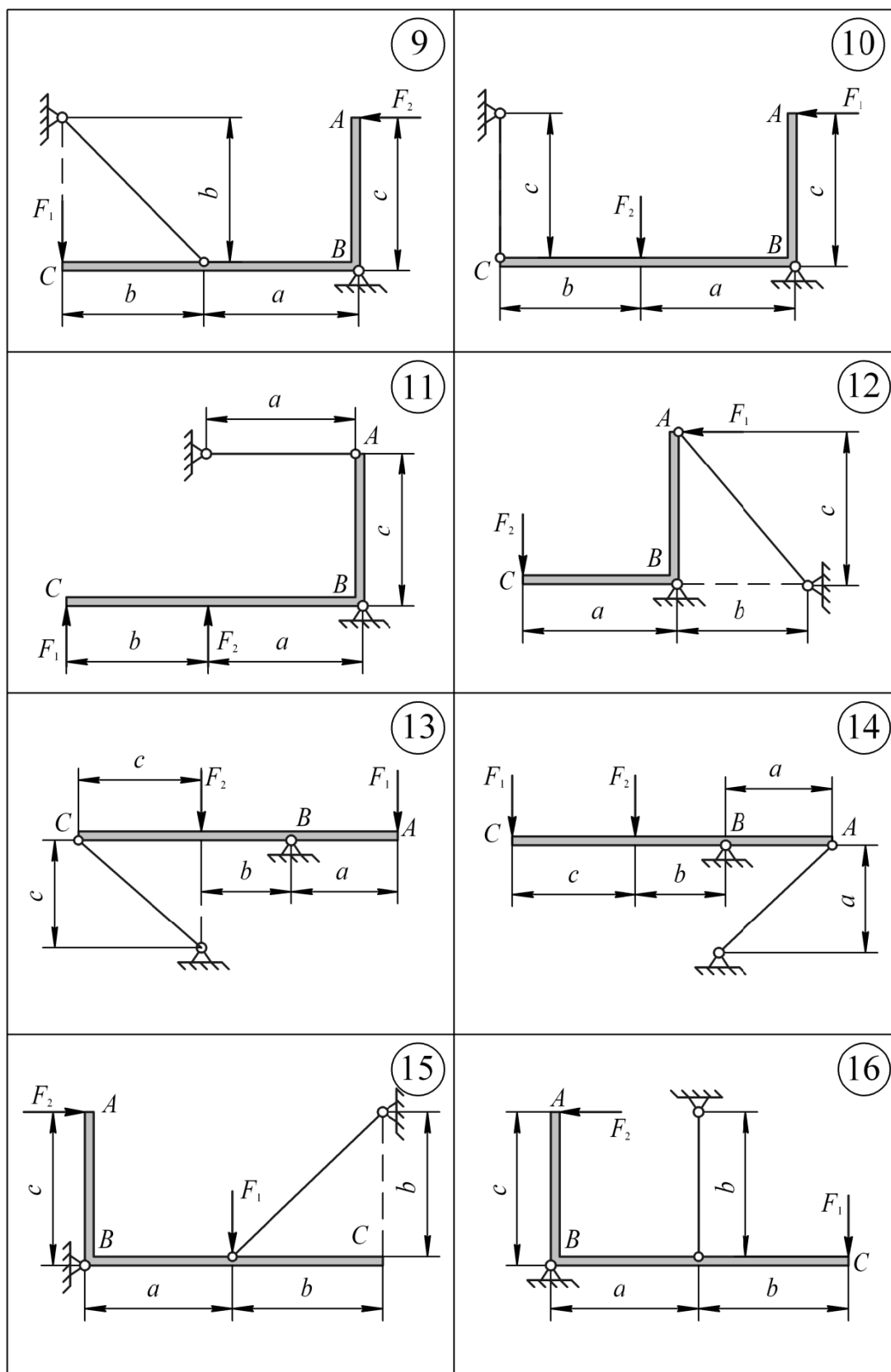


Рис. 3.1. Центральное растяжение

Таблица 3.1

## Центральное растяжение

Номер строки	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$\delta_C$ , мм
1	1,0	2,5	1,4	30	16	5,0
2	1,1	2,4	1,5	28	14	4,9
3	1,2	2,3	1,6	26	12	4,8
4	1,3	2,2	1,7	24	10	4,7
5	1,4	2,1	1,8	22	11	4,6
6	1,5	2,0	1,9	40	20	4,5
7	1,6	1,9	2,0	38	18	4,4
8	1,7	1,8	2,1	36	16	4,3
9	1,8	1,7	2,2	34	14	4,2
10	1,9	1,6	2,3	32	12	4,1
11	2,0	1,5	2,4	30	11	4,0
12	2,1	1,4	2,5	28	10	3,9
13	2,2	1,3	1,0	26	11	3,8
14	2,3	1,2	1,1	24	12	3,7
15	2,4	1,1	1,2	22	10	3,6
16	2,5	1,0	1,3	50	36	5,0
17	2,4	2,5	1,4	48	34	4,9
18	2,3	2,4	1,5	46	32	4,8
19	2,2	2,3	1,6	44	30	4,7
20	2,1	2,2	1,7	42	28	4,6
21	2,0	2,1	1,8	40	26	4,5
22	1,9	2,0	1,9	38	24	4,4
23	1,8	1,9	2,0	36	22	4,3
24	1,7	1,8	2,1	34	20	4,2
25	1,6	1,7	2,2	32	16	4,1
26	1,5	1,6	2,3	30	14	4,0
27	1,4	1,5	2,4	28	12	3,9
28	1,3	1,4	2,5	26	10	3,8
29	1,2	1,3	1,0	24	12	3,7
30	1,1	1,2	1,1	22	10	3,6

