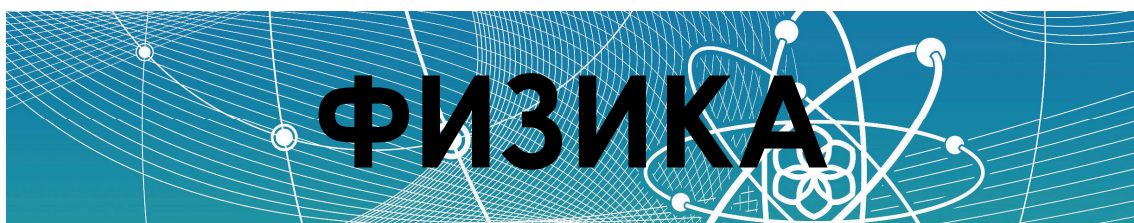


Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Д. В. Кленицкий**



**В 5 частях**

**Часть 4**



**Тексты лекций  
для студентов инженерно-технических  
специальностей**

Минск 2017

УДК [53+537.6](075.8)  
ББК 22.334я73  
К48

Рассмотрены и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом Белорусского государственного технологического университета.

**Р е ц е н з е н т ы :**

кандидат физико-математических наук, доцент,  
заведующий кафедрой технической физики БНТУ

*И. А. Хорунжий;*

кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры теоретической физики и астрофизики БГУ

*Г. С. Шуляковский*

**Кленицкий, Д. В.**

К48      Физика. В 5 ч. Ч. 4. Магнетизм : тексты лекций для студентов инженерно-технических специальностей / Д. В. Кленицкий. – Минск : БГТУ, 2017. – 95 с.

Предлагаемое издание составлено на основе действующей учебной программы по физике для студентов инженерно-технических специальностей. В текстах лекций даются основные понятия и законы магнетизма, раскрывается связь между электрическими и магнитными явлениями. Изложение материала позволяет использовать тексты лекций как при изучении информации, так и в процессе повторения, обобщения и систематизации пройденного, а также при самостоятельной подготовке студентов к сдаче зачетов и экзаменов.

УДК [53+537.6](075.8)  
ББК 22.334я73

© УО «Белорусский государственный  
технологический университет», 2017  
© Кленицкий Д. В., 2017

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЕГО СВОЙСТВА .....	5
§ 1.1. Источники магнитного поля и его характеристики	
Принцип суперпозиции .....	5
§ 1.2. Сила Ампера .....	10
§ 1.3. Сила Лоренца .....	12
§ 1.4. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях .....	15
§ 1.5. Действие однородного магнитного поля на замкнутый контур с током .....	19
§ 1.6. Энергия контура с током во внешнем магнитном поле	21
§ 1.7. Действие неоднородного магнитного поля на контур с током .....	23
§ 1.8. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса .....	24
§ 1.9. Работа по перемещению контура с током в магнитном поле .....	26
§ 1.10. Эффект Холла .....	27
Глава 2. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ .....	31
§ 2.1. Закон Био – Савара – Лапласа .....	31
§ 2.2. Расчет магнитных полей с помощью закона Био – Савара – Лапласа .....	32
§ 2.3. Закон полного тока в вакууме .....	35
§ 2.4. Магнитное поле соленоида и тороида .....	39
§ 2.5. Магнитное взаимодействие проводников с током. Единица измерения силы тока в СИ .....	41
Глава 3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ .....	43
§ 3.1. Магнитные моменты атомов .....	43
§ 3.2. Атом в магнитном поле .....	45
§ 3.3. Намагниченность. Токи намагничивания .....	47
§ 3.4. Закон полного тока в веществе .....	49
§ 3.5. Магнитное поле в веществе .....	51
§ 3.6. Диамагнетики и парамагнетики .....	53
§ 3.7. Ферромагнетики .....	55

Глава 4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ .....	59
§ 4.1. Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея – Ленца.....	59
§ 4.2. Явление самоиндукции. Индуктивность .....	62
§ 4.3. Ток при размыкании и замыкании цепи .....	64
§ 4.4. Взаимная индукция. Трансформатор.....	66
§ 4.5. Энергия магнитного поля .....	70
Глава 5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ.....	73
§ 5.1. Колебательный контур .....	73
§ 5.2. Свободные незатухающие колебания.....	76
§ 5.3. Вынужденные колебания (переменный ток) .....	77
§ 5.4. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока .....	79
§ 5.5. Резонанс напряжений .....	82
Глава 6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ .....	84
§ 6.1. Ток смещения .....	84
§ 6.2. Система уравнений Максвелла .....	86
§ 6.3. Волновое уравнение для электромагнитной волны .....	87
§ 6.4. Свойства электромагнитных волн .....	90
§ 6.5. Энергия электромагнитной волны .....	91
§ 6.6. Генерация электромагнитных волн .....	93
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	95

# Глава 1 МАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЕГО СВОЙСТВА



## § 1.1. Источники магнитного поля и его характеристики. Принцип суперпозиции

В природе встречаются некоторые железные руды, обладающие способностью притягивать к себе находящиеся вблизи них небольшие железные предметы, например скрепки, гвозди, железные опилки и т. п. Куски такой руды называют *естественными магнитами*.

Железные или стальные предметы, находящиеся вблизи естественного магнита, приобретают способность притягивать к себе другие железные предметы. В этом случае говорят, что предметы намагничиваются. Приобретенные магнитные свойства проявляются тем сильнее, чем ближе предметы находятся к магниту. При удалении естественного магнита намагнитившийся под его действием железный или стальной предмет теряет значительную часть своих магнитных свойств, но все же остается в большей или меньшей мере намагниченным. Таким образом, этот предмет превращается в *искусственный магнит*, обладающий всеми теми же свойствами, что и магнит естественный. Намагничивание, которое имело место, когда предмет из железа или стали находился вблизи естественного магнита, называют *временным намагничиванием*, в отличие от постоянного, или остаточного намагничивания, которое сохраняется и после удаления естественного магнита. Намагничивание зависит от свойств намагничиваемого вещества (от сорта железа или стали).

Различные части естественного и искусственного магнитов притягивают железные предметы по-разному. На концах магнита это притяжение максимально, а в средней его части оно практически отсутствует. Концы магнита называют *полюсами*, а среднюю часть – *нейтральной зоной*. Соотношение между размерами полюсных областей и нейтральной зоной зависит от формы магнита. Обычно магнит имеет два полюса. Однако кусок стали можно намагнитить так, чтобы он имел не два,

а четыре, шесть, восемь и более полюсов, разделенных нейтральными зонами. Важно отметить, что никогда не удастся получить магнит с нечетным числом полюсов. В частности, невозможно получить магнит с одним полюсом.

Если магнит подвесить на тонкой, легко закручивающейся нити, то он всегда устанавливается так, чтобы один из его полюсов был обращен к северу, а другой к югу (рис. 1.1). Полюс магнита, который

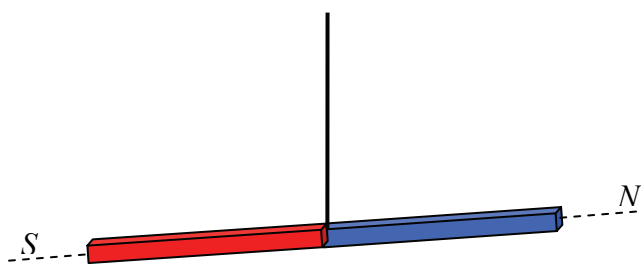
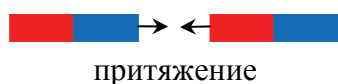


Рис. 1.1

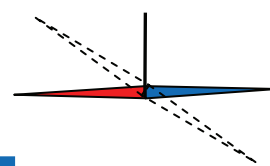
обращается к северу, называют *северным полюсом* ( $N$  – north), а другой полюс – *южным* ( $S$  – south).

Хорошо известно, что магниты взаимодействуют между собой. Они либо притягивают, либо отталкивают друг друга в зависимости от взаимного распо-

ложения их полюсов. Одноименные полюса магнитов отталкиваются, а разноименные притягиваются (рис. 1.2, а). Причем магниты взаимодействуют без непосредственного соприкосновения друг с другом. Как следствие магниты оказывают ориентирующее действие на помещенную вблизи от них магнитную стрелку, если она может вращаться вокруг своего центра тяжести (например подвешенной на нити или закрепленной на острие (рис. 1.2, б)).



а



б

Рис. 1.2

Взаимодействие магнитов осуществляется посредством материального посредника – *магнитного поля*. Каждый магнит создает вокруг себя магнитное поле, которое непосредственно действует на другой магнит с некоторой силой.

Способность магнита, подвешенного на нити, ориентироваться с юга на север (рис. 1.1) привела к заключению, что Земля является естественным гигантским магнитом. Действие магнитного поля Земли на магниты и вызывает их ориентацию вдоль меридиана. Это свойство с глубокой древности используют для ориентирования на местности с помощью компаса. Стрелка компаса представляет собой магнит, закрепленный на острие в центре тяжести так, чтобы она могла свободно вращаться. Поскольку по определению северный полюс магнита указывает на географический север, соответствующий магнитный полюс Земли оказывается южным магнитным полюсом (так как северный полюс одного магнита притягивается к южному полюсу другого) (рис. 1.3). Магнитный полюс Земли вблизи южного географического полюса является северным полюсом. Заметим, что магнитные полюса Земли не совпадают с географическими полюсами и со временем медленно изменяют свое положение.

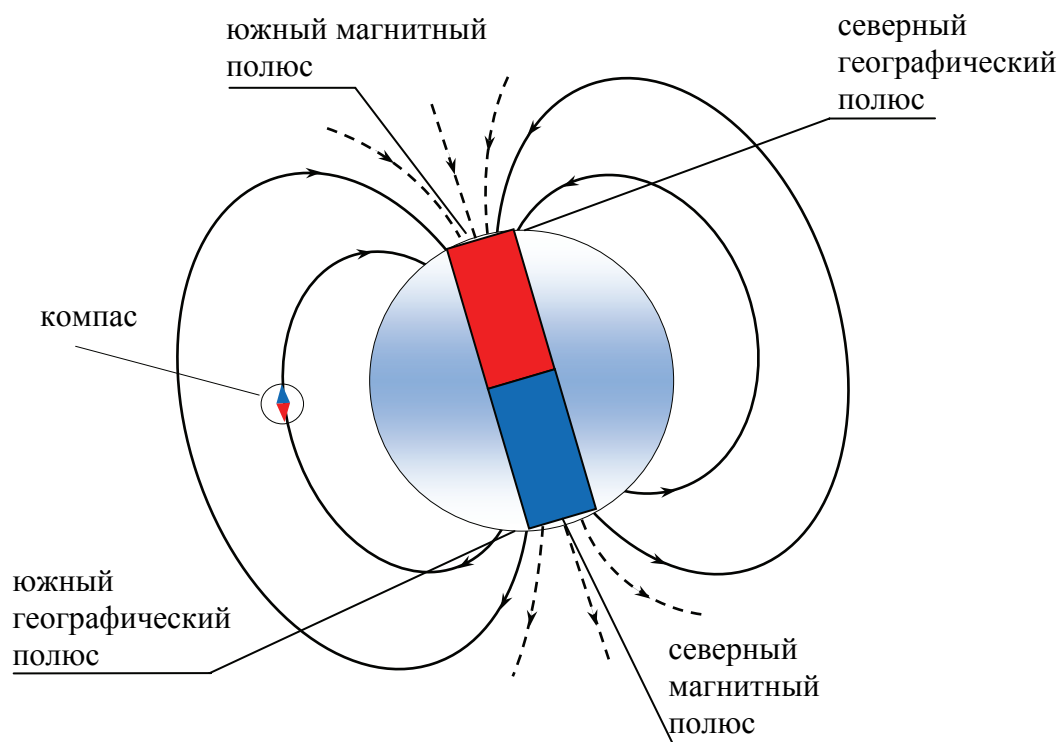


Рис. 1.3

Количественно магнитное поле характеризуют *магнитной индукцией*. Индукция  $\vec{B}$  магнитного поля – это векторная физическая величина. Она определяет механическое воздействие магнитного поля, т. е. является его силовой характеристикой. За направление вектора

магнитной индукции в данной точке принимают направление, в котором устанавливается северный полюс бесконечно малой магнитной стрелки, помещенной в эту точку. Такая магнитная стрелка не искажает магнитное поле, в которое она вносится.

Для наглядного изображения магнитного поля, как и для изображения электрического поля, используют *линии (силовые линии) магнитной индукции*. Это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора магнитной индукции (рис. 1.4). Густота линий, т. е. число линий, проходящих через единицу площади, больше в тех местах, где магнитная индукция больше. На рис. 1.5 показаны силовые линии полосового магнита. Силовые линии всегда направлены от северного полюса магнита к южному. Подобная картина силовых линий имеет место для магнитного поля Земли (рис. 1.3).

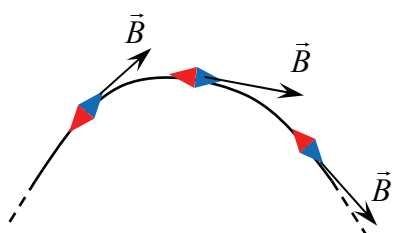


Рис. 1.4

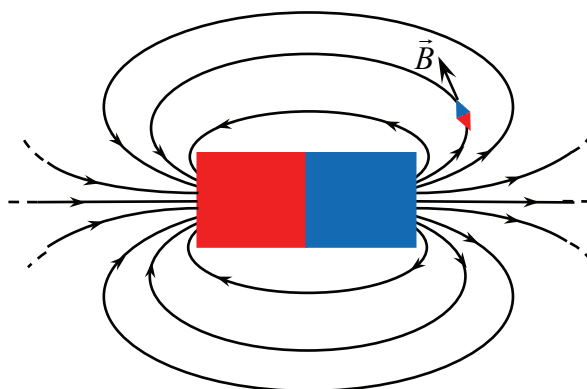


Рис. 1.5

На первый взгляд, кажется, что данная картина силовых линий подобна силовым линиям двух разноименных точечных электрических зарядов (см. [3]). Причем полюса магнита играют роль магнитных «зарядов», создающих магнитное поле. Однако опыты показали, что в природе отсутствуют частицы, обладающие магнитными зарядами, подобными электрическим. Поэтому разрезая магнит на части, нельзя разделить его полюсы, т. е. нельзя получить магнит либо с одним северным, либо с южным полюсом. Каждая часть магнита всегда имеет оба полюса.

В XIX в. экспериментально было доказано, что в пространстве, окружающем проводники с электрическим током, возникают силы, подобные тем, которые действуют вблизи искусственных и естественных магнитов. В фундаментальном опыте датского физика Г. Эрстеда над неподвижным проводом, расположенным вдоль меридиана,



т. е. в направлении север – юг, подвешивалась на тонкой нити магнитная стрелка, которая также устанавливалась приблизительно по линии север – юг, т. е. приблизительно параллельно проводу (рис. 1.6). При пропускании тока через проводник магнитная стрелка поворачивалась и устанавливалась перпендикулярно проводнику. При отключении тока стрелка возвращалась в исходное положение. Это привело к заключению, что электрический ток, подобно магнитам, создает вокруг себя магнитное поле, действующее на помещенную в это поле магнитную стрелку.

Линии индукции магнитного поля, созданного электрическим током, являются замкнутыми и охватывают проводник с током. Например, силовые линии магнитного поля прямолинейного проводника с током (рис. 1.7) имеют вид окружностей, охватывающих проводник. Магнитная стрелка вблизи такого проводника устанавливается по касательной к этим окружностям. Так же будет направлен и вектор магнитной индукции данного поля.

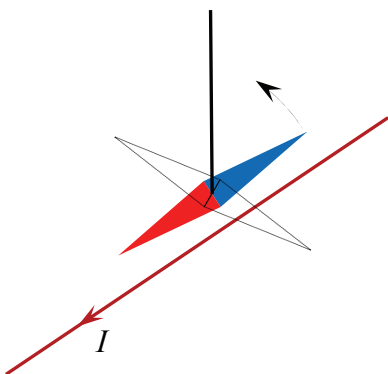


Рис. 1.6

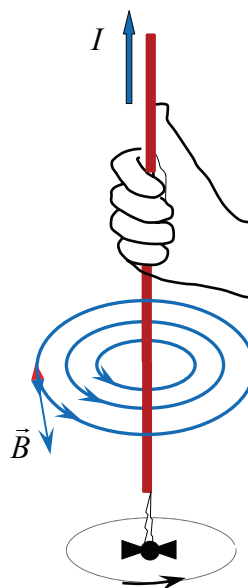


Рис. 1.7

Заметим, что замкнутость силовых линий магнитного поля является их общим свойством, независящим от формы проводника. Это свойство также справедливо для силовых линий магнитного поля, созданного магнитами. В этом случае магнитное поле не оканчивается на поверхности магнитов, а проникает внутрь их. Как следствие силовые линии замыкаются сами на себя внутри магнитов.

Направление линий индукции магнитного поля тока задается *правилом правого винта (буравчика)*: если ввинчивать правый винт (буравчик) по направлению тока (рис. 1.7), то направление вращения головки винта укажет направление линий магнитной индукции. Направление линий можно также определять с помощью *правила правой руки*: если проводник с током мысленно охватить правой рукой так, чтобы оттопыренный большой палец указывал в направлении тока, то остальные пальцы покажут направление линий магнитной индукции, охватывающих проводник.

Опыт показывает, что для магнитного поля, как и электрического, в широкой области изменения магнитной индукции, справедлив *принцип суперпозиции*: в каждой точке пространства магнитная индукция  $\vec{B}$  результирующего поля, создаваемого в этой точке всеми источниками магнитных полей, равна векторной сумме индукций  $\vec{B}_k$  накладываемых полей, создаваемых каждым источником магнитного поля в отдельности:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n = \sum_{k=1}^n \vec{B}_k. \quad (1.1)$$

Данный принцип позволяет находить результирующую магнитную индукцию для сложных конфигураций магнитных полей.

## § 1.2. Сила Ампера

В предыдущем параграфе мы говорили о том, что магнитное поле, созданное магнитами или электрическими токами, действует на магниты, помещенные в это поле, с некоторой силой. По третьему закону Ньютона следовало ожидать и обратного: магнит также должен действовать с некоторой силой на проводник с электрическим током. Этот эффект действительно существует и был обнаружен Г. Эрстедом. Кроме того, опыт показывает, что электрические токи также взаимодействуют между собой. Во всех этих случаях дело сводится к воздействию магнитного поля, создаваемого магнитами или токами, на помещенные в это поле другие магниты и токи.

*Силой Ампера* называют силу, действующую со стороны магнитного поля на проводник с электрическим током. Экспериментально установлено, что сила Ампера  $d\vec{F}_A$ , действующая на бесконечно малый линейный элемент  $dl$  проводника с током  $I$ , определяется соотношением

$$d\vec{F}_A = I d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (1.2)$$

где  $d\vec{l}$  – вектор, по направлению совпадающий с направлением электрического тока, а по модулю равный элементу  $dl$ ;  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля, в котором находится элемент с током.

Согласно правилу векторного умножения, сила Ампера  $d\vec{F}_A$  перпендикулярна векторам  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$ , а ее модуль определяется соотношением

$$dF_A = IBdl \sin \alpha, \quad (1.3)$$

где  $\alpha$  – угол между вектором магнитной индукции  $\vec{B}$  и элементом  $dl$ .

Направление вектора  $d\vec{F}_A$  соответствует *правилу левой руки* (рис. 1.8): если ладонь левой руки расположить так, чтобы четыре пальца были направлены по току, а вектор магнитной индукции входил в ладонь, то отставленный на  $90^\circ$  большой палец укажет направление силы Ампера.

Сила Ампера  $\vec{F}_A$ , действующая на проводник конечной длины  $l$  произвольной формы, определяется из (1.2) интегрированием по всей длине проводника

$$\vec{F}_A = \int_l d\vec{F}_A = I \int_l d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (1.4)$$

В случае прямолинейного проводника, находящегося в однородном магнитном поле  $\vec{B} = \text{const}$ , из (1.4) найдем, что

$$F_A = IBl \sin \alpha, \quad (1.5)$$

где  $\alpha$  – угол между вектором магнитной индукции  $\vec{B}$  и проводником с током. Направление силы (1.5) можно определить по правилу левой руки.

Из (1.5) следует, что магнитная индукция численно равна силе Ампера, действующей на единицу длины проводника с током  $I = 1$  А, который расположен перпендикулярно направлению вектора магнитной индукции. В системе единиц СИ магнитную индукцию измеряют в *теслах* (Тл). Из формул (1.2)–(1.5) ясно, что  $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н}/(\text{А}\cdot\text{м})$ .

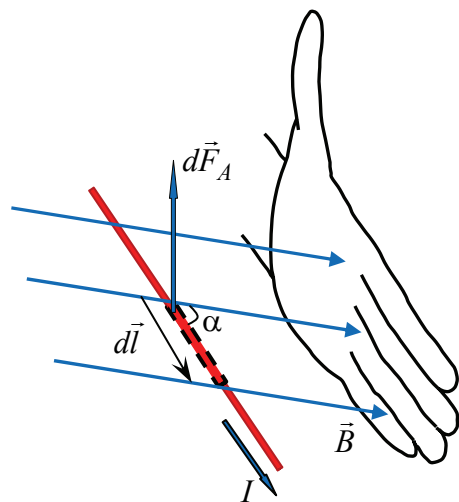


Рис. 1.8

## § 1.3. Сила Лоренца

Магнитное поле действует только на проводники, через которые текут электрические токи, и не влияет на проводники без тока. Это свидетельствует о том, что магнитное поле действует не на материал проводника, а на заряженные частицы (электроны или ионы), которые

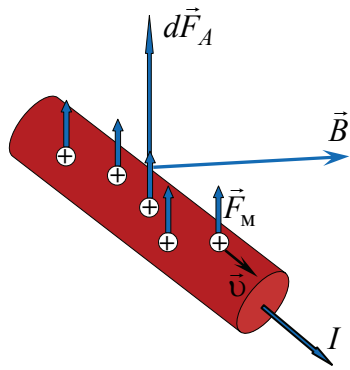


Рис. 1.9

в нем перемещаются. Опыт показывает, что магнитное поле действует на отдельные электрические заряды, движущиеся в магнитном поле. В таком случае сила Ампера (1.2) является результирующей всех сил, действующих на отдельные движущиеся заряженные частицы (рис. 1.9):

$$d\vec{F}_A = \vec{F}_M dN, \quad (1.6)$$

где  $\vec{F}_M$  – сила, действующая на точечный электрический заряд со стороны магнитного поля;  $dN$  – число заряженных частиц, находящихся в объеме проводника длиной  $dl$ .

Если ток в проводнике обусловлен движением частиц, заряд которых равен  $q$ , то сила тока в проводнике

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{qdN}{dt}, \quad (1.7)$$

где  $dQ = qdN$  – заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время  $dt$ .

Подставляя (1.6), (1.7) в (1.2) и принимая во внимание, что  $d\vec{l} = \vec{v}dt$ , где  $\vec{v}$  – скорость упорядоченного движения зарядов, найдем выражение для силы, действующей на точечный электрический заряд  $q$ ,двигающийся со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ :

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (1.8)$$

Согласно правилу векторного умножения направление силы  $\vec{F}_M$  перпендикулярно векторам скорости  $\vec{v}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$ . Подобно силе Ампера, направление силы  $\vec{F}_M$  можно определять по правилу левой руки. Для положительно заряженных частиц ладонь левой руки надо расположить так, чтобы четыре пальца были направлены по скорости движения частиц, а вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  входил в ладонь, тогда отставленный на  $90^\circ$  большой палец укажет направление силы Лоренца. Для отрицательно заря-

женных частиц с тем же направлением скорости и магнитной индукции направление силы будет противоположным (рис. 1.10). В этом случае для правильного определения направления силы  $\vec{F}_M$  ладонь левой руки надо располагать так, чтобы четыре пальца были направлены против скорости движения частиц.

