Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О. Г. Бобрович
В. В. Тульев

Ф И З И К А

В 3-х частях

Часть 1. МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Пособие
для студентов заочной формы обучения
специальностей: 1-36 07 01 «Машины и аппараты химических производств и предприятий строительных материалов»; 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств»; 1-40 01 02-03 «Информационные системы и технологии»; 1-46 01 01 «Лесоинженерное дело» (полный срок обучения); 1-46 01 02 «Технология деревообрабатывающих производств» (полный и сокращенный сроки обучения); 1-36 05 01 «Машины и оборудование лесного комплекса» (полный и сокращенный сроки обучения)

Минск 2017

УДК [537.2+537.3](075.8)
ББК 22.33я73
Б72

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом Белорусского государственного технологического университета.

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики БНТУ *П. Г. Кужир*;
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики БГАТУ *В. К. Долгий*

Бобрович, О. Г.

Б72 Физика. В 3 ч. Ч. 1. Механика. Молекулярная физика : пособие для студентов заочной формы обучения специальностей: 1-36 07 01 «Машины и аппараты химических производств и предприятий строительных материалов», 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств», 1-40 01 02-03 «Информационные системы и технологии», 1-46 01 01 «Лесоинженерное дело» (полный срок обучения), 1-46 01 02 «Технология деревообрабатывающих производств» (полный и сокращенный сроки обучения), 1-36 05 01 «Машины и оборудование лесного комплекса» (полный и сокращенный сроки обучения) / О. Г. Бобрович, В. В. Тульев. – Минск : БГТУ, 2017. – 118 с.

В пособии изложен материал по таким разделам физики, как «Механика», «Молекулярная физика», произведены необходимые расчеты.

Предназначено для организации самостоятельной работы студентов заочной формы обучения, подготовки к практическим и лабораторным занятиям по физике, а также для подготовки к сдаче экзамена или зачета по дисциплине «Физика».

УДК [537.2+537.3](075.8)
ББК 22.33я73

СОДЕРЖАНИЕ

МЕХАНИКА

Механика – часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение. ***Механическое движение*** – это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света в вакууме, изучаются в механике Ньютона, называемой ***классической механикой.*** Законы движения макроскопических материальных объектов со скоростями, сравнимыми со скоростью света, изучаются ***релятивистской механикой,*** основанной на ***специальной теории относительности,*** сформулированной А. Эйнштейном. Для описания движения микроскопических тел (элементарные частицы, отдельные атомы) с учетом их волновых свойств законы классической механики неприменимы и они заменяются законами ***квантовой механики.***

1. ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ

Кинематика (от *греч.* движение) – раздел механики, посвященный изучению движения материальных объектов без учета их масс и действующих на них сил, т. е. кинематика рассматривает движение без учета причин, его вызывающих. Устанавливаемые здесь закономерности используются при кинематических исследованиях движений, в частности при расчете механических передач в различных технических устройствах, а также при решении задач динамики.

Основной задачей кинематики является расчет кинематических характеристик движущихся объектов, к которым относятся скорость, ускорение и траектория.

В зависимости от изучаемого объекта выделяют кинематику материальной точки, твердого тела и непрерывно распределенной среды (деформируемого твердого тела, жидкости, газа).

1.1. Кинематика материальной точки. Система отсчета. Траектория. Путь и перемещение. Средние, мгновенные скорости и ускорения материальной точки

Для описания движения необходимо выбрать систему отсчета. *Система отсчета* состоит из тела отсчета и системы пространственных координат, жестко связанной с телом отсчета, снабженной часами.

Телом отсчета называется произвольно выбранное, в идеале – абсолютно твердое тело, относительно которого определяется положение остальных тел.

Положение материальной точки в данный момент времени характеризуется радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала координат в данную точку (рис. 1.1). При движении материальной точки конец радиус-вектора описывает в пространстве кривую, которая называется ***траекторией*** движущейся точки. В зависимости от формы траектории движение может быть *прямолинейным* или *криволинейным*. Длина и направление радиус-вектора изменяются со временем согласно некоторому закону $\vec{r} = \vec{r}(t)$, который называется ***уравнением движения материальной точки***.

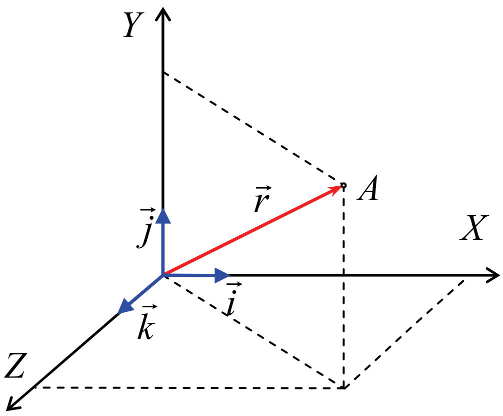

Рис. 1.1

При координатном способе задания движения используется декартова система координат. Положение материальной точки в данный момент времени характеризуется тремя координатами *X*, *Y* и *Z*, а перемещение может быть представлено как результат трех независимых перемещений вдоль координатных осей: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$:

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\,. \qquad (1.1)$$

Для характеристики движения вводится понятие *вектора скорости*, который определяет как быстроту движения, так и направление в данный момент времени.

Средней скоростью на некотором участке *MN* называется величина, равная отношению перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt, за который это перемещение произошло:

$$\vec{\upsilon}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.2)$$

Вектор мгновенной скорости есть предел, к которому стремится вектор $\vec{\upsilon}_{\text{ср}}$ при стремлении $\Delta t \to 0$, т. е.

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\upsilon}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.3}$$

При $\Delta t \to 0$ направление вектора $\Delta \vec{r}$ стремится к касательной к траектории в данной точке. Кроме того, что при $\Delta t \to 0$ $|\Delta \vec{r}| \to \Delta s$, поэтому модуль скорости $|\vec{\upsilon}|$ равен

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \tag{1.4}$$

В декартовых координатах

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}, \tag{1.5}$$

где

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \; \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \; \upsilon_z = \frac{dz}{dt} \tag{1.6}$$

есть проекции скорости $\vec{\upsilon}$ на оси x, y, z.

Модуль скорости

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{1.7}$$

Быстрота изменения скорости со временем характеризуется ***ускорением***.

Средним ускорением за промежуток времени Δt называют отношение изменения скорости $\Delta \upsilon$ к промежутку времени Δt, за который это изменение произошло:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t}. \tag{1.8}$$

Мгновенное ускорение (или просто ускорение) есть предел, к которому стремится вектор $\vec{a}_{\text{ср}}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю, т. е.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \tag{1.9}$$

Таким образом, ускорение материальной точки равно первой производной от вектора скорости $\vec{\upsilon}$ или второй производной от радиус-вектора $\vec{r}(t)$ по времени.

Ускорение можно найти по его проекциям на оси координат

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \qquad (1.10)$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \qquad (1.11)$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (1.12)$$

В СИ единицами скорости и ускорения являются соответственно метр в секунду (м/с) и метр на секунду в квадрате (м/с^2).

1.2. Нормальное и тангенциальное ускорения при криволинейном движении. Классификация движений материальной точки

В общем случае при движении тела его скорость изменяется как по величине, так и по направлению. Рассмотрим плоское движение, т. е. такое, при котором все участки траектории движения материальной точки лежат в одной плоскости. Траекторию можно разбить на такие отрезки, что каждый ее отрезок будет являться дугой окружности с центром в некоторой точке O, называемой ***центром кривизны*** траектории, а радиус R такой окружности – ***радиусом кривизны траектории*** в той же точке.

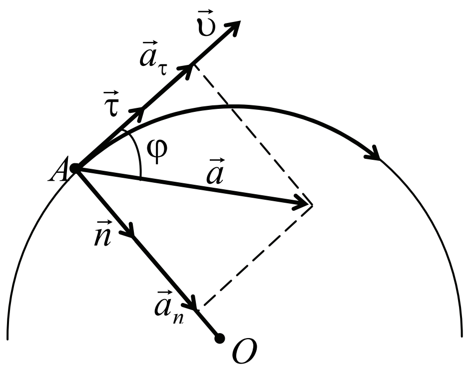

Рис. 1.2

Вектор ускорения $\vec{a}$ раскладывается на две составляющие – касательную $\vec{a}_\tau$, направленную вдоль вектора скорости по касательной к траектории движения, и нормальную $\vec{a}_n$ в перпендикулярном направлении (рис. 1.2).

Таким образом, ***полное ускорение*** тела $\vec{a}$ есть геометрическая сумма тангенциальной $\vec{a}_\tau$ и нормальной $\vec{a}_n$ составляющих:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (1.13)$$

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau = a_\tau\vec{\tau}$ равно первой производной по времени от модуля скорости. Оно определяет быстроту изменения скорости по модулю и направлено по касательной к траектории.

Тангенциальная составляющая ускорения равна

$$a_\tau = \frac{d\upsilon_\tau}{dt}. \tag{1.14}$$

Нормальное ускорение $\vec{a}_n = a_n \vec{n}$ определяет быстроту изменения скорости по направлению. Оно направлено по нормали к центру кривизны траектории. Поэтому эту составляющую ускорения называют также ***центростремительным ускорением***.

Нормальная составляющая ускорения равна

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}. \tag{1.15}$$

Орты $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ всегда перпендикулярны друг другу, а следовательно и векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ взаимно перпендикулярны, поэтому модуль полного ускорения равен

$$a = |a| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2}. \tag{1.16}$$

В зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения движение можно классифицировать следующим образом:

1) $a_\tau = 0$, $a_n = 0$ – *прямолинейное равномерное движение*;

2) $a_\tau = \text{const}$, $a_n = 0$ – *прямолинейное равнопеременное движение*.