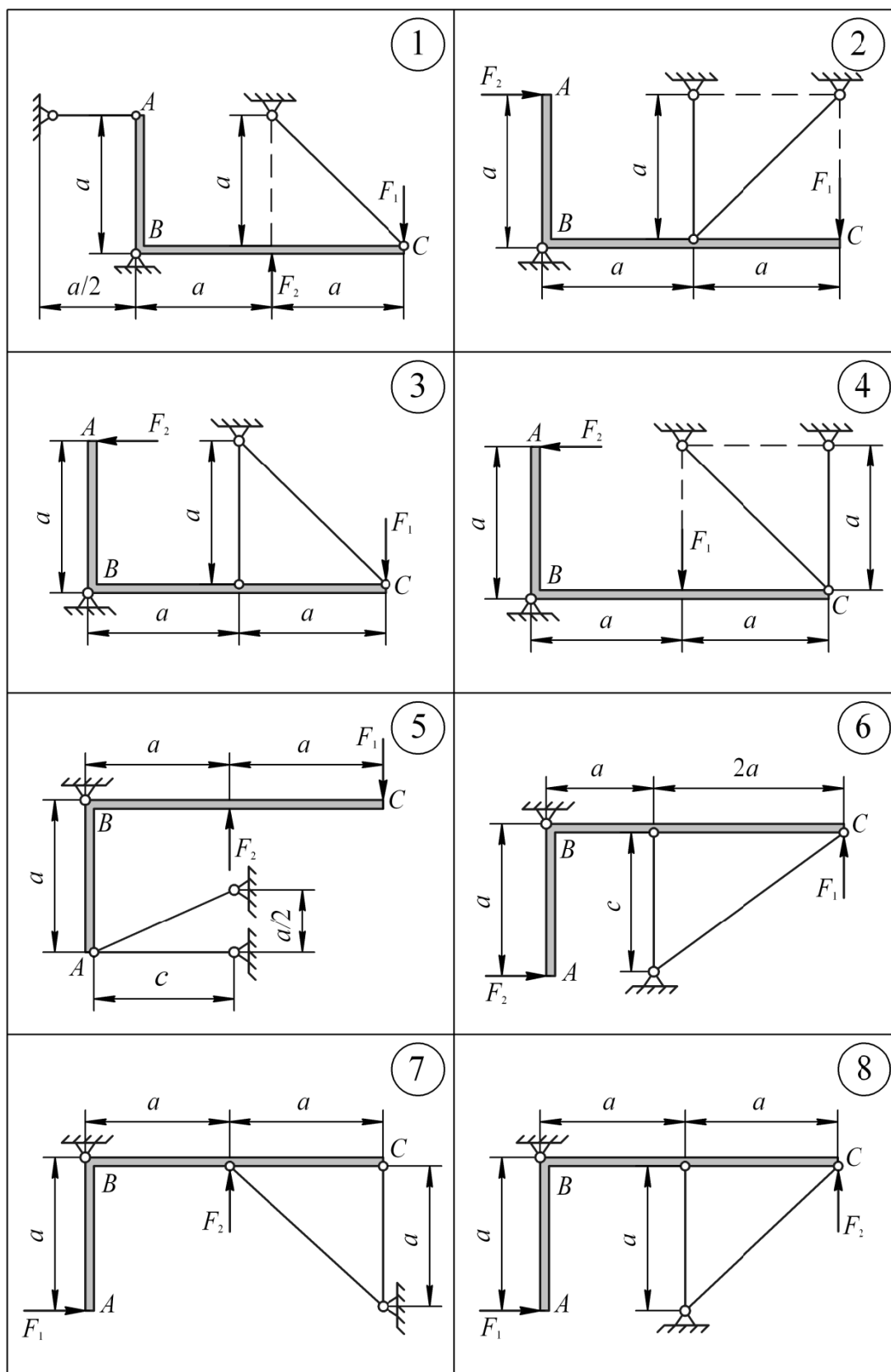


Рис. 3.2. Статически неопределимые задачи при растяжении

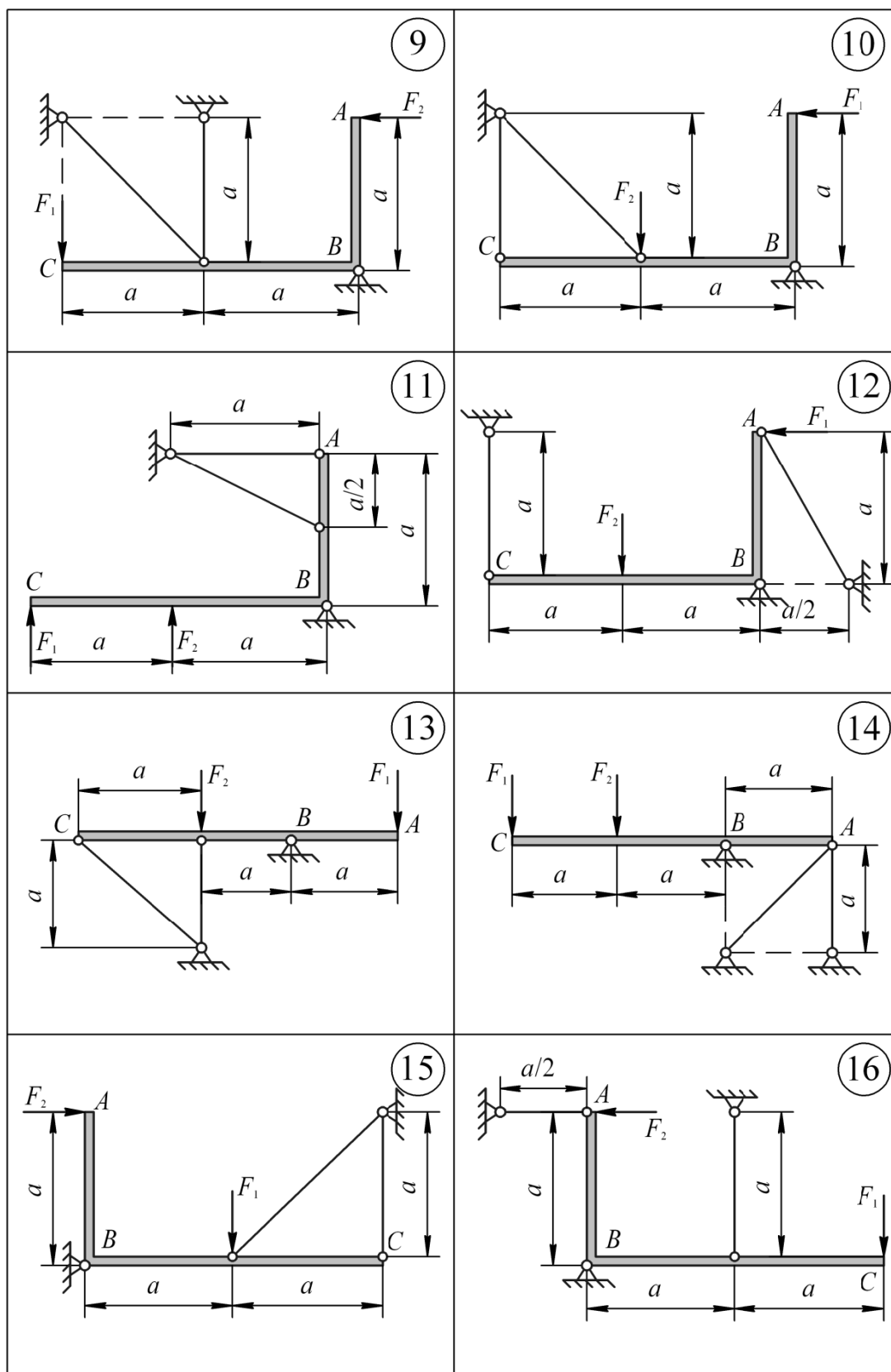


Рис. 3.2. Статически неопределимые задачи при растяжении



Таблица 3.2

## Статически неопределимые задачи при растяжении

Номер строки	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$a$ , м
1	30	16	1,0
2	28	14	1,1
3	26	12	1,2
4	24	10	1,3
5	22	11	1,4
6	40	20	1,5
7	38	18	1,6
8	36	16	1,7
9	34	14	1,8
10	32	12	1,9
11	30	11	2,0
12	28	10	2,1
13	26	11	2,2
14	24	12	2,3
15	22	10	2,4
16	50	36	2,5
17	48	34	2,4
18	46	32	2,3
19	44	30	2,2
20	42	28	2,1
21	40	26	2,0
22	38	24	1,9
23	36	22	1,8
24	34	20	1,7
25	32	16	1,6
26	30	14	1,5
27	28	12	1,4
28	26	10	1,3
29	24	12	1,2
30	22	10	1,1