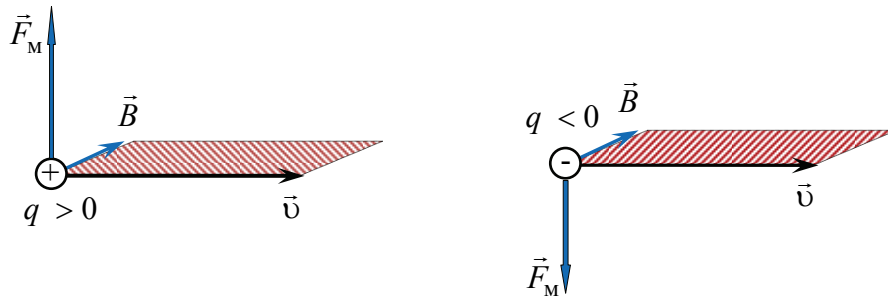


Рис. 1.10

Модуль силы  $\vec{F}_M$  определяется соотношением

$$F_M = |q|vB \sin \alpha, \quad (1.9)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Сила  $\vec{F}_M$  всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы, поэтому изменяет только направление этой скорости, не изменяя ее модуля. Как следствие, сила  $\vec{F}_M$  работы не совершает и кинетическая энергия этой частицы не изменяется.

В общем случае на движущийся заряд помимо магнитного поля может действовать электрическое поле. Сила, действующая на заряд со стороны электрического поля с напряженностью  $\vec{E}$ , определяется соотношением [3]:

$$\vec{F}_{эл} = q\vec{E}. \quad (1.10)$$

Результирующая сила, приложенная к заряду, равна векторной сумме сил, действующих со стороны электрического и магнитного полей

$$\vec{F} = \vec{F}_{эл} + \vec{F}_M = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (1.11)$$

Эту силу называют *силой Лоренца*. Заметим, что иногда силой Лоренца называют только магнитную составляющую силы (1.11).

В нерелятивистском приближении (скорость заряда много меньше скорости света в вакууме) сила Лоренца (1.11), как и любая другая сила в классической механике, не зависит от выбора инерциальной

системы отсчета. Вместе с тем, магнитная составляющая силы Лоренца, из-за наличия в (1.8) скорости, меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. Как следствие должна меняться и электрическая составляющая (1.10). Поэтому разделение силы Лоренца на электрическую и магнитную зависит от выбора системы отсчета. Без указания системы отсчета такое разбиение не имеет смысла. Например, в системе отсчета, связанной с электрическим зарядом, т. е. в системе отсчета, в которой он покоится ( $v = 0$ ), сила Лоренца будет чисто электрической, в других системах отсчета она складывается из электрических и магнитных сил, значения которых зависят от выбора системы отсчета.

Вычисления показывают, что отношение магнитной составляющей силы Лоренца к электрической определяется соотношением

$$\frac{F_M}{F_{эл}} = \left(\frac{v}{c}\right)^2, \quad (1.12)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме.

Согласно (1.12), при скоростях движения, много меньших скорости света в вакууме ( $v \ll c$ ), магнитная составляющая оказывается много меньше электрической. Так, даже для достаточно большой скорости, например  $v = 3 \cdot 10^5$  м/с, это отношение равно  $10^{-6}$ , т. е. магнитная составляющая в миллион раз меньше электрической. В ускорителях заряженных частиц пучки частиц движутся почти со световыми скоростями, и там магнитная составляющая силы Лоренца становится сравнимой с электрической. Заметим, что скорости направленного движения электронов в металлах при прохождении электрического тока составляют  $\sim 10^{-4}$  м/с, и отношение  $(v/c)^2 \approx 10^{-24}$ . Однако участие громадного числа зарядов в создании тока компенсирует малость этого множителя. Например, электродвигатели приводят в движение именно магнитные силы, по сравнению с которыми электрические силы не играют никакой роли. Кроме того, даже в электрически заряженном теле заряды определенного знака в высокой степени скомпенсированы зарядами противоположного знака. Как бы ни был велик электрический заряд тела, все же он ничтожно мал по сравнению с суммарным зарядом входящих в него частиц одного знака. Вот почему магнитные силы намного превосходят электрические, действующие только на нескомпенсированные заряды.

Опыт показывает, что электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом. Более того, при определенных условиях

электрическое и магнитное поля могут порождать друг друга. Как следствие невозможно разделить весь комплекс явлений на явления чисто электрические и чисто магнитные. Таким образом, принято говорить об *электромагнитном поле*, проявлением которого являются электрические и магнитные поля.

## § 1.4. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

Ограничимся рассмотрением наиболее простых случаев – движением заряженных частиц в однородных и стационарных (не зависящих от времени) электрическом и магнитном полях.

В электрическом поле с напряженностью  $\vec{E}$  на частицу с зарядом  $q$  и массой  $m$  действует электрическая сила (1.10), которая сообщает частице ускорение

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{эл}}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}. \quad (1.13)$$

Ускорение (1.13) направлено по полю, если  $q > 0$ , и против поля, если  $q < 0$ . Заряженная частица в электрическом поле начнет двигаться равнопеременно – равноускоренно или равнозамедленно в зависимости от направления начальной скорости частицы при попадании в поле. Движение заряженной частицы происходит совершенно аналогично движению материальной точке в поле силы тяжести, которое мы рассматривали в курсе механики. Траектория такого движения в общем случае представляет собой параболу.

Изменение кинетической энергии  $\Delta K$  частицы определяется работой  $A_{\text{эл}}$  электрических сил, которая дается формулой [3]:

$$A_{\text{эл}} = qU, \quad (1.14)$$

где  $U$  – разность потенциалов, которая проходит частица в электрическом поле.

Таким образом,

$$\Delta K = \frac{m\nu^2}{2} - \frac{m\nu_0^2}{2} = qU, \quad (1.15)$$

где  $\nu_0$  и  $\nu$  – скорости частицы до и после прохождения разности потенциалов.

Так как заряд каждой частицы кратен элементарному заряду, то энергию частицы удобно выражать в электронвольтах. *Электронвольт* (эВ) – это энергия, которую приобретает частица с зарядом  $q$ , равным элементарному заряду  $e$  ( $q = e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл), при прохождении разности потенциалов  $U = 1$  В:

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}. \quad (1.16)$$

В магнитном поле на заряженную частицу действует магнитная составляющая силы Лоренца (1.8). Эта сила перпендикулярна скорости заряда  $\vec{v}$ , а поэтому она только искривляет траекторию движения заряда, но не изменяет величину скорости частицы в отличие от электрического поля.

Если частица движется вдоль линий магнитной индукции, то угол  $\alpha$  между векторами скорости  $\vec{v}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$  равен 0 или  $\pi$ . Тогда из формулы (1.9) следует, что  $F_M = 0$ , т. е. магнитное поле не действует на заряд. В этом случае частица движется прямолинейно и равномерно вдоль линий магнитной индукции.

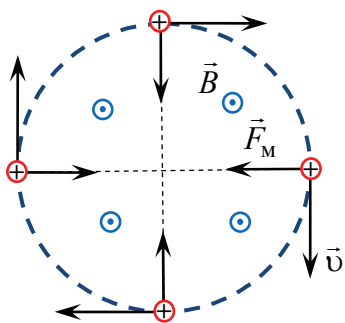


Рис. 1.11

Если заряженная частица движется перпендикулярно линиям магнитной индукции ( $\alpha = \pi/2$ ), то модуль силы  $\vec{F}_M$  (1.9) дается формулой

$$F_M = |q| v B. \quad (1.17)$$

Сила  $\vec{F}_M$ , перпендикулярная векторам  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ , в этом случае является центростремительной (рис. 1.11). В каждой точке траектории она направлена к центру кривизны траектории.

Так как модуль скорости при движении частицы не изменяется, то она обладает нормальным (центростремительным) ускорением, которое ей сообщает сила (1.17):

$$a = \frac{v^2}{r}, \quad (1.18)$$

где  $r$  – радиус кривизны траектории.

Из второго закона Ньютона ( $F_M = ma$ ) следует, что

$$|q| v B = \frac{mv^2}{r}. \quad (1.19)$$

Отсюда радиус кривизны траектории частицы



$$r = \frac{m\nu}{|q|B}. \quad (1.20)$$

Так как в однородном, стационарном поле  $B = \text{const}$ , а числовое значение скорости частицы не изменяется, то радиус кривизны траектории частицы (1.20) оказывается постоянным. Следовательно, частица будет двигаться по окружности радиуса  $r$ , который перпендикулярен вектору магнитной индукции (рис. 1.11).

Период обращения  $T$  частицы, т. е. время одного полного оборота, при равномерном движении по окружности равен длине окружности, деленной на скорость частицы. Принимая во внимание (1.20), найдем

$$T = \frac{2\pi r}{\nu} = \frac{2\pi m}{|q|B}. \quad (1.21)$$

Согласно (1.21), период обращения обратно пропорционален индукции магнитного поля и удельному заряду частицы ( $|q|/m$ ) и не зависит от ее скорости. Независимость периода обращения от скорости справедливо только для движений со скоростями  $\nu$ , во много раз меньшими скорости света. При очень больших скоростях движения частицы, сравнимых со скоростью света, начинают сказываться релятивистские эффекты и масса частицы, а следовательно и период обращения, начинают зависеть от скорости движения.

Рассмотрим теперь общий случай движения заряженной частицы, когда ее скорость  $\vec{\nu}$  направлена под произвольным углом  $\alpha$  к вектору магнитной индукции  $\vec{B}$ , причем  $\alpha \neq 0; \pi; \pi/2$ . Разложим вектор скорости на две составляющие,  $\vec{\nu}_\perp$  – перпендикулярную вектору  $\vec{B}$  и  $\vec{\nu}_\parallel$  – параллельную ему (рис. 1.12):

$$\nu_\perp = \nu \sin \alpha, \quad \nu_\parallel = \nu \cos \alpha. \quad (1.22)$$

Модуль магнитной силы (1.9) в этом случае определяется соотношением

$$F_m = |q| \nu_\perp B. \quad (1.23)$$

Создаваемое этой силой ускорение для составляющей  $\vec{\nu}_\perp$  является нормальным, а повлиять на составляющую  $\vec{\nu}_\parallel$  эта сила не может. Поэтому частица одновременно участвует в двух независимых движениях: 1) равномерно вращается по окружности со скоростью  $\nu_\perp$  в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{B}$  и 2) равномерно движется со скоростью  $\nu_\parallel$  вдоль вектора  $\vec{B}$ . Таким образом,

в результате наложения этих двух движений имеет место движение по винтовой линии (спирали) (рис. 1.12), ось которой совпадает с направлением вектора  $\vec{B}$ .

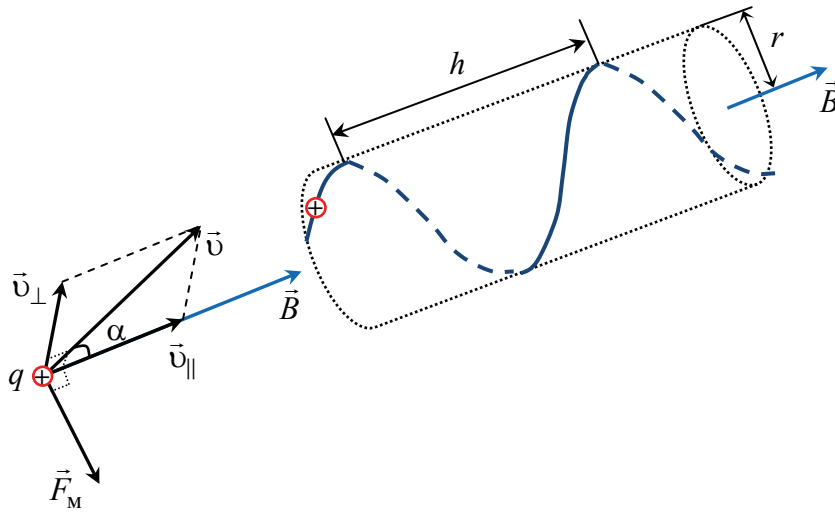


Рис. 1.12

Принимая во внимание, что ускорение частицы

$$a = \frac{v_{\perp}^2}{r}, \quad (1.24)$$

и формулу (1.23), из второго закона Ньютона ( $F_M = ma$ ) найдем соотношение для радиуса витков спирали

$$r = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}. \quad (1.25)$$

Период обращения по спирали  $T$  определяется по формуле (1.21).

Шаг винтовой линии  $h$  (расстояние между соседними витками) равен расстоянию, проходимому частицей вдоль вектора  $\vec{B}$  за период обращения:

$$h = v_{\parallel}T = \frac{2\pi m}{|q|B} v \cos\alpha. \quad (1.26)$$

Направление, в котором закручивается траектория, зависит от знака заряда частицы. Если заряд положителен, то траектория закручивается против часовой стрелки, как на рис. 1.12. Отрицательно заряженная частица будет иметь противоположное направление вращения.

Действие электрического и магнитного полей на заряженные частицы приводит ко многим интересным явлениям и широко используется в современной технике. Это, например, управление движением электронов в различных электровакуумных приборах и ускорение заряженных частиц до высоких энергий, фокусировка частиц с помощью электростатических и магнитных линз и разделение частиц по их удельным зарядам в масс-спектрографах.

## § 1.5. Действие однородного магнитного поля на замкнутый контур с током

Результирующая сила Ампера, которая действует на замкнутый контур с током в магнитном поле, определяется в соответствии с (1.4) как

$$\vec{F}_A = I \oint_l d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (1.27)$$

где интегрирование проводится по замкнутому контуру витка с током.

Если магнитное поле однородно ( $\vec{B} = \text{const}$ ), то вектор  $\vec{B}$  можно вынести из-под знака интеграла

$$\vec{F}_A = I \left[ \oint_l d\vec{l} \right] \times \vec{B}, \quad (1.28)$$

и задача сводится к вычислению интеграла  $\oint d\vec{l}$ . Этот интеграл представляет собой замкнутую цепочку элементарных векторов  $d\vec{l}$ , поэтому он равен нулю, а значит и  $\vec{F}_A = 0$ . Таким образом, результирующая сила Ампера, действующая на замкнутый контур с током в однородном магнитном поле, равна нулю. Однако момент  $\vec{M}$  этой силы в общем случае будет отличен от нуля.

Найдем момент силы, действующий на замкнутый контур с током со стороны однородного магнитного поля. Рассмотрим прямоугольный виток (рамку) длиной  $a$  и шириной  $b$ , способной свободно поворачиваться относительно вертикальной оси (рис. 1.13). Считаем, что сила Ампера, действующая на токоподводящие к рамке провода, пренебрежимо мала.

Пусть вектор  $\vec{B}$  магнитной индукции параллелен плоскости рамки (рис. 1.13,  $a$ ). В этом случае силы Ампера (1.5), действующие

на горизонтальные стороны рамки, равны нулю, а на вертикальные они противоположны по направлению и равны по модулю:

$$F_A = IBb. \quad (1.29)$$

Эти силы образуют пару сил, которая будет поворачивать контур. Вращающий момент этой пары равен произведению модуля силы (1.29) на плечо  $h$  пары, т. е. кратчайшее расстояние между линиями действия сил. В данном случае  $h = a$ , таким образом

$$M = F_A h = IBab = IB S = p_m B, \quad (1.30)$$

где  $S = ab$  – площадь, охватываемая контуром с током;  $p_m = IS$  – магнитный момент контура с током.

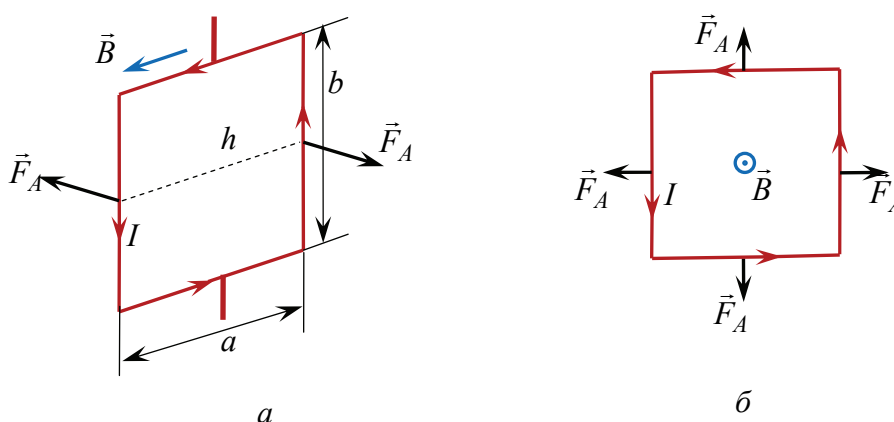


Рис. 1.13

Рассмотрим случай, когда вектор  $\vec{B}$  магнитной индукции перпендикулярен плоскости контура (рис. 1.13, б) (на рисунке вектор  $\vec{B}$  направлен перпендикулярно плоскости чертежа к нам). В этом случае силы Ампера, действующие на стороны рамки, лежат в плоскости контура и растягивают (или сжимают) его. Вращающий момент этих сил равен нулю ( $M = 0$ ). Поэтому магнитное поле с такой ориентацией не может сообщить контуру ни поступательного, ни вращательного движений.

В общем случае вектор  $\vec{B}$  направлен под некоторым углом к плоскости контура (рис. 1.14). Разложим его на две составляющие

$$\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}, \quad (1.31)$$

где  $\vec{B}_{\parallel}$  – параллельна плоскости контура, а  $\vec{B}_{\perp}$  – перпендикулярна ей.

Вращающий момент, действующий на рамку с током в этом случае, обусловлен только составляющей  $B_{\parallel}$  вектора  $\vec{B}$ :

$$M = p_m B_{\parallel} = p_m B \sin \alpha, \quad (1.32)$$

где  $B_{\parallel} = B \sin \alpha$ ;  $\alpha$  – угол между вектором  $\vec{B}$  и единичной нормалью  $\vec{n}$  к контуру ( $n = 1$ ), направление которой связано с направлением тока в контуре правилом правого винта (рис. 1.14).

Эта формула, полученная здесь для прямоугольной рамки, справедлива для любого плоского контура произвольной формы. Принимая во внимание направление вектора момента силы  $\vec{M}$  (рис. 1.14), формулу (1.32) запишем в векторном виде:

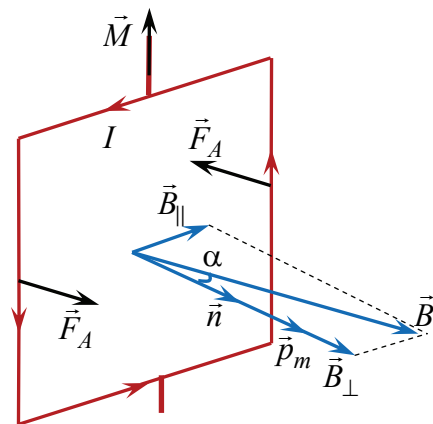


Рис. 1.14

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}, \quad (1.33)$$

где  $\vec{p}_m$  – вектор магнитного момента контура с током, направленный перпендикулярно плоскости контура

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}. \quad (1.34)$$

Заметим, что направление вектора  $\vec{p}_m$  (нормали  $\vec{n}$  к плоскости) образует с направлением тока правовинтовую систему. Если правый винт (буравчик) вращать по току, то он будет перемещаться в направлении вектора  $\vec{p}_m$ . Согласно (1.33), магнитное поле стремится повернуть рамку с током так, чтобы ее магнитный момент  $\vec{p}_m$  расположился в направлении вектора  $\vec{B}$ . В этом случае  $\alpha = 0$  и  $M = 0$ . Нетрудно убедиться в том, что это положение будет устойчивым. Если  $\vec{p}_m$  имеет противоположное направление вектору  $\vec{B}$  ( $\alpha = 180^\circ$ ), то тоже  $M = 0$ , но такое положение контура является неустойчивым. Малейшее отклонение от этого положения приведет к появлению момента сил, стремящегося отклонить контур еще больше от начального положения.

Способность магнитного поля поворачивать рамку с током используется в процессе конструирования и создания различных электромагнитных приборов, а также электродвигателей.

## § 1.6. Энергия контура с током во внешнем магнитном поле

Подобно тому, как электрические заряды, находящиеся в электрическом поле, обладают потенциальной энергией, контур с током в магнитном поле также должен обладать потенциальной энергией.

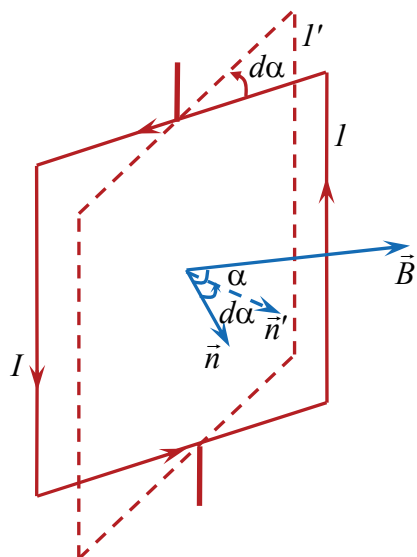


Рис. 1.15

При повороте контура с током в магнитном поле на бесконечно малый угол  $d\alpha$  силы поля совершат работу

$$\delta A = -Md\alpha, \quad (1.35)$$

где знак минус учитывает, что при повороте контура силами магнитного поля угол  $\alpha$  между вектором  $\vec{B}$  магнитной индукции и нормалью  $\vec{n}$  к площади контура уменьшается ( $d\alpha < 0$ ) (рис. 1.15);  $M$  – момент силы, действующий на контур с током.

Принимая во внимание (1.32),

$$\delta A = -p_m B \sin \alpha d\alpha. \quad (1.36)$$

С другой стороны, эта работа равна убыли потенциальной энергии  $\Pi$  контура с током

$$\delta A = -d\Pi. \quad (1.37)$$

Тогда

$$d\Pi = p_m B \sin \alpha d\alpha. \quad (1.38)$$

Проинтегрировав данное выражение по углу  $\alpha$ , в случае однородного магнитного поля ( $B = \text{const}$ ) найдем

$$\Pi = -p_m B \cos \alpha + C, \quad (1.39)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования.

Если принять  $\Pi = 0$  при  $\alpha = 90^\circ$ , то постоянная интегрирования  $C$  обратится в нуль, и потенциальная энергия контура с током в магнитном поле равна

$$\Pi = -p_m B \cos \alpha = -\vec{p}_m \vec{B}, \quad (1.40)$$

где мы использовали определение скалярного произведения векторов  $\vec{p}_m \vec{B} = p_m B \cos \alpha$ .

Положение устойчивого равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии, который достигается при  $\alpha = 0^\circ$ :

$$\Pi_{\min} = -p_m B. \quad (1.41)$$

Положение при  $\alpha = 180^\circ$  отвечает неустойчивому равновесию контура, потенциальная энергия в этом положении максимальна.

## § 1.7. Действие неоднородного магнитного поля на контур с током

Если магнитное поле неоднородно, то результирующая сила, действующая на контур с током, в каждом конкретном случае определяется выражением (1.4) и, вообще говоря, она отлична от нуля. Кроме того, на контур будет действовать вращательный момент.

Особый интерес представляет случай, когда контур с током плоский и его размеры достаточно малы. Такой контур с током называют *элементарным*. В этом случае влиянием неоднородности на вращающий момент  $\vec{M}$  можно пренебречь и считать, что формула (1.33) справедлива также и для неоднородного магнитного поля. Выражение для силы, действующей на контур с током, найдем из связи силы с потенциальной энергией  $\Pi$  контура (см. [1]):

$$\vec{F} = -\text{grad}\Pi, \quad (1.42)$$

где операция градиент в декартовой системе координат определяется следующим образом:

$$\text{grad} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.43)$$

здесь  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – орты декартовой системы координат.

Принимая во внимание, что в случае элементарного контура справедливо соотношение (1.40) для потенциальной энергии, найдем

$$\vec{F} = \left( \vec{p}_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \right) \vec{i} + \left( \vec{p}_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \right) \vec{j} + \left( \vec{p}_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right) \vec{k}. \quad (1.44)$$

Эта формула показывает, что сила действует на контур только в неоднородном поле. Если поле однородно ( $\vec{B} = \text{const}$ ), то  $\vec{F} = 0$ . Заметим, что сила (1.44), как и момент силы (1.33), определяется магнитным моментом контура  $\vec{p}_m$ , поэтому форма контура не играет никакой роли.

Предположим, что поле изменяется быстрее всего в направлении  $x$ , совпадающем с направлением вектора  $\vec{B}$  в том месте, где расположен контур. В других направлениях считаем, что поле меняется слабо. Пусть магнитный момент  $\vec{p}_m$  контура ориентирован

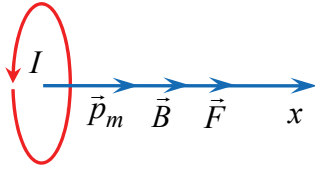


Рис. 1.16

по полю (рис. 1.16). Тогда сила (1.44), действующая на контур, примет вид

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \vec{i}. \quad (1.45)$$

Из (1.45) следует, что сила  $\vec{F}$  направлена в сторону возрастания магнитной индукции, т. е. контур будет втягиваться в область более сильного поля (на рис. 1.16 предполагается, что  $\vec{B}$  увеличивается в направлении оси  $x$ ). Если магнитный момент  $\vec{p}_m$  ориентирован под некоторым углом к вектору магнитной индукции, то кроме силы на контур будет действовать момент сил (1.33), который поворачивает его до совпадения по направлению векторов  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ .

## § 1.8. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса

Элементарным потоком  $d\Phi_m$  вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  (магнитным потоком) через элементарную (бесконечно малую) площадку  $dS$  называют физическую величину

$$d\Phi_m = B_n dS = B dS \cos \alpha = \vec{B} d\vec{S}, \quad (1.46)$$

где  $B_n = B \cos \alpha$  – проекция вектора  $\vec{B}$  на нормаль  $\vec{n}$  к площадке;  $\alpha$  – угол между вектором  $\vec{B}$  и нормалью  $\vec{n}$  (рис. 1.17);

$d\vec{S} = dS \vec{n}$  – вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление совпадает с нормалью.

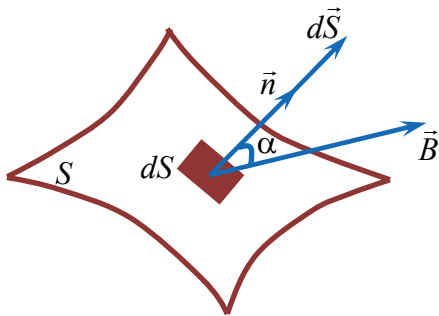


Рис. 1.17

Поток  $\Phi_m$  вектора  $\vec{B}$  сквозь произвольную поверхность  $S$  равен сумме (интегралу) элементарных потоков через площадки, на которые можно разбить данную поверхность:

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \int_S B_n dS = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (1.47)$$

В случае однородного магнитного поля ( $\vec{B} = \text{const}$ ) и плоской поверхности  $S$  из (1.47) следует, что

$$\Phi_m = BS \cos \alpha. \quad (1.48)$$



Магнитный поток характеризуется величиной и знаком, зависящим от выбора отсчета угла, т. е. от направления нормали к площадке. Единицей измерения магнитного потока в СИ является *вебер* (Вб):  $[\Phi_m] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \text{Вб}$ .

Для магнитных полей справедлива *теорема Гаусса*: магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен нулю:

$$\Phi_m = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (1.49)$$

где кружок на интеграле указывает, что интегрирование проводится по замкнутой поверхности.

Эта теорема является, по существу, обобщением опыта. Она выражает собой тот экспериментальный факт, что линии вектора магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца и являются замкнутыми. Поэтому число линий вектора  $\vec{B}$ , выходящих из любого объема, ограниченного замкнутой поверхностью  $S$ , всегда равно числу линий, входящих в этот объем. Как следствие поток сквозь замкнутую поверхность равен нулю. По существу теорема Гаусса отражает факт отсутствия в природе магнитных зарядов (источников магнитного поля) подобных электрическим. Вследствие этого линии магнитной индукции и являются замкнутыми.

Запишем теорему Гаусса в дифференциальной форме. Рассмотрим дивергенцию вектора  $\vec{B}$  магнитной индукции, которая характеризует поток магнитного поля через поверхность достаточно малого объема  $V$  [3]. По определению

$$\text{div} \vec{B} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_m}{V}. \quad (1.50)$$

В декартовой системе координат дивергенция имеет следующий вид:

$$\text{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (1.51)$$

Согласно (1.49), поток вектора магнитной индукции сквозь поверхность любого малого объема тождественно равен нулю. Поэтому

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (1.52)$$

Уравнение (1.52) и выражает теорему Гаусса в дифференциальной форме. Она является локальной теоремой, справедливой

для произвольной точки магнитного поля, т. е. дивергенция магнитной индукции  $\vec{B}$  всюду равна нулю. Это означает, что магнитное поле не имеет источников (магнитных зарядов).

Теорема Гаусса является фундаментальной, т. е. выполняется всегда и для любых магнитных полей. Она справедлива не только для постоянных, но и переменных магнитных полей.

## § 1.9. Работа по перемещению контура с током в магнитном поле

Так как на проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера, то при движении проводника эти силы совершают определенную работу. Найдем эту работу.

Для простоты рассмотрим замкнутый контур с током  $I$  (рис. 1.18), образованный неподвижными проводниками и прямолинейным проводником  $AC$ , способным перемещаться. Будем считать, что проводник

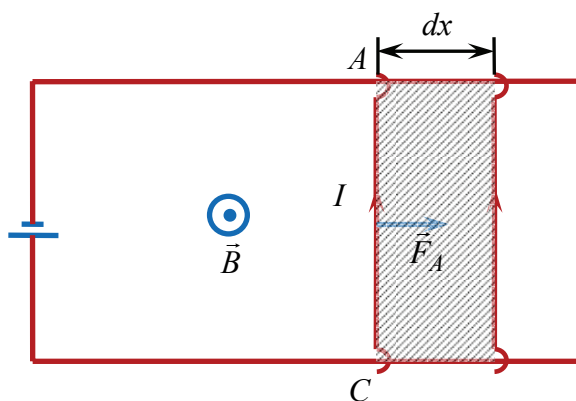


Рис. 1.18

$AC$  может скользить по параллельным проводникам, замыкая электрическую цепь.

В однородном магнитном поле на проводник  $AC$  действует сила Ампера  $F_A$  (1.5). Если магнитная индукция  $\vec{B}$  направлена перпендикулярно плоскости, охватываемой контуром на нас, то согласно правилу левой руки сила Ампера действует вправо. Принимая во внимание, что угол между проводником и

вектором магнитной индукции  $\alpha = 90^\circ$ , модуль силы Ампера определяется по формуле

$$F_A = IBl, \quad (1.53)$$

где  $l$  – длина проводника  $AC$ .

Под действием силы проводник  $AC$  будет перемещаться. При элементарном (бесконечно малом) перемещении  $dx$  магнитное поле совершит работу

$$\delta A = F_A dx = IBdS, \quad (1.54)$$

где  $dS = ldx$  – площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле.

Произведение магнитной индукции  $B$  на площадь  $dS$  в (1.54) равно магнитному потоку (1.48) сквозь данную площадь:

$$d\Phi_m = BdS. \quad (1.55)$$

Таким образом, работа сил поля

$$\delta A = Id\Phi_m. \quad (1.56)$$

Интегрируя выражение (1.56), найдем работу, совершаемую полем при конечном перемещении проводника:

$$A = \int \delta A = I \int d\Phi_m = I\Delta\Phi_m, \quad (1.57)$$

где  $\Delta\Phi_m$  – изменение магнитного потока сквозь площадь, ограниченную замкнутым контуром, численно равное магнитному потоку через площадь, пересекаемую проводником:

$$\Delta\Phi_m = \Phi_{m2} - \Phi_{m1}, \quad (1.58)$$

здесь  $\Phi_{m1}$  и  $\Phi_{m2}$  – магнитные потоки сквозь площадь, ограниченную контуром до и после его перемещения, соответственно.

Отметим, что выражение (1.57) для работы справедливо не только для рассмотренного движения части контура, но и при произвольном движении контура в магнитном поле, а также при любой деформации контура, которые сопровождаются изменением пронизывающего его магнитного потока.

## § 1.10. Эффект Холла

Одним из проявлений магнитной составляющей силы Лоренца в веществе является эффект, обнаруженный в 1879 г. американским физиком Э. Г. Холлом. Он заключается в возникновении *поперечной разности потенциалов (холловского напряжения)*  $U_H$  при помещении проводника с электрическим током в магнитное поле.

В простейшем рассмотрении эффект Холла выглядит следующим образом. Металлическую пластинку (рис. 1.19), вдоль которой течет постоянный электрический ток  $I$ , помещают в однородное магнитное поле, индукция  $B$  которого перпендикулярна боковым граням пластинки. На заряды, движением которых обусловлен электрический ток

(на носители тока), со стороны магнитного поля действует сила (1.8), модуль которой (1.9) имеет вид

$$F_M = |q| v B, \quad (1.59)$$

где было учтено, что угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$   $\alpha = 90^\circ$ .

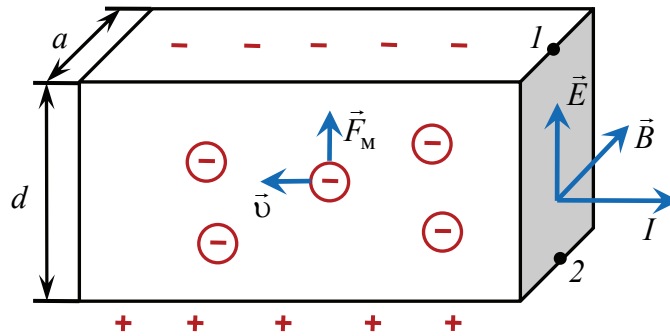


Рис. 1.19

Заметим, что носителями электрического тока в металлах являются отрицательно заряженные электроны. Так как за направление электрического тока принимают направление движения положительно заряженных частиц, то электроны в проводнике двигаются в направлении, противоположном направлению электрического тока.

Сила  $\vec{F}_M$  отклоняет заряды к верхней грани пластинки. Действие силы приведет к накоплению отрицательного заряда возле одной грани пластины, и положительного – возле противоположной. В результате этого в пластинке возникнет поперечное электрическое поле, напряженность которого  $\vec{E}$  перпендикулярна току и вектору магнитной индукции  $\vec{B}$ . Накопление заряда у одной из граней будет продолжаться до тех пор, пока сила  $\vec{F}_{эл}$ , действующая на заряды со стороны возникшего электрического поля, не скомпенсирует магнитную составляющую силы Лоренца  $\vec{F}_M$ , т. е.  $\vec{F}_{эл} = -\vec{F}_M$ .

Так как согласно (1.10)

$$F_{эл} = |q| E, \quad (1.60)$$

то напряженность возникшего электрического поля

$$E = v B. \quad (1.61)$$

Поперечная разность потенциалов, возникающая между боковыми гранями пластинки между точками 1 и 2, равна (см. [3])

$$U_H = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dr = Ed = vBd, \quad (1.62)$$

где  $d$  – толщина пластики.

Примем во внимание выражение для плотности  $j$  электрического тока [3]

$$j = \frac{I}{S} = qnv, \quad (1.63)$$

где  $S = ad$  – площадь поперечного сечения проводника;  $a$  – его ширина;  $n$  – концентрация носителей тока.

Отсюда скорость движения зарядов

$$v = \frac{I}{qnad}. \quad (1.64)$$

Подставляя (1.64) в (1.62), окончательно найдем

$$U_H = R \frac{IB}{a}, \quad (1.65)$$

где величину  $R$  называют *постоянной Холла*

$$R = \frac{1}{qn}. \quad (1.66)$$

Возникающую разность потенциалов (1.65) можно измерить. По знаку разности потенциалов можно судить о знаке заряда носителей тока. Именно так Холл, в результате проведенных опытов, первым в мире наглядно продемонстрировал, что электрический ток в металлах создается направленным движением отрицательно заряженных электронов. А до этого опыта ученые сомневались и относительно полярности зарядов носителей тока, и относительно того, воздействует ли магнитное поле на заряженные частицы внутри проводника или на саму неподвижную структуру проводника. Заметим, что эффект Холла наблюдается не только в металлах, но и в полупроводниках, причем по знаку эффекта можно судить о принадлежности полупроводника к  $n$ - или  $p$ -типу\*. По значению разности потенциалов можно определить концентрацию носителей тока.

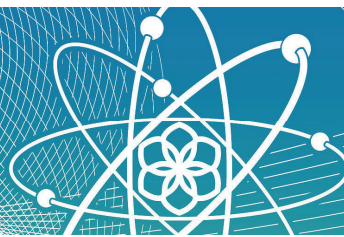
Эффект Холла используют при исследовании свойств полупроводников. Широкое применение находят *датчики Холла* – приборы для измерения индукции магнитного поля, работающие на основе

---

\* В полупроводниках  $n$ -типа знак носителей тока отрицателен, а в полупроводниках  $p$ -типа – положителен.

эффекта Холла. Их используют как основной элемент в различных типах датчиков, таких как датчики тока, температуры, давления, положения и т. д. Принцип его применения состоит в следующем. Датчик Холла всегда реагирует на изменения магнитного поля, созданного магнитной системой. В свою очередь состояние магнитной системы изменяется в зависимости от изменения измеряемой величины: температуры, давления, положения или какого-нибудь другого параметра через входной преобразователь. Выходной преобразователь формирует необходимый выходной сигнал измерителя, используя напряжение датчика. Датчики Холла используются практически везде: в автомобилях и самолетах, в компьютерах и швейных машинах, инструментах и медицинском оборудовании. Например, их используют в электродвигателях в роли датчика положения ротора, в приводах дисководов и двигателях вентиляторов компьютерной техники, в магнитометрах смартфонов в качестве основы работы электронного компаса, в электроизмерительных приборах (токоизмерительные клещи, пробники тока) для бесконтактного измерения силы тока.

## Глава 2 ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ



### § 2.1. Закон Био – Савара – Лапласа

*Законом Био – Савара – Лапласа* называют соотношение, описывающее порождение магнитного поля электрическим током. Согласно этому закону бесконечно малый элемент  $dl$  проводника с электрическим током  $I$  создает вокруг себя магнитное поле, индукция  $d\vec{B}$  которого определяется выражением

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (2.1)$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость среды (для вакуума  $\mu = 1$ , для немагнитных сред  $\mu \approx 1$ );  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м (*генри на метр*) – магнитная постоянная;  $d\vec{l}$  – вектор, по направлению совпадающий с электрическим током и по модулю равный элементу  $dl$  проводника (рис. 2.1);  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный от элемента  $dl$  в произвольную точку магнитного поля, а  $r$  – его модуль.

Направление вектора  $d\vec{B}$  задается правилом векторного умножения в (2.1) и соответствует правилу правой руки или буравчика (см. § 1.1). На рис. 2.1 вектор  $d\vec{B}$  направлен перпендикулярно плоскости чертежа от нас.

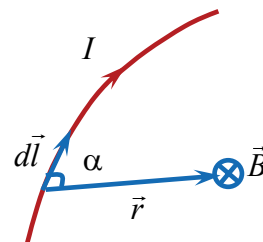


Рис. 2.1

По принципу суперпозиции (1.1) магнитная индукция  $\vec{B}$  поля, создаваемого проводником конечной длины и произвольной формы, определяется в результате интегрирования (2.1) по всем элементам тока:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (2.2)$$

Опыт показывает, что магнитное поле создают вокруг себя движущиеся электрические заряды. Поэтому согласно принципу суперпозиции (1.1) магнитная индукция  $d\vec{B}$  поля, создаваемого бесконечно малым элементом  $dl$  проводника с током  $I$ , запишем в виде

$$d\vec{B} = \vec{B}_1 dN, \quad (2.3)$$

где  $\vec{B}_1$  – магнитная индукция поля, создаваемая отдельно движущимся зарядом;  $dN$  – число заряженных частиц, находящихся в объеме проводника длиной  $dl$ .

Примем во внимание, что сила тока в проводнике

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{qdN}{dt}, \quad (2.4)$$

где  $dQ = qdN$  – заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время  $dt$ ;  $q$  – заряд отдельной частицы.

Тогда, подставляя (2.3), (2.4) в (2.1) и учитывая, что  $d\vec{l} = \vec{v}dt$ , где  $\vec{v}$  – скорость упорядоченного движения зарядов, найдем выражение для магнитной индукции  $\vec{B}_1$  поля, создаваемого отдельно движущимся зарядом

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (2.5)$$

Заметим, что магнитное поле движущегося заряда принципиально всегда может быть измерено на опыте, хотя практически это и весьма трудная задача. Действительно, установление того факта, что движущиеся заряды создают магнитные поля, было получено с большим трудом. Закон Био – Савара – Лапласа (2.1) для элемента проводника с током принципиально недоступен опытной проверке, так как невозможно изолировать отдельные элементы постоянных токов и экспериментировать с ними. Экспериментальной проверке доступна только интегральная формула (2.2).

## § 2.2. Расчет магнитных полей с помощью закона Био – Савара – Лапласа

Формула (2.2) в принципе позволяет рассчитать индукцию магнитного поля, создаваемого любым распределением постоянных токов. Вычисление интеграла для тока произвольной конфигурации, вообще говоря, сложен. Однако расчет значительно упрощается, если распределение тока имеет определенную симметрию. Рассмотрим несколько простейших примеров нахождение индукции магнитного поля электрического тока.

**1. Магнитное поле прямого тока конечной длины.** Найдем магнитную индукцию поля, создаваемого тонким прямолинейным



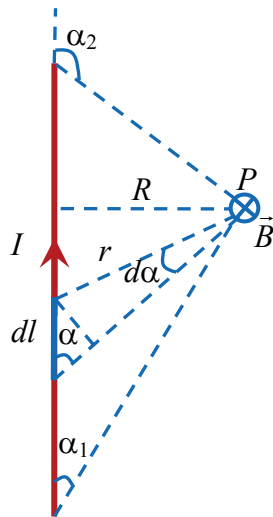


Рис. 2.2

проводником с током (рис. 2.2). Разобьем проводник на бесконечно малые элементы  $dl$ . По правилу правой руки в произвольной точке  $P$  вектора  $d\vec{B}$  от всех элементов тока имеют одинаковое направление – перпендикулярно плоскости чертежа от нас. Поэтому результирующий вектор  $\vec{B}$  направлен в ту же сторону, а его модуль  $B$  равен сумме модулей  $dB$  накладываемых полей:

$$B = \int dB. \quad (2.6)$$

Причем из (2.1) по правилу векторного умножения следует, что

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin \alpha dl}{r^2}, \quad (2.7)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

Из рисунка видно, что

$$dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha}, \quad r = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad (2.8)$$

где  $R$  – расстояние от точки до проводника.

Подставив  $dl$  и  $r$  в (2.7), получим

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R} I \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha, \quad (2.9)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – значения угла  $\alpha$  для крайних точек проводника.

Проинтегрировав это выражение, находим

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (2.10)$$

**2. Магнитное поле прямого тока бесконечной длины.** Прямолинейный проводник с током можно считать бесконечным, если расстояние от проводника до точки пространства, в которой магнитная индукция исследуется, много меньше длины проводника. В этом случае на рис. 2.2 углы  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_2 = \pi$ . Учитывая значения углов в формуле (2.10), найдем

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (2.11)$$

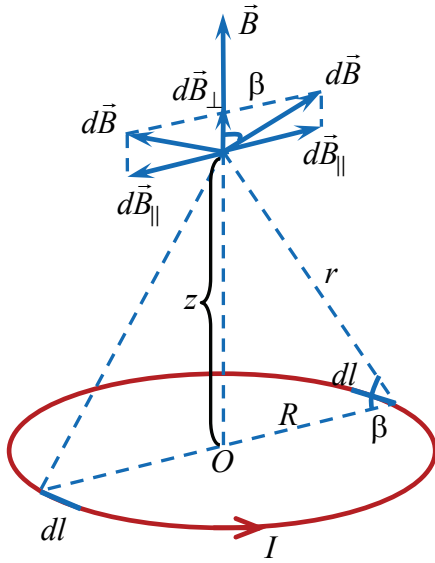


Рис. 2.3

**3. Магнитное поле на оси кругового тока.** Пусть дан круговой виток с током  $I$ . Найдем магнитную индукцию на оси, проходящей через центр витка  $O$ , на расстоянии  $z$  от него (рис. 2.3). Магнитную индукцию  $d\vec{B}$  поля, создаваемого элементом  $dl$  кругового тока, разложим на две составляющие

$$d\vec{B} = d\vec{B}_{\parallel} + d\vec{B}_{\perp}, \quad (2.12)$$

где  $d\vec{B}_{\parallel}$  – параллельна плоскости контура, а  $d\vec{B}_{\perp}$  – перпендикулярна ему.

Тогда, результирующий вектор

$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \oint d\vec{B}_{\parallel} + \oint d\vec{B}_{\perp} = \oint d\vec{B}_{\perp}, \quad (2.13)$$

где учтено, что при интегрировании по замкнутому контуру кругового тока составляющие  $d\vec{B}_{\parallel}$  взаимно уничтожаются, т. е. для каждого элемента  $dl$  на контуре имеется симметрично расположенный элемент с противоположным направлением вектора  $d\vec{B}_{\parallel}$ .

Из (2.13) следует, что вектор  $\vec{B}$  направлен вдоль оси кругового витка, а его модуль равен сумме модулей векторов  $d\vec{B}_{\perp}$  от каждого элемента. Примем во внимание, что

$$dB_{\perp} = dB \cos\beta = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \cos\beta, \quad (2.14)$$

где учтено, что угол  $\alpha$  между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$  в (2.7) равен  $90^\circ$ , поэтому синус равен единице.

Интегрируя выражение (2.14) по всем элементам  $dl$ , найдем

$$B = \int dB_{\perp} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos\beta \int_L dl = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r^2} L \cos\beta = \frac{\mu\mu_0 IR}{2r^2} \cos\beta, \quad (2.15)$$

где  $L = 2\pi R$  – длина кругового витка и  $R$  – его радиус.

Учитывая, что

$$\cos\beta = \frac{R}{r}, \quad r = \sqrt{R^2 + z^2}, \quad (2.16)$$

окончательно получим

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.17)$$

Отсюда следует, что в центре кругового витка при  $z = 0$

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}. \quad (2.18)$$

Используя определение магнитного момента  $\vec{p}_m$  (1.34), запишем формулу (2.17) в векторном виде:

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{p}_m}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.19)$$

Если точка наблюдения находится далеко от центра кругового витка, т. е.  $z \gg R$ , то величиной  $R$  в знаменателе правой части (2.19) можно пренебречь:

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{p}_m}{z^3}. \quad (2.20)$$

Формула (2.20) показывает, что индукция поля магнитного момента убывает обратно пропорционально третьей степени расстояния, в то время как индукция поля элемента тока (2.1) убывает обратно пропорционально квадрату расстояний.

### § 2.3. Закон полного тока в вакууме

По определению *циркуляцией*  $\Gamma$  вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  по заданному замкнутому контуру  $L$  называют интеграл

$$\Gamma = \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl, \quad (2.21)$$

где  $d\vec{l}$  – элементарное (бесконечно малое) перемещение вдоль контура  $L$  (рис. 2.4, а);  $B_l = B \cos \alpha$  – проекция вектора  $\vec{B}$  на перемещение  $d\vec{l}$ ;  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$ .

Вычислим этот интеграл в случае магнитного поля прямого бесконечного тока, находящегося в вакууме. Пусть замкнутый контур  $L$  произвольной формы лежит в плоскости, перпендикулярной к току (рис. 2.4, а), и охватывает его. В каждой точке этого контура вектор  $\vec{B}$  направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку. Для любого элемента  $dl$  контура

$$\vec{B} d\vec{l} = B dl \cos \alpha = B dl', \quad (2.22)$$

где  $dl' = dl \cos \alpha$  – проекция вектора  $d\vec{l}$  на направления вектора  $\vec{B}$ .

Примем во внимание, что  $dl' = R d\alpha$ , где  $d\alpha$  – центральный угол, под которым виден элемент  $dl$  контура  $L$  из центра окружности. Подставив (2.11) в (2.22) и учитывая, что для вакуума  $\mu = 1$ , получим

$$\vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha. \quad (2.23)$$

Интегрируя по всем элементам контура и учитывая, что при этом угол  $\alpha$  изменяется от 0 до  $2\pi$ , находим

$$\Gamma = \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = \mu_0 I. \quad (2.24)$$

Заметим, что знак выражения (2.24) зависит от направления обхода по контуру. Если направление обхода образует с направлением тока правовинтовую систему (как предполагалось при выводе формулы (2.24)), величина (2.24) положительна, в противном случае – отрицательна. Знак можно учесть, полагая ток  $I$  алгебраической величиной, причем положительным нужно считать ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта, ток противоположного направления будет отрицательным.