При таком движении $\vec{a}_\tau = \vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$. Проинтегрировав это выражение, получим

$$\int_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}} d\vec{\upsilon} = \int_0^t \vec{a}dt \Rightarrow \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 = \vec{a}t \Rightarrow \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t.$$

Так как $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, то, проинтегрировав полученное выражение в пределах от нуля до произвольного момента времени, можно найти перемещение точки:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^t \vec{\upsilon}dt = \int_0^t (\vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t)dt = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

или $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$;

3) $a_\tau = f(t)$, $a_n = 0$ – *прямолинейное движение с переменным ускорением*;

4) $a_\tau = 0$, $a_n = \text{const}$. При таком движении скорость точки не изменяется по модулю, так как тангенциальная составляющая равна нулю, а изменяется только по направлению.

1.3. Абсолютно твердое тело. Поступательное и вращательное движение абсолютно твердого тела. Угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение. Простейшие виды вращения. Период и частота вращения

Абсолютно твердое тело – это тело, расстояние между любыми двумя точками которого остается постоянным в процессе его движения.

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательных и вращательных движений.

Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой ***осью вращения***. При вращательном движении скорости и ускорения различных точек тела неодинаковы. Поэтому в качестве общих кинематических характеристик движения тела при вращении вводятся угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение тела. При вращении тела угол поворота изменяется со временем по некоторому закону $\varphi = \varphi(t)$, который называется ***уравнением вращательного движения тела***.

Угловой скоростью тела называется вектор, численно равный первой производной по времени от угла поворота тела по времени и направленный вдоль оси вращения по правилу правого винта:

$$\omega = \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (1.17)$$

Вектор угловой скорости направлен по оси вращения, причем так, чтобы вращение, рассматриваемое с конца вектора угловой скорости, происходило против хода часовой стрелки (рис. 1.3). Единицей угловой скорости является рад/с.

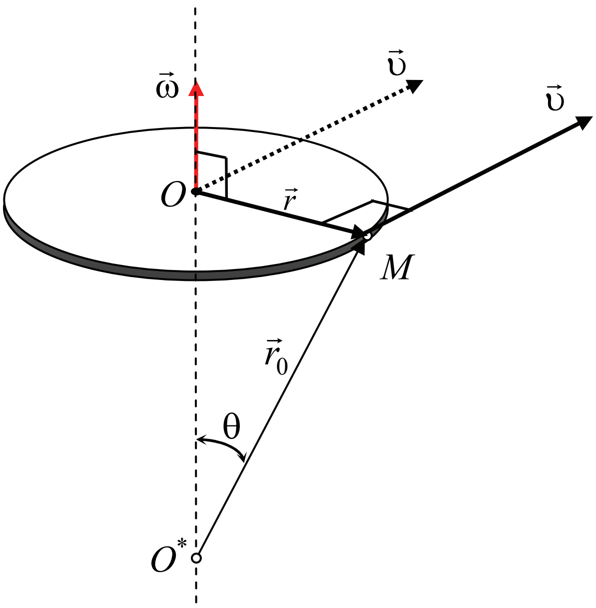

Рис. 1.3

Для характеристики неравномерного вращения тела вводится понятие ***углового ускорения***.

Угловым ускорением называется вектор, численно равный первой производной угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (1.18)$$

Единицей углового ускорения является рад/с^2.

При ускоренном вращении вектор углового ускорения сонаправлен с вектором угловой скорости, а при замедленном – противоположен ему (рис. 1.4).

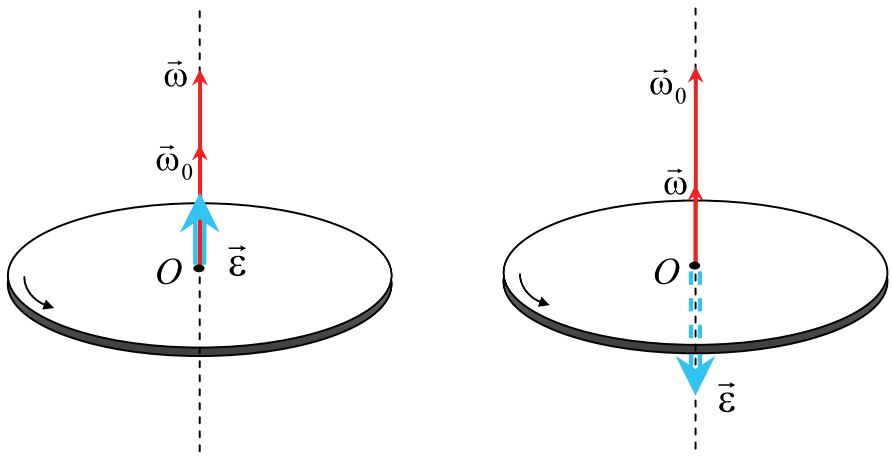

Рис. 1.4

Скорость произвольной точки вращающегося тела называется ***линейной скоростью*** этой точки.

При равномерном вращении угловая скорость не изменяется со временем, т. е. является постоянной величиной (ω = const). Тогда

$$\varphi = \omega \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = \omega\left(t_2 - t_1\right) = \omega \Delta t .$$

Равномерное вращение характеризуется периодом вращения и частотой вращения.

Период вращения – это время, за которое тело совершает один полный оборот, т. е. поворачивается на угол $\varphi = 2\pi$ и на основании выражения (1.17)

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Частота вращения – это число полных оборотов, которое делает тело при равномерном вращении, за единицу времени:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

откуда

$$\omega = 2\pi n.$$

В случае равнопеременного движения тела (ε = const) угловая скорость определяется по формуле

$$\int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}} d\vec{\omega} = \int_0^t \vec{\varepsilon} dt \Rightarrow \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}} d\vec{\omega} = \vec{\varepsilon} \int_0^t dt \Rightarrow \vec{\omega} - \vec{\omega}_0 = \vec{\varepsilon} t \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t \tag{1.19}$$

или в скалярном виде

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t . \tag{1.20}$$

Проинтегрировав выражение (1.17), можно получить формулу для угла поворота тела:

$$\varphi = \varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} . \tag{1.21}$$

Исключив из последнего уравнения t, получим

$$\pm 2\varepsilon\varphi = \omega^2 - \omega_0^2 , \tag{1.22}$$

где $\varphi = 2\pi N$, N – полное число оборотов, совершенных телом.

В случае $\varepsilon = \varepsilon(t)$ угловая скорость и закон вращательного движения определяются следующими формулами:

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon(t)dt\,, \quad \varphi = \int_0^t \omega(t)dt\,. \tag{1.23}$$

1.4. Связь между линейными и угловыми кинематическими характеристиками тела при его вращении

За время dt точка проходит по дуге окружности радиуса R путь $dS = Rd\varphi$ (рис. 1.5). Поэтому

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = \omega R.$$

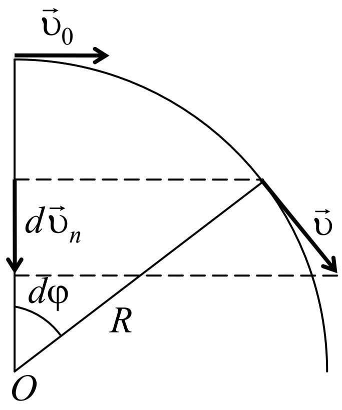

Рис. 1.5

Если угол поворота вращающегося тела представить в виде $d\varphi = \omega(t)dt$ и проинтегрировать в пределах от начального момента времени t_1 до конечного момента времени t_2, то получится угол, на который совершило поворот тело за время

$$\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t)dt.$$

Тангенциальная и нормальная составляющие ускорения произвольной точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяются формулами

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{Rd\omega}{dt} = \varepsilon R\,; \tag{1.24}$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R\,. \tag{1.25}$$

Полученные соотношения можно записать в векторном виде. Для этого на оси вращения OO^* (рис. 1.3) тела выберем любую точку O^* и проведем из нее радиус-вектор $\vec{r}_0$ в точку M. Векторное произведение $\vec{\omega}\times\vec{r}$ по модулю и направлению совпадает с вектором скорости $\vec{\upsilon}$ точки M:

$$\left|\vec{\omega}\times\vec{r}\right| = \omega r_0 \sin(\vec{\omega},\vec{r}) = \omega r\,, \ \vec{\upsilon}\perp\vec{\omega} \text{ и } \vec{r}\,. \tag{1.26}$$

Следовательно, можно записать, что вектор скорости $\vec{\upsilon}=\vec{\omega}\times\vec{r}$, а вектор ускорения точки

$$\vec{a}=\frac{d\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n; \qquad (1.27)$$

$$\vec{a}_\tau=\vec{\varepsilon}\times\vec{r},\ \vec{a}_n=\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}. \qquad (1.28)$$

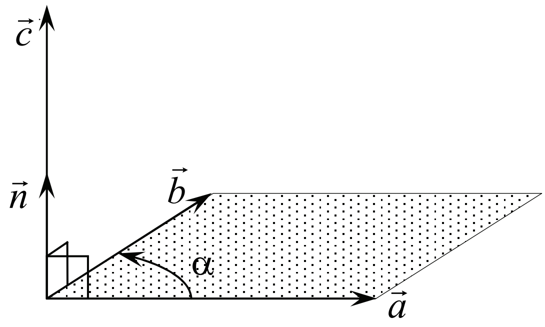

Рис. 1.6

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый формулой

$$\vec{c}=ab\sin\alpha\vec{n} \text{ или } \vec{c}=\vec{a}\times\vec{b} \qquad (1.29)$$

где a и b – модули перемножаемых векторов; α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1.6).