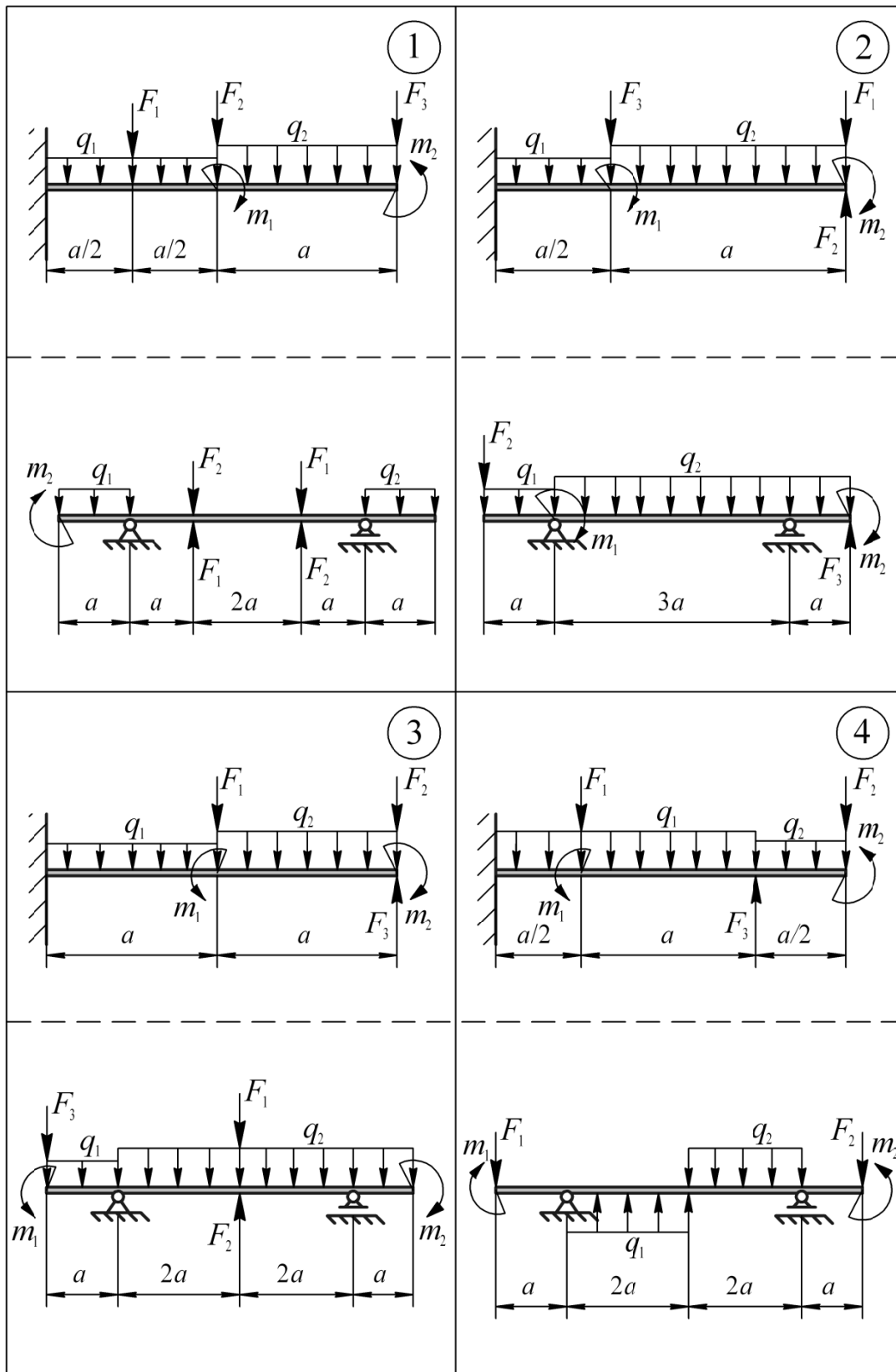


Рис.3.3. Поперечный изгиб

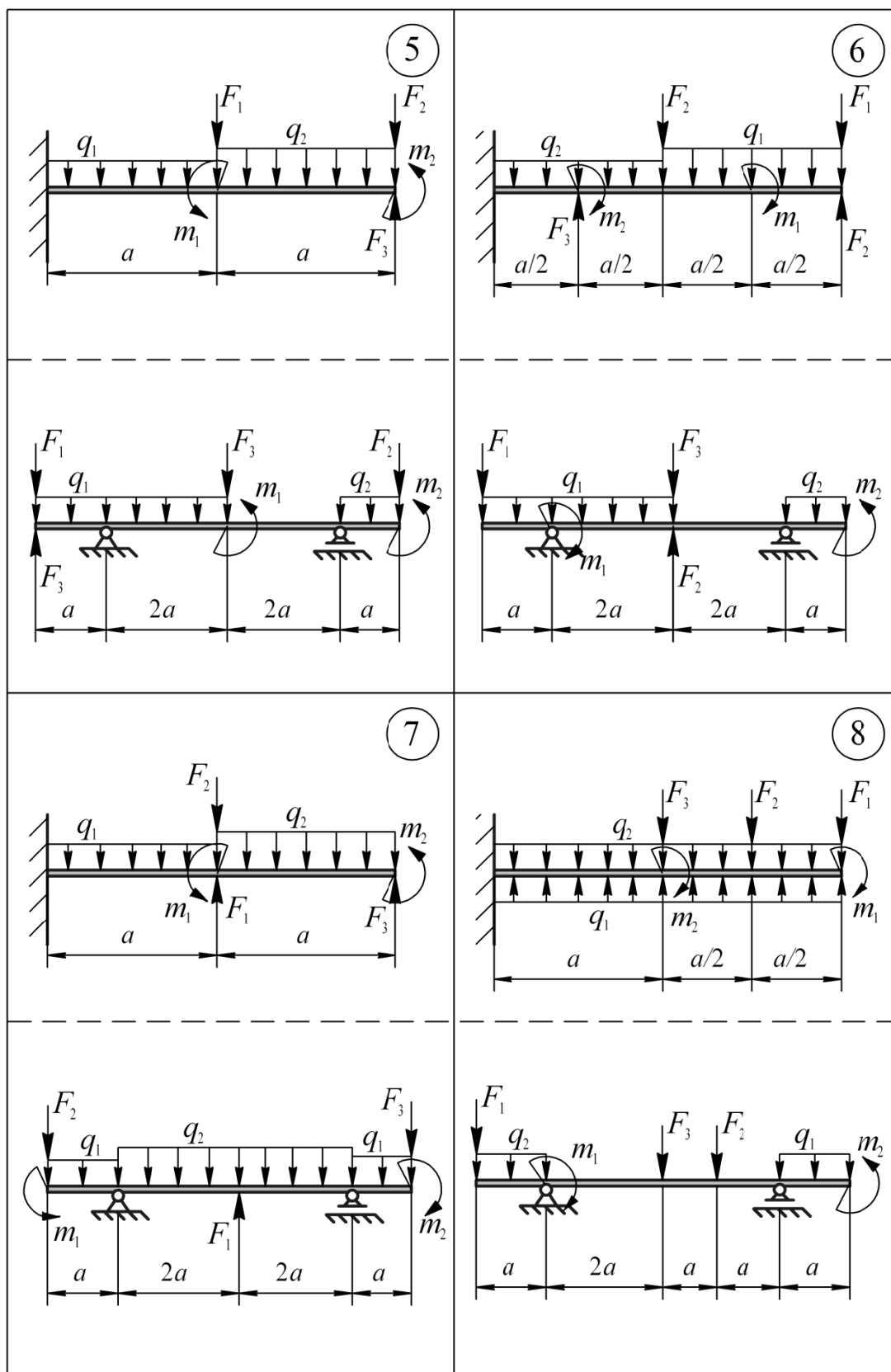


Рис.3.3. Поперечный изгиб

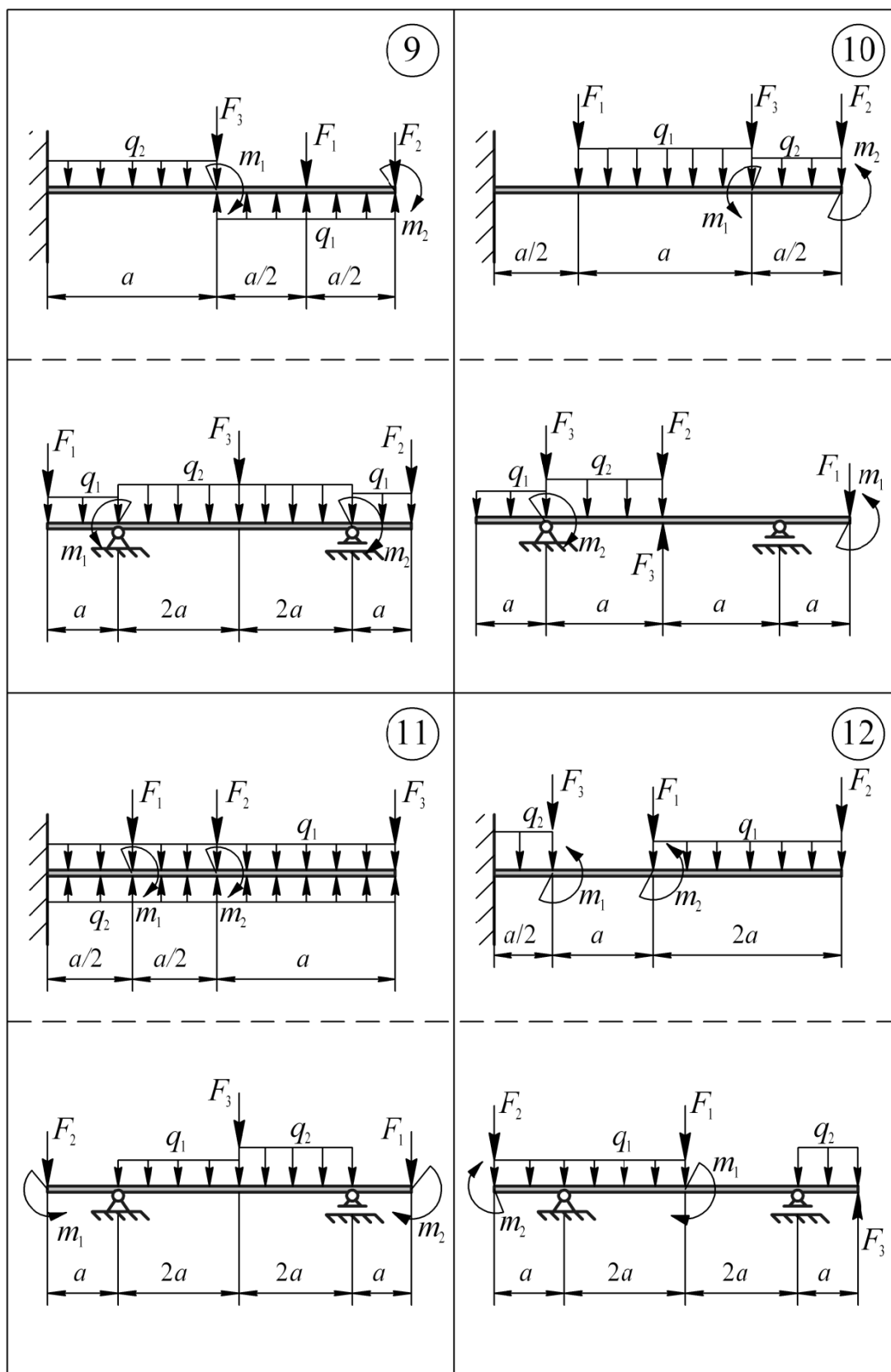


Рис.3.3. Поперечный изгиб

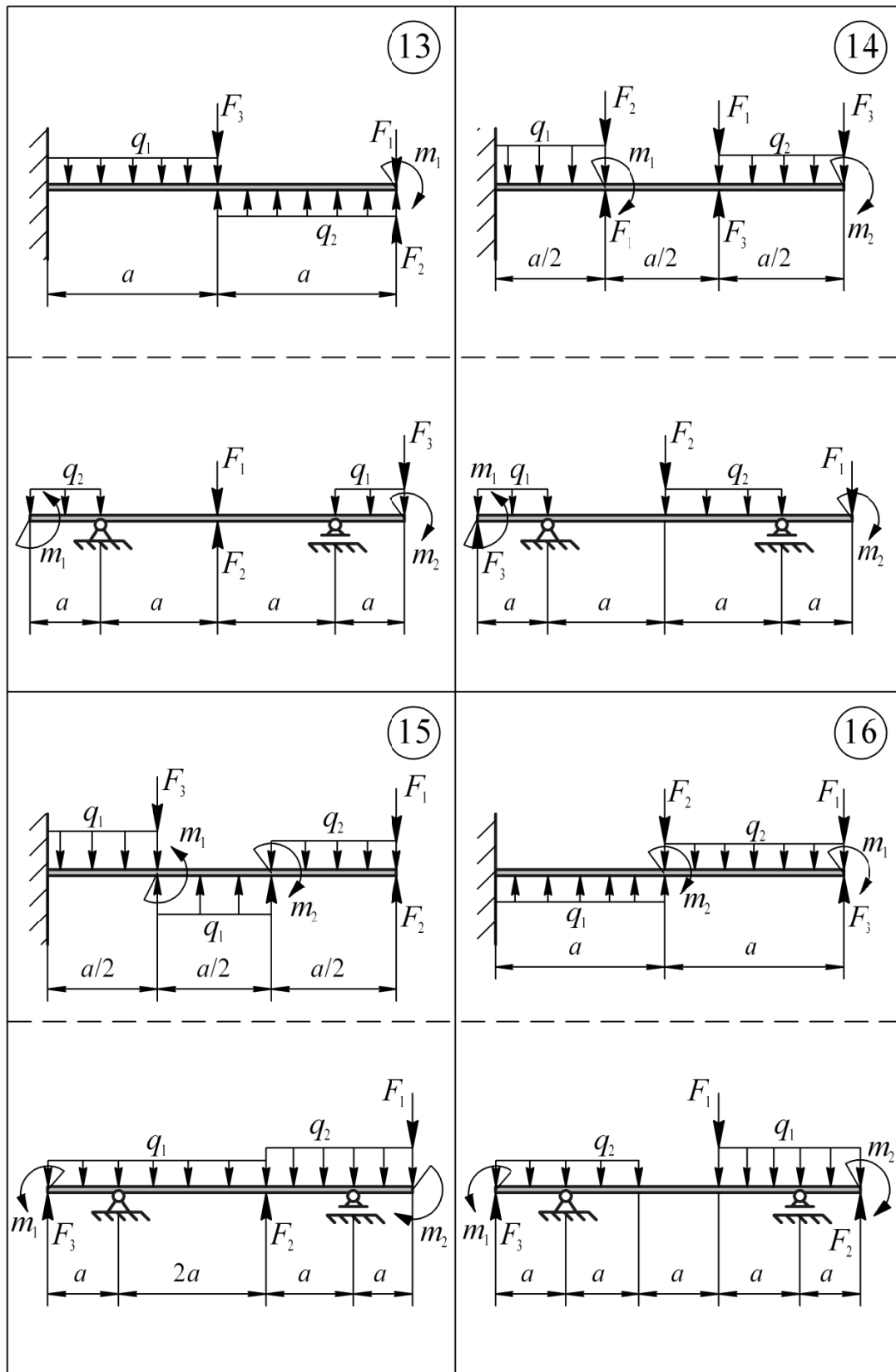


Рис.3.3. Поперечный изгиб

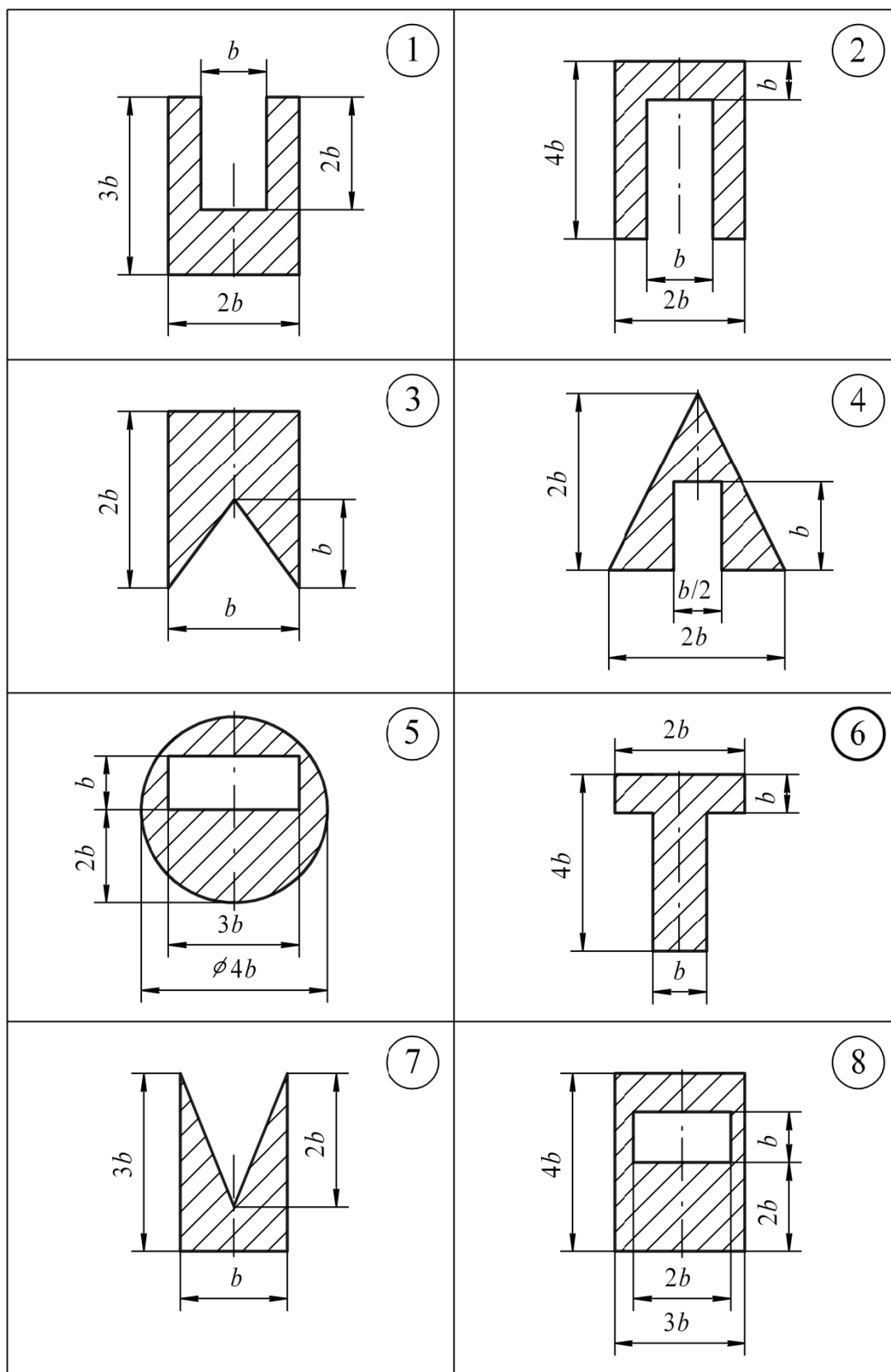


Рис. 3.4. Поперечный изгиб

Таблица 3.3

## Поперечный изгиб

Номер строки	$a$ , м	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$F_3$ , кН	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$m_1$ , кНм	$m_2$ , кНм	№ сечения	$b$ , см
1	1	20	–	–	10	–	24	–	4	10
2	1,5	–	20	–	–	10	–	20	5	5
3	2	–	–	30	10	–	36	–	6	4
4	1	20	–	–	–	10	–	30	7	7
5	1,5	–	20	–	10	–	36	–	8	5
6	2	–	–	20	–	10	–	24	1	8
7	1	30	–	–	–	20	40	–	2	6
8	1,5	–	20	–	10	–	–	30	3	10
9	2	–	–	20	–	10	24	–	4	12
10	1	30	–	–	15	–	–	40	5	7
11	1,5	–	30	–	–	10	36	–	6	6
12	2	–	–	30	10	–	–	40	7	9
13	1	20	–	–	10	–	30	–	8	7
14	1,5	–	30	–	–	10	–	36	1	10
15	2	–	–	20	15	–	30	–	2	8
16	1	30	–	–	–	15	–	40	3	12
17	1,5	–	20	–	10	–	24	–	4	14
18	2	–	–	20	–	10	–	27	5	9
19	1	20	–	–	–	15	40	–	6	8
20	1,5	–	20	–	10	–	–	10	7	3
21	2	10	–	–	20	–	–	6	8	6
22	1	–	10	–	–	20	15	–	1	4
23	1,5	–	–	10	5	–	–	10	2	7
24	2	15	–	–	24	–	20	–	3	5
25	1	–	15	–	–	10	–	20	4	8
26	1,5	–	–	15	5	–	30	–	5	11
27	2	25	–	–	–	8	–	15	6	7
28	1	–	25	–	8	–	20	–	7	5
29	1,5	–	–	25	–	10	–	10	8	9
30	2	25	–	–	10	–	30	–	1	6