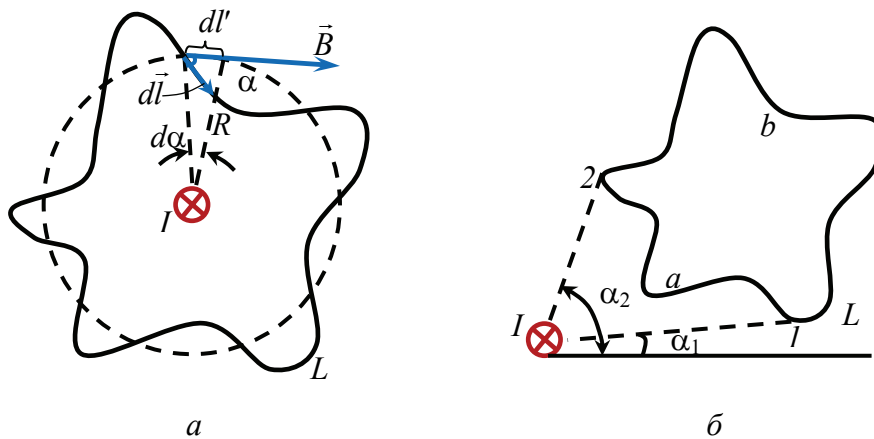


Рис. 2.4

Если контур  $L$  не охватывает проводник с током (рис. 2.4, б), то

$$\Gamma = \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_{1a2} \vec{B} d\vec{l} + \int_{2b1} \vec{B} d\vec{l}, \quad (2.25)$$

где  $1a2$  и  $2b1$  – участки контура  $L$ . Заменяв подынтегральные выражения по формуле (2.23), получим

$$\Gamma = \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} d\alpha \right) = 0. \quad (2.26)$$

Соотношения (2.24) и (2.26), полученные нами для случая магнитного поля прямого бесконечного тока в вакууме, являются универсальными. Можно показать, что они справедливы и для магнитного поля проводника с током любой формы и размеров.

В общем случае магнитное поле может создавать целая система из  $N$  проводников с током  $I_1, I_2, \dots, I_N$ . Допустим, что некоторый контур  $L$  охватывает некоторые из них. В силу принципа суперпозиции (1.1)

$$\Gamma = \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L \sum_{k=1}^N \vec{B}_k d\vec{l} = \sum_{k=1}^N \oint_L \vec{B}_k d\vec{l}. \quad (2.27)$$

Каждый из интегралов в этой сумме либо равен  $\mu_0 I_k$ , если ток охватывается контуром, либо нулю в противоположном случае. Следовательно

$$\Gamma = \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k, \quad (2.28)$$

где в сумму входят только токи, охватываемые контуром,  $n$  – число проводников с током, охватываемых контуром.

Уравнение (2.28) является математическим выражением *закона полного тока в вакууме (теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$ )*: циркуляция вектора индукции магнитного поля в вакууме вдоль произвольного замкнутого контура равна произведению магнитной постоянной на алгебраическую сумму (с учетом знаков) токов, охватываемых этим контуром.

Как пример на рис. 2.5 приведена система четырех токов. Токи  $I_1, I_2, I_3$  охватываются контуром  $L$ , причем токи  $I_1$  и  $I_3$  образуют с направлением обхода контура правовинтовую систему. Поэтому закон полного тока (2.28) имеет вид

$$\Gamma = \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_3). \quad (2.29)$$

Запишем закон полного тока (2.28) в дифференциальной форме. Рассмотрим отношение циркуляции  $\Gamma$  вектора  $\vec{B}$  к площади  $S$ , ограниченной замкнутым контуром. В математике доказывается, что предел этого отношения при  $S \rightarrow 0$  зависит от ориентации контура в данной точке пространства и определяется проекцией некоторого вектора на направление нормали  $\vec{n}$  к плоскости контура, по которому берется

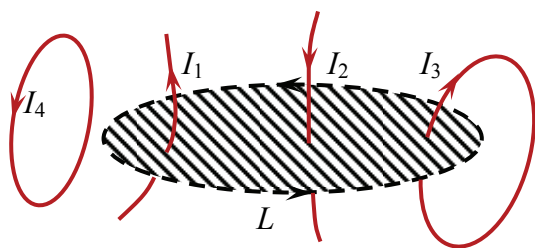


Рис. 2.5

циркуляция. Этот вектор называют *ротором* (вихрем) поля  $\vec{B}$  и обозначают символом  $\text{rot}\vec{B}$ . Таким образом

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{S} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{B} d\vec{l}}{S} = (\text{rot}\vec{B})_n, \quad (2.30)$$

где справа стоит проекция вектора  $\text{rot}\vec{B}$  на нормаль  $\vec{n}$ .

Таким образом, ротор вектора характеризует циркуляцию (вихрь) в данной точке поля. В декартовой системе координат ротор вектора  $\vec{B}$  определяется по формуле

$$\text{rot}\vec{B} = \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \vec{k}, \quad (2.31)$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – орты декартовой системы координат;  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  – компоненты вектора  $\vec{B}$ .

Примем во внимание, что алгебраическая сумма токов в (2.28) есть не что иное, как результирующая сила тока  $I$  проводимости через поверхность  $S$ . Поэтому можно записать

$$I = \sum_{k=1}^n I_k = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S j_n dS, \quad (2.32)$$

где  $\vec{j}$  – плотность тока в пределах малого элемента  $dS$  поверхности, натянутой на контур;  $d\vec{S} = dS\vec{n}$  – вектор, направленный по нормали  $\vec{n}$  и по модулю равный элементу  $dS$ ;  $j_n$  – проекция вектора  $\vec{j}$  на нормаль.

Из (2.32) следует, что

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{I}{S} = j_n. \quad (2.33)$$

Обратимся теперь к теореме о циркуляции вектора  $\vec{B}$ . Разделим уравнение (2.28) на площадь  $S$  и устремим ее к нулю. Используя (2.30) и (2.33), найдем

$$(\text{rot}\vec{B})_n = \mu_0 j_n. \quad (2.34)$$

Так как данное соотношение должно выполняться при произвольной ориентации площади  $S$  (нормали к площади), то

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (2.35)$$

Равенство (2.35) является *дифференциальной формой закона полного тока*. Оно имеет дифференциальный характер и справедливо в каждой точке магнитного поля, созданного электрическими токами.

Заметим, что для электростатического поля циркуляция вектора напряженности  $\vec{E}$  равна нулю [3], поэтому  $\text{rot}\vec{E} = 0$ . Поле, ротор которого всюду равен нулю, является *потенциальным*, в противном случае поле является *соленоидальным* или *вихревым*. Значит, электростатическое поле есть потенциальное, а магнитное поле токов – соленоидальное.

## § 2.4. Магнитное поле соленоида и тороида

Используя закон полного тока (2.28), найдем индукцию магнитного поля соленоида и тороида, имеющих немагнитный сердечник.

*Соленоидом* называется цилиндрическая катушка, состоящая из большого числа намотанных вплотную друг к другу витков проводника, по которому идет ток. Опыт показывает, что чем длиннее соленоид, тем меньше индукция магнитного поля снаружи него. Для бесконечно длинного соленоида, поле внутри соленоида является однородным ( $B \approx \text{const}$ ) и направлено вдоль его оси, а вне его  $B \approx 0$ . Вычислим циркуляции вектора  $\vec{B}$  по прямоугольному контуру  $abcd$ , показанному на рис. 2.6. Вектор  $\vec{B}$  имеет отличную от нуля проекцию на направление контура только на участке  $bc$ , поэтому циркуляции вектора  $\vec{B}$  по данному контуру  $\Gamma = Bl$ , где  $l$  – длина участка  $bc$ . Если число витков на единицу длины соленоида  $n$ , то выбранный контур охватывает  $nl$  витков с общим током  $nIl$ . Согласно закону полного тока

$$Bl = \mu_0 nIl. \quad (2.36)$$

Отсюда следует, что магнитная индукция внутри длинного соленоида

$$B = \mu_0 nI. \quad (2.37)$$

Практически формула (2.37) справедлива для точек в средней части соленоида, если его длина значительно больше, чем его диаметр.

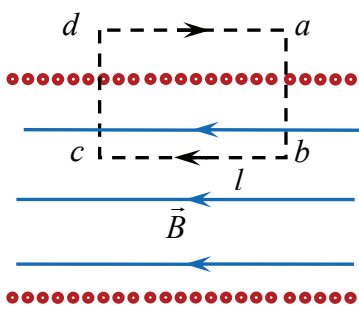


Рис. 2.6

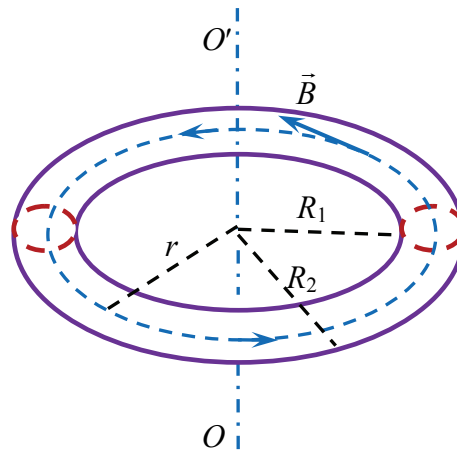


Рис. 2.7

Тороидом называют кольцевую катушку, витки которой намотаны на каркас, имеющий форму тора (рис. 2.7). Линии индукции магнитного поля тороида имеют форму окружностей, центры которых расположены на оси  $OO'$  тороида. Поэтому в качестве замкнутого контура возьмем одну из таких окружностей, имеющую радиус  $r$ . Во всех точках этой линии вектор  $\vec{B}$  направлен по касательной, а его значение одинаково. Поэтому циркуляции вектора  $\vec{B}$  по данному контуру  $\Gamma = Bl = B2\pi r$ , где  $l = 2\pi r$  – длина окружности. Если контур лежит внутри тороида ( $R_1 < r < R_2$ , где  $R_1$  и  $R_2$  – внутренний и внешний радиусы тороида), он охватывает ток  $NI$ , где  $N$  – число витков в катушке,  $I$  – ток в проводе. По закону полного тока

$$B2\pi r = \mu_0 NI, \quad (2.38)$$

откуда следует, что внутри тороида

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}. \quad (2.39)$$

Если выбранный замкнутый контур лежит вне тороида ( $r < R_1$  и  $r > R_2$ ), то токов он не охватывает, поэтому для такого контура  $B2\pi r = 0$ . Это означает, что вне тороида магнитное поле отсутствует ( $B = 0$ ).

Согласно (2.39), поле внутри тороида является неоднородным, оно зависит от расстояния  $r$  до его оси. Однако, в случае тонкого тороида, когда диаметр витков  $d = R_2 - R_1$  много меньше радиуса его средней линии  $R = (R_1 + R_2)/2$ , поле слабо изменяется внутри него и его можно приближенно считать однородным. Тогда магнитная индукция внутри тороида



$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} = \mu_0 nI, \quad (2.40)$$

где  $n = N/2\pi R$  – число витков на единицу длины тороида. Формула (2.40) совпадает с формулой (2.37) для бесконечно длинного соленоида.

Заметим, что если в качестве сердечника соленоида или тороида используются однородные магнитные материалы, магнитная индукция внутри них увеличивается в  $\mu$  раз. Таким образом

$$B = \mu\mu_0 nI, \quad (2.41)$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость сердечника.

## § 2.5. Магнитное взаимодействие проводников с током. Единица измерения силы тока в СИ

Проводники с электрическим током взаимодействуют друг с другом посредством магнитных полей, которые они создают. Рассмотрим случай двух параллельных бесконечных прямых токов (рис. 2.8). Пусть направления электрических токов в проводниках совпадают. Каждый элемент тока одного из проводников находится в магнитном поле тока другого проводника. Согласно закону Био – Савара – Лапласа (2.11), индукции магнитных полей, создаваемых токами, имеют вид

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi R}, \quad B_2 = \frac{\mu\mu_0 I_2}{2\pi R}, \quad (2.42)$$

где  $R$  – расстояние между проводниками. Направления векторов  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  определяются правилом правой руки или буравчика и показаны на рис. 2.8.

На произвольный элемент  $dl$  каждого проводника со стороны магнитного поля действует сила Ампера (1.2). Так как угол между элементами тока и магнитными индукциями прямой, то модули сил Ампера (1.3) с учетом (2.42)

$$dF_{A1} = I_1 B_2 dl = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} dl, \quad dF_{A2} = I_2 B_1 dl = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} dl \quad (2.43)$$

равны между собой.

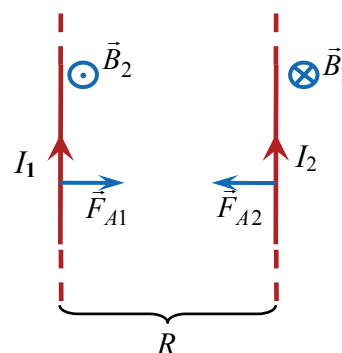


Рис. 2.8

Интегрируя (2.43), найдем силу  $F$ , действующую на участок каждого проводника длиной  $l$ :

$$F = F_{A1} = F_{A2} = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} l. \quad (2.44)$$

Направления сил  $\vec{F}_{A1}$  и  $\vec{F}_{A2}$  определяются правилом левой руки и показаны на рис. 2.8. Таким образом, между двумя токами одинакового направления действуют силы притяжения. Нетрудно убедиться в том, что токи противоположного направления отталкиваются.

Для сравнения сил токов и установления единицы силы тока можно, вообще говоря, воспользоваться любым из различных проявлений электрического тока – тепловым, химическим или магнитным. Оказывается, наиболее точно можно измерить силу магнитного взаимодействия между проводниками. Поэтому в СИ единица силы тока ампер (одна из основных единиц в этой системе) определяется при помощи сил взаимодействия между проводниками, по которым текут токи. Для определения используется именно формула (2.44), выражающая силу взаимодействия двух параллельных токов. *Один ампер* есть сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины ( $I_1 = I_2 = 1$  А), расположенным на расстоянии одного метра ( $R = 1$  м) один от другого в вакууме ( $\mu = 1$ ), вызвал бы между этими проводниками силу  $F = 2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины ( $l = 1$  м). Заметим, что из (2.44) при данных параметрах следует значение магнитной постоянной  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

Практически трудно с достаточной точностью обеспечить условия применимости формулы (2.44) и измерять в этих условиях силу  $F$ . Поэтому на практике для установления эталона ампера и для калибровки других приборов, предназначенных для измерения силы тока, пользуются другим прибором – так называемыми *токовыми весами*. В них при помощи точных весов измеряется сила взаимодействия двух катушек, по которым проходит один и тот же ток. Сила взаимодействия катушек, подобно формуле (2.44), прямо пропорциональна произведению сил токов в них.

Заметим, что в настоящее время продолжается ревизия Международной системы единиц (СИ), в которой предлагается переопределить основные единицы таким образом, чтобы они были основаны не на созданных человеком артефактах, а на фундаментальных физических постоянных или свойствах атомов. В частности, предполагается, что СИ станет системой единиц, в которой величина ампера будет устанавливаться фиксацией точного значения элементарного электрического заряда.

## Глава 3 МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ



### § 3.1. Магнитные моменты атомов

Многочисленные опыты свидетельствуют о том, что любое вещество является *магнетиком*. При внесении вещества в магнитное поле оно приобретает магнитные свойства – *намагничивается*, т. е. создает собственное магнитное поле. Причиной намагничивания являются микротоки, циркулирующие в пределах каждой молекулы, их называют *молекулярными токами*. Каждый такой ток обладает магнитным моментом и создает в окружающем пространстве магнитное поле. В отсутствие внешнего магнитного поля молекулярные токи ориентированы беспорядочным образом, вследствие чего обусловленное ими результирующее поле равно нулю. Под действием внешнего поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию в одном направлении, вследствие чего магнетик намагничивается. Магнитные поля отдельных молекулярных токов в этом случае уже не компенсируют друг друга.

Магнитные свойства атомов (молекул) в основном определяются входящими в их состав электронами. Согласно представлениям классической физики, электроны в атомах движутся по круговым орбитам. Такое движение эквивалентно замкнутому контуру с током, который называют *орбитальным током*. Так как электрон имеет отрицательный заряд, то ток направлен в противоположную сторону движения частицы (рис. 3.1), а его сила определяется соотношением

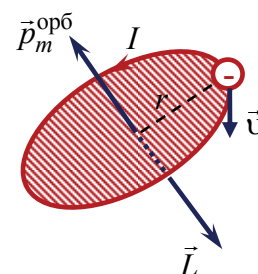


Рис. 3.1

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\nu}{2\pi r}, \quad (3.1)$$

где  $e$  – элементарный заряд (модуль заряда электрона);  $T = 2\pi r/\nu$  – период обращения электрона;  $r$  – радиус орбиты электрона;  $\nu$  – его скорость.

Данный ток охватывает площадь, равную площади орбиты  $S = \pi r^2$ , поэтому магнитный момент (1.34) этого тока

$$p_m^{\text{орб}} = IS = \frac{e\nu r}{2}. \quad (3.2)$$

Момент (3.3) обусловлен движением электрона по орбите, вследствие чего называется *орбитальным магнитным моментом электрона*. Вектор  $\vec{p}_m^{\text{орб}}$  перпендикулярен плоскости орбиты и образует с направлением тока правовинтовую систему (рис. 3.1).

Движущийся по орбите электрон обладает моментом импульса

$$L = m\nu r, \quad (3.3)$$

где  $m$  – масса электрона.

Вектор  $\vec{L}$  называют *орбитальным моментом импульса*. Он также перпендикулярен плоскости орбиты, но его направление образует с направлением движения электрона правовинтовую систему, а с направлением тока – левовинтовую систему. Следовательно, направления векторов  $\vec{p}_m^{\text{орб}}$  и  $\vec{L}$  противоположны (рис. 3.1).

Из формул (3.2) и (3.3) следует, что

$$p_m^{\text{орб}} = \frac{e}{2m} L. \quad (3.4)$$

Учитывая направление векторов  $\vec{p}_m^{\text{орб}}$  и  $\vec{L}$ , запишем (3.4) в векторном виде

$$\vec{p}_m^{\text{орб}} = -g\vec{L}, \quad (3.5)$$

где величину  $g = e/2m$  – называют *гиромагнитным отношением орбитальных моментов*.

Кроме орбитального момента импульса электрон обладает также собственным моментом импульса  $\vec{L}_s$ , который называют *спином*. Он является неотъемлемым свойством электрона, подобно его заряду и массе. Спину электрона соответствует *собственный (спиновый) магнитный момент*  $\vec{p}_m^{\text{сп}}$ , пропорциональный  $\vec{L}_s$ :

$$\vec{p}_m^{\text{сп}} = -g_s\vec{L}_s, \quad (3.6)$$

где знак минус показывает, что вектора  $\vec{p}_m^{\text{сп}}$  и  $\vec{L}_s$  имеют противоположные направления;  $g_s = e/m$  – называют *гиромагнитным отношением спиновых моментов*.

Магнитный момент атома (молекулы) равен векторной сумме орбитальных и спиновых магнитных моментов, входящих в его состав электронов:

$$\vec{p}_m = \sum \vec{p}_m^{\text{орб}} + \sum \vec{p}_m^{\text{сп}}. \quad (3.7)$$

В формуле (3.7) не учитываются магнитные моменты атомных ядер, так как их магнитные моменты значительно меньше моментов электронов и ими при рассмотрении многих вопросов можно пренебречь. Заметим, что если орбитальные и спиновые магнитные моменты компенсируют друг друга, то магнитный момент атома (молекулы) равен нулю.

### § 3.2. Атом в магнитном поле

Рассмотрим влияние магнитного поля на движение электронов в атомах вещества. Ввиду малости атомов можно считать, что в пределах каждого из них магнитное поле однородно. Рассмотрим произвольный случай ориентации вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  к плоскости орбиты электрона (рис. 3.2). На движущийся в атоме электрон со стороны магнитного поля действует момент силы  $\vec{M}$  (1.33). Учитывая (3.5), найдем

$$\vec{M} = \vec{p}_m^{\text{орб}} \times \vec{B} = -g\vec{L} \times \vec{B} = g\vec{B} \times \vec{L}. \quad (3.8)$$

Момент силы стремится установить орбитальный магнитный момент электрона  $\vec{p}_m^{\text{орб}}$  по направлению магнитной индукции  $\vec{B}$ , при этом момент импульса  $\vec{L}$  установится против поля. Изменение момента импульса определяется уравнением моментов [1]  $d\vec{L} / dt = \vec{M}$ :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = g\vec{B} \times \vec{L}. \quad (3.9)$$

Учитывая (3.5) в (3.9), получим аналогичное уравнение, определяющее изменение орбитального магнитного момента:

$$\frac{d\vec{p}_m^{\text{орб}}}{dt} = g\vec{B} \times \vec{p}_m^{\text{орб}}. \quad (3.10)$$

Сравним формулы (3.9), (3.10) с уравнением движения точек абсолютно твердого тела [1], вращающегося с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (3.11)$$

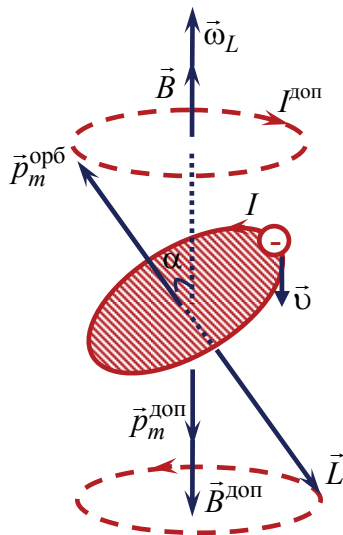


Рис. 3.2

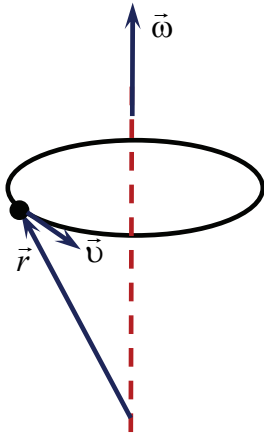


Рис. 3.3

где  $\vec{v}$  – скорость точки и  $\vec{r}$  – ее радиус-вектор (рис. 3.3).

Они имеют схожую структуру. Поэтому подобно радиус-вектору  $\vec{r}$ , концы векторов  $\vec{L}$  и  $\vec{p}_m^{\text{орб}}$  будут двигаться вокруг направления вектора  $\vec{B}$  с угловой скоростью

$$\vec{\omega}_L = g\vec{B}. \quad (3.12)$$

Следовательно, в магнитном поле орбита электрона начнет поворачиваться так, что угол  $\alpha$  на рис. 3.2 изменяться не будет. Такое движение называют *ларморовой прецессией*, а угловую скорость (3.12) – *ларморовой частотой*. Заметим,

что  $\omega_L$  не зависит ни от угла наклона орбиты по отношению к направлению магнитного поля, ни от радиуса орбиты или скорости электрона, и, следовательно, для всех электронов, входящих в состав атома, одинакова.

В результате ларморовой прецессии от каждого электрона в атоме возникает дополнительный круговой ток  $I^{\text{доп}}$ , который с направлением вектора индукции  $\vec{B}$  поля составляет левовинтовую систему. Следовательно, создаваемая этим током дополнительная магнитная индукция  $\vec{B}^{\text{доп}}$  направлена в противоположную сторону вектору индукции  $\vec{B}$  внешнего магнитного поля. Дополнительный магнитный момент  $\vec{p}_m^{\text{доп}}$ , возникающий в результате прецессии, также направлен противоположно вектору  $\vec{B}$ .

Заметим, что ларморова прецессия возникает у всех без исключения веществ. Однако в тех случаях, когда атомы обладают сами по себе магнитным моментом  $\vec{p}_m$ , внешнее магнитное поле не только индуцирует дополнительный магнитный момент, но и ориентирует магнитный момент атома в направлении магнитного поля (рис. 3.4).

Учитывая, что возникающий дополнительный магнитный момент много меньше магнитного момента атома, им можно пренебречь. В случае, когда атомы не обладают магнитным моментом, возникающий в результате ларморовой прецессии дополнительный магнитный момент является единственным магнитным моментом, которым обладает атом.

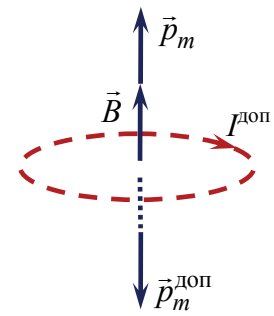


Рис. 3.4

### § 3.3. Намагниченность. Токи намагничивания

В веществе на внешнее магнитное поле накладывается дополнительное магнитное поле, созданное молекулярными токами (его соответственно называют *внутренним*). Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  характеризует результирующее магнитное поле в веществе, т. е. согласно принципу суперпозиции (1.1) он равен векторной сумме магнитных индукций внешнего  $\vec{B}_0$  и внутреннего  $\vec{B}_{\text{внутр}}$  полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{внутр}}. \quad (3.13)$$

Внутреннее магнитное поле возникает в результате намагничивания магнетика при его помещении во внешнее магнитное поле. Намагничивание обусловлено ориентацией магнитных моментов отдельных молекул по полю или индуцированием дополнительных магнитных моментов, ориентированных против поля. Заметим, что большинство веществ при внесении в магнитное поле намагничиваются слабо. Сильными магнитными свойствами обладают только ферромагнитные вещества: железо, никель, кобальт, их сплавы и др.