Направление вектора $\vec{c}$ (или $\vec{n}$) выбирается таким образом, чтобы кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$, рассматриваемый с конца вектора $\vec{c}$ (или $\vec{n}$), происходил против хода часовой стрелки.

Контрольные вопросы

1. Что называется материальной точкой? Почему в механике вводят такую модель?
2. Что такое система отсчета?
3. Что такое вектор перемещения? Всегда ли модуль вектора перемещения равен отрезку пути, пройденному точкой?
4. Какое движение называется поступательным, вращательным?
5. Дать определения векторов средней скорости и среднего ускорения, мгновенной скорости и мгновенного ускорения. Каковы их направления?
6. Что характеризует тангенциальная составляющая ускорения, нормальная составляющая ускорения? Каковы их модули?
7. Возможны ли движения, при которых отсутствует нормальное ускорение, тангенциальное ускорение? Приведите примеры.
8. Что называется угловой скоростью, угловым ускорением? Как определяются их направления?
9. Какова связь между линейными и угловыми величинами?

Задачи по теме «Элементы кинематики»

1. Точка движется по прямой согласно уравнению $x = At + Bt^3$, где $A = 6$ м/с; $B = -0{,}125$ м/с^3. Определите среднюю путевую скорость $\upsilon_{ср}$ точки в интервале времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с.

2. Материальная точка движется прямолинейно. Уравнение движения имеет вид $x = At + Bt^3$, где $A = 3$ м/с; $B = 0{,}06$ м/с^3. Найдите скорость υ и ускорение a точки в моменты времени $t_1 = 0$ и $t_2 = 3$ с. Каково среднее значение ускорения $a_{ср}$ за первые 2 с движения?

3. По прямой линии движутся две материальные точки согласно уравнениям: $x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$ и $x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$, где $A_1 = 10$ м; $B_1 = 1$ м/с; $C_1 = 2$ м/с^2; $A_2 = 3$ м; $B_2 = 2$ м/с; $C_2 = 1$ м/с^2. В какой момент времени t_0 скорости этих точек будут одинаковы? Найдите ускорения a_1 и a_2 этих точек.

4. Точка движется по окружности радиусом $R = 9$ м. В некоторый момент времени нормальное ускорение a_n точки равно 4 м/с^2, вектор полного ускорения $\vec{a}$ образует в этот момент с вектором нормального ускорения $\vec{a}_n$ угол $\alpha = 60°$. Найдите скорость υ и тангенциальное ускорение a_τ точки.

5. Материальная точка движется прямолинейно. Уравнение движения имеет вид $x = At + Bt^3$, где $A = 3$ м/с; $B = 0{,}06$ м/с^3. Найдите скорость υ и ускорение a точки в моменты времени $t_1 = 0$ и $t_2 = 3$ с. Каковы средние значения скорости $\upsilon_{ср}$ и ускорения $a_{ср}$ за первую, вторую и третью секунды движения?

6. Скорость точки, движущейся по окружности радиусом 4 м, изменяется по закону $\upsilon = At + Bt^2$, где $A = 1$ м/с^2; $B = 3$ м/с^3. Найдите: 1) путь, пройденный точкой за 6 с после начала движения; 2) тангенциальное и полное ускорения точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

7. Найдите линейную скорость и нормальное ускорение точек поверхности Земли в ее суточном вращении на широте Минска ($\varphi = 54°$, $\cos 54° = 0{,}5878$). Радиус Земли принять равным 6400 км.

8. Свободно падающее тело в последнюю секунду движения проходит половину всего пути. С какой высоты падает тело и каково время t_1 его падения? Сопротивление воздуха не учитывать.

9. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $\upsilon_0 = 49$ м/с. Каков путь, пройденный телом по истечении 6 с от начала движения? Сопротивление воздуха не учитывать.

10. С башни высотой $h = 45$ м горизонтально брошен камень со скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с. Через сколько секунд t и на каком расстоянии l

от башни он упадет на землю? Какую скорость υ будет иметь камень в момент удара о землю?

11. Камень брошен горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с. Через какое время вектор его скорости будет направлен под углом $\alpha = 45°$ к горизонту?

12. Тело брошено горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите радиус кривизны R траектории тела через время $t = 2$ с после начала движения.

13. Мальчик вращает камень, привязанный к веревке длиной 0,5 м в вертикальной плоскости, делая 4 об/с. На какую высоту взлетел камень, если веревка оборвалась в тот момент, когда линейная скорость была направлена вертикально вверх?

14. Линейная скорость точек обода колеса $\upsilon_1 = 6$ м/с, а точек, находящихся на $l = 0{,}2$ м ближе к оси вращения, $\upsilon_2 = 4$ м/с. Найдите радиус R колеса.

15. Диск радиусом $R = 0{,}2$ м вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 3$ рад; $B = -1$ рад/с; $C = 0{,}1$ рад/с^3. Определите тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на ободе диска для момента времени $t_1 = 10$ с.

16. Найдите угловое ускорение ε колеса, если известно, что через время $t_1 = 2$ с после начала движения вектор полного ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол $\alpha = 60°$ с вектором ее линейной скорости.

17. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2. Определите радиус колеса, если через время $t = 1$ с после начала движения полное ускорение колеса составляло $a = 7{,}5$ м/с^2.

18. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = At^2$ ($A = 0{,}5$ рад/с^2). Определите к концу второй секунды после начала движения: 1) угловую скорость диска; 2) для точки, находящейся на расстоянии 80 см от оси вращения, тангенциальное ускорение и полное ускорение.

19. Камень, брошенный под углом к горизонту, упал на землю со скоростью 20 м/с. Чему равна максимальная высота подъема камня, если известно, что во время движения его наибольшая скорость была вдвое больше, чем наименьшая? Сопротивление воздуха не учитывать.

20. Найдите высоту подъема сигнальной ракеты, выпущенной со скоростью 40 м/с под углом 60° к горизонту. Сопротивление воздуха не учитывать.

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Динамика – раздел механики, в котором изучается движение тел под действием приложенных сил. *Основной задачей динамики* является определение кинематического уравнения движения материальной точки, если известны приложенные к ней силы со стороны окружающих тел и начальные условия.

2.1. Основные понятия динамики: сила, масса, импульс. Инерциальные системы отсчета. Законы Ньютона. Основное уравнение динамики поступательного движения

В основе динамики лежат три закона И. Ньютона, которые являются результатом обобщения опытных данных и теоретических сведений в области механики. Для формулировки законов динамики необходимо дать определение следующих динамических характеристик: инертность, масса, импульс тела и сила.

Инертностью (или ***инерцией***) называется свойство тела сохранять неизменным состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Количественной мерой инертности тел является ***инертная масса***, а количественной мерой гравитационного взаимодействия – ***гравитационная масса***. К настоящему времени экспериментально показано, что инертная и гравитационная массы с большой степенью точности совпадают, т. е. они эквивалентны. Этот фундаментальный закон природы называется ***принципом эквивалентности.***

Масса – это физическая величина, являющаяся мерой инерционных и гравитационных свойств тела. Единица массы в СИ – килограмм: $[m]$ = кг. Масса – величина аддитивная, т. е. масса тела равна сумме масс всех частей этого тела.

Импульс тела (или ***количество движения***) – это векторная физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}. \qquad (2.1)$$

Единица измерения импульса в СИ – $[p] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Сила – это векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело деформируется или приобретает ускорение.

Единица измерения силы в СИ – Ньютон $\left[F\right]=\text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2}=\text{Н}$. Сила, приложенная к телу, считается заданной, если указаны ее точка приложения, направление действия и численное значение.

Первый закон Ньютона (***закон инерции***), который формулируется следующим образом: существуют системы отсчета, называемые ***инерциальными***, относительно которых поступательно движущиеся тела сохраняют свою скорость постоянной (или покоятся), если на них не действуют другие тела или их действие скомпенсировано.

Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется ***инерциальной***. Рассмотрим две системы отсчета, двигающиеся друг относительно друга с некоторым ускорением. Если относительно одной из них тело покоится, то относительно другой оно будет двигаться с ускорением. Получается, что в одной системе отсчета первый закон Ньютона выполняется, а в другой не выполняется. Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно и равномерно, будет также инерциальной. Системы отсчета, по отношению к которым первый закон Ньютона не выполняется, называются ***неинерциальными*** системами отсчета.

Второй закон Ньютона: ускорение тела прямо пропорционально результирующей сил, приложенных к нему, и обратно пропорционально его массе (m = const):

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m},\ \text{или}\ \vec{F}=m\vec{a}. \tag{2.2}$$

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d\left(m\vec{\upsilon}\right)}{dt},\ \text{или}\ \vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{2.3}$$

Скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе.

Уравнения (2.2) и (2.3) являются математическим выражением второго закона Ньютона. Второй закон Ньютона позволяет решать основную задачу механики. Поэтому его называют ***основным уравнением динамики поступательного движения***.