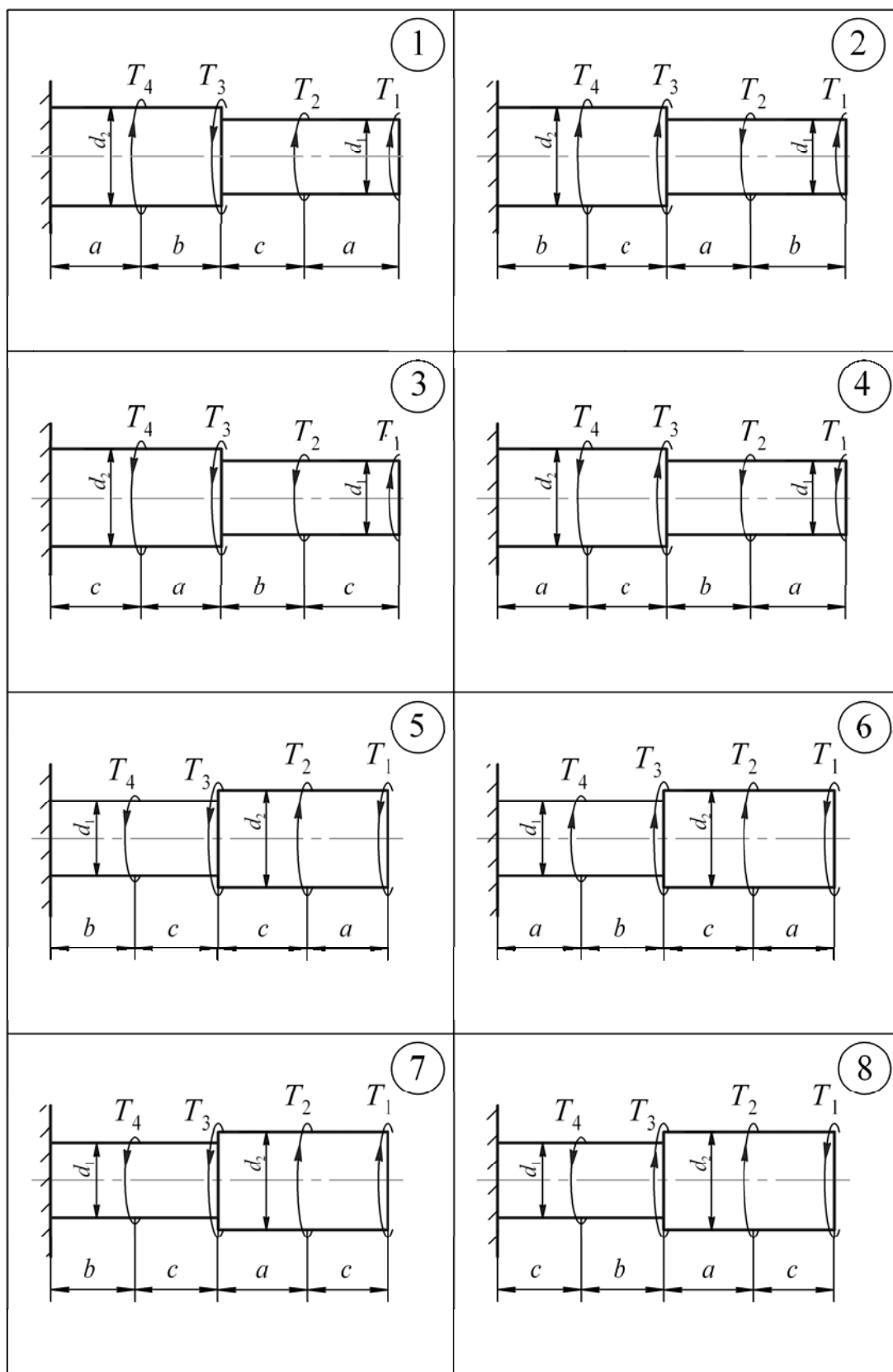


Рис. 3.5. Кручение



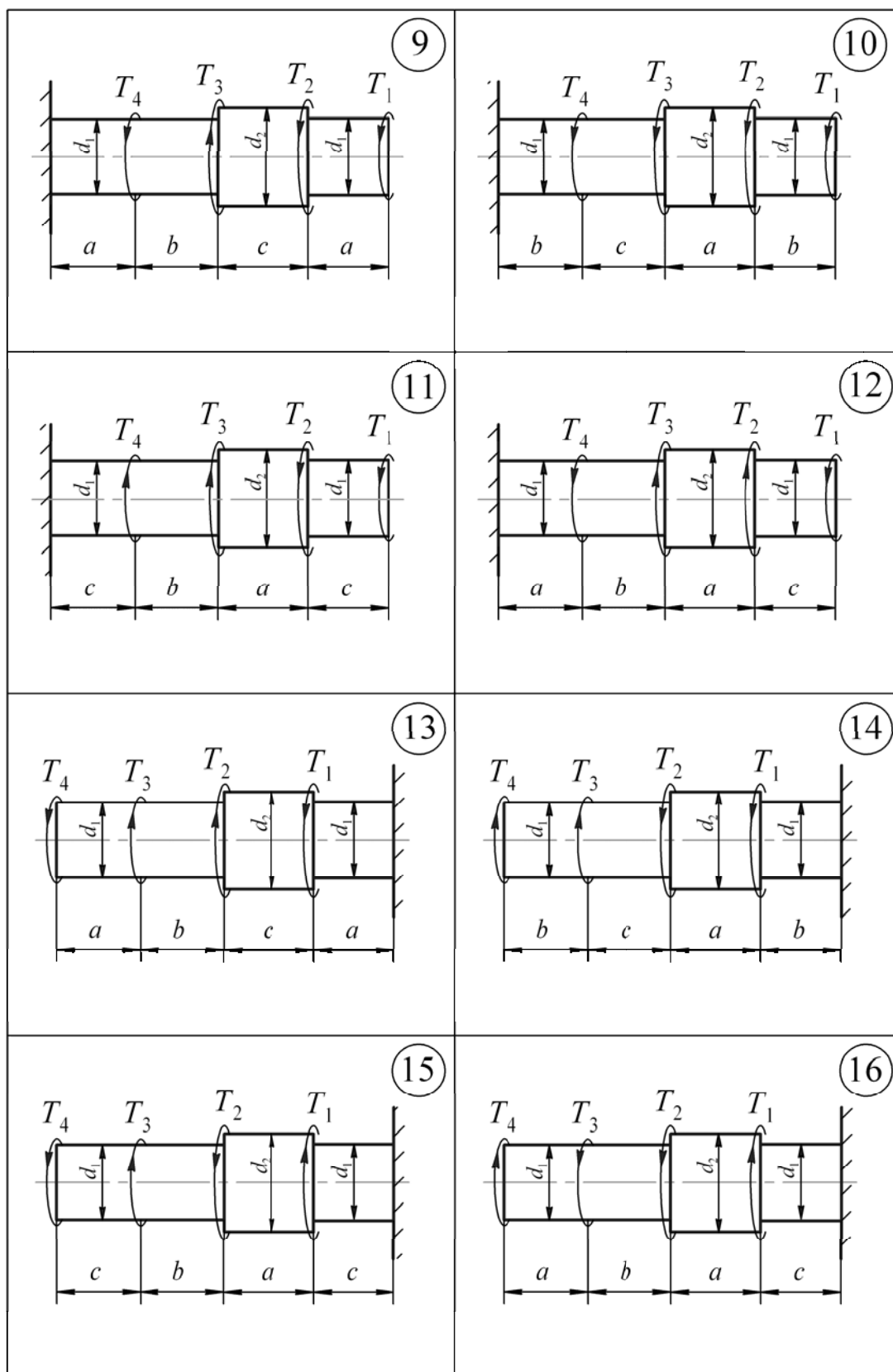


Рис. 3.5. Кручение

Таблица 3.4

## Кручение

Номер строки	Расстояние, м			Крутящие моменты, кНм			
	$a$	$b$	$c$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
1	0,5	0,6	0,7	1	2	3	4
2	0,6	0,7	0,8	2	3	4	5
3	0,7	0,8	0,9	3	4	5	6
4	0,8	0,9	1,0	4	5	6	7
5	0,9	1,0	1,1	4	3	2	1
6	1,0	1,1	1,2	5	4	3	2
7	1,1	1,2	1,3	6	5	4	3
8	1,2	1,3	1,4	7	6	5	4
9	1,3	1,4	1,5	3	2	1	4
10	1,4	1,5	1,6	4	3	2	1
11	1,5	1,6	1,7	5	4	3	6
12	1,6	1,7	1,8	6	5	4	7
13	1,7	1,8	1,9	2	1	4	3
14	1,8	1,9	2,0	3	2	5	4
15	1,9	2,0	0,5	4	3	6	5
16	2,0	0,5	0,6	5	4	7	6
17	0,5	0,7	0,5	3	4	1	2
18	0,6	0,8	0,7	4	5	2	3
19	0,7	0,9	0,8	5	6	3	4
20	0,8	1,0	0,9	6	7	4	5
21	0,9	1,1	1,0	4	2	3	1
22	1,0	1,2	1,1	5	3	4	2
23	1,1	1,3	1,2	6	4	5	3
24	1,2	1,4	1,3	7	5	6	4
25	1,3	1,5	1,4	4	1	2	3
26	1,4	1,6	1,5	5	2	3	4
27	1,5	1,7	1,6	6	3	4	5
28	1,6	1,8	1,7	7	4	5	6
29	1,7	1,9	1,8	4	5	6	2
30	1,8	2,0	1,9	3	7	6	5