Степень намагничивания магнетиков характеризуют магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют *намагниченностью* и обозначают  $\vec{J}$ . По определению

$$\vec{J} = \frac{1}{V} \sum \vec{p}_m, \quad (3.14)$$

где  $V$  – физический малый объем магнетика;  $\vec{p}_m$  – магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование проводится по всем молекулам, заключенным в объеме  $V$ .

Намагниченность (3.14) можно представить в виде

$$\vec{J} = n \langle \vec{p}_m \rangle, \quad (3.15)$$

где  $n = N/V$  – концентрация молекул;  $\langle \vec{p}_m \rangle = \sum \vec{p}_m / N$  – средний магнитный момент одной молекулы;  $N$  – число молекул в объеме  $V$ .

Так как магнитный момент в СИ имеет размерность  $[p_m] = \text{А} \cdot \text{м}^2$ , то единица измерения намагниченности  $[J] = \text{А}/\text{м}$ .

В отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул либо равны нулю, либо ориентированы беспорядочным образом. Поэтому намагниченность магнетика равна нулю ( $J = 0$ ). При намагничивании магнетика магнитные моменты молекул ориентируются

в одном направлении, поэтому  $\vec{J} \neq 0$ . Если во всех точках магнетика вектор  $\vec{J}$  одинаков, говорят, что вещество намагничено однородно.

Ориентация молекулярных токов, существующих в пределах каждой молекулы, при намагничивании приводит к появлению макроскопических токов, которые называют *токами намагничивания*. Поясним появление их на примере цилиндра из однородного магнетика, намагниченность  $\vec{J}$  которого однородна и направлена вдоль оси цилиндра

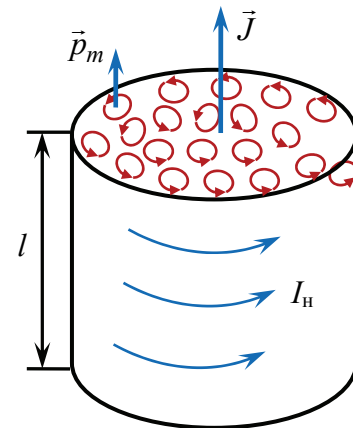


Рис. 3.5

(рис. 3.5). Молекулярные токи в этом случае ориентированы так, что их магнитные моменты  $\vec{p}_m$  совпадают по направлению с  $\vec{J}$ , т. е. их плоскости перпендикулярны оси цилиндра. У соседних молекул внутри цилиндра молекулярные токи текут в противоположных направлениях и взаимно компенсируют друг друга. Некомпенсированными остаются только те молекулярные токи, которые выходят на боковую поверхность цилиндра. Эти токи и образуют макроскопический поверхностный ток намагничивания, циркулирующий по боковой поверхности цилиндра. Таким образом, суммарное действие молекулярных токов будет таким, какое вызвал бы макроскопический ток, текущий по поверхности цилиндра. Пусть  $I_n$  – полный ток намагничивания, приходящийся на боковую поверхность цилиндра. Очевидно, что цилиндр, обтекаемый током, эквивалентен соленоиду с током  $I_n$  и числом витков  $N = 1$ . Поэтому, вне цилиндра магнитная индукция внутреннего поля  $B_{\text{внутр}} = 0$ , а внутри него определяется соотношением (2.37), которое в данном случае имеет вид

$$B_{\text{внутр}} = \frac{\mu_0 I_n}{l}, \quad (3.16)$$

где  $l$  – длина цилиндра.

Суммарный магнитный момент всех молекул цилиндра равен магнитному моменту тока намагничивания, текущего по его боковой поверхности:

$$\sum_V \vec{p}_m = I_n S, \quad (3.17)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения цилиндра.

Принимая во внимание, что объем цилиндра  $V = Sl$ , его намагниченность определяется по формуле



$$J = \frac{1}{V} \sum_V \vec{p}_m = \frac{I_H}{l}. \quad (3.18)$$

Учитывая (3.18) в (3.16) и принимая во внимание, что вектора  $\vec{B}_{\text{внутр}}$  и  $\vec{J}$  имеют одинаковое направление, получим

$$\vec{B}_{\text{внутр}} = \mu_0 \vec{J}. \quad (3.19)$$

Таким образом, результирующая магнитная индукция (3.13) в магнетике

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}. \quad (3.20)$$

Полученный результат справедлив только в случае однородной намагниченности, которая имеет место для однородного магнетика, находящегося в однородном магнитном поле. Заметим, что в случае неоднородной намагниченности в магнетике возникают не только поверхностные, но и объемные токи намагничивания.

В общем случае, установив распределение токов намагничивания  $I_H$ , можно с помощью закона Био – Савара – Лапласа найти магнитную индукцию  $\vec{B}_{\text{внутр}}$  и по формуле (3.20) вычислить результирующую магнитную индукцию  $\vec{B}$ . Однако распределение токов  $I_H$  зависит не только от конфигурации и свойств магнетика, но и от самого результирующего поля  $\vec{B}$ . Поэтому задача о нахождении результирующего поля в магнетике в общем случае непосредственно решена быть не может. Для решения этой задачи используют другой подход, основанный на обобщении закона полного тока в вакууме (2.28) для магнитного поля в веществе.

### § 3.4. Закон полного тока в веществе

В вакууме магнитное поле создают токи в проводниках  $I$  (токи проводимости). В магнетиках, помещенных во внешнее магнитное поле, дополнительно возникают токи намагничивания  $I_H$ . Следовательно, обобщение закона полного тока (2.28) для магнитного поля в веществе имеет вид

$$\Gamma = \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I_H), \quad (3.21)$$

где  $I$  и  $I_H$  – алгебраические суммы токов проводимости и намагничивания, охватываемых заданным контуром  $L$ .

Вклад в ток намагничивания  $I_H$  дают только те молекулярные токи, которые нанизаны на контур  $L$ , подобно бисеру на нитку (рис. 3.6, *a*). Молекулярные токи, пересекающие площадь, охватываемую контуром дважды, не вносят никакого вклада в результирующий ток  $I_H$ . Пусть каждый молекулярный ток равен  $I_M$  и  $S_M$  – площадь, охватываемая им. Тогда элемент  $dl$  контура  $L$  обвивают те молекулярные токи (рис. 3.6, *б*), центры которых попадают внутрь косоугольного цилиндра объемом:

$$dV = S_M \cos \alpha dl, \quad (3.22)$$

где  $\alpha$  – угол между элементом  $dl$  и вектором намагниченности  $\vec{J}$  в данном месте.

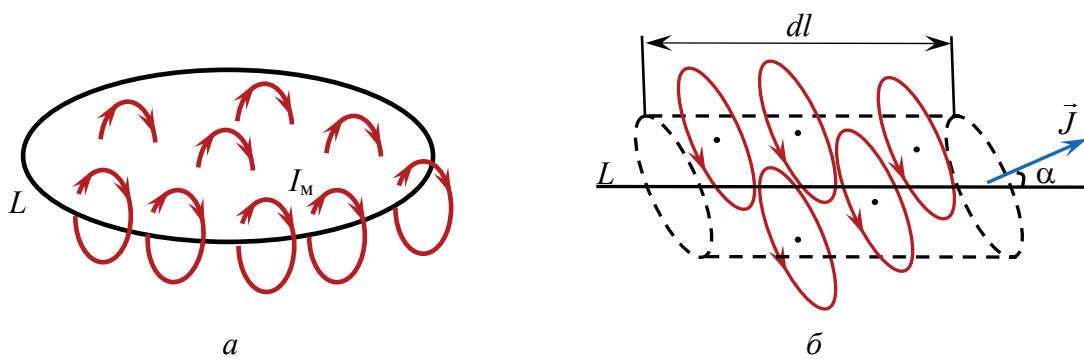


Рис. 3.6

Если концентрация молекул  $n$ , то число молекулярных токов, нанизанных на элемент  $dl$  контура, составляет

$$dN = n dV = n S_M \cos \alpha dl. \quad (3.23)$$

Все эти молекулярные токи пересекают площадь, охватываемую контуром, один раз и их вклад в ток намагничивания

$$dI_H = I_M dN = I_M n S_M \cos \alpha dl. \quad (3.24)$$

Примем во внимание, что  $p_M = I_M S_M$  – магнитный момент молекулярного тока и  $J = n p_M$  – намагниченность магнетика (3.15). Тогда

$$dI_H = J \cos \alpha dl = \vec{J} d\vec{l}. \quad (3.25)$$

Проинтегрировав полученное выражение по всему замкнутому контуру  $L$ , найдем ток намагничивания, охватываемый данным контуром:

$$I_H = \oint_L \vec{J} d\vec{l}. \quad (3.26)$$

Подставим (3.26) в закон полного тока (3.21) и преобразуем его к виду

$$\oint_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I. \quad (3.27)$$

Векторную величину, стоящую под знаком интеграла в скобках, обозначают  $\vec{H}$  и называют *напряженностью магнитного поля*:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (3.28)$$

Поэтому (3.27) можно переписать в виде

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I. \quad (3.29)$$

Эта формула выражает *закон полного тока в веществе (теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$ )*: циркуляция вектора  $\vec{H}$  по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром.

Заметим, что вектор  $\vec{H}$  не является чисто полевой величиной, так как включает в себя вектор  $\vec{J}$ , характеризующий намагничённость среды. Введение этого вектора оправдывается его важным свойством, выраженным в законе полного тока. Во многих случаях он значительно упрощает изучение поля в магнетиках. Из формулы (3.28) следует, что единицей измерения напряжённости магнитного поля является ампер на метр:  $[H] = \text{А/м}$ .

Дифференциальная формулировка закона полного тока (3.29) имеет вид

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad (3.30)$$

где операция ротор в декартовой системе координат определяется соотношением (2.31), а  $\vec{j}$  – плотность тока проводимости. Это уравнение можно получить из (3.29) тем же способом, как это было проделано в случае вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  в вакууме (см. § 2.3).

### § 3.5. Магнитное поле в веществе

Намагниченность  $\vec{J}$  изотропных немагнитных веществ линейно зависит от напряжённости  $\vec{H}$  магнитного поля:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (3.31)$$

где безразмерную величину  $\chi$ , характеризующую магнитные свойства среды, называют *магнитной восприимчивостью*. Она зависит как от природы вещества, так и от его состояния. Заметим, что в случае анизотропных веществ направления векторов  $\vec{J}$  и  $\vec{H}$  могут не совпадать.

Подставив в формулу (3.28) выражение (3.31) для  $\vec{J}$ , получим

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H}, \quad (3.32)$$

откуда

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1 + \chi)}. \quad (3.33)$$

Безразмерную величину

$$\mu = 1 + \chi \quad (3.34)$$

называют *магнитной проницаемостью среды*.

Из (3.33) с учетом (3.34) следует, что магнитная индукция в веществе определяется соотношением

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (3.35)$$

Выясним физический смысл магнитной проницаемости среды. В вакууме намагниченность  $\vec{J} = 0$ ,  $\vec{H} = \vec{H}_0$  и  $\vec{B} = \vec{B}_0$ . Из (3.28) следует, что

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}. \quad (3.36)$$

В случае однородного изотропного магнетика результирующая магнитная индукция  $\vec{B}$  в магнетике определяется соотношением (3.20). Подставив (3.20) в (3.28), найдем напряженность магнитного поля в магнетике:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}. \quad (3.37)$$

Сравнивая (3.36) и (3.37), получаем

$$\vec{H} = \vec{H}_0. \quad (3.38)$$

Подставляя (3.37) в (3.35), найдем

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0. \quad (3.39)$$

Формула (3.39) означает, что магнитная индукция  $\vec{B}$  при заполнении пространства однородным магнетиком изменяется в  $\mu$  раз. Иначе говоря, величина  $\mu$  показывает, во сколько раз изменяется магнитная индукция  $\vec{B}$  в при заполнении магнетиком всего пространства, занимаемого полем. Для вакуума  $\vec{J} = 0$ , соответственно из (3.31)  $\chi = 0$  и согласно (3.34), магнитная проницаемость  $\mu = 1$ .

### § 3.6. Диамагнетики и парамагнетики

Диамагнетики и парамагнетики относятся к немагнитным веществам. В отсутствии внешнего магнитного поля они не намагничены, а в магнитном поле намагничиваются слабо и характеризуются однозначной зависимостью (3.31) намагниченности  $\vec{J}$  от напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ .

*Диамагнетиками* называются вещества, магнитные моменты атомов или молекул которых при отсутствии внешнего магнитного поля равны нулю ( $\vec{p}_m = 0$ ). Согласно (3.7), в таких атомах (молекулах) орбитальные и спиновые магнитные моменты всех электронов компенсируют друг друга. К диамагнетикам относятся инертные газы, азот, водород, кремний, фосфор, висмут, цинк, ртуть, медь, золото, серебро, смолы, вода, стекло, мрамор, а также многие другие как органические, так и неорганические соединения.

При внесении диамагнитного вещества в магнитное поле в каждом его атоме (молекуле) в результате ларморовой прецессии появляется дополнительный магнитный момент  $\vec{p}_m^{\text{доп}}$ , направленный противоположно вектору индукции  $\vec{B}_0$  внешнего магнитного поля (рис. 3.7). Как следствие, индукция  $\vec{B}_{\text{внутр}}$  внутреннего магнитного поля, возникающего за счет намагничивания, имеет противоположное направление индукции  $\vec{B}_0$ .

Таким образом, диамагнетики намагничиваются против внешнего поля. Намагниченность  $\vec{J}$  (3.31) диамагнетика направлена в противоположную сторону напряженности  $\vec{H}$  магнитного поля, которая совпадает по направлению с  $\vec{B}_0$ . Поэтому, согласно (3.31), магнитная восприимчивость  $\chi$  диамагнетика отрицательна. Вычисления приводят к следующему соотношению, для диамагнитной восприимчивости:

$$\chi_{\text{д}} = -\frac{e^2}{6m} nZ \langle R^2 \rangle \mu_0, \quad (3.40)$$

где  $e$  – элементарный заряд;  $m$  – масса электрона;  $n$  – концентрация атомов;  $Z$  – число электронов в атоме;  $\langle R^2 \rangle$  – средний квадрат расстояния электронов от ядра в атоме;  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

Формула (3.40) хорошо согласуется с экспериментом. Для твердых тел и жидкостей диамагнитная восприимчивость имеет порядок  $\sim 10^{-6}$ , а для газов она значительно меньше из-за меньшей концентрации молекул. Согласно (3.34), магнитная проницаемость диамагнетиков  $\mu < 1$ , причем мало отличается от единицы.

Из (3.40) следует, что  $\chi$  для диамагнетиков не зависит от температуры, потому что ни одна из входящих в эту формулу величин не может зависеть от температуры. Это объясняется тем, что ларморовское движение электронов устанавливается очень быстро, за характерные для атомных процессов промежутки времени. Поэтому тепловое движение и столкновения атомов не выводят их на сколько-нибудь заметное время из состояния ларморовской прецессии.

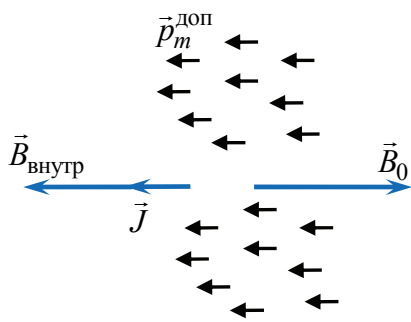


Рис. 3.7

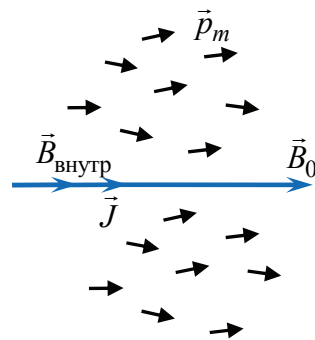


Рис. 3.8

*Парамагнетиками* являются вещества, атомы (молекулы) которых обладают постоянными магнитными моментами. К парамагнетикам относятся алюминий, платина, редкоземельные элементы, щелочные и щелочноземельные металлы, сплавы этих металлов, кислород, окись азота и многие другие вещества.

Внешнее магнитное поле стремится установить магнитные моменты атомов (молекул) вдоль вектора индукции  $\vec{B}_0$  внешнего магнитного поля. Однако тепловое движение расстраивает упорядочивающее действие внешнего магнитного поля. В результате устанавливается некоторая равновесная преимущественная ориентация магнитных моментов атомов  $\vec{p}_m$  вдоль поля (рис. 3.8) тем большая, чем больше  $\vec{B}_0$ , и тем меньшая, чем выше температура. Поэтому в парамагнетиках появляется внутреннее магнитное поле, индукция  $\vec{B}_{\text{внутр}}$  которого

направлена в ту же сторону, что и индукция внешнего магнитного поля, и усиливает его.

Таким образом, парамагнетики намагничиваются по внешнему полю и их магнитная восприимчивость  $\chi$  положительна. Она дается выражением

$$\chi_{\text{п}} = \frac{p_m^2 n \mu_0}{3kT}, \quad (3.41)$$

где  $p_m$  – магнитный момент молекулы;  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура.

Согласно (3.41), парамагнитная восприимчивость обратно пропорциональна температуре. Эту зависимость от температуры называют *законом Кюри*. При комнатной температуре парамагнитная восприимчивость имеет порядок  $10^{-4}$ , т. е.  $\chi_{\text{п}}$  на два порядка больше диамагнитной восприимчивости. Это означает, что у парамагнетиков диамагнитной восприимчивостью обычно можно пренебречь. Из (3.34) следует, что магнитная проницаемость парамагнетиков  $\mu > 1$ , причем также как и диамагнитная восприимчивость она мало отличается от единицы.

### § 3.7. Ферромагнетики

*Ферромагнетиками* называют вещества, которые могут обладать *спонтанной намагниченностью*, т. е. намагничены уже при отсутствии внешнего магнитного поля. В этом случае они являются постоянными магнитами. Ферромагнетики относятся к сильномагнитным веществам – их намагниченность в огромное (до  $10^{10}$ ) число раз превосходит намагниченность диа- и парамагнетиков. К числу ферромагнетиков принадлежат железо, кобальт, никель и многие их сплавы.

Характерной особенностью ферромагнетиков является сложная нелинейная зависимость намагниченности  $J$  от напряженности  $H$  магнитного поля. На рис. 3.9 показана зависимость  $J(H)$  для ферромагнетика, намагниченность которого при  $H = 0$  тоже равна нулю, ее называют *основной кривой намагничивания*. Намагниченность не увеличивается безгранично при увеличении напряженности. Уже при сравнительно небольших значениях  $H$  намагниченность  $J$  достигает предельного значения  $J_{\text{нас}}$ , которое называют *намагниченностью насыщения*.

Учитывая, что магнитная индукция внешнего магнитного поля  $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$ , магнитная индукция (3.20) в веществе

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}. \quad (3.42)$$

Принимая во внимание зависимость  $J(H)$  для ферромагнетиков, зависимость  $B(H)$  также является сложной функцией. Магнитная индукция быстро нелинейно растет с увеличением напряженности магнитного поля, а после достижения состояния насыщения  $B$  продолжает расти с увеличением  $H$  по линейному закону:  $B = \mu_0 H + \text{const}$ , где  $\text{const} = \mu_0 J_{\text{нас}}$ . На рис. 3.10 приведена основная кривая намагничивания на диаграмме в переменных  $B - H$ .

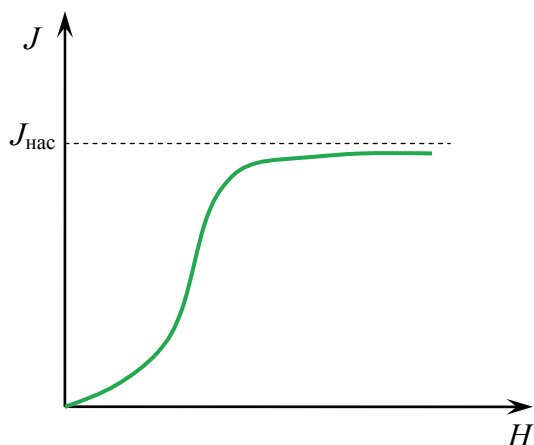


Рис. 3.9

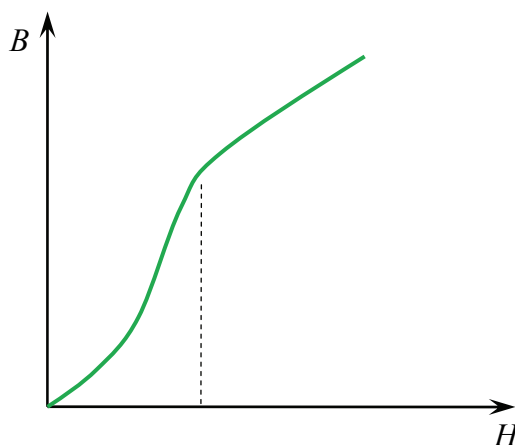


Рис. 3.10

Из-за нелинейной зависимости  $B(H)$  для ферромагнетиков нельзя ввести магнитную проницаемость  $\mu$  как определенную постоянную величину, характеризующую магнитные свойства каждого данного ферромагнетика. Однако по-прежнему используют соотношение (3.31) для намагниченности и (3.35) для магнитной индукции в ферромагнетике. При этом магнитная восприимчивость  $\chi$  и магнитная проницаемость  $\mu$  являются функциями напряженности  $H$  магнитного поля. Эти зависимости могут быть построены по данным основной кривой намагничивания.

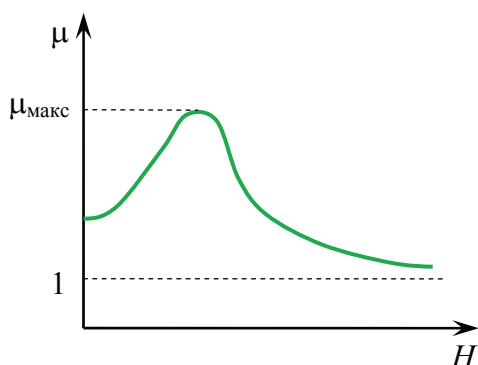


Рис. 3.11

На рис. 3.11 показан характерный вид зависимости  $\mu(H)$ . При увеличении  $H$  значение  $\mu$  достигает максимума, а затем убывает, стремясь к единице при сильных намагничивающих полях. Максимальные значения  $\mu$  для ферромагнетиков очень велики. Так, для чистого железа  $\mu_{\text{макс}} = 5000$ , для молибденового пермаллоя (сплав 79% никеля, 17% железа и 4% молибдена)  $\mu_{\text{макс}} = 150\,000$ .



Характерная особенность ферромагнетиков состоит также в том, что их намагниченность не является однозначной и определяется предысторией намагничивания. Это явление получило название *магнитного гистерезиса* (запаздывания). Если первоначально ненамагниченный ферромагнетик намагнитить до насыщения (точка 1 на рис. 3.12) и затем уменьшать напряженность  $H$ , то намагничивание изменяется не по первоначальной кривой  $0-1$ , а по линии  $1-2$ , лежащей выше. В результате, когда  $H = 0$  (точка 2), намагниченность не исчезнет, а станет равна величине  $J_{\text{ост}}$ , которую называют *остаточной намагниченностью*. Полное размагничивание ферромагнетика (точка 3) наблюдается под действием поля напряженностью  $H_{\text{кор}}$ , имеющего направление, противоположное направлению напряженности поля, вызвавшего намагничивание. Величину  $H_{\text{кор}}$  называют *коэрцитивной силой*. Если дальше продолжить изменять напряженность магнитного поля, то намагниченность изменяется вдоль кривой  $3-4-5-6-1$ . Получившуюся замкнутую линию называют *петлей гистерезиса*.