Третий закон Ньютона: силы, с которыми два тела действуют друг на друга, имеют одну и ту же природу, равны по модулю, противоположны по направлению и направлены вдоль одной прямой:

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}. \tag{2.4}$$

2.2. Преобразования Галилея. Классический закон сложения скоростей. Механический принцип относительности

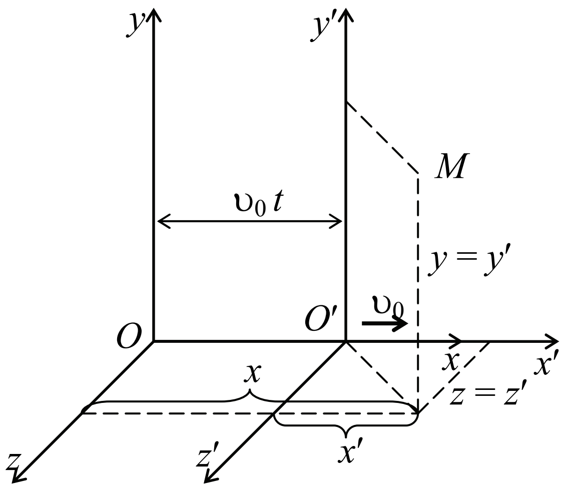

Рис. 2.1

Рассмотрим две инерциальные системы *XYZ* (система ***K***) и *X'Y'Z'* (система ***K'***), первая из которых будет неподвижной, а вторая двигается поступательно вдоль положительного направления оси *OX* с постоянной скоростью υ_0. Найдем связь между координатами *x*, *y*, *z* некоторой точки *M* в системе ***K*** и координатами *x*′, *y*′, *z*′ той же точки в системе ***K'***. Если начать отсчет времени с того момента, когда начала координат обеих систем совпадали, то, как следует из рис. 2.1, в момент времени *t* координаты точки *M* в этих системах будут связаны соотношениями

$$x' = x - \upsilon_0 t,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t. \qquad (2.5)$$

Формулы (2.5) называются ***преобразованиями Галилея*** для координат и времени. Они могут быть представлены также в виде обратного преобразования:

$$x = x' + \upsilon_0 t',\ y = y',\ z = z',\ t = t'. \qquad (2.6)$$

Из преобразований Галилея вытекает классический закон сложения скоростей. Продифференцировав соотношения (2.6) по времени, найдем связь между скоростями точки ***M*** по отношению к системам отсчета ***K*** и ***K'***:

$$\upsilon_x = \upsilon'_x + \upsilon_0,\ \upsilon_y = \upsilon'_y,\ \upsilon_z = \upsilon'_z \Rightarrow \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0. \qquad (2.7)$$

Согласно векторному соотношению (2.7) скорость υ точки *M* относительно неподвижной системы координат (абсолютная) равна векторной сумме ее скорости υ' относительно подвижной системы (относительная) и скорости υ_0 подвижной системы относительно неподвижной (переносная).

Продифференцировав выражение (2.7) по времени *t*, получим при условии, что $\upsilon_0 = \text{const}$

$$a_x = a'_x,\ a_y = a'_y,\ a_z = a'_z \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}'. \qquad (2.8)$$

Отсюда следует, что ускорение какого-либо тела во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, оказывается одним и тем же. Поэтому, если одна из этих систем инерциальна, то и остальные будут инерциальными.

Так как масса в классической механике не зависит от скорости, то произведение массы тела на его ускорение во всех инерциальных системах будет одинаковым, т. е. вид второго закона Ньютона, описывающего движение тела, будет одинаковым во всех инерциальных системах отсчета. Неизменность выражения для закона Ньютона отражает тот факт, что все механические явления во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково при одинаковых условиях. Другими словами, все инерциальные системы отсчета эквивалентны между собой. Это утверждение носит название ***принципа относительности Галилея*** (или ***механический принцип относительности***). Он означает, что никакими опытами внутри инерциальной системы отсчета невозможно установить, покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно. Принцип относительности справедлив не только для механических, но и для любых физических явлений.

Используя преобразования Галилея, можно показать, что отрезки длин (масштабы) и интервалы времени между двумя какими-либо событиями одинаковы во всех инерциальных системах отсчета:

$$l' = x_2' - x_1' = \left(x_2 - \upsilon_0 t\right) - \left(x_1 - \upsilon_0 t\right) = x_2 - x_1 = l \, . \qquad (2.9)$$

Понятие времени в классической механике является абсолютным, поэтому

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = t_2 - t_1 = \Delta t \, . \qquad (2.10)$$

Физические величины, не изменяющиеся при переходе от одной инерциальной системе к другой, называются ***инвариантными***. Следовательно, отрезки длин и интервалы времени являются инвариантами классической механики.

2.3. Силы в механике. Закон всемирного тяготения

В классической механике рассматриваются силы упругости и трения, которые имеют электромагнитную природу, и гравитационные силы.

Сила упругости. При ***деформации*** тела, т. е. изменении своих размеров и формы под действием приложенных к нему сил, возникает сила, которая стремится восстановить прежние размеры и форму тела, называемая ***силой упругости***. Эта сила возникает вследствие электромагнитного взаимодействия между атомами и молекулами вещества.

Различают упругие и пластические деформации. Деформация тела называется ***упругой***, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму. Деформации, которые сохраняются в теле после прекращения действия внешних сил, называются ***пластическими*** (***остаточными***).

Простейшими видами деформации являются деформации растяжения-сжатия и сдвига. Другие деформации, например кручение и изгиб, можно свести к этим простейшим деформациям.

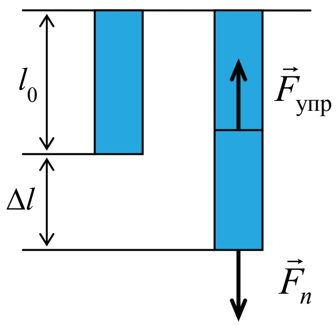

Рис. 2.2

Деформация растяжения-сжатия. Сила $\vec{F}_n$ приложена к телу длиной l_0 перпендикулярно площади поперечного сечения S этого образца. Длина тела увеличивается на величину Δl, которая называется ***абсолютной деформацией*** (рис. 2.2). В состоянии равновесия силы упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$, возникающие в образце, уравновесят внешнюю силу, т. е. $\vec{F}_{\text{упр}} = -\vec{F}_n$.

При небольших деформациях выполняется ***закон Гука***:

$$F_{\text{упр}} = -k\Delta l \tag{2.11}$$

или

$$F_n = k\Delta l\,, \tag{2.12}$$

где k – коэффициент жесткости тела.

Относительной деформацией (***или относительным удлинением***) называют величину

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \tag{2.13}$$

Нормальным напряжением, возникающем в образце, называют величину

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S}. \tag{2.14}$$

Гук экспериментально установил, что для малых деформаций продольная деформация ε и напряжение σ прямо пропорциональны друг другу:

$$\sigma_n = E\varepsilon\,, \tag{2.15}$$

где E – ***модуль Юнга***, который характеризует упругие свойства материала.

Соотношение (2.15) называют ***законом Гука для относительной деформации***. Если в формулу (2.15) подставить формулы (2.13) и (2.14), то поучим

$$\frac{F_n}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0} \;\Rightarrow\; F_n = \frac{ES}{l_0}\Delta l \ . \qquad (2.16)$$

Сравнивая формулы (2.12) и (2.16), получим формулу для расчета коэффициента жесткости $k = \dfrac{ES}{l_0}$ тела, значение которого, как видно из формулы, зависит от материала тела и его геометрических размеров.

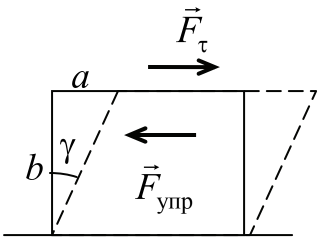

Рис. 2.3

Деформация сдвига. Под действием силы, приложенной по касательной к телу, все слои тела, параллельные основанию, сдвигаются в одном и том же направлении, параллельном этому же основанию (рис. 2.3). Поэтому эта деформация называется ***деформацией сдвига***.

Экспериментальные данные показывают, что при малом сдвиге возникающая сила упругости прямо пропорциональна углу сдвига γ:

$$F_{\text{упр}} = k_{\text{сд}}\gamma \, . \qquad (2.17)$$

При упругих деформациях, когда угол γ мал, $\text{tg}\gamma \approx \gamma$. Тогда величина, рассчитываемая по формуле

$$\text{tg}\gamma = \gamma = \frac{a}{b} \, , \qquad (2.18)$$

является характеристикой деформации сдвига и называется ***относительным сдвигом***.

При деформации сдвига в теле возникает ***тангенциальное*** (***касательное***) ***напряжение***:

$$\tau = \frac{F_\tau}{S} \, , \qquad (2.19)$$

где S – площадь грани, к которой приложена касательная сила.

Опыт показывает, что тангенциальное напряжение пропорционально относительному сдвигу

$$\tau = G\gamma \, , \qquad (2.20)$$

где G – ***модуль сдвига,*** значение которого зависит только от свойств материала.

Силы трения. Это силы, возникающие при соприкосновении поверхностей тел и препятствующие их относительному движению.

Различают трение двух видов:

1) внешнее (сухое);

2) внутреннее (вязкое).

Внешним трением называют трение между поверхностями двух соприкасающихся твердых тел, препятствующее их относительному перемещению, при отсутствии какой-либо прослойки, например смазки, между ними.

Внутренним трением называют трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды или твердого тела.

Трение между поверхностью твердого тела и окружающей его жидкой или газообразной средой, в которой тело движется, называется ***жидким*** (или ***вязким***) трением. Трение между поверхностями двух соприкасающихся твердых тел при отсутствии между ними жидкой или газообразной прослойки называется ***сухим трением***.

Типы сухого трения: а) ***трение покоя*** – трение при отсутствии относительного перемещения соприкасающихся тел; б) ***трение скольжения*** – трение, которое возникает при скольжении одного тела по поверхности другого тела.