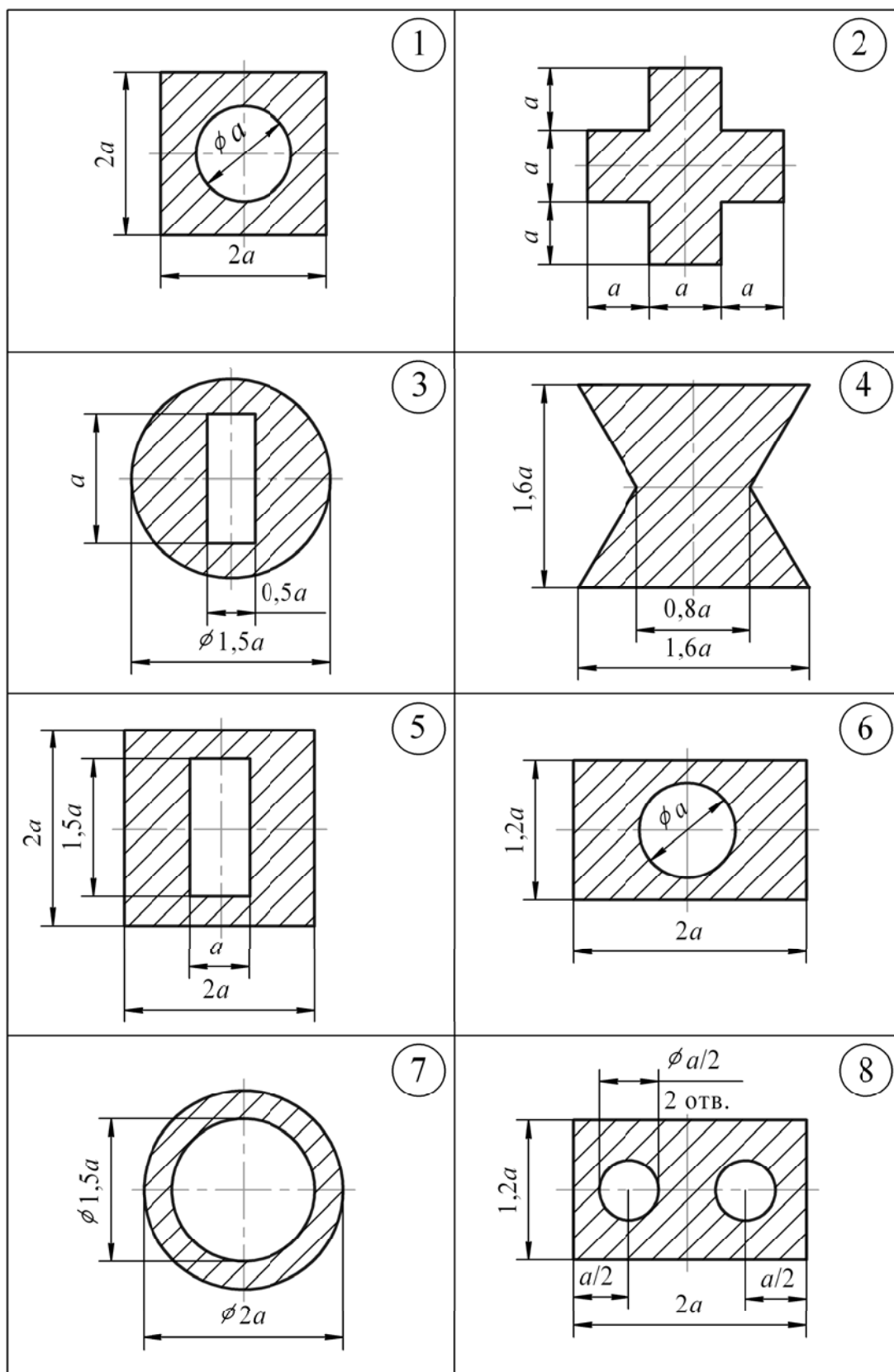


Рис. 3.6. Устойчивость сжатых стержней

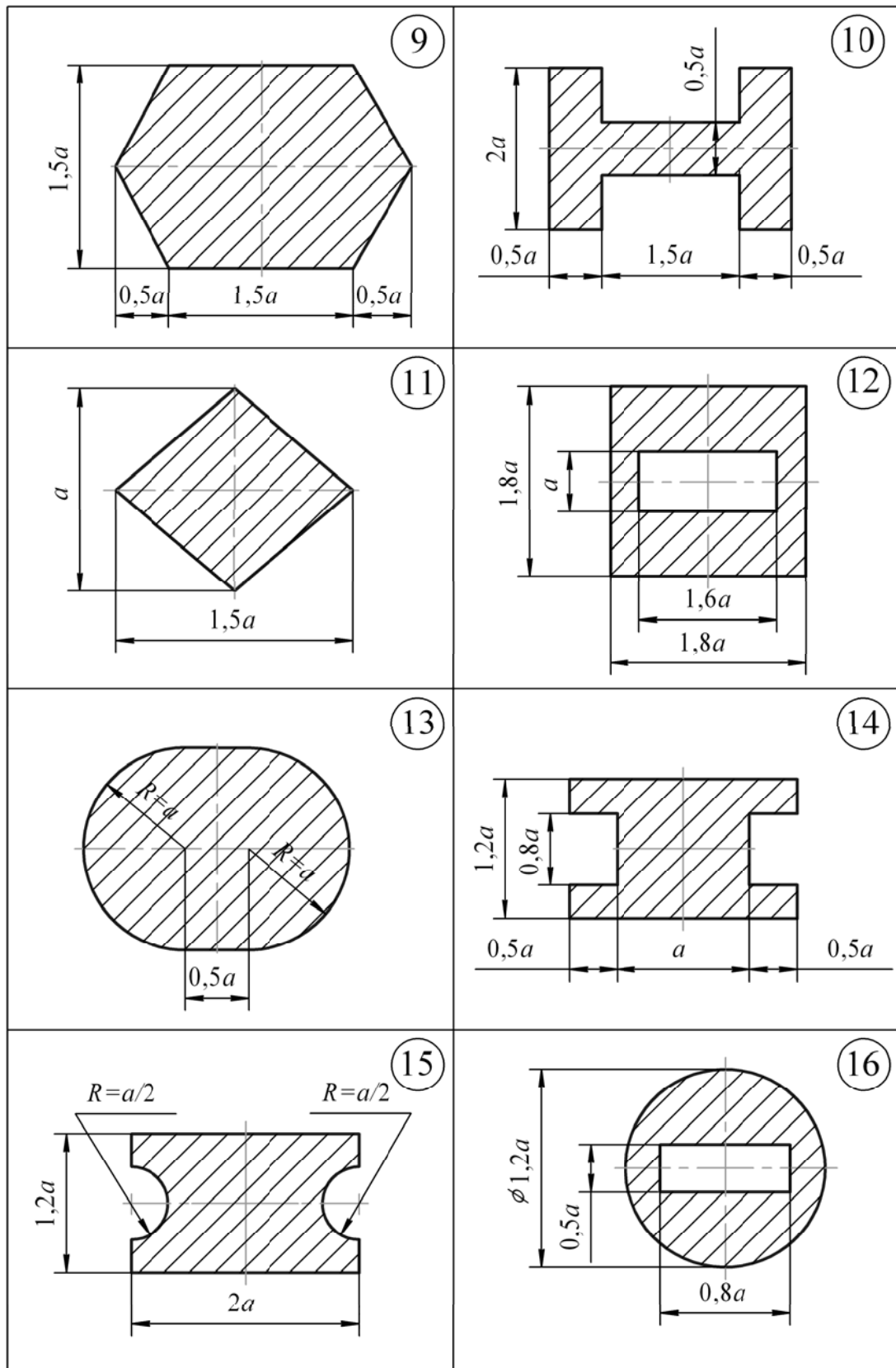


Рис. 3.6. Устойчивость сжатых стержней

Таблица 3.5

## Устойчивость сжатых стержней

Номер строки	Схема закрепления стержня	$a$ , см	$l$ , м	$F$ , кН
1	А	2,0	1,2	90
2	Б	2,1	1,3	100
3	В	2,2	1,4	110
4	Г	2,3	1,5	120
5	Д	2,4	1,6	130
6	А	5,4	1,7	140
7	Б	2,6	1,8	150
8	В	2,7	1,9	160
9	Г	2,8	2,0	170
10	Д	2,9	2,1	180
11	А	4,9	2,0	100
12	Б	2,0	1,2	110
13	В	2,1	1,3	120
14	Г	2,2	1,4	130
15	Д	2,3	1,5	140
16	А	5,0	1,6	150
17	Б	2,5	1,7	160
18	В	2,6	1,8	170
19	Г	2,7	1,9	180
20	Д	2,8	2,0	100
21	А	5,2	2,1	110
22	Б	3,0	2,2	120
23	В	2,0	1,2	130
24	Г	2,1	1,3	140
25	Д	2,2	1,4	150
26	А	5,1	1,5	160
27	Б	2,4	1,6	170
28	В	2,5	1,7	180
29	Г	2,6	1,8	100
30	Д	2,7	1,9	110

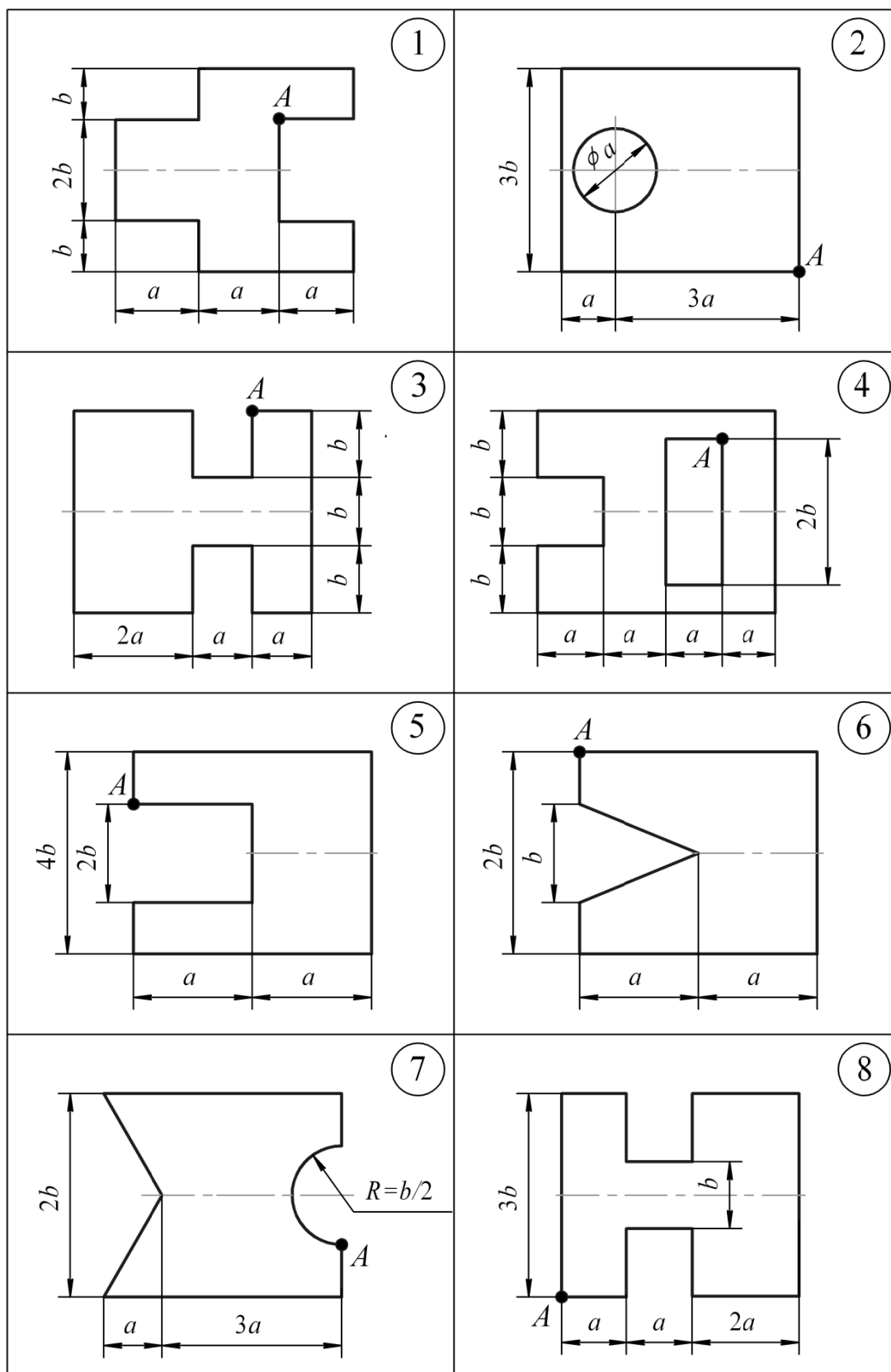


Рис. 3.7. Внецентренное растяжение (сжатие)