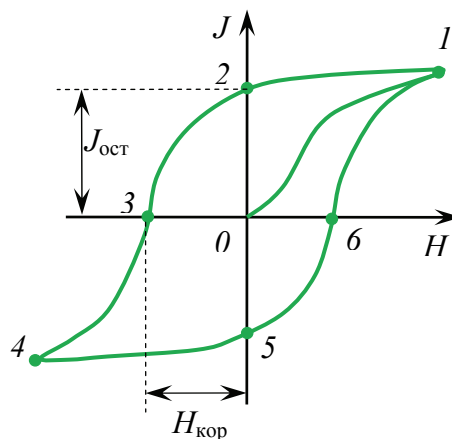


Рис. 3.12

Существование остаточного намагничивания делает возможным изготовление постоянных магнитов, т. е. тел, которые без затраты энергии создают в окружающем их пространстве магнитное поле. Очевидно, что постоянный магнит тем лучше сохраняет свои свойства, чем больше коэрцитивная сила материала, из которого он изготовлен. Если коэрцитивная сила  $H_{\text{кор}}$  велика, ферромагнетик называется *жестким*. Для него характерна широкая петля гистерезиса. Ферромагнетик с малой  $H_{\text{кор}}$  (и соответственно с узкой петлей гистерезиса) называется *мягким*. Жесткие ферромагнетики используют для изготовления постоянных магнитов, а мягкие для изготовления сердечников трансформаторов.

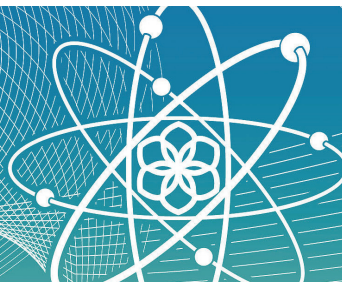
Физическую природу ферромагнетизма удалось понять только с помощью квантовой механики. Экспериментально было установлено впервые в опытах Эйнштейна и де Гааз, что ферромагнетизм обусловлен спинами электронов. При отсутствии внешних магнитных полей под действием внутренних причин спины электронов стремятся ориентироваться в одном направлении, а, следовательно, спиновые магнитные моменты – в противоположном направлении. Однако образцу

в целом быть намагниченным энергетически невыгодно. Поэтому он разбивается на малые макроскопические области спонтанного, т. е. самопроизвольного, намагничивания – эти области называют *доменами*. Они имеют размеры от 1 мкм до  $10^{-2}$  см. В пределах каждого домена ферромагнетик намагничен до насыщения и имеет определенный магнитный момент. Направление вектора намагниченности в соседних доменах различно, поэтому суммарная намагниченность образца равна нулю, т. е. магнетик в целом не намагничен.

Внешнее магнитное поле ориентирует по полю магнитные моменты не отдельных атомов, как это имеет место в случае парамагнетиков, а целых областей спонтанной намагниченности – доменов. Этот процесс является необратимым, что и служит причиной остаточной намагниченности и гистерезиса.

При повышении температуры способность ферромагнетиков намагничиваться уменьшается. Для каждого ферромагнетика имеется определенная температура  $T_k$ , при которой происходит разрушение доменной структуры и вещество теряет ферромагнитные свойства. Эту температуру называют *температурой* или *точкой Кюри*. Для железа она равна  $768^\circ\text{C}$ , для никеля  $365^\circ\text{C}$ . При температуре выше точки Кюри ферромагнетик становится обычным парамагнетиком.

## Глава 4 ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ



### § 4.1. Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея – Ленца

В предыдущих параграфах шла речь о том, что электрические токи создают вокруг себя магнитное поле. Существует и обратное явление – магнитное поле вызывает появление электрических токов. Этот эффект, открытый в 1831 г. М. Фарадеем, называется *явлением электромагнитной индукции*. Оно заключается в возникновении электрического тока в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, охватываемого этим контуром. Возникающий электрический ток называют *индукционным*.

Появление индукционного тока означает, что при изменении магнитного потока в контуре возникает электродвижущая сила – *ЭДС индукции*. Согласно *закону Фарадея – Ленца (закону электромагнитной индукции)*, ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i$  в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока  $\Phi_m$  сквозь поверхность, охватываемую контуром:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (4.1)$$

Если замкнутый контур, в котором индуцируется ЭДС, состоит не из одного витка, а из  $N$  витков (например, катушка), то электродвижущая сила, возникающая в проводнике, равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом из витков. Если магнитный поток, охватываемый каждым витком, одинаков и равен  $\Phi_m$ , то суммарный поток  $\Psi$  сквозь сечение контура

$$\Psi = N\Phi_m. \quad (4.2)$$

Эту величину называют *полным магнитным потоком* или *потокосцеплением*. В этом случае ЭДС индукции в контуре определяется соотношением

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (4.3)$$

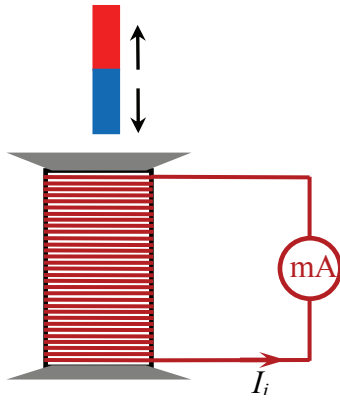


Рис. 4.1

Направление индукционного тока в контуре (а значит, и знак ЭДС индукции в (4.3)) определяется *правилом Ленца*: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине его вызывающей. Иначе говоря, индукционный ток создает магнитный поток, препятствующий изменению магнитного потока, вызывающего ЭДС индукции. Так, например, при приближении полосового магнита к замкнутой на миллиамперметр катушке (рис. 4.1) в ней наводится индукционный ток, кото-

рый своим магнитным действием препятствует приближению магнита и связанному с этим возрастанию магнитного потока сквозь витки катушки. При удалении магнита от катушки в ней наводится ток противоположного направления, который своим магнитным действием также препятствует движению магнита и связанному с этим убыванию магнитного потока. В первом случае векторы магнитной индукции поля магнита и поля индукционного тока направлены в противоположные стороны, а во втором – в одну и ту же сторону.

Согласно определению (1.47), изменение магнитного потока, охватываемого контуром, можно вызвать двумя различными способами. Во-первых, при изменении геометрии контура (охватываемой им площади) и его ориентации (угла между магнитной индукцией и нормалью к площади контура) в однородном магнитном поле, а также при перемещении контура в постоянном стационарном неоднородном магнитном поле. Во-вторых, за счет зависимости магнитной индукции от времени. Заметим, что ЭДС индукции не зависит от того, каким образом осуществляется изменение магнитного потока.

В первом случае при любом движении проводника в магнитном поле появление ЭДС индукции связано с действием силы Лоренца на электроны проводимости, которые перемещаются вместе с проводником. Эта сила играет роль сторонней силы и вызывает движение электронов вдоль проводника, т. е. индукционный ток. Во втором случае возникновение ЭДС индукции в переменном магнитном поле в неподвижных проводниках не может быть объяснено с помощью силы Лоренца, которая не действует на неподвижные заряды. Согласно теории Максвелла, причиной появления индукционного тока в этом случае является *порождение изменяющимся магнитным полем электрического*, благодаря которому возникает индукционный ток.

Таким образом, электрическое поле создается не только электрическими зарядами, но и изменяющимся магнитным полем. ЭДС индукции в контуре определяется циркуляцией вектора напряженности  $\vec{E}$  возникающего электрического поля по замкнутому контуру проводника [3]:

$$\mathcal{E}_i = \oint_l \vec{E} d\vec{l}. \quad (4.4)$$

Заметим, что изменяющееся во времени магнитное поле приводит к появлению в пространстве электрического поля независимо от наличия проводящего контура. Последний лишь позволяет обнаружить по возникновению в нем индукционного тока существование этого электрического поля.

Принимая во внимание определение магнитного потока (1.47) и учитывая, что контур неподвижен, найдем скорость изменения магнитного потока

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (4.5)$$

Подставляя (4.4), (4.5) в закон электромагнитной индукции (4.1), получим

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (4.6)$$

Данное уравнение имеет такую же структуру, что и уравнение (2.28) с учетом (2.32). Поэтому оно может быть преобразовано в дифференциальную форму точно так же, как это было сделано с уравнением (2.28). В результате такого преобразования получим

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.7)$$

где ротор вектора  $\vec{E}$  в декартовой системе координат определяется соотношением подобным (2.31).

Уравнение (4.7) является *дифференциальной записью закона электромагнитной индукции*. Оно описывает закон порождения электрического поля в некоторой точке за счет изменения магнитного поля в той же точке. Заметим, что порождаемое электрическое поле, как и магнитное, является соленоидальным, в отличие от электростатического поля, порождаемого неподвижными электрическими зарядами.

Основное практическое применение электромагнитная индукция находит в электрических машинах, в которых происходит преобразование механической энергии (движение проводника в магнитном поле) в электрическую (индуцирование электрического тока). Такие машины называются генераторами. Генератор состоит из неподвижного электромагнита (статор) и вращающегося якоря. На якоре машины располагаются провода (обмотка), в которых при вращении якоря в магнитном поле наводится ЭДС. Индуцируемый при этом ток является переменным, так как наводимые в этом случае ЭДС непостоянны как по величине, так и по направлению. При помощи дополнительных устройств (коллектора) можно получить от такого генератора ток постоянного направления. Генераторы переменного тока большой мощности выполняются с неподвижной обмоткой на статоре машины и вращающимся электромагнитом (ротором).

Переменное магнитное поле индуцирует электрический ток не только в линейных проводниках и контурах, но и в сплошных проводящих средах. В сплошной проводящей среде под воздействием переменного магнитного поля образуются замкнутые токи, которые называются *токами Фуко*, или вихревыми токами. Вихревые токи, возникающие в проводниках, нагревают их согласно закону Джоуля – Ленца и снижают КПД электрических машин. Для уменьшения потерь энергии вместо сплошных сердечников применяют сердечники, набранные из изолированных тонких листов, или изготавливают их из магнетодиэлектриков, т. е. диэлектриков, обладающих магнитными свойствами. На тепловом действии вихревых токов основан метод индукционного нагрева металлов, с помощью которого осуществляется нагрев или плавление проводящих материалов.

В настоящее время все больше появляется бытовой техники с использованием явления электромагнитной индукции: плиты, зарядные устройства, электросчетчики, кофеварки, водонагреватели, тостеры, миксеры, утюги, настольные лампы и приборы для приготовления пищи и т. д.

## § 4.2. Явление самоиндукции. ИНДУКТИВНОСТЬ

ЭДС индукции (4.1) возникает при любом изменении магнитного потока, охватываемого замкнутым контуром. При этом совершенно не важно, чем вызывается это изменение. Если в некотором контуре течет изменяющийся во времени электрический ток, то магнитное поле

этого тока также будет изменяться. Это влечет за собой изменение магнитного потока через контур, а следовательно, и появление ЭДС индукции.

Таким образом, изменение тока в контуре ведет к возникновению ЭДС индукции в этом же самом контуре. Данное явление называется *самоиндукцией*, а возникающую ЭДС индукции – *ЭДС самоиндукции*.

В соответствии с законом Био – Савара – Лапласа (2.2) магнитная индукция  $B$  пропорциональна силе тока, вызвавшего поле. Поэтому ток  $I$  в контуре и создаваемый им полный магнитный поток  $\Psi$  через контур пропорциональны друг другу:

$$\Psi = LI, \quad (4.8)$$

где коэффициент пропорциональности  $L$  называется *индуктивностью* контура.

При изменении силы тока в контуре поток (4.8) изменяется, а следовательно согласно (4.3) в контуре возникает ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt}. \quad (4.9)$$

Если при изменении тока не меняется конфигурация контура и нет ферромагнетиков, индуктивность остается постоянной ( $L = \text{const}$ ), так что

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad (4.10)$$

Знак минус в (4.10) показывает, что  $\mathcal{E}_s$  всегда действует так, чтобы препятствовать изменению силы тока – в соответствии с правилом Ленца. Если ток в контуре возрастает, то  $\mathcal{E}_s < 0$  и замедляет возрастание тока. Если ток в контуре уменьшается, то  $\mathcal{E}_s > 0$  и замедляет убывание тока. Таким образом, ЭДС самоиндукции стремится сохранить ток неизменным. Контур, обладая индуктивностью, приобретает определенную инертность, заключающуюся в том, что любое изменение тока тормозится тем сильнее, чем больше индуктивность контура.

Индуктивность зависит от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств окружающей среды. Например, найдем индуктивность бесконечно длинного соленоида. Поле внутри соленоида является однородным и направлено вдоль его оси. Поэтому полный магнитный поток (4.2) сквозь соленоид

$$\Psi = NBS, \quad (4.11)$$

где  $S$  – площадь его поперечного сечения.

Подставляя в (4.11) магнитную индукцию (2.41) в соленоиде, получим

$$\Psi = \mu\mu_0 n^2 V I, \quad (4.12)$$

где  $n = N/l$  – число витков на единицу длины соленоида;  $V = lS$  – его объем;  $l$  – длина соленоида.

Сравнивая (4.8) и (4.12), найдем индуктивность соленоида:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V. \quad (4.13)$$

Заметим, что формула (4.13) справедлива также для тонкого тороида. Единицей измерения индуктивности в Си является *генри* (Гн):  $[L] = \text{Гн} = \text{Вб/А}$ .

### § 4.3. Ток при размыкании и замыкании цепи

Характерные проявления самоиндукции наблюдаются при размыкании и замыкании электрической цепи. Установление тока при замыкании цепи и убывание тока при размыкании цепи происходят не мгновенно, а постепенно. Причем эти эффекты замедления тем значительнее, чем больше индуктивность цепи.

Найдем характер изменения тока при размыкании цепи, содержащей источник ЭДС  $\mathcal{E}$ , постоянную индуктивность  $L$ , сопротивление  $R$ , амперметр и ключ  $K$  (рис. 4.2). Первоначально ключ  $K$  находится в положении 1, и в цепи течет ток

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad (4.14)$$

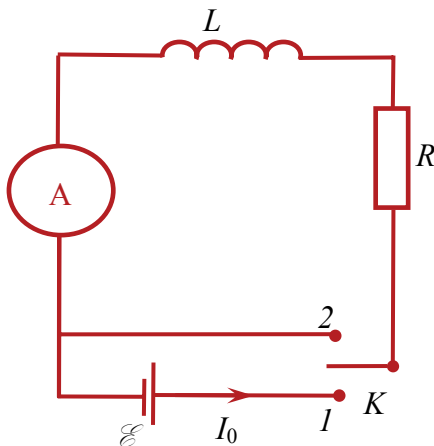


Рис. 4.2

где сопротивление источника ЭДС считаем пренебрежимо малым.

В момент времени  $t = 0$  быстро повернем ключ  $K$  в положение 2. При этом ключ выключит источник из цепи, не нарушая ее замкнутости. Сила тока в цепи начнет убывать, а следовательно в цепи появится ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s$  (4.10), противодействующая убыванию тока. В каждый момент времени ток в цепи будет определяться законом Ома



$$I = \frac{\mathcal{E}_s}{R} = -\frac{L}{R} \frac{dI}{dt}. \quad (4.15)$$

Разделив переменные в уравнении (4.15), получим

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt. \quad (4.16)$$

Интегрирование (4.16) по току от  $I_0$  до  $I$  и по времени от 0 до  $t$  дает

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t. \quad (4.17)$$

Отсюда найдем зависимость силы тока от времени при размыкании:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.18)$$

Согласно (4.18) сила тока не обращается мгновенно в ноль, а убывает по экспоненциальному закону. Скорость убывания тока определяется величиной, имеющей размерность времени,

$$\tau = \frac{L}{R}, \quad (4.19)$$

которую называют *временем релаксации*. Из (4.18) следует, что  $\tau$  есть время, в течение которого сила тока уменьшается в  $e$  раз. Чем больше значение  $\tau$ , тем медленнее спадает ток. На рис. 4.3 показан график убывания силы тока от времени (кривая 1).

Для упрощения расчетов мы считали, что цепь в момент отключения замыкается накоротко. Если просто разорвать цепь с большой индуктивностью, уменьшающийся до нуля ток создает огромную ЭДС самоиндукции. Это часто приводит к образованию вольтовой дуги между контактами выключателя и является весьма опасным, как для самой цепи, так и для человека, размыкающего цепь.

Рассмотрим установление тока при замыкании цепи. Повернем ключ  $K$  (рис. 4.2) из нейтрального положения в положение 1, подключив источник ЭДС  $\mathcal{E}$  к индуктивности  $L$ .

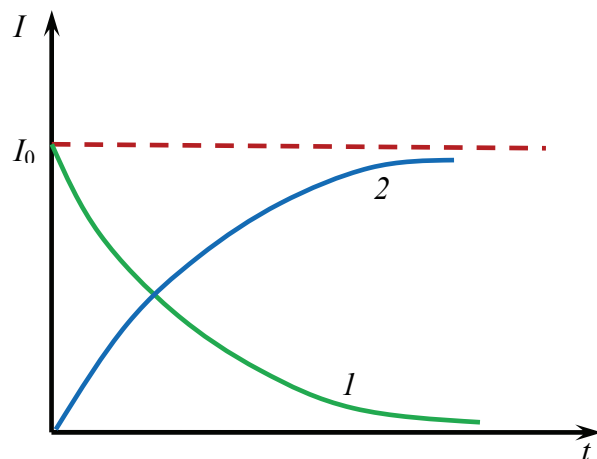


Рис. 4.3

Ток в цепи начнет возрастать и возникнет ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s$ , противодействующая этому нарастанию. По закону Ома

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}. \quad (4.20)$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{dI}{\mathcal{E} - IR} = \frac{dt}{L}. \quad (4.21)$$

Интегрирование (4.21) по току от 0 до  $I$  и по времени от 0 до  $t$  дает

$$\ln \frac{\mathcal{E} - IR}{\mathcal{E}} = -\frac{R}{L}t. \quad (4.22)$$

Отсюда следует, что ток в цепи будет изменяться со временем по закону

$$I = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (4.23)$$

где  $I_0$  – установившийся ток в цепи (4.14);  $\tau$  – время релаксации (4.19), которое также определяет быстроту установления тока при замыкании цепи.

График возрастания силы тока со временем показан на рис. 4.3 (кривая 2).

## §4.4. Взаимная индукция. Трансформатор

Явление *взаимной индукции* состоит в возникновении ЭДС индукции в контуре вследствие изменения силы тока в соседнем контуре. Рассмотрим два неподвижных контура 1 и 2 с токами  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 4.4), расположенных достаточно близко к друг другу.

Магнитное поле тока  $I_1$  создает магнитный поток  $\Phi_2$  через контур 2, пропорциональный (при отсутствии ферромагнетиков) току  $I_1$ :

$$\Phi_2 = L_{21}I_1. \quad (4.24)$$

Совершенно так же, ток  $I_2$  в контуре 2 создает через контур 1 магнитный поток

$$\Phi_1 = L_{12}I_2. \quad (4.25)$$

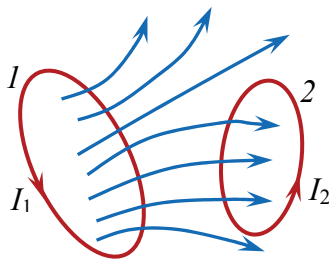


Рис. 4.4

Контурь 1 и 2 называются *связанными*, а коэффициенты пропорциональности  $L_{21}$  и  $L_{12}$  – *взаимной индуктивностью* контуров. Они зависят от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости окружающей контура среды. Выражаются эти коэффициенты в тех же единицах, что и индуктивность  $L$ .

Расчеты показывают, что при отсутствии ферромагнетиков коэффициенты  $L_{21}$  и  $L_{12}$  всегда равны друг другу:

$$L_{21} = L_{12}. \quad (4.26)$$

Это утверждение называют *теоремой взаимности*. Благодаря этой теореме можно не делать различия между  $L_{21}$  и  $L_{12}$  и просто говорить о взаимной индуктивности двух контуров.

Наличие магнитной связи между контурами проявляется в том, что при всяком изменении тока в каком-либо из контуров через площадь соседнего контура будет меняться магнитный поток, а следовательно в контуре возникнет ЭДС индукции. Согласно закону электромагнитной индукции (4.1) ЭДС, возникающие в контурах 1 и 2, равны соответственно:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (4.27)$$

Здесь предполагается, что контуры неподвижны и ферромагнетиков поблизости нет.

На явлении взаимной индукции основано действие *трансформаторов* – устройств, служащих для преобразований токов и напряжений. Трансформатор состоит из двух катушек, намотанных на общий замкнутый сердечник (магнитопровод) (рис. 4.5, а), изготовленный из материала с большой магнитной проницаемостью. Катушки называют *обмотками трансформатора*. Обмотка, к которой присоединяется источник переменного тока, является *первичной*, а обмотка, к которой присоединяются потребители электрической энергии, – *вторичной*. На рис. 4.5, б показано одно из возможных обозначений трансформатора на электрических схемах.

Принцип действия трансформатора основан на том, что магнитное поле первичной обмотки практически полностью локализуется в сердечнике, играющем роль магнитной цепи. При конструировании трансформаторов стараются добиться того, чтобы весь (или почти весь) магнитный поток, создаваемый первичной обмоткой, проходил через вторичную обмотку. Переменный ток  $I_1$  в первичной обмотке создает переменный магнитный поток  $\Phi$ , замыкающийся по магнитопроводу.

Поток  $\Phi$  индуцирует в обеих обмотках переменные ЭДС (4.3), которые зависят от числа витков обмоток:

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt}, \quad \mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.28)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  – число витков соответственно в первичной и вторичной обмотках.

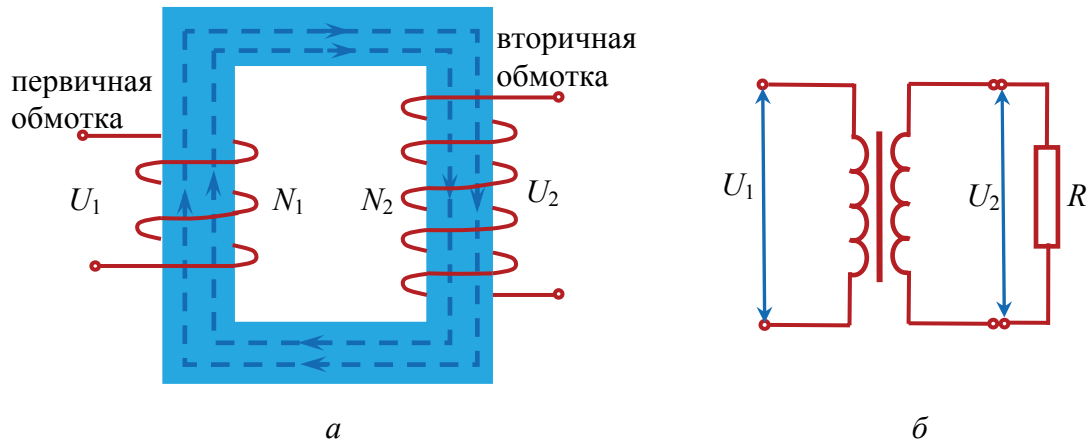


Рис. 4.5

Сила тока в первичной  $I_1$  и вторичной  $I_2$  обмотках определяется законом Ома:

$$I_1 R_1 = U_1 + \mathcal{E}_1 = U_1 - N_1 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.29)$$

$$I_2 R_2 = \mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.30)$$

где  $R_1$  – сопротивление первичной обмотки;  $R_2$  – суммарное сопротивление вторичной обмотки и подключаемой нагрузки;  $U_1$  – напряжение на клеммах первичной обмотки.

Сопротивление  $R_1$  первичной обмотки достаточно мало и падение напряжения на ней может быть принято значительно меньшим  $U_1$ , т. е.  $I_1 R_1 \ll U_1$ . Поэтому в соотношении (4.29) можно пренебречь произведением  $I_1 R_1$  по сравнению с  $U_1$  и записать его в виде

$$U_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.31)$$

В обычных условиях сопротивление нагрузки много больше сопротивления вторичной обмотки. Поэтому  $R_2$  в (4.30) равно с большой

точностью сопротивлению нагрузки. Следовательно,  $I_2 R_2$  в левой части (4.30) равно напряжению  $U_2$  на клеммах вторичной обмотки трансформатора. Поэтому (4.30) может быть записано следующим образом:

$$U_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.32)$$

Разделив почленно левые и правые части (4.31) и (4.32) и перейдя к модулям, получим

$$\frac{|U_1|}{|U_2|} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (4.33)$$

Если пренебречь потерями энергии в трансформаторе, то мощности, выделяемые в первичной и вторичной обмотках трансформатора, равны, т. е.

$$I_1 U_1 = I_2 U_2. \quad (4.34)$$

Переходя в (4.34) к модулям и учитывая (4.33), найдем

$$\frac{|I_1|}{|I_2|} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (4.35)$$

Формулы (4.33) и (4.35) описывают закон преобразования напряжений и сил токов в трансформаторе. Они строго справедливы для идеального трансформатора, в котором нет рассеяния магнитного потока и потерь энергии. Для реального трансформатора они соблюдаются с большой точностью. Подбирая требуемое соотношение между числами витков первичной и вторичной обмоток, можно увеличивать или уменьшать напряжение на нагрузке, подключенной к вторичной обмотке. Токи при этом изменяются обратно пропорционально напряжениям.