Сила трения покоя возникает при попытке вызвать скольжение одного тела по поверхности другого. При попытке вывести тело из состояния покоя сила трения покоя изменяется от нуля до предельного значения $F_{\text{тр.п}}^{\max}$. Силу $F_{\text{тр.п}}^{\max}$ называют предельной силой трения покоя. До тех пор, пока тело покоится, сила трения покоя по модулю равна внешней силе, пытающейся сдвинуть тело, и направлена в противоположную сторону. Максимальная сила трения покоя $F_{\text{тр.п}}^{\max}$ пропорциональна силе нормального давления F_n, которая по модулю равна силе реакции опоры $F_n = N$, т. е.

$$F_{\text{тр.п}}^{\max} = \mu_0 N, \tag{2.21}$$

где μ_0 – ***коэффициент трения скольжения***, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей и не зависящий от площади соприкосновения; N – сила нормального давления (сила реакции опоры), прижимающая трущиеся поверхности друг к другу.

Относительное движение тела по поверхности возникает при условии $F_{\text{внеш}} > F_{\text{тр.п}}^{\max}$. Тело начинает скользить по поверхности

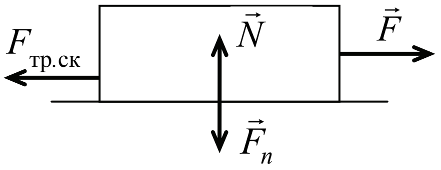

Рис. 2.4

и возникает *сила трения скольжения*, которая также пропорциональна силе нормального давления (рис. 2.4):

$$F_{\text{тр.ск}} = \mu N, \qquad (2.22)$$

где μ – ***коэффициент трения скольжения***, зависящий от природы и состояния трущихся поверхностей, а также от скорости относительного движения тел.

Силы *внутреннего* (*вязкого*) *трения* зависят от скорости движения тела в среде. При небольших скоростях движения сила трения (сопротивления) линейно возрастает с увеличением скорости и направлена в противоположную сторону движения:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -k\vec{\upsilon}, \qquad (2.23)$$

а при больших скоростях движения тела сила трения равна

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -k\upsilon\vec{\upsilon} \text{ или } F_{\text{тр}} = k\upsilon^2, \qquad (2.24)$$

где коэффициент k зависит от формы и размеров тела, состояния его поверхности, а также от свойства среды, называемого вязкостью.

Сила тяжести и вес тела. В системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело действует ***сила тяжести***, т. е. сила, с которой тело притягивается Землей:

$$\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}. \qquad (2.25)$$

Все тела под действием силы притяжения Земли падают с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением, которое называют ***ускорением свободного падения*** $\vec{g}$. В зависимости от географической широты местности (связано с вращением Земли), а также высоты над уровнем моря величина $\vec{g}$ меняется. Часто этими отклонениями от значения 9,81 м/с^2 у поверхности Земли пренебрегают.

Учитывая, что система отсчета, связанная с Землей, неинерциальна, значение силы тяжести немного отличается от гравитационной силы притяжения между телом и Землей. Равнодействующая гравитационной силы и центробежной силы инерции, в системы отсчета, связанной с Землей, равна силе тяжести $\vec{F}_{\text{гр}} + \vec{F}_{\text{цб}} = \vec{F}_{\text{т}}$.

Поскольку центробежная сила инерции много меньше гравитационной силы, то

$$F_{\text{т}} \approx F_{\text{г}} = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{Mm}{(R+h)^2}, \qquad (2.26)$$

где M – масса Земли; m – масса тела; $r = R + h$ – расстояние от центра Земли до тела; R – радиус Земли; h – расстояние от поверхности Земли до тела.

Сравнивая формулы (2.25) и (2.26), найдем ускорение свободного падения на высоте h над поверхностью Земли:

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}. \qquad (2.27)$$

Вблизи поверхности Земли, когда $h \ll R$

$$g = G\frac{M}{R^2} = 9{,}81\ . \qquad (2.28)$$

Весом называют силу $\vec{P}$, с которой тело вследствие притяжения к Земле действует на опору или подвес. Если тело находится в покое на горизонтальной поверхности, то по третьему закону Ньютона $\vec{P} = -\vec{N}$, т. е. вес тела будет равен силе тяжести:

$$P = mg. \qquad (2.29)$$

В случае, если опора с телом движется с ускорением $\vec{a}$, то по второму закону Ньютона для такого тела можно записать

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}. \qquad (2.30)$$

Если опора с телом движется вертикально вверх, то в проекциях на координатную ось Y вес тела

$$P = m(g + a). \qquad (2.31)$$

В этом случае вес тела больше силы тяжести.

Если опора с телом движется вертикально вниз, то в проекциях на координатную ось Y вес тела

$$P = m(g - a). \qquad (2.32)$$

В этом случае вес тела меньше силы тяжести.

Из формулы (2.32) следует, что при свободном падении опоры с телом $\vec{a} = \vec{g}$ вес будет равен нулю $P = 0$. Такое состояние тела называется ***невесомостью***.

Гравитационные силы. Сила гравитационного притяжения, действующая между двумя материальными точками, пропорциональна произведению масс m_1 и m_2 точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена по прямой, соединяющей эти точки. Это есть формулировка **закона всемирного тяготения**:

$$F_{\text{г}} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{2.33}$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ – гравитационная постоянная.

2.4. Механическая система. Импульс механической системы. Закон сохранения импульса

Механической системой называется совокупность материальных точек, рассматриваемых как единое целое. Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются ***внутренними*** $\vec{F}^i$. Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются ***внешними*** $\vec{F}^e$.

Импульс механической системы представляет собой векторную сумму импульсов всех материальных точек, входящих в механическую систему:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + \ldots + m_n\vec{\upsilon}_n\,. \tag{2.34}$$

Используя второй закон Ньютона, запишем уравнение движения для каждой точки системы:

$$\vec{F}_i^e + \sum_j \vec{F}_{ij}^i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}, \tag{2.35}$$

где $\vec{F}_i^e$ – внешняя сила, действующая на i-ю точку; $\sum\limits_j \vec{F}_{ij}^i$ – сумма внутренних сил, действующих на i-ю точку со стороны всех остальных частиц системы ($j \neq i$); $\vec{p}_i$ – импульс i-й точки системы.

Складываем уравнения движения всех точек механической системы:

$$\sum_i \vec{F}_i^e + \sum_{i,j} \vec{F}_{ij}^i = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}. \tag{2.36}$$

Согласно третьему закону Ньютона, внутренние силы, действующие между материальными точками механической системы, равны и противоположно направлены $\vec{F}_{ij}^i = -\vec{F}_{ji}^i$, т. е. геометрическая сумма внутренних сил равна нулю:

$$\sum_i \vec{F}_i^e = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}, \qquad (2.37)$$

или

$$\sum_i \vec{F}_i^e = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{p}_i\right) = \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad (2.38)$$

Если $\sum_i \vec{F}_i^e = 0$, то

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i\right) = 0 \;\Rightarrow\; \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = \text{const}. \qquad (2.39)$$

Закон сохранения импульса: если сумма внешних сил, действующих на точки системы, равна нулю, то векторная сумма импульсов всех точек системы остается постоянной величиной.

Импульсы точек системы могут изменяться (например, при столкновениях), а сохраняется лишь векторная сумма импульсов. Когда сумма внешних сил не равна нулю, а равна нулю сумма проекций этих сил на какою-либо координатную ось, то тогда будет сохраняться сумма проекций импульсов на эту ось:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x^e = \sum_i F_{ix}^e = 0 \;\Rightarrow\; p_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_{ix} = \text{const}. \qquad (2.40)$$

Закон сохранения импульса носит универсальный характер и выполняется также в релятивистской и квантовой механике. Он является следствием определенного свойства симметрии пространства – его однородности. Под однородностью пространства понимают одинаковость свойств пространства во всех его точках.

2.5. Центр масс механической системы. Закон движения центра масс

В классической механике масса тела не зависит от его скорости движения и импульс системы может быть выражен через скорость ее центра масс.

Центром масс (или ***центром инерции***) системы материальных точек называется воображаемая точка C (рис. 2.5), положение которой характеризует распределение массы этой системы, и радиус-вектор которой определяется выражением

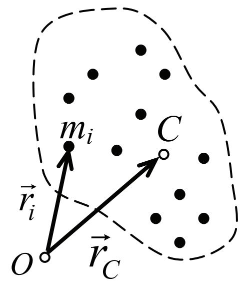

Рис. 2.5

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i , \qquad (2.41)$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – масса и радиус-вектор i-й точки системы; $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – суммарная масса системы.

Соотношения координат центра инерции системы равны

$$x_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i , \; y_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i , \; z_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i . \qquad (2.42)$$

В случае непрерывного распределения массы в системе (например, в случае протяженного тела) радиус-вектор центра масс системы определяется выражением

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\int_{(m)} \vec{r} dm , \qquad (2.43)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор малого элемента системы, масса которого равна dm, а интегрирование проводится по всем элементам системы, т. е. по всей ее массе m.

Определим скорость центра масс механической системы:

$$\vec{\upsilon}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i . \qquad (2.44)$$

Учитывая выражение (2.1), получим

$$\vec{\upsilon}_C = \frac{\vec{p}}{m}, \text{ или } \vec{p} = m\vec{\upsilon}_C . \qquad (2.45)$$

Таким образом, импульс механической системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

С учетом выражения (2.3) получим

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_C}{dt} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_2^e + \ldots + \vec{F}_n^e . \qquad (2.46)$$

Это выражение представляет собой **закон движения центра масс**: центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы, и на которую действует сила, равная векторной сумме всех внешних сил, приложенных к системе.