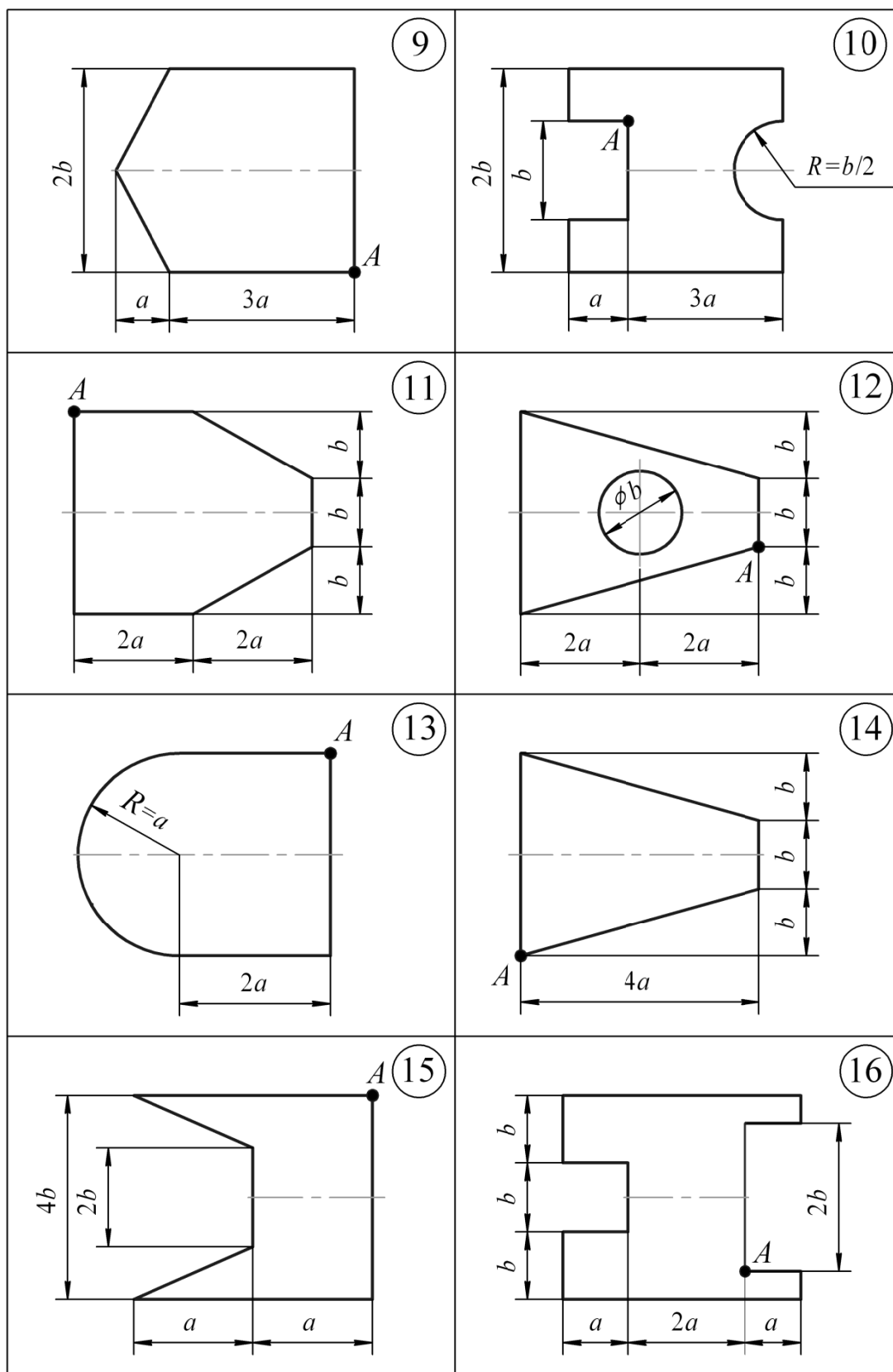


Рис. 3.7. Внецентренное растяжение (сжатие)

Таблица 3.6

## Внецентренное растяжение (сжатие)

Номер строки	Размеры, см		Продольная сила $F$ , кН	Вид нагружения
	$a$	$b$		
1	4	2	40	сжатие
2	5	3	50	растяжение
3	6	4	60	сжатие
4	7	5	70	растяжение
5	8	6	80	сжатие
6	3	3	30	растяжение
7	4	4	40	сжатие
8	5	5	50	растяжение
9	6	6	60	сжатие
10	7	7	70	растяжение
11	3	2	20	сжатие
12	4	3	30	растяжение
13	5	4	40	сжатие
14	6	5	50	растяжение
15	7	6	60	сжатие
16	8	7	70	растяжение
17	5	2	30	сжатие
18	6	3	40	растяжение
19	7	4	50	сжатие
20	8	5	60	растяжение
21	7	7	50	сжатие
22	2	3	30	растяжение
23	3	4	40	сжатие
24	4	5	50	растяжение
25	5	6	60	сжатие
26	6	7	70	растяжение
27	7	8	80	сжатие
28	2	5	40	растяжение
29	3	6	50	сжатие
30	4	7	60	растяжение