Трансформаторы чрезвычайно широко применяются в электроэнергетике, электронике и радиотехнике. Например, трансформаторы позволяют значительно повысить напряжение, вырабатываемое источниками переменного тока, установленными на электрических станциях, и осуществить передачу электроэнергии на дальние расстояния при высоких напряжениях (110, 220, 500, 750 и 1150 кВ). Благодаря этому сильно уменьшаются потери энергии в проводах и обеспечивается возможность значительного уменьшения площади сечения проводов линий электропередачи. В местах потребления электроэнергии высокое напряжение, подаваемое от высоковольтных линий электропередачи, снова понижается трансформаторами до сравнительно небольших

значений (127, 220, 380 и 660 В), при которых работают электрические потребители, установленные на фабриках, заводах, в депо и жилых домах. На электрических подстанциях переменного тока трансформаторы применяют для уменьшения напряжения, подаваемого из контактной сети к тяговым двигателям и вспомогательным цепям.

## § 4.5. Энергия магнитного поля

Для того, чтобы в неподвижном контуре создать электрический ток, необходимо включить в сеть источник ЭДС. Если в цепи течет постоянный ток, то энергия, поступающая в цепь из источника ЭДС, расходуется на выделение теплоты и на совершение работы в потребителе энергии. Индукция магнитного поля, как и его энергия, при этом неизменна. Индукция изменяется с изменением силы тока. Следовательно, источник ЭДС передает в цепь энергию на создание магнитного поля в процессе увеличения силы тока.

Замкнем неподвижную цепь, содержащую индуктивность  $L$  и сопротивление  $R$ , на источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  (рис. 4.6). В контуре начнет возрастать электрический ток. Это приводит к появлению ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s$ . Сила тока в цепи определяется законом Ома

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_s}{R}. \quad (4.36)$$

Принимая во внимание соотношение (4.9) для ЭДС самоиндукции, отсюда найдем

$$\mathcal{E} = IR + \frac{d\Psi}{dt}, \quad (4.37)$$

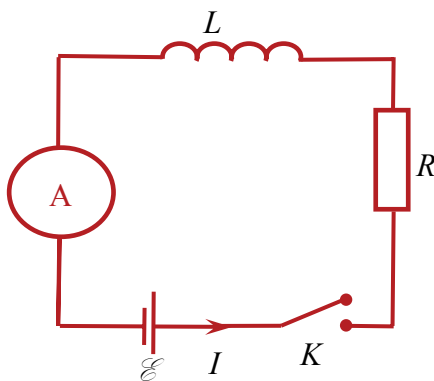


Рис. 4.6

где  $\Psi$  – полный магнитный поток через контур, создаваемый магнитным полем электрического тока.

Используя (4.37), работа, совершаемая источником ЭДС за время  $dt$ , равна

$$\delta A = \mathcal{E}dt = I^2 Rdt + Id\Psi. \quad (4.38)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (4.38) представляет теплоту Джоуля – Ленца [3], которая идет на нагревание проводника. Второе слага-

емое численно равно дополнительной работе, которая совершается против ЭДС самоиндукции в процессе установления тока:

$$\delta A^{\text{доп}} = Id\Psi . \quad (4.39)$$

Заметим, что после того как ток установится,  $d\Psi = 0$  и  $\delta A^{\text{доп}} = 0$ , вся работа источника ЭДС будет идти только на выделение теплоты. Соотношение (4.38) справедливо и при наличии ферромагнетиков, так как при его выводе никаких предположений относительно магнитных свойств окружающей среды не делалось.

При совершении работы (4.38) происходит превращение энергии источника ЭДС в энергию магнитного поля тока в контуре. Изменение энергии  $dW$  магнитного поля численно равно работе (4.39). Учитывая соотношение (4.8) для полного магнитного потока  $\Psi$  через контур, найдем

$$dW = Id\Psi = Id(LI) = LI dI . \quad (4.40)$$

В (4.40) мы предположили, что индуктивность контура  $L = \text{const}$ . Это справедливо в случае неподвижного контура и в отсутствии ферромагнетиков.

Интегрируя обе части (4.40) по току от  $I = 0$  до некоторого значения  $I$ , получим формулу

$$W = \frac{LI^2}{2} , \quad (4.41)$$

которая определяет *энергию магнитного поля*, создаваемого током силы  $I$ , текущим по контуру с индуктивностью  $L$ .

Выразим энергию магнитного поля (4.41) через величины, характеризующие само поле. Рассмотрим простейший случай длинного соленоида. Подставим в (4.41) индуктивность соленоида (4.13), получим

$$W = \frac{\mu\mu_0 n^2 I^2}{2} V . \quad (4.42)$$

В уравнении (4.42) примем во внимание формулу (2.41) для магнитной индукции  $B$  внутри соленоида и учтем, что напряженность магнитного поля

$$H = \frac{B}{\mu\mu_0} = nI . \quad (4.43)$$

В результате получим

$$W = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V = \frac{BH}{2} V . \quad (4.44)$$

Магнитное поле соленоида однородно и сосредоточено внутри него. Поэтому энергия заключена внутри соленоида и распределена в нем с постоянной объемной плотностью

$$\varpi = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2}. \quad (4.45)$$

Эта формула справедлива также для неоднородных магнитных полей. В этом случае энергия магнитного поля в объеме  $V$

$$W = \int_V \varpi dV. \quad (4.46)$$

Заметим, что формулы (4.41) и (4.45) относятся только к диа- и парамагнетикам. К ферромагнетикам они не применимы, так как для ферромагнитной среды дополнительная работа идет не только на изменение энергии магнитного поля тока, но и на приращение внутренней энергии среды, т. е. на ее нагревание.



## Глава 5 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### § 5.1. Колебательный контур

Электромагнитными колебаниями называют периодические изменения во времени значений тока и напряжений в электрической цепи и взаимосвязанные колебания электрического и магнитного полей. Простейшей системой, в которой возникают электромагнитные колебания, является *колебательный контур*, состоящий из последовательно соединенных конденсатора емкости  $C$ , катушки индуктивностью  $L$ , проводника сопротивлением  $R$  (рис. 5.1).

Если при разомкнутом ключе  $K$  конденсатор зарядить, а затем замкнуть ключ, конденсатор начнет разряжаться и в цепи возникнет электрический ток  $I$ , изменяющийся с течением времени. Электрическая энергия конденсатора при этом будет переходить в энергию магнитного поля электрического тока. Это будет продолжаться до тех пор, пока заряд конденсатора не обратится в ноль, а сила тока в контуре достигнет максимума. С этого момента ток, не меняя направления, начнет убывать. Однако он прекратится не сразу – его будет поддерживать ЭДС самоиндукции. Ток будет перезаряжать конденсатор, так что знаки зарядов обкладок конденсатора противоположны знакам зарядов в начальный момент времени. Возникающее электрическое поле конденсатора стремится ослабить ток. Через конечный промежуток времени ток в цепи прекратится, а конденсатор перезарядится. Затем конденсатор начнет разряжаться опять, по цепи потечет ток в обратном направлении и т. д. – процесс будет повторяться.

Вообще говоря, в каждый момент времени ток оказывается не одинаковым на разных участках цепи (из-за того что электромагнитные возмущения распространяются хотя и с очень большой,

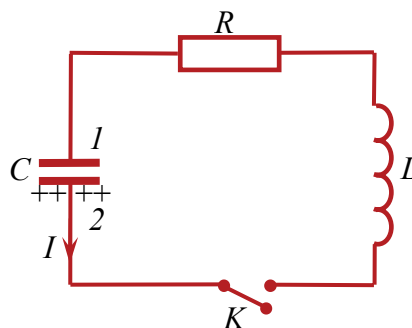


Рис. 5.1

но конечной скоростью). Однако имеется много случаев, когда мгновенные значения тока оказываются практически одинаковыми на всех участках цепи. Такой ток называется *квазистационарным*. Для этого все изменения во времени должны происходить настолько медленно, чтобы распространение электромагнитных возмущений можно было считать мгновенным. Это позволяет использовать формулы, полученные для цепей постоянного тока.

Найдем зависимость заряда  $q$  на обкладках конденсатора от времени для цепи, изображенной на рис. 5.1. Согласно закону Ома для участка цепи  $IRL2$  имеем

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s, \quad (5.1)$$

где  $\varphi_1 - \varphi_2$  – разность потенциалов между точками 1 и 2 цепи;  $\mathcal{E}_s$  – ЭДС самоиндукции.

Напряжение на обкладках конденсатора

$$U_C = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C}. \quad (5.2)$$

Подставляя в (5.1) соотношение (5.2) и формулу (4.10) для ЭДС самоиндукции, получим

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0. \quad (5.3)$$

Разделим данное уравнение на  $L$  и учтем, что сила тока в цепи

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (5.4)$$

придем к дифференциальному уравнению, которое определяет заряд на обкладках конденсатора

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \quad (5.5)$$

где коэффициент  $\beta$  называют *коэффициентом затухания*, а  $\omega_0$  – *собственной частотой контура*

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5.6)$$

При условии, что  $\beta^2 < \omega_0^2$ , решение уравнения (5.5) имеет вид затухающих колебаний

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_3 t + \alpha), \quad (5.7)$$

где  $q_0$  и  $\alpha$  – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий;  $\omega_3$  – *циклическая частота затухающих колебаний*

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (5.8)$$

График функции (5.7) показан на рис. 5.2. Видно, что эта функция не периодическая, заряд на обкладках конденсатора с течением времени уменьшается, т. е. колебания затухают.

*Периодом затухающих колебаний* называют величину

$$T = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (5.9)$$

Множитель, стоящий перед косинусом в (5.7), называют *амплитудой затухающих колебаний*

$$A(t) = q_0 e^{-\beta t}. \quad (5.10)$$

Зависимость (5.10) от времени показана на рис. 5.2 штриховой линией. Убывание амплитуды колебаний (5.10) со временем определяется коэффициентом затухания  $\beta$ . Согласно (5.6), чем больше сопротивление  $R$  в контуре, тем больше  $\beta$ , а значит быстрее происходит затухание. При  $R = 0$ , коэффициент  $\beta = 0$  – колебания становятся незатухающими. Время  $\tau$ , в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз, называют *временем релаксации*. Из (5.10) следует, что

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \quad (5.11)$$

Заметим, что изменение силы тока в цепи и напряжения на конденсаторе также носит затухающий характер, аналогичный показанному на рис. 5.2 для заряда на обкладках конденсатора. Как следствие энергии электрического поля в конденсаторе и магнитного поля в катушке также будут затухать. Колебания затухают в контуре вследствие потери первоначально запасенной в контуре энергии на нагревание.

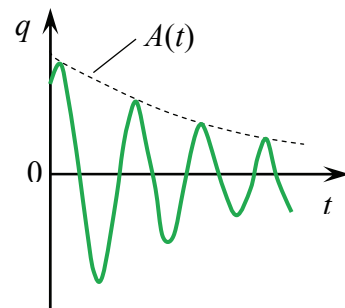


Рис. 5.2

## § 5.2. Свободные незатухающие колебания

Если сопротивление колебательного контура  $R = 0$ , то колебания в таком контуре являются *свободными незатухающими*. В этом случае коэффициент затухания  $\beta = 0$  и уравнение колебаний (5.5), описывающее заряд на обкладках конденсатора, имеет вид

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (5.12)$$

Решением этого уравнения является гармоническая функция

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (5.13)$$

где  $q_0$  – амплитудное значение заряда на обкладках конденсатора;  $\omega_0$  – собственная частота контура;  $\alpha$  – начальная фаза колебаний. Значение  $\omega_0$  определяется только свойствами самого контура, значения  $q_0$  и  $\alpha$  – начальными условиями.

Используя (5.6) для  $\omega_0$ , период свободных незатухающих колебаний определяется *формулой Томсона*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (5.14)$$

Сила тока в контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = q_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}). \quad (5.15)$$

Мгновенное напряжение на обкладках конденсатора

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (5.16)$$

Согласно (5.15) и (5.16), колебания тока опережают колебания заряда на  $\pi/2$ , а колебания напряжения совпадают по фазе с колебанием заряда. Амплитудные значения силы тока и напряжения имеют вид

$$I_0 = q_0\omega_0 = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}, \quad U_0 = \frac{q_0}{C}. \quad (5.17)$$

Электрическая энергия контура сосредоточена в конденсаторе и равна

$$W_{\text{эл}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (5.18)$$

Магнитное поле тока в контуре сосредоточено в катушке, его энергия, определенная по формуле (4.41), дается выражением

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{Lq_0^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{q_0^2}{2C} \sin^2(\omega_0 t + \alpha), \quad (5.19)$$

где мы использовали (5.6) для  $\omega_0$ .

Полная энергия контура

$$W = W_{\text{эл}} + W_M = \frac{q_0^2}{2C} = \text{const}. \quad (5.20)$$

Согласно (5.18), (5.19), энергии  $W_{\text{эл}}$  и  $W_M$  также совершают гармонические колебания около своих средних значений с частотой  $2\omega_0$ . Они непрерывно переходят друг в друга. При этом полная энергия (5.20) контура не изменяется и равна первоначально запасенной в контуре энергии.

### § 5.3. Вынужденные колебания (переменный ток)

Электрическое сопротивление  $R$  любого реального колебательно-го контура отлично от нуля. Поэтому свободные электромагнитные колебания в контуре постепенно затухают. Для получения незатухающих электромагнитных колебаний к контуру необходимо извне подводить энергию, которая компенсирует потери контура на нагревание. В этом случае колебания, возникающие в контуре, называют *вынужденными электромагнитными колебаниями*.

Для осуществления вынужденных колебаний в колебательный контур включают источник электрической энергии с периодически изменяющейся ЭДС (рис. 5.3):

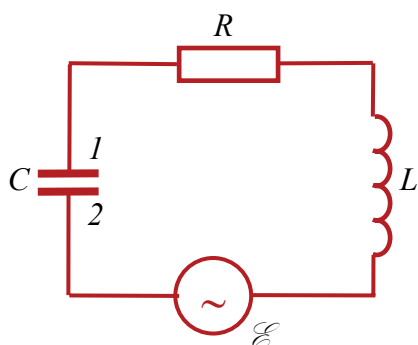


Рис. 5.3

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad (5.21)$$

где  $\mathcal{E}_0$  – амплитудное значение ЭДС;  $\omega$  – циклическая частота изменения ЭДС.

Закон Ома для участка цепи  $IRL2$  (рис. 5.3) имеет вид

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s + \mathcal{E}. \quad (5.22)$$

Принимая во внимание формулы (4.10) для ЭДС самоиндукции, (5.2) для

напряжения на обкладках конденсатора и переходя по формуле (5.4) от тока  $I$  в контуре к заряду  $q$  на обкладках конденсатора, получим дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\xi_0}{L} \cos \omega t, \quad (5.23)$$

где  $\beta$  и  $\omega_0$  определены в (5.6).

Общее решение этого уравнения, как известно из математики, представляет собой сумму общего решения однородного уравнения (без правой части) и частного решения неоднородного уравнения. Решение однородного уравнения имеет вид (5.7). Оно экспоненциально затухает, и по прошествии некоторого времени обращается в ноль. Следовательно, установившиеся вынужденные колебания описываются частным решением уравнения (5.23). Это решение имеет вид (см. [1])

$$q = q_0 \cos(\omega t - \psi), \quad (5.24)$$

где амплитуда заряда  $q_0$  на конденсаторе и разность фаз  $\psi$  между колебаниями заряда и внешней ЭДС дается выражениями

$$q_0 = \frac{\xi_0}{L \sqrt{4\beta^2 \omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}, \quad (5.25)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (5.26)$$

Продифференцировав функцию (5.25) по времени, найдем установившийся ток в контуре

$$I = -q_0 \omega \sin(\omega t - \psi) = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (5.27)$$

где амплитуда силы тока  $I_0 = q_0 \omega$  и сдвиг фаз между током и внешней ЭДС  $\varphi = \psi - \pi/2$ .

Из соотношений (5.25), (5.26), а также используя определения  $\beta$  и  $\omega_0$  в (5.6), найдем

$$I_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad (5.28)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (5.29)$$

Установившиеся вынужденные электрические колебания можно рассматривать как протекание в цепи *переменного тока*. Выражение (5.28) для амплитуды силы тока формально трактуют как *закон Ома для цепи переменного тока*. Стоящую в знаменателе этого выражения величину, имеющую размерность сопротивления, обозначают буквой  $Z$  и называют *полным сопротивлением* или *импедансом*:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (5.30)$$

Величину  $R$  называют *активным сопротивлением* цепи, а величину, стоящую в круглых скобках в (5.30), обозначают  $X$  и называют *реактивным сопротивлением*:

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \quad (5.31)$$

где  $X_L = \omega L$  – *индуктивное сопротивление*;  $X_C = 1/(\omega C)$  – *емкостное сопротивление*.

Заметим, что индуктивное сопротивление растет с увеличением частоты  $\omega$ , а емкостное – уменьшается. Когда говорят, что в цепи отсутствует емкость, то это надо понимать в смысле отсутствия емкостного сопротивления  $X_C$ . Оно обращается в ноль, если  $C \rightarrow \infty$ , как и должно быть при замене конденсатора замкнутым участком.

Хотя реактивное сопротивление измеряют в тех же единицах, что и активное, между ними существует принципиальное различие. Оно заключается в том, что только активное сопротивление определяет преобразование электромагнитной энергии в теплоту.

## § 5.4. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

Энергия источника ЭДС в цепи с током испытывает следующие превращения:

а) превращается в теплоту в результате джоулева нагрева проводника сопротивлением  $R$ . Мощность, развиваемая на этом сопротивлении,

$$P_R = I^2 R; \quad (5.32)$$

б) превращается в энергию магнитного тока. Так как энергия магнитного поля определяется формулой (5.19), мощность, развиваемая источником ЭДС для изменения энергии магнитного поля, равна

$$P_L = \frac{dW_M}{dt} = LI \frac{dI}{dt}. \quad (5.33)$$

В отличие от мощности  $P_R$ , мощность  $P_L$  может быть как положительной, так и отрицательной. При увеличении тока в цепи ( $dI/dt > 0$ ) мощность положительна, при уменьшении тока ( $dI/dt < 0$ ) – отрицательна. Это означает, что источник ЭДС отдает энергию для увеличения магнитного поля и получает энергию при уменьшении энергии магнитного поля;

в) превращается в энергию электрического поля при ее изменении. Электрическое поле в цепи сосредоточено в конденсаторе. Так как энергия конденсатора, на пластинах которого имеется заряд  $q$ , определяется формулой (5.18), мощность источника ЭДС для изменения энергии электрического поля равна

$$P_C = \frac{dW_{эл}}{dt} = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} I. \quad (5.34)$$

Эта мощность может быть также как положительной, так и отрицательной. При увеличении заряда на обкладках конденсатора энергия источника ЭДС превращается в энергию электрического поля, при уменьшении заряда – энергия электрического поля превращается в энергию источника ЭДС.

Полная мощность, развиваемая источником ЭДС в цепи, равна

$$P = P_R + P_L + P_C. \quad (5.35)$$

Часто  $P$  называют *мощностью, развиваемой током*, или *мощностью тока*. Аналогично  $P_R$ ,  $P_L$ ,  $P_C$  называют мощностями тока на сопротивлении, индуктивности и емкости.

Используя соотношение (5.27) для силы тока в цепи, мгновенные мощности, развиваемые током на различных элементах цепи, определяются формулами:

$$P_R = I_0^2 R \cos^2(\omega t - \varphi), \quad (5.36)$$

$$P_L = -LI_0^2 \cos(\omega t - \varphi) \sin(\omega t - \varphi), \quad (5.37)$$

$$P_C = \frac{I_0^2}{\omega C} \sin(\omega t - \varphi) \cos(\omega t - \varphi). \quad (5.38)$$



Практический интерес имеет среднее за период колебаний значение мощности. Учитывая, что средние значения от тригонометрических функций определяются соотношениями

$$\langle \cos^2(\omega t - \varphi) \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \cos(\omega t - \varphi) \sin(\omega t - \varphi) \rangle = 0, \quad (5.39)$$

получим

$$\langle P_R \rangle = \frac{I_0^2 R}{2}, \quad \langle P_L \rangle = \langle P_C \rangle = 0. \quad (5.40)$$

Таким образом

$$\langle P \rangle = \langle P_R \rangle = \frac{I_0^2 R}{2}. \quad (5.41)$$

Средняя мощность отлична от нуля лишь на сопротивлении  $R$ . Средние мощности на индуктивности и емкости равны нулю, т. е. на этих элементах током никакой работы не совершается, они в среднем энергетически нейтральны. Поэтому сопротивление  $R$  называют активным элементом цепи (активное сопротивление), а емкость и индуктивность – реактивными элементами, им соответствуют реактивные сопротивления (5.31).

Из закона Ома для переменного тока (5.28) с учетом (5.29) следует, что

$$I_0 R = \xi_0 \frac{R}{Z} = \xi_0 \cos \varphi. \quad (5.42)$$

Тогда

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \xi_0 I_0 \cos \varphi. \quad (5.43)$$

Величины

$$I_d = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad \xi_d = \frac{\xi_0}{\sqrt{2}} \quad (5.44)$$

называют *действующими* (или *эффективными*) значениями тока и напряжения.

Выражение (5.43) через действующие значения тока и напряжения имеет вид

$$\langle P \rangle = \xi_d I_d \cos \varphi, \quad (5.45)$$

где множитель  $\cos \varphi$  называют *коэффициентом мощности*.

Заметим, что когда в электротехнике говорят о силе переменного тока и напряжении, то имеют в виду их действующие значения. В частности, амперметры и вольтметры градуируют на действующие значения. Поэтому максимальные значения напряжения в цепи переменного тока в  $\sqrt{2}$  раз больше того, которое показывает вольтметр. Это необходимо принимать во внимание при расчете изоляторов, анализе вопросов безопасности и т. д.

## § 5.5. Резонанс напряжений

Амплитуда силы тока  $I_0$  (5.28) в контуре и разность фаз  $\varphi$  (5.29) между током и вынуждающей ЭДС зависят не только от параметров контура  $R$ ,  $L$  и  $C$ , но и от циклической частоты  $\omega$  ЭДС. Графики зависимости  $I_0(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  показаны на рис. 5.4 и рис. 5.5, соответственно.

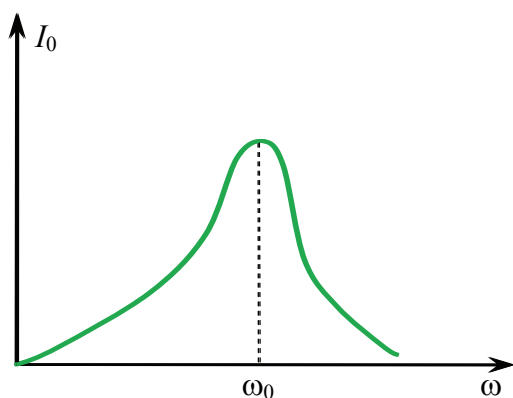


Рис. 5.4

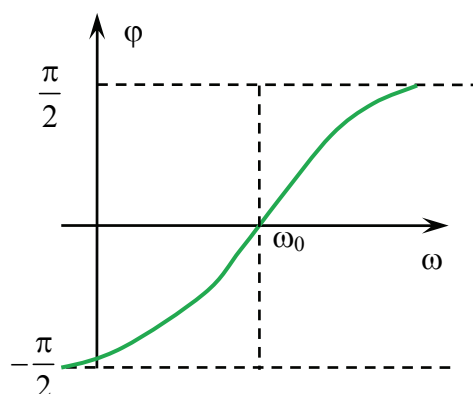


Рис. 5.5

Анализ формулы (5.28) показывает, что  $I_0$  имеет максимум при минимальном значении полного сопротивления, которое достигается при равенстве нулю реактивного сопротивления (5.31):

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0. \quad (5.46)$$

Этому условию удовлетворяет частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5.47)$$

Явление резкого возрастания амплитуды силы тока при приближении циклической частоты ЭДС  $\omega$  к значению  $\omega_0$  называется *явлением резонанса*, а частота  $\omega_0$  – *резонансной частотой*.