Закон движения центра масс показывает, что для изменения скорости центра масс системы необходимо, чтобы на систему действовала внешняя сила. Внутренние силы взаимодействия частей системы могут вызвать изменения скоростей этих частей, но они не могут повлиять на суммарный импульс системы и скорость ее центра масс.

Контрольные вопросы

1. Какая система отсчета называется инерциальной? Почему система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальна?
2. Что такое сила? Как ее можно охарактеризовать?
3. Является ли первый закон Ньютона следствием второго закона? Почему? Сформулировав три закона Ньютона, покажите, какова взаимосвязь между этими законами. В чем заключается принцип независимости действия сил?
4. Что называется механической системой? Какие системы являются замкнутыми?
5. В чем заключается закон сохранения импульса? Почему он является фундаментальным законом природы?
6. Каким свойством пространства обусловливается справедливость закона сохранения импульса?
7. Что называется центром масс системы материальных точек? Уравнение движения центра масс механической системы.

Задачи по теме «Динамика материальной точки»

1. Груз, подвешенный на нити длиной 60 см, двигаясь равномерно, описывает в горизонтальной плоскости окружность. С какой скоростью движется груз, если во время его движения нить образует с вертикалью постоянный угол 30°?
2. Небольшой шарик массой 250 г, прикрепленный к концу нити, равномерно вращают в вертикальной плоскости. На сколько сила натяжения нити в нижней точке траектории больше, чем в верхней?
3. Через блок, укрепленный на конце стола, перекинута нерастяжимая нить, к концам нити прикреплены грузы, один из которых (m_1 = 400 г) движется по поверхности стола, а другой (m_2 = 600 г) – вдоль вертикали вниз. Коэффициент трения груза о стол равен μ = 0,1. Считая нить и блок невесомыми, определите: 1) ускорение a; 2) силу натяжения T нити.
4. Два груза (m_1 = 500 г и m_2 = 700 г), связанные невесомой и нерастяжимой нитью, лежат на шероховатой горизонтальной поверхности

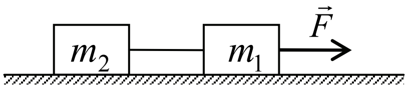

Рис. 2.6

(рис. 2.6). К грузу m_1 приложена горизонтально направленная сила F = 6 Н. Коэффициент трения грузов о поверхность μ = 0,1. Определите: 1) ускорение a грузов; 2) силу натяжения T нити.

5. Наклонная плоскость, образующая угол φ = 25° с горизонтом, имеет длину l = 2 м. Тело соскользнуло с этой плоскости за t_1 = 2 с. Определите коэффициент трения μ тела о плоскость.

6. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α = 45. Зависимость пройденного телом пути от времени описывают уравнением $s = ct^2$, где c = 1,73 м/с^2. Определите коэффициент трения μ тела о плоскость.

7. Под действием некоторой силы $\vec{F}$ материальная точка массой m = 2 кг движется прямолинейно согласно уравнению $x = 2 + 5t + t^2 - 0{,}2t^3$. Найдите значение этой силы в моменты времени t_1 = 2 с и t_2 = 5 с. В какой момент времени t_3 сила равна нулю?

8. В установке (рис. 2.7) угол α наклона плоскости с горизонтом равен 30°, массы тел одинаковы и равны m = 1 кг. Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая трением в оси блока, определите силу давления на ось, если коэффициент трения μ между наклонной плоскостью и движущимся по ней телом равен 0,1.

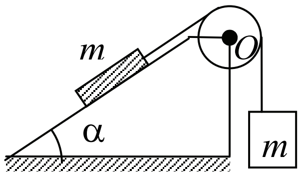

Рис. 2.7

9. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязаны грузы m_1 = 1,5 кг и m_2 = 3 кг. Каково будет показание T весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

10. К телу, лежащему на гладкой горизонтальной поверхности, приложена некоторая сила, под действием которой тело, двигаясь из состояния покоя, на пути 1 м приобрело скорость 10 м/с. Какую силу приложили к телу, если его масса 1 кг?

11. Шайба остановилась через 5 с после удара клюшкой на расстоянии 20 м от места удара. Масса шайбы 100 г. Определить силу трения между шайбой и льдом.

12. Груз массой 100 кг перемещают равноускоренно по горизонтальной поверхности, прилагая силу 200 Н, направленную под углом 30° к горизонту. С каким ускорением движется тело, если коэффициент трения равен 0,1? Начальная скорость равна нулю.

13. С какой скоростью едет автомобиль по выпуклому мосту, радиус кривизны которого 63 м, если давление автомобиля на мост

в верхней точке моста в два раза больше, чем в точке, направление на которую из центра кривизны моста составляет 30° с вертикалью?

14. Автомобиль массой 1 т едет по выпуклому мосту, радиус кривизны которого 250 м, со скоростью 72 км/ч. С какой силой (в кН) давит автомобиль на мост в точке, направление на которую из центра кривизны моста составляет угол 30^o с вертикалью?

15. Для равномерного поднятия груза массой m = 100 кг вверх по наклонной плоскости с углом α = 30° необходимо приложить силу F = 600 Н, направленную вдоль плоскости. С каким ускорением будет скатываться груз, если его отпустить?

16. С горы высотой 2 м и основанием 5 м съезжают санки, которые останавливаются, пройдя горизонтально путь 35 м от основания горы. Найдите коэффициент трения, считая его постоянным на всем пути.

17. Летевший снаряд разорвался на два осколка с равными массами. Скорости осколков равны 300 и 400 м/с, угол между векторами скоростей равен 90^o. Найдите скорость до разрыва.

18. Шар массой 200 г, двигавшийся со скоростью 5 м/с, сталкивается абсолютно неупруго с шаром массой 300 г, двигавшемся в том же направлении со скоростью 4 м/с. Найдите скорость шаров после удара. Ответ дайте в см/с.

19. Тележка движется с постоянной скоростью. Человек, скорость которого в 2 раза больше, догоняет тележку, вскакивает на нее и остается на ней, в результате чего скорость тележки увеличивается на 20%. Во сколько раз масса тележки больше массы человека?

20. На железнодорожной платформе массой 16 т установлено орудие массой 3 т, ствол которого образует угол 60^o с горизонтом. Чему равна скорость снаряда массой 50 кг, если при выстреле платформа за 6 с откатилась на 3 м?

3. ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основной задачей динамики абсолютно твердого тела является изучение движения тела в зависимости от действующих на него сил. При рассмотрении вращательного движения тела необходимо ввести новые понятия: момент силы и момент импульса.

3.1. Момент силы. Момент импульса

Мерой действия силы при вращательном движении твердого тела (или точки) является момент силы.

Моментом силы $\vec{M}$ относительно неподвижной точки *O* называется физическая величина, равная векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O в точку приложения силы, на силу $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{3.1}$$

Пусть на частицу массой m действует сила $\vec{F}$, а ее положение в некоторой инерциальной системе отсчета характеризуется радиус-вектором $\vec{r}$ относительно начала координат. Тогда момент силы частицы относительно точки O дается уравнением (3.1).

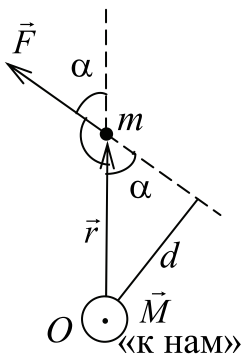

Рис. 3.1

Согласно правилу векторного умножения вектор $\vec{M}$ перпендикулярен векторам $\vec{r}$, $\vec{F}$ и тройка векторов $\vec{M}$, $\vec{r}$, $\vec{F}$ является правой (рис. 3.1).

Модуль вектора момента силы равен

$$M = Fr\sin\alpha = Fd, \tag{3.2}$$

где $d = r\sin\alpha$ – **плечо силы** относительно точки O.

Плечо силы – это расстояние, измеряемое по перпендикуляру от точки O до линии, вдоль которой действует сила.

Единица измерения момента силы в СИ – $[M] = \text{Н} \cdot \text{м}$.

Проекция M_z вектора $\vec{M}$ на некоторую ось Z, проходящую через точку O, относительно которой определен $\vec{M}$, называется ***моментом силы относительно данной оси***. Он не зависит от выбора точки O на оси и характеризует способность силы $\vec{F}$ вращать тело вокруг этой оси.

Таким образом, модуль момента силы относительно оси есть скалярная величина, характеризующая вращательное движение действия силы и равная произведению модуля силы F, действующей на твердое тело, на плечо силы d относительно этой оси.

Если на тело действует несколько сил, то суммарный момент этих сил равен векторной сумме моментов всех сил относительно данной оси:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right]. \tag{3.3}$$

Моментом импульса материальной точки $\vec{L}$ **относительно точки** ***O*** называют физическую величину, равную векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$ материальной точки относительно точки O на ее импульс $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{\upsilon}. \tag{3.4}$$

Согласно правилу векторного умножения вектор $\vec{L}$ перпендикулярен векторам $\vec{r}$, $\vec{p}$ и тройка векторов $\vec{L}$, $\vec{r}$, $\vec{p}$ является правой (рис. 3.2).

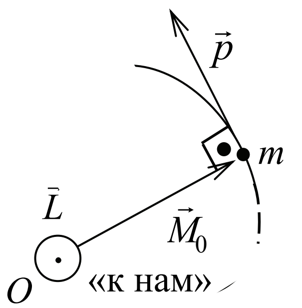

Рис. 3.2

Пусть частица массой m имеет импульс $\vec{p}$, а ее положение в некоторой инерциальной системе отсчета характеризуется радиус-вектором $\vec{r}$ относительно точки O. Тогда момент импульса частицы относительно точки O дается уравнением (3.4).