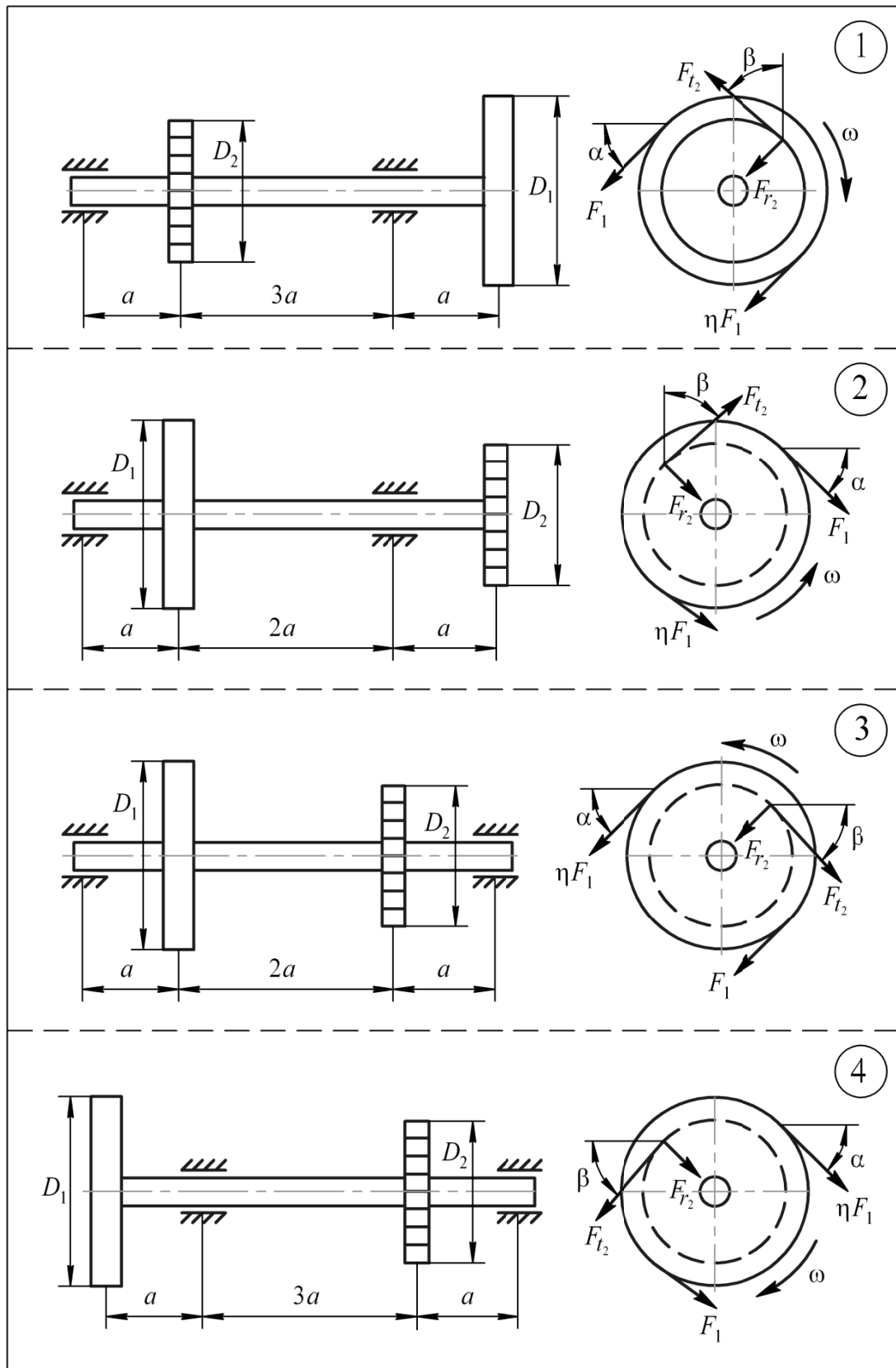


Рис. 3.8. Совместное действие изгиба и кручения

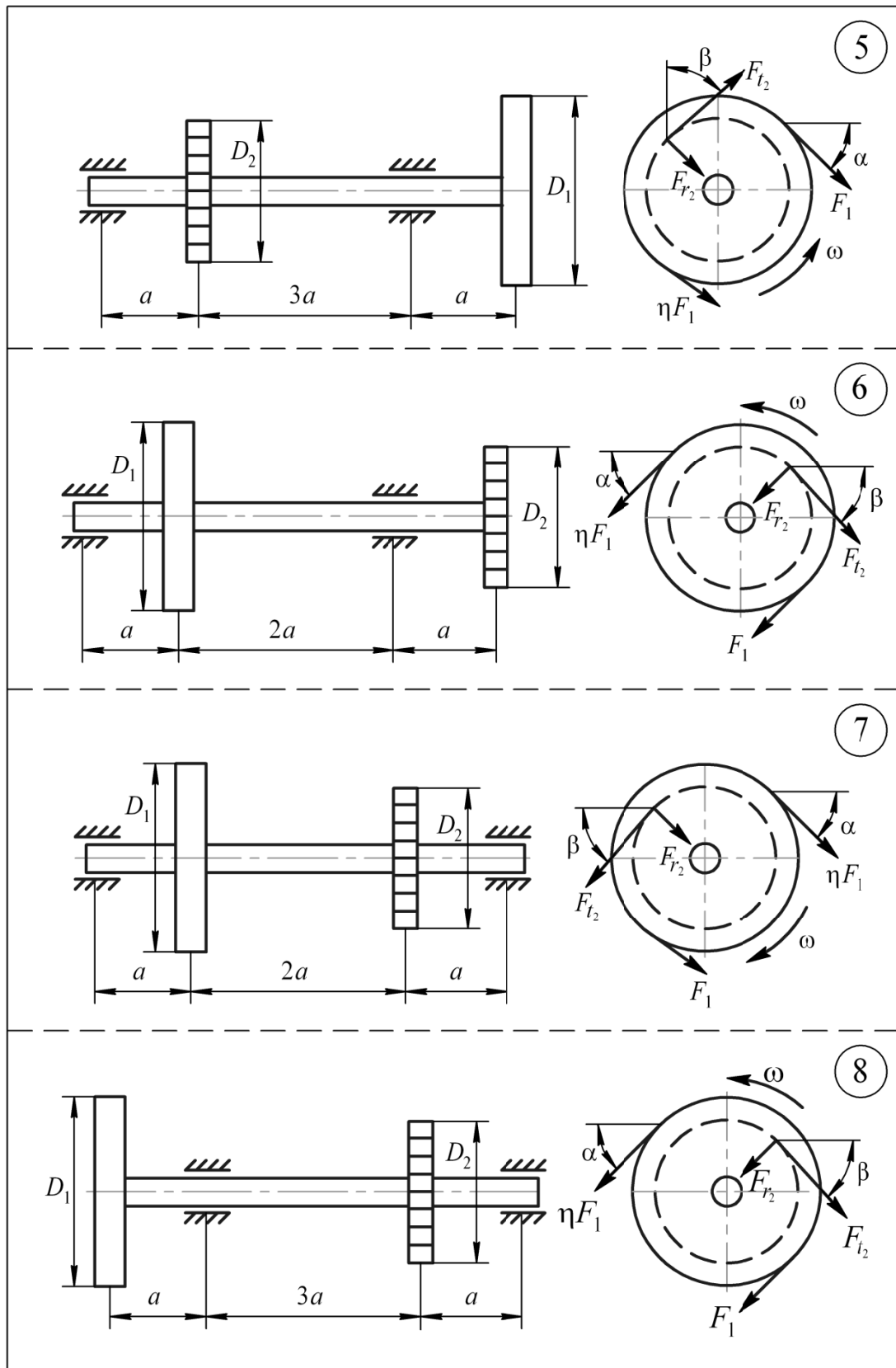


Рис. 3.8. Совместное действие изгиба и кручения

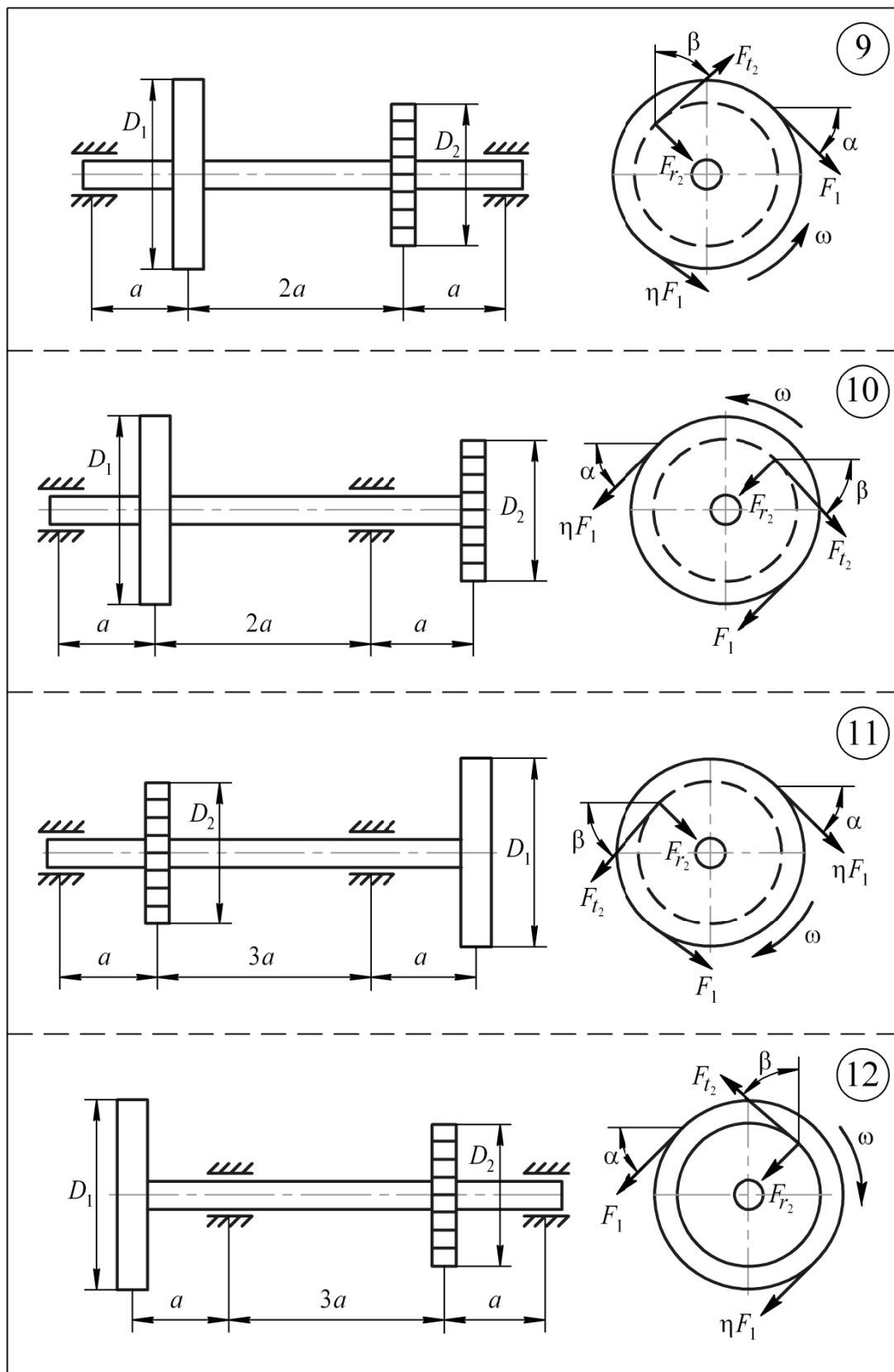


Рис. 3.8. Совместное действие изгиба и кручения

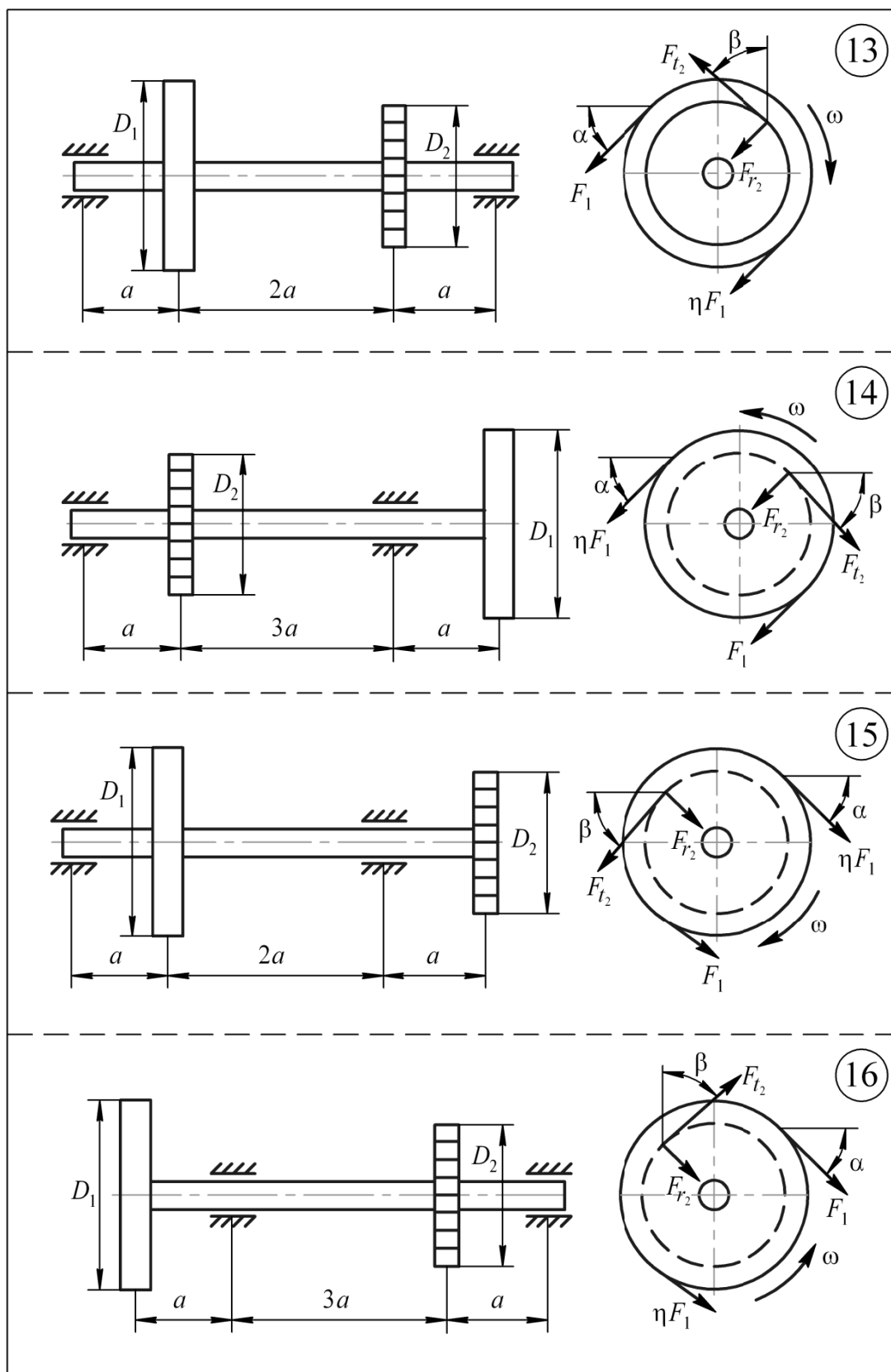


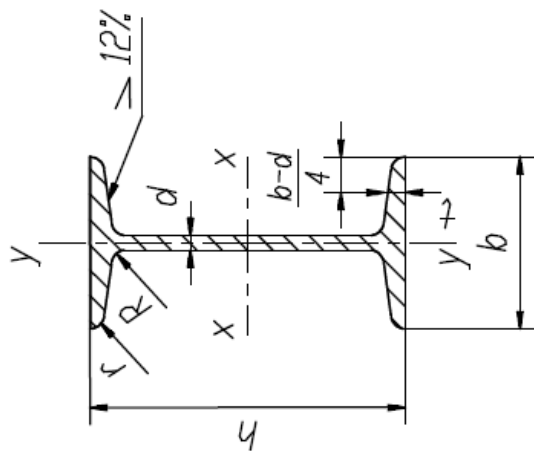
Рис. 3.8. Совместное действие изгиба и кручения