При этой частоте амплитуда силы тока

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}, \quad (5.48)$$

а разность фаз между током и ЭДС  $\varphi = 0$ .

В этом случае мгновенное значение силы тока (5.27) в цепи имеет вид

$$I = I_0 \cos \omega_0 t. \quad (5.49)$$

Из закона Ома (5.22) для данной цепи следует, что

$$U_R + U_C + U_L = \mathcal{E}, \quad (5.50)$$

где  $U_R$ ,  $U_C$ ,  $U_L$  – падения напряжения на сопротивлении, конденсаторе и индуктивности соответственно.

При  $\omega = \omega_0$ , с учетом (5.47), (5.48) и (5.49) найдем

$$U_R = IR = \mathcal{E}_0 \cos \omega_0 t = \mathcal{E}, \quad (5.51)$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{I_0}{\omega_0 C} \sin \omega_0 t = \sqrt{\frac{L}{C}} I_0 \sin \omega_0 t, \quad (5.52)$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -LI_0 \omega_0 \sin \omega_0 t = -\sqrt{\frac{L}{C}} I_0 \sin \omega_0 t. \quad (5.53)$$

Таким образом, в цепи при этой частоте напряжения на емкости и индуктивности полностью взаимно компенсируются и напряжение на активном сопротивлении равно ЭДС источника. Поэтому этот резонанс называют *резонансом напряжений*.

Явление резонанса в колебательном контуре находит широкое применение в радиотехнике. Оно обеспечивает возможность приема радиосигналов путем настройки радиоприемников на частоту данной радиостанции. В электрических цепях, не рассчитанных на работу в условиях резонанса, резкое возрастание силы тока на сопротивление может привести к пробое изоляторов, расплавлению проводов, выходу из строя измерительных приборов и другим опасным последствиям.

## Глава 6 ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

### § 6.1. Ток смещения

Теория электромагнитного поля, начало которой заложил Фарадей, была создана Максвеллом. Основная идея, выдвинутая Максвеллом, состояла в симметрии во взаимозависимости электрического и магнитного полей. Из явления электромагнитной индукции вытекает, что наличие в пространстве изменяющегося со временем магнитного поля приводит к возникновению электрического поля. Согласно Максвеллу существует и обратное явление: изменяющееся со временем электрическое поле должно приводить к появлению магнитного поля. Разработанная на основе этой идеи теория электромагнитного поля получила блестящее экспериментальное подтверждение.

Для установления связи между изменяющимся электрическим и возникающим магнитным полями Максвелл ввел в рассмотрение ток смещения. Для выяснения физического смысла этого понятия рассмотрим электрическую цепь, содержащую конденсатор (рис. 6.1). В конденсаторе ток проводимости, связанный с движением электронов, не может существовать, так как обкладки конденсатора разделены слоем диэлектрика. Как следствие постоянный электрический ток не протекает в цепи с конденсатором, а переменный ток тем не менее протекает. Поэтому необходимо заключить, что при переменном токе в конденсаторе происходит некоторый процесс, который как бы замыкает ток проводимости, т. е. в некотором смысле обеспечивает обмен зарядом между обкладками конденсатора без переноса заряда между ними. Этот процесс называется *током смещения*.

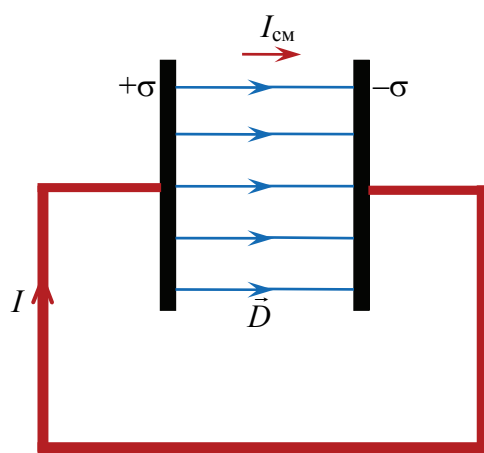


Рис. 6.1

Как следствие постоянный электрический ток не протекает в цепи с конденсатором, а переменный ток тем не менее протекает. Поэтому необходимо заключить, что при переменном токе в конденсаторе происходит некоторый процесс, который как бы замыкает ток проводимости, т. е. в некотором смысле обеспечивает обмен зарядом между обкладками конденсатора без переноса заряда между ними. Этот процесс называется *током смещения*.

Между обкладками конденсатора имеется электрическое поле с напряженностью [3]

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (6.1)$$

где  $\sigma$  – плотность заряда на обкладке;  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость диэлектрика между обкладками;  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная.

Электрическое смещение между обкладками

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E = \sigma. \quad (6.2)$$

Так как заряд на обкладках конденсатора  $q = \sigma S$ , где  $S$  – площадь обкладок, то сила тока через конденсатор (сила тока смещения) с учетом (6.2) примет вид

$$I_{\text{см}} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} S = \frac{\partial D}{\partial t} S. \quad (6.3)$$

Таким образом, процессом, замыкающим ток проводимости в цепи, является изменение электрического смещения между обкладками конденсатора. Заметим, что ток смещения (6.3) – это не ток проводимости в конденсаторе, хотя  $I = I_{\text{см}}$ .

Плотность тока смещения в пространстве между обкладками равна

$$j_{\text{см}} = \frac{I_{\text{см}}}{S} = \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (6.4)$$

Учитывая, что вектор плотности тока смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$  направлен вдоль вектора смещения  $\vec{D}$ , соотношению (6/4) можно придать векторный вид

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (6.5)$$

Соотношение (6.5) справедливо не только для поля конденсатора, ток смещения имеется везде, где есть изменяющееся электрическое поле. Существование тока смещения теоретически было постулировано Максвеллом в 1864 г. и в последующем экспериментально подтверждено другими учеными.

Согласно Максвеллу, ток смещения порождает магнитное поле точно так же, как и ток проводимости. Наиболее ярким подтверждением порождения магнитного поля током смещения является существование электромагнитных волн. Если бы ток смещения не создавал магнитного поля, то электромагнитные волны не могли бы существовать.

Порождение магнитного поля током проводимости описывается законом полного тока, который в дифференциальной форме имеет вид (3.30). Учитывая порождение магнитного поля током смещения, необходимо обобщить уравнение (3.30) в виде

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}. \quad (6.6)$$

Принимая во внимание (6.5), окончательно получим

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \quad (6.7)$$

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Теория Максвелла не только объяснила все разрозненные явления электричества и магнетизма (причем с единой точки зрения), но и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии. Уравнение (6.7) является одним из основных уравнений теории Максвелла.

## § 6.2. Система уравнений Максвелла

Основу электромагнитной теории образует система уравнений Максвелла. Всего уравнений четыре. Мы познакомились с каждым из них в отдельности при изучении разделов «Электричество» и «Магнетизм», а сейчас просто соберем их вместе. В дифференциальной форме система уравнений Максвелла имеет следующий вид:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \quad (6.8)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \quad (6.9)$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho. \quad (6.10)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0. \quad (6.11)$$

Уравнение (6.8) представляет собой закон, по которому магнитное поле порождается токами проводимости и смещения, являющимися двумя возможными источниками магнитного поля (см. § 6.1). Уравнение (6.9) выражает закон электромагнитной индукции и указывает на изменяющееся магнитное поле как на один из возможных источников, порождающих электрическое поле (см. § 4.1). Вторым источником электрического поля являются электрические заряды,

порождение поля которыми описывается уравнением (6.10) (см. [3]), где  $\rho$  – плотность электрического заряда. Уравнение (6.11) отражает факт отсутствия в природе магнитных зарядов (см. § 1.8).

Значение уравнений Максвелла в дифференциальной форме не только в том, что они выражают основные законы электромагнитного поля, но и в том, что путем их решения (интегрирования) могут быть найдены характеристики электромагнитного поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Эти уравнения применимы для описания всех макроскопических электромагнитных явлений. При рассмотрении конкретной ситуации необходимо учесть электромагнитные свойства материальных сред. Во многих случаях это достигается соотношениями

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}, \quad (6.12)$$

где первое уравнение связывает электрическое смещение  $\vec{D}$  с напряженностью электрического поля  $\vec{E}$ ; второе уравнение связывает магнитную индукцию  $\vec{B}$  с напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$ ; третье – плотность тока проводимости  $\vec{j}$  с напряженностью электрического поля  $\vec{E}$ ;  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  – постоянные, характеризующие электрические и магнитные свойства среды (диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, электропроводимость);  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные.

Уравнения (6.12) называют *материальными уравнениями*. Существует много явлений, когда материальные уравнения имеют другой вид и их установление составляет самостоятельную научную задачу.

Заметим, что уравнения Максвелла получены путем обобщения опытных фактов. В учении об электромагнетизме эти уравнения играют такую же роль, как законы Ньютона в классической механике или основные законы (начала) в термодинамике.

### § 6.3. Волновое уравнение для электромагнитной волны

Из уравнений Максвелла следует важный вывод о существовании принципиально нового физического явления: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно – без электрических зарядов и токов. При этом изменение его состояния имеет волновой характер.

Рассмотрим случай неограниченной среды ( $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ). Считаем среду непроводящей ( $j = 0$ ) и незаряженной ( $\rho = 0$ ). Используя материальные уравнения (6.12), уравнения Максвелла (6.8)–(6.11) запишем в виде

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad (6.13)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (6.14)$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0, \quad (6.15)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0. \quad (6.16)$$

Продифференцируем обе части уравнения (6.13) по времени, учитывая, что производные по времени и координатам можно переставлять местами, и исключим в левой части полученного равенства производную от магнитной индукции по времени с помощью (6.14), получим

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \quad (6.17)$$

Аналогично дифференцируя уравнение (6.14) по времени и исключая в левой части производную вектора напряженности по времени с помощью (6.13), найдем

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{B}) = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}. \quad (6.18)$$

С другой стороны, воспользовавшись соотношением для двойного ротора и учитывая формулы (6.15), (6.16), придем к соотношениям:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}, \quad (6.19)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{B}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}, \quad (6.20)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (6.21)$$

Приравнивая правые части соотношений (6.17), (6.18) и (6.19), (6.20), окончательно получим

$$\Delta\vec{E} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (6.22)$$

$$\Delta\vec{B} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (6.23)$$



Уравнения (6.22), (6.23) называют *волновыми уравнениями*. С уравнениями подобного типа мы встречались в курсе механики при изучении волновых процессов в упругих средах [1]:

$$\Delta s - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0, \quad (6.24)$$

где  $s$  – смещение частиц среды от положения равновесия;  $v$  – скорость распространения волны.

Всякая функция, удовлетворяющая уравнению (6.24), описывает некоторую волну. Волновое уравнение играет весьма важную роль в теории волновых процессов. Если, исходя из законов динамики при изучении некоторого явления, приходят к уравнению вида (6.24), то сразу можно утверждать, что имеет место волновой процесс, скорость распространения которого  $v$ .

Таким образом, уравнения (6.22) и (6.23) указывают на то, что электромагнитное поле может существовать в виде электромагнитной волны, скорость которой определяется диэлектрическими и магнитными свойствами среды

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}}. \quad (6.25)$$

Для вакуума ( $\mu = \epsilon = 1$ ) по этой формуле получается

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} = c, \quad (6.26)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м;  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

Таким образом, в вакууме скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света  $c$ . Тогда, скорость электромагнитной волны в среде (6.25) запишем в виде

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (6.27)$$

Так как  $\mu\epsilon > 1$ , то скорость электромагнитной волны в среде всегда меньше, чем скорость света в вакууме. Совпадение скорости электромагнитной волны со скоростью света в вакууме указывает на глубокую связь между электромагнитными и оптическими явлениями, позволившую Максвеллу создать электромагнитную теорию света, согласно которой свет представляет собой электромагнитную волну.

## § 6.4. Свойства электромагнитных волн

Изучим свойства электромагнитных волн на примере плоской волны. Решения уравнений (6.22), (6.23) в виде плоской монохроматической волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , имеют вид

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx), \quad (6.28)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kx), \quad (6.29)$$

где  $\vec{E}_0$  и  $\vec{B}_0$  – амплитудные значения векторов напряженности электрического поля и индукции магнитного поля;  $\omega$  – циклическая частота колебаний векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ ;  $k = \omega / v$  – волновое число;  $v$  – скорость распространения волны (6.27).

Формулы (6.28), (6.29) показывают, что плоские волны в однородной среде распространяются без изменения амплитуды, т. е. без поглощения энергии. Для исследования свойств плоских волн подставим (6.28) и (6.29) в третье (6.15) и четвертое уравнения Максвелла (6.16), получим:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -E_{0x} k \sin(\omega t - kx) = 0, \quad (6.30)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = -B_{0x} k \sin(\omega t - kx) = 0, \quad (6.31)$$

где  $E_{0x}$ ,  $B_{0x}$  – проекции амплитудных значений вектора напряженности и индукции на ось  $x$ .

Так как (6.30), (6.31) должны выполняться для любой точки на оси  $x$ , то

$$E_{0x} = B_{0x} = 0. \quad (6.32)$$

Это означает, что вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  перпендикулярны направлению распространения волны (оси  $x$ ). Таким образом, следствием теории Максвелла является поперечность электромагнитных волн: колебания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  происходят в направлениях, перпендикулярных направлению распространению волны.

Подставляя (6.28) и (6.29) в первое (6.13) и второе (6.14) уравнения Максвелла, получим

$$\vec{k} \times \vec{B} = -\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \omega \vec{E}, \quad (6.33)$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}, \quad (6.34)$$

где  $\vec{k}$  – волновой вектор, по модулю равный волновому числу, а по направлению совпадающий с направлением распространения волны

$$\vec{k} = k\vec{n} = \frac{\omega}{v}\vec{n}, \quad (6.35)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор, направленный в направлении распространения волны (модуль его равен единице ( $n = 1$ )).

Подставляя (6.35) в (6.33) и (6.34), получим

$$\vec{n} \times \vec{B} = -\frac{1}{v}\vec{E}, \quad (6.36)$$

$$\vec{n} \times \vec{E} = v\vec{B}. \quad (6.37)$$

Формулы (6.36), (6.37) показывают, что вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  перпендикулярны друг другу и тройка векторов  $\vec{n}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  образует правовинтовую систему. Такое правовинтовое соотношение является внутренним

свойством электромагнитной волны, не зависящим от выбора координатной системы. Из (6.36), (6.37) следует также, что модули векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  связаны соотношением

$$E = vB. \quad (6.38)$$

В электромагнитной волне вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  всегда колеблются в одинаковых фазах. Это означает, что  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в ноль и т. д. На рис. 6.2 показана мгновенная «фотография» электромагнитной волны. Периодические изменения векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  происходят во всех точках пространства, но со сдвигом по фазе, определяемым расстоянием между точками, отсчитанным вдоль оси  $x$ .

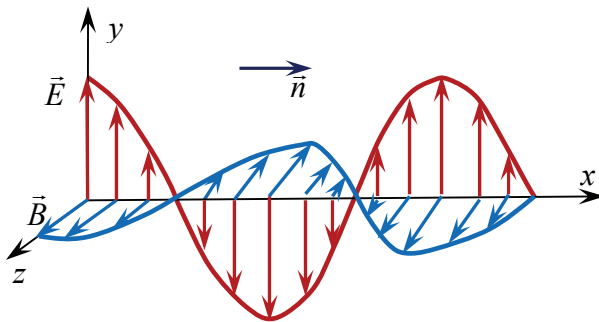


Рис. 6.2

В электромагнитной волне вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  всегда колеблются в одинаковых фазах. Это означает, что  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в ноль и т. д. На рис. 6.2 показана мгновенная «фотография» электромагнитной волны. Периодические изменения векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  происходят во всех точках пространства, но со сдвигом по фазе, определяемым расстоянием между точками, отсчитанным вдоль оси  $x$ .

## § 6.5. Энергия электромагнитной волны

Объемная плотность энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей электрического и магнитного полей

$$\varpi = \varpi_{\text{эл}} + \varpi_{\text{м}}. \quad (6.39)$$

Объемная плотность электрического поля определяется формулой, полученной в [3]:

$$\varpi_{\text{эл}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad (6.40)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды;  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная;  $E$  – напряженность электрического поля.

Объемная плотность магнитного поля определяется по формуле (4.45):

$$\varpi_{\text{м}} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}, \quad (6.41)$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость среды;  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $B$  – индукция магнитного поля.

Используя связь между напряженностью электрического поля и индукцией магнитного поля в электромагнитной волне (6.38), а также формулу (6.25) для скорости электромагнитной волны, не трудно показать, что

$$\varpi_{\text{эл}} = \varpi_{\text{м}}. \quad (6.42)$$

Таким образом, учитывая (6.38), найдем

$$\varpi = 2\varpi_{\text{эл}} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \varepsilon\varepsilon_0 \upsilon EB. \quad (6.43)$$

Используя в (6.43) связь между индукцией  $B$  и напряженностью  $H$  магнитного поля (3.35) и учитывая формулу (6.25), окончательно получим

$$\varpi = \frac{1}{\upsilon} EH. \quad (6.44)$$

Умножив объемную плотность энергии (6.44) на скорость распространения волны, найдем плотность потока энергии – энергию, переносимую в единицу времени через единицу площади, расположенной перпендикулярно направлению распространения волны [1]:

$$S = \varpi \upsilon = EH. \quad (6.45)$$

Вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему, поэтому направление вектора  $\vec{E} \times \vec{H}$  совпадает с направлением переноса энергии, а его модуль равен  $EH$ . Следовательно, вектор плотности потока можно представить в виде

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} . \quad (6.46)$$

Вектор  $\vec{S}$  называется *вектором Пойнтинга*. Он направлен в сторону распространения волны, а его модуль равен плотности потока энергии.

## § 6.6. Генерация электромагнитных волн

Следствием теории Максвелла является существование электромагнитной волны – распространяющегося в пространстве возмущения электромагнитного поля. В рассмотренном в предыдущей главе колебательном контуре, содержащем конденсатор емкостью  $C$  и катушку индуктивностью  $L$  (рис. 6.3, *а*), имеется система изменяющихся электрических и магнитных полей, которые непрерывно переходят в друг друга. Электрическое поле в колебательном контуре сосредоточено в зазоре между обкладками конденсатора, а магнитное поле – внутри катушки. В окружающем конденсатор и катушку пространстве поля практически равны нулю, поэтому заметного излучения электромагнитных волн не происходит. Чтобы излучение играло заметную роль, нужно сделать области, в которых возникают поля, менее обособленными от окружающего пространства. Этого можно достигнуть, увеличивая расстояние между обкладками конденсатора и между витками катушки при уменьшении числа ее витков (рис. 6.3, *б*). В пределе разнося пластины конденсатора на максимально возможное расстояние и заменяя катушку прямым проводом, приходим к *открытому колебательному контуру* (*вibratorу* или *антенне*) (рис. 6.3, *в*), способному излучать электромагнитные волны.

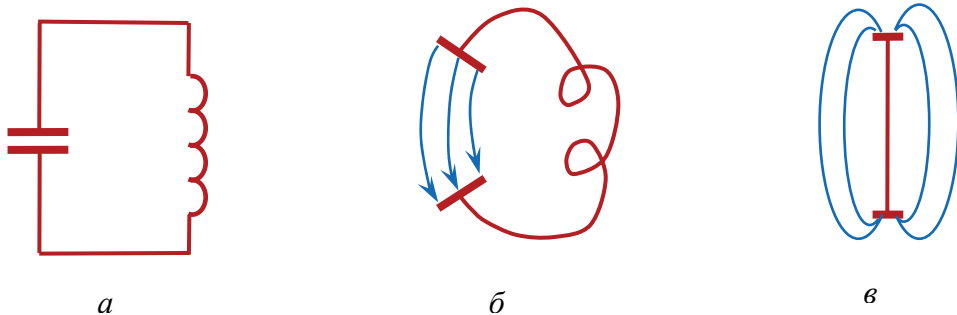


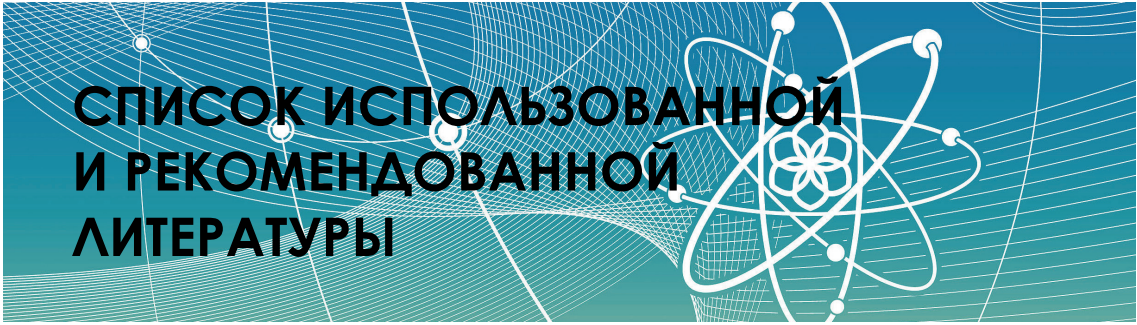
Рис. 6.3

При таком преобразовании колебательного контура емкость конденсатора и индуктивность катушки сильно уменьшаются. Это приводит к увеличению частоты  $\omega_0$  (5.6) колебаний в контуре, а следовательно

и частоты излучаемых электромагнитных волн, что является необходимым условием образования волн большой интенсивности. Таким вибратором пользовался Г. Герц, впервые экспериментально получивший электромагнитные волны. Поэтому его называют *вибратором Герца*.

В открытом колебательном контуре заряды уже не сосредоточены на концах, а распределены по всему проводнику. Ток в данный момент времени во всех сечениях проводника направлен в одну и ту же сторону, но сила тока не одинакова в различных сечениях проводника, т. е. ток не является квазистационарным. На концах она равна нулю, а посередине достигает максимума. Напомним, что в обычных цепях переменного тока сила тока во всех сечениях в данный момент времени одинакова.

Если на пути электромагнитных волн, излученных антенной генератора колебаний передатчика, расположить колебательный контур, переменное электромагнитное поле возбудит в контуре переменные электрические токи, т. е. в нем будут происходить вынужденные электромагнитные колебания. Когда частота электромагнитных волн далека от частоты собственных колебаний контура, амплитуда вынужденных колебаний очень мала. Лишь при совпадении частоты вынужденных колебаний с собственной частотой контура возникают заметные электромагнитные колебания, т. е. наблюдается электрический резонанс. Таким образом, настраивая контур в резонанс, осуществляют прием электромагнитных волн.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кленицкий, Д. В. Физика [Электронный ресурс]: тексты лекций для студентов инженерно-технических специальностей. В 5 ч. Ч. 1. Механика / Д. В. Кленицкий; Белорусский государственный технологический университет. – Минск: БГТУ, 2010. – 128 с.

2. Кленицкий, Д. В. Физика [Электронный ресурс]: тексты лекций для студентов инженерно-технических специальностей. В 5 ч. Ч. 2. Термодинамика. Молекулярная физика / Д. В. Кленицкий; Белорусский государственный технологический университет. – Минск: БГТУ, 2012. – 86 с.

3. Кленицкий, Д. В. Физика [Электронный ресурс]: тексты лекций для студентов инженерно-технических специальностей. В 5 ч. Ч. 3. Электричество / Д. В. Кленицкий; Белорусский государственный технологический университет. – Минск: БГТУ, 2015. – 109 с.

4. Курс физики. В 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм / А. А. Детлаф [и др.]. – М.: Высшая школа, 1977. – 376 с.

5. Савельев, И. В. Курс общей физики. В 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм / Е. В. Савельев. – М.: Наука, 1982. – 496с.

6. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. В 5 т. Т. 3. Электричество / Д. В. Сивухин. – М.: Наука, 1977. – 687 с.

7. Иродов, И. Е. Основные законы электромагнетизма / И. Е. Иродов. – М.: Высшая школа, 1991. – 289 с.

Учебное издание

**Кленицкий** Дмитрий Викентьевич

**ФИЗИКА**

В 5 частях

Часть 4

**МАГНЕТИЗМ**

Тексты лекций

Редактор *Ю. Д. Нежикова*

Компьютерная верстка *Е. В. Ильченко*

Корректор *Ю. Д. Нежикова*

Издатель:

УО «Белорусский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/227 от 20.03.2014.

Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.