Модуль вектора момента импульса равен

$$L = rp\sin\alpha = pd, \tag{3.5}$$

где d – **плечо импульса** относительно точки O.

Плечо импульса – это расстояние, измеряемое по перпендикуляру от оси вращения до линии, вдоль которой направлен импульс.

Единица измерения момента импульса в СИ – $[L] = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$.

Таким образом, модуль вектора момента импульса относительно центра или оси есть скалярная величина, равная произведению импульса p на плечо импульса d относительно этой оси.

Моментом импульса системы материальных точек называют сумму моментов импульса материальных точек системы.

Моментом импульса механической системы относительно некоторой точки называется векторная величина, равная геометрической сумме моментов импульса относительно той же точки всех материальных точек системы:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \times m_i\vec{V}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \times \vec{p}_i\right]. \tag{3.6}$$

Моментом импульса относительно данной оси L_z называется проекция вектора $\vec{L}$ на некоторую ось Z, проходящую через точку O, относительно которой определен $\vec{L}$. Он не зависит от выбора точки O на оси.

3.2. Момент инерции тела и его свойства (теорема Штейнера, правило аддитивности). Расчет моментов инерции тел

Моментом инерции твердого тела относительно данной оси называется физическая величина, являющаяся мерой инертности тела во вращательном движении вокруг этой оси и равная сумме произведений масс всех частиц тела на квадраты их расстояний от той же оси:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = I_z. \tag{3.7}$$

Момент инерции зависит только от формы тела и расположения масс относительно оси.

Единица измерения момента инерции в СИ – $[I] = 1$ кг · м^2.

Понятие момента инерции было введено при рассмотрении вращения твердого тела. Однако следует иметь в виду, что каждое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает определенным моментом инерции относительно любой оси.

Если тело сплошное, то суммирование в выражении (3.7) следует заменить на интегрирование:

$$I_z = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV, \tag{3.8}$$

где R – расстояние от элементарной массы dm до оси вращения.

Существуют два свойства момента инерции:

1) ***теорема Штейнера***: момент инерции тела I_z относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_{cz} относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями:

$$I_z = I_{cz} + md^2; \tag{3.9}$$

2) ***правило аддитивности***: момент инерции системы относительно некоторой оси вращения равен сумме моментов инерции всех частей системы относительно этой оси:

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i \text{ или } I = \int dI, \tag{3.10}$$

где I_i – моменты инерции частей, входящих в систему; dI – момент инерции малого элемента объема dV тела.

Рассмотрим несколько примеров вычисления моментов инерции тел:

1. *Момент инерции однородного полого цилиндра*.

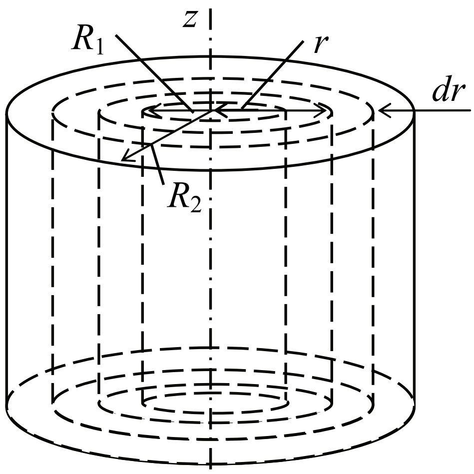

Рис. 3.3

Определим момент инерции однородного полого цилиндра, внешний радиус которого R_2, а внутренний радиус R_1, относительно оси симметрии. Разобьем цилиндр на концентрические цилиндрические кольца толщиной dr. Все кольца находятся на одинаковом расстоянии от оси, равном r (рис. 3.3). Если плотность вещества постоянна, то элементарная масса $dm = \rho dV$, где dV – объем бесконечно тонкого кольца радиусом r, толщиной dr и высотой h. Поскольку $dV = (2\pi r)hdr$, то $dm = 2\pi\rho rhdr$.

Таким образом, момент инерции получается посредством интегрирования по всем кольцам:

$$I = \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\rho h r^3 dr = 2\pi\rho h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr =$$

$$= 2\pi\rho h \left[\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \right] = \frac{1}{2}\pi\rho h \left(R_2^4 - R_1^4 \right).$$

Поскольку $\left(R_2^4 - R_1^4 \right) = \left(R_2^2 - R_1^2 \right)\left(R_2^2 + R_1^2 \right)$, то момент инерции равен

$$I = \frac{1}{2}\pi\rho h \left(R_2^2 - R_1^2 \right)\left(R_2^2 + R_1^2 \right).$$

Объем полого цилиндра $V = Sh = \pi h \left(R_2^2 - R_1^2 \right)$, тогда его масса $m = \rho V = \pi\rho h \left(R_2^2 - R_1^2 \right)$.

Таким образом, *момент инерции полого цилиндра*

$$I = \frac{1}{2} m \left(R_2^2 + R_1^2 \right). \tag{3.11}$$

2. *Момент инерции тонкостенного цилиндра* (обода).

Используя формулу (3.11) и учитывая, что $R_1 = R_2 = R$, получим

$$I = mR^2. \tag{3.12}$$

3. *Момент инерции однородного сплошного цилиндра* (*диска*).

Используя формулу (3.11) и учитывая, что в этом случае $R_1 = 0$ и $R_2 = R$, то момент инерции

$$I = \frac{1}{2} mR^2 . \qquad (3.13)$$

4. *Момент инерции однородного шара.*

Момент инерции однородного твердого шара радиусом R относительно оси, проходящей через его центр

$$I = \frac{2}{5} mR^2 . \qquad (3.14)$$

5. *Момент инерции однородного стержня.*

Момент инерции стержня длиной l относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно его длине

$$I = \frac{1}{12} ml^2 . \qquad (3.15)$$

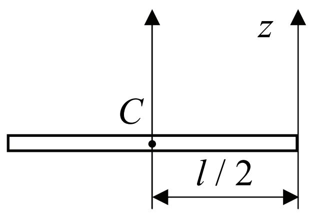

Рис. 3.4

6. *Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через один из его концов* (рис. 3.4).

Воспользуемся теоремой Штейнера, учитывая, что расстояние между осями $d = l/2$. Тогда

$$I_z = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2 . \qquad (3.16)$$

3.3. Основное уравнение динамики вращательного движения. Закон сохранения момента импульса

Продифференцируем уравнение (3.4) по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\upsilon} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} . \qquad (3.17)$$

Скорость $\vec{\upsilon}$ и импульс $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ имеют одно направление. Тогда $\vec{\upsilon} \times \vec{p} = 0$ и учитывая, что $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ – момент силы (3.1), действующий на тело, получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} . \qquad (3.18)$$

Полученное уравнение называют ***уравнением моментов***, согласно которому момент силы, действующий на материальную точку, определяет изменение момента импульса со временем.

Если относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета момент всех сил, действующих на тело, равен нулю, то вектор момента импульса тела относительно этой точки остается постоянным в течение этого времени:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^e = 0,$$

то

$$\vec{L} = \text{const}.$$

Рассмотрим систему материальных точек массами m_1, m_2, …, m_n, движущихся со скоростями $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$, …, $\vec{\upsilon}_n$. Пусть на каждую из этих точек действуют момент внешних сил $\vec{M}_k^e$ и момент внутренних сил $\vec{M}_{ij}^i$, действующих со стороны точек, входящих в рассматриваемую систему.

Для каждой материальной точки системы уравнение моментов имеет вид

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i^e + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \vec{M}_{ij}^i. \tag{3.19}$$

Для всех точек механической системы

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^e + \sum_{i,j} \vec{M}_{ij}^i. \tag{3.20}$$

По третьему закону Ньютона внутренние силы попарно одинаковы по модулю, противоположны по направлению и лежат на одной прямой ($\vec{F}_{ij}^i = -\vec{F}_{ji}^i$), т. е. имеют одинаковое плечо. Поэтому моменты внутренних сил попарно уравновешивают друг друга $\vec{M}_{ij}^i = -\vec{M}_{ji}^i$ и сумма моментов всех внутренних сил для любой системы всегда равна нулю, т. е. $\sum_{i,j} \vec{M}_{ij}^i = 0$.

Тогда

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^e. \tag{3.21}$$

Производная по времени от момента импульса системы относительно точки равна сумме моментов внешних сил относительно этой точки. Уравнение (3.21) является основным уравнением динамики вращательного движения относительно точки.

Из (3.21) вытекает ***закон сохранения момента импульса системы***.

Если момент внешних сил $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i^e = 0$, то получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{L}_i}{dt} = 0 \text{ или } \vec{L} = \text{const}. \tag{3.22}$$

Если момент внешних сил, действующих на механическую систему относительно центра оси, равен нулю, то момент импульса системы относительно этого центра с течением времени не изменяется.

Можно сказать, что момент силы при вращательном движении является аналогом силы при поступательном движении, момент импульса – аналогом импульса.

Законы изменения и сохранения момента импульса механической системы можно применить и к вращательному движению твердого тела.

Закон сохранения момента импульса, как и закон сохранения импульса, представляет собой фундаментальный закон природы. Он является следствием определенного свойства симметрии пространства – его изотропности (одинаковость свойств пространства во всех его направлениях).

Рассмотрим вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси *OZ*. Так как твердое тело можно представить как совокупность материальных точек, то воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения относительно точки (3.21).