Таблица 3.7

## Совместное действие изгиба и кручения

Номер строки	$a$ , м	$D_1$ , м	$D_2$ , м	$\omega$ , с <sup>-1</sup>	$\alpha$ , °	$\beta$ , °	$\eta$	$P$ , кВт
1	0,10	0,35	0,20	25	30	45	2,0	8
2	0,15	0,36	0,21	30	45	60	2,1	10
3	0,20	0,37	0,22	35	60	30	2,2	12
4	0,25	0,38	0,23	40	60	45	2,3	14
5	0,30	0,39	0,24	45	45	30	2,4	16
6	0,35	0,40	0,25	50	30	60	2,5	18
7	0,40	0,41	0,26	55	30	45	2,6	20
8	0,35	0,42	0,27	60	45	60	2,7	22
9	0,30	0,43	0,28	65	60	30	2,8	24
10	0,25	0,44	0,29	70	60	45	2,9	26
11	0,20	0,45	0,30	75	45	30	3,0	28
12	0,15	0,46	0,31	80	30	60	2,0	30
13	0,10	0,47	0,32	85	30	45	2,1	32
14	0,15	0,48	0,33	90	45	60	2,2	34
15	0,20	0,49	0,34	95	60	30	2,3	36
16	0,25	0,5	0,35	100	60	45	2,4	38
17	0,30	0,35	0,20	95	45	30	2,5	36
18	0,35	0,36	0,21	90	30	60	2,6	34
19	0,40	0,37	0,22	85	30	45	2,7	32
20	0,35	0,38	0,23	80	45	60	2,8	30
21	0,30	0,39	0,24	75	60	30	2,9	28
22	0,25	0,40	0,25	70	60	45	3,0	26
23	0,20	0,41	0,26	65	45	30	2,0	24
24	0,15	0,42	0,27	60	30	60	2,1	22
25	0,10	0,43	0,28	55	30	45	2,2	20
26	0,15	0,44	0,29	50	45	60	2,3	18
27	0,20	0,45	0,30	45	60	30	2,4	16
28	0,25	0,46	0,31	40	60	45	2,5	14
29	0,30	0,47	0,32	35	45	30	2,6	12
30	0,35	0,48	0,33	30	30	60	2,7	10

## СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ



Балки двутавровые (по ГОСТ 8239 – 89)

Обозначения:

$h$  – высота балки;  
 $b$  – ширина полки;  
 $d$  – толщина стенки;  
 $t$  – средняя толщина полки;

$J$  – момент инерции;  
 $W$  – момент сопротивления;  
 $i$  – радиус инерции;  
 $S$  – статический момент полусечения.

Таблица П.1

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения $A$ , см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_{x,3}$ см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_{x,3}$ см <sup>3</sup>	$J_{y,4}$ см <sup>4</sup>	$W_{y,3}$ см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	Масса 1 м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18а	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9

Окончание табл. П.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,0	13,0	71,4	18930	947	16,3	540	666	85,9	3,05	56,1
45	450	160	8,6	14,2	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12	65,2
50	500	170	9,5	15,2	97,8	39290	1570	20,0	905	1040	122	3,26	76,8
55	550	180	10,3	16,5	114	55150	2000	22,0	1150	1350	150	3,44	89,8
60	600	190	11,1	17,8	132	75450	2510	23,9	1450	1720	181	3,60	104
65	650	200	12,0	19,2	153	101400	3120	25,8	1800	2170	217	3,77	120
70	700	210	13,0	20,8	176	134600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94	138
70a	700	210	15,0	24,0	202	152700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01	158
70б	700	210	17,5	28,2	234	175370	5010	27,4	2940	3910	373	4,09	184

## Швеллеры (по ГОСТ 8240 – 97)

Обозначения:

<p><math>h</math> – высота швеллера;  <math>b</math> – ширина полки;  <math>d</math> – толщина стенки;  <math>t</math> – средняя толщина полки;  <math>z_0</math> – расстояние от оси <math>y</math> до наружной грани стенки.</p>	<p><math>J</math> – момент инерции;  <math>W</math> – момент сопротивления;  <math>i</math> – радиус инерции;  <math>S</math> – статический момент полусечения;</p>
--	---

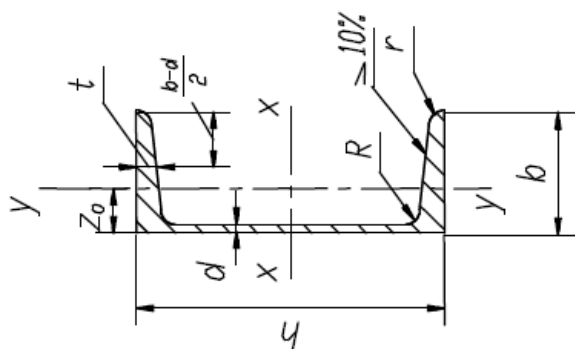


Таблица П.2

Номер профиля	Размеры, мм			Площадь сечения $A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	$z_0, \text{см}$	Масса 1 м, кг
	$h$	$b$	$t$										
1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5У	50	32	4,4	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5У	65	36	4,4	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24	5,90
8У	80	40	4,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10У	100	46	4,5	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12У	120	52	4,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14У	140	58	4,9	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3



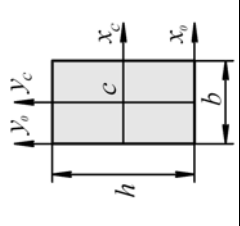
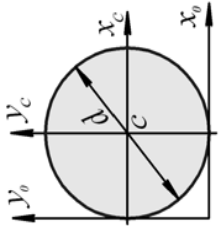
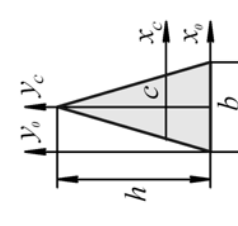
Окончание табл. П.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
14aY	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16Y	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80	14,2
16aY	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18Y	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	16,3
18aY	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20Y	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20aY	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22Y	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22aY	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24Y	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24aY	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27Y	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30Y	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33Y	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36Y	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40Y	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица П.3

Геометрические характеристики простых сечений

Форма сечения	Площадь	Коорд. центра тяжести	I <sub>x</sub>	I <sub>y</sub>	W <sub>x</sub>	W <sub>y</sub>	i <sub>x</sub>	i <sub>y</sub>
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$A = bh$	$x_c = \frac{b}{2},$ $y_c = \frac{h}{2}$	$I_{x_c} = \frac{bh^3}{12}$	$I_{y_c} = \frac{b^3h}{12}$	$W_x = \frac{bh^2}{6}$	$W_y = \frac{b^2h}{6}$	$i_x^2 = \frac{h^2}{12}$	$i_y^2 = \frac{b^2}{12}$
	$A = \frac{\pi d^2}{4}$	$x_c = y_c = \frac{d}{2}$	$I_{x_c} = \frac{\pi d^4}{64}$	$I_{y_c} = \frac{\pi d^4}{64}$	$W_x = \frac{\pi d^3}{32}$	$W_y = \frac{\pi d^3}{32}$	$i_x^2 = \frac{d^2}{16}$	$i_y^2 = \frac{d^2}{16}$
	$A = \frac{1}{2}bh$	$x_c = \frac{b}{2},$ $y_c = \frac{h}{3}$	$I_{x_c} = \frac{bh^3}{36}$	$I_{y_c} = \frac{b^3h}{48}$	$W_x = \frac{bh^2}{24}$	$W_y = \frac{b^2h}{24}$	$i_x^2 = \frac{h^2}{18}$	$i_y^2 = \frac{b^2}{24}$

Окончание табл. П.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$A = \frac{\pi d^2}{8}$	$x_c = \frac{d}{2},$ $y_c = \frac{2d}{3\pi}$	$I_{x_c} = 0,00686d^4$	$I_{y_c} = \frac{\pi d^4}{128}$	$W_x = 0,02384d^3$	$W_y = \frac{\pi d^3}{64}$	$i_x^2 = 0,01747d^2$	$i_y^2 = \frac{d^2}{16}$
	$A = b^2$	$x_c = y_c = \frac{b}{2}$	$I_{x_c} = \frac{b^4}{12}$	$I_{y_c} = \frac{b^4}{12}$	$W_x = \frac{b^3}{6}$	$W_y = \frac{b^3}{6}$	$i_x^2 = \frac{b^2}{12}$	$i_y^2 = \frac{b^2}{12}$
	$A = \frac{1}{2}bh$	$x_c = \frac{b}{3},$ $y_c = \frac{h}{3}$	$I_{x_c} = \frac{bh^3}{36}$	$I_{y_c} = \frac{bh^3}{36}$	$W_x = \frac{bh^2}{24}$	$W_y = \frac{b^2h}{24}$	$i_x^2 = \frac{h^2}{18}$	$i_y^2 = \frac{b^2}{18}$
	$A = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)$	$x_c = y_c = \frac{d_1}{2}$	$I_{x_c} = \frac{\pi d_1^4}{64}(1 - c^4);$ $c = \frac{d_2}{d_1}$	$I_{y_c} = \frac{\pi d_1^4}{64}(1 - c^4);$ $c = \frac{d_2}{d_1}$	$W_x = \frac{\pi d_1^3}{32}(1 - c^4);$ $c = \frac{d_2}{d_1}$	$W_y = \frac{\pi d_1^3}{32}(1 - c^4);$ $c = \frac{d_2}{d_1}$	$i_x^2 = \frac{d_1^2}{16}(1 + c^2);$ $c = \frac{d_2}{d_1}$	$i_y^2 = \frac{d_1^2}{16}(1 + c^2);$ $c = \frac{d_2}{d_1}$

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица П.4

Значения коэффициента снижения допускаемого напряжения  $\varphi$

Гибкость $\lambda$	Сталь марок			Чугун марок		Дюралюминий Д16Т
	Ст. 3 Ст. 4	Ст. 5	14Г2 15ГС 10Г2С 10Г2СД 15ХСНД	СЧ 12 СЧ 15 СЧ 18 СЧ 21	СЧ 24 СЧ 28	
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,000
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,999
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,998
30	0,95	0,93	0,92	0,8	0,75	0,835
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,700
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,568
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,455
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,353
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,269
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,212
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,172
110	0,52	0,43	0,39	–	–	0,142
120	0,45	0,37	0,33	–	–	0,119
130	0,40	0,32	0,29	–	–	0,101
140	0,36	0,28	0,25	–	–	0,087
150	0,32	0,25	0,23	–	–	0,076
160	0,29	0,23	0,21	–	–	–
170	0,26	0,21	0,19	–	–	–
180	0,23	0,19	0,17	–	–	–
190	0,21	0,17	0,15	–	–	–
200	0,19	0,15	0,13	–	–	–
210	0,17	0,14	0,12	–	–	–
220	0,16	0,13	0,11	–	–	–

### ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Стандартный ряд диаметров валов

10; 10,5; 11; 11,5; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26;  
28; 30; 32; 33; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 52; 55; 60; 63; 65; 70; 75;  
80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 125; 130 и далее через 10 мм.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Белорусский государственный технологический университет»

Кафедра механики материалов и конструкций

### **РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА №1**

по дисциплине «Прикладная механика»

ШИФР 11-24

Выполнил:  
студент 2 курса 2 гр.  
ф-та ТОВ спец. ХТОМ,  
Иванов А. В.

Проверил:  
доцент Петров А. М.

Минск 2010

## ЛИТЕРАТУРА

1. Степин, П. А. Сопротивление материалов / П. А. Степин. – М.: Высшая школа, 1988.
2. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов / М. Д. Подскребко. – Мн.: Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
3. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, 2007. – 512 с.
4. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. М.: Высшая школа, 1976.
5. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. М.: Высшая школа, 1995. – 540 с.
6. Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1989. – 624 с.
7. Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко. – Киев : Вища школа, 1979. – 696 с.
8. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – Киев: Наукова думка, 1975. – 703 с.
9. Рудицын, М. Н. Справочное пособие по сопротивлению материалов / М. Н. Рудицын, П. Я. Артемов, М. И. Любошиц. Мн.: Вышэйшая школа, 1970.
10. Ицкович, Г. М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов / Г. М. Ицкович. М.: Высшая школа, 1999.