Найдем проекции правой и левой части уравнения (3.21) на ось *Oz*:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e. \tag{3.23}$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{zi} = \sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i \times m_i\vec{\upsilon}_i)_z. \tag{3.24}$$

Вектор $\vec{L}_i$ перпендикулярен радиус-вектору и образует с осью *OZ* угол $\beta_i = 90° - \alpha_I$ (рис. 3.5). Поэтому проекция момента импульса материальной точки равна

$$L_{zi} = r_i m_i \upsilon_i \sin\alpha_i = m_i R_i \upsilon_i = m_i R_i \omega R_i = m_i R_i^2 \omega. \tag{3.25}$$

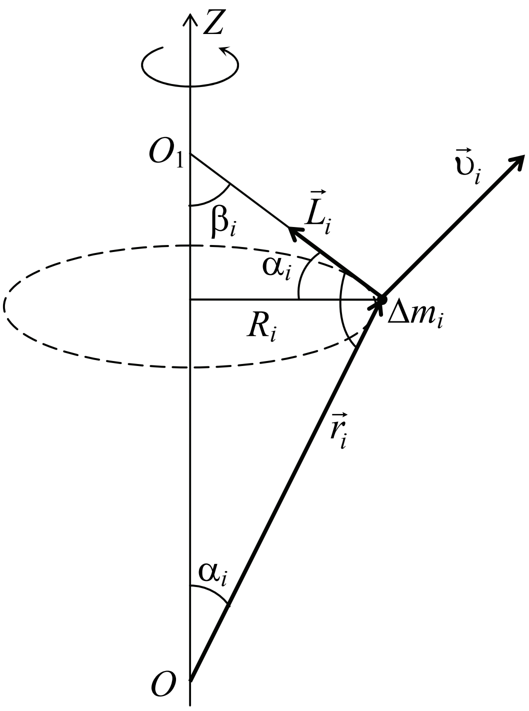

Рис. 3.5

Подставим правую часть уравнения (3.25) в (3.24)

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 . \quad (3.26)$$

Используя $\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = I_z$, получим момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси OZ:

$$L_z = \omega I_z . \qquad (3.27)$$

Подставляя (3.27) в выражение (3.23)

$$\frac{d(\omega I_z)}{dt} = M_z^e \Rightarrow I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e \quad (3.28)$$

и учитывая, что $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, получим ***основное уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси***:

$$I_z \varepsilon = M_z^e \text{ или } \varepsilon = \frac{M_z^e}{I_z}. \qquad (3.29)$$

Угловое ускорение при вращении твердого тела относительно неподвижной оси прямо пропорционально результирующему моменту внешних сил относительно этой оси и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно этой же оси.

Физический смысл момента инерции можно определить из выражения (3.29). Если сравнить с основным уравнением динамики поступательного движения (2.2), то можно увидеть что роль массы при вращательном движении выполняет момент инерции.

Момент инерции тела является мерой инерции тела при вращательном движении.

Если проекция моментов внешних сил относительно оси OZ равна нулю $M_z^e = 0$, то получаем **закон сохранения проекции момента импульса**:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(\omega I_z)}{dt} = 0 \Rightarrow L_z = I_z \omega = \text{const} . \qquad (3.30)$$

Если проекция суммарного момента внешних сил на данную ось Z равна нулю, то проекция момент импульса на эту неподвижную ось с течением времени не будет изменяться.

3.4. Кинетическая энергия вращающегося тела. Работа силы при вращательном движении

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Линейная скорость элементарной массы m_i равна $\upsilon_i = \omega R_i$, где R_i – расстояние от элементарной массы до оси вращения. Кинетическая энергия этой элементарной массы получается выражением

$$\text{К}_i = \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2. \qquad (3.31)$$

Кинетическая энергия тела складывается из кинетических энергий его частей, т. е.

$$\text{К} = \sum_{i=1}^{n} \text{К}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 . \qquad (3.32)$$

Так как величина $\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = I$ – момент инерции тела относительно оси вращения, то кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

$$\text{К} = \frac{1}{2} I \omega^2. \qquad (3.33)$$

Любое движение твердого тела может быть представлено как наложение поступательного и вращательного движений. Рассмотрим плоское движение тела, т. е. движение, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. Такое движение может быть представлено как наложение двух движений – поступательного с некоторой скоростью $\vec{\upsilon}_C$ центра масс и вращательного вокруг соответствующей оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$, проходящей через центр масс. Тогда *кинетическая энергия плоского движения тела* будет слагаться из кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс, т. е.

Кинетическая энергия тела при плоском движении слагается из энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра масс, и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс тела, т. е.

$$К=\frac{1}{2}m\upsilon_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2. \qquad (3.34)$$

Найдем работу силы при вращательном движении вокруг оси Z. Работа, совершаемая всеми приложенными к телу силами, идет на изменение его кинетической энергии:

$$\delta A = dК. \qquad (3.35)$$

Подставим в последнее выражение уравнение (3.33) и продифференцируем

$$dК = d(\frac{1}{2}I_z\omega^2)=\frac{1}{2}I_z 2\omega d\omega = I_z\omega d\omega = I_z\omega\frac{d\omega}{dt}dt. \qquad (3.36)$$

Учитывая, что $\frac{d\omega}{dt}=\varepsilon$ и $\omega dt = d\varphi$, получим

$$dК = I_z\varepsilon\omega dt = M_z d\varphi. \qquad (3.37)$$

Тогда элементарная работа, совершаемая силами, приложенными к телу

$$\delta A = M_z d\varphi, \qquad (3.38)$$

и полная работа при повороте тела на угол φ за время t

$$A=\int_0^{\varphi} M_z d\varphi. \qquad (3.39)$$

В случае, если $M_z = \mathrm{const}$, последнее выражение упрощается:

$$A = M_z\varphi.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции тела?
2. Что называется моментом силы относительно неподвижной точки? относительно неподвижной оси? Как определяется направление момента силы?
3. Что такое момент импульса материальной точки, твердого тела? Как определяется направление момента импульса?
4. Какова роль момента инерции во вращательном движении?
5. Выведите и сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

6. В чем заключается физическая сущность закона сохранения момента импульса?

7. Каким свойством симметрии пространства обусловливается справедливость закона сохранения момента импульса?

8. Сопоставьте основные уравнения динамики поступательного и вращательного движений, прокомментировав их аналогию.

9. Какова формула для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и как ее вывести?

Задачи по теме «Динамика абсолютно твердого тела»

1. На обод маховика диаметром d = 60 см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 2 кг. Определите осевой момент инерции I_x маховика, если он, вращаясь равноускоренно под действием силы тяжести груза, за время t_1 = 3 с приобрел угловую скорость ω_1 = 9 рад/с.

2. Нить с привязанными к ее концам грузами массой m_1 = 50 г и m_2 = 60 г перекинута через блок диаметром d = 4 см. Определите осевой момент инерции блока, если он вращается с угловым ускорением ε = 1,5 рад/с^2.

3. Стержень массой m = 0,3 кг и длиной l = 40 см вращается вокруг оси, проходящей через его середину согласно уравнению $\varphi = At + Bt^3$, где B = 0,2 рад/с^3. Определите вращающий момент M, действующий на стержень в момент времени t_1 = 2 с.

4. Человек массой m_1 = 60 кг, стоящий на краю горизонтальной платформы массой m_2 = 120 кг, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой n_1 = 10 об/мин, переходит к ее центру. Считая платформу круглым однородным диском, а человека – точечной массой, определите, с какой частотой будет вращаться платформа.

5. Определите момент силы M, который необходимо приложить к блоку, вращающемуся с частотой n_0 = 12 с$^{-1}$, чтобы он при равнозамедленном торможении остановился в течение времени Δt = 8 с. Диаметр блока d = 30 см. Массу блока m = 6 кг считать равномерно распределенной по ободу.

6. Блок, имеющий форму диска массой m = 0,4 кг, вращается под действием сил натяжения нити, к концам которой подвешены грузы массами m_1 = 0,3 кг и m_2 = 0,7 кг. Определите силы T_1 и T_2 натяжения нити по обе стороны блока.

7. К ободу однородного сплошного диска массой m = 10 кг, насаженного на ось, приложена касательная сила F = 30 Н. Определите

радиус R диска, если через время t_1 = 4 с после начала действия силы угловая скорость ω_1 стала равной 240 рад/с.

8. К ободу однородного сплошного диска радиусом R = 0,5 м приложена постоянная касательная сила F = 100 Н. При вращении диска на него действует момент сил трения $M_{тр}$ = 2 Н·м. Определите массу m диска, если известно, что его угловое ускорение ε постоянно и равно ε = 16 рад/с^2.

9. На барабан радиусом R = 0,5 м намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 10 кг. Найдите осевой момент инерции барабана, если известно, что груз опускается с ускорением a = 2,04 м/с^2.

10. Вентилятор вращается с частотой n_0 = 10 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 оборотов. Найдите осевой момент инерции вентилятора, если момент сил торможения равен $9{,}4 \cdot 10^{-2}$ Н·м.

11. Шар радиусом R = 10 см и массой m = 5 кг вращается вокруг оси симметрии согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$ (B = 2 рад/с^2, C = – 0,5 рад/с^3). Определите момент сил M для t = 3 с.

12. Диск диаметром D = 60 см и массой m = 1 кг вращается вокруг оси, проходящей через центр перпендикулярно к его плоскости, с частотой n = 20 об/с. Какую работу A надо совершить, чтобы остановить диск?

13. К ободу диска массой m = 5 кг приложена касательная сила F = 19,6 Н. Какую кинетическую энергию будет иметь диск через время t = 5 с после начала действия силы?

14. Маховик вращается с частотой n = 10 об/с. Его кинетическая энергия вращения K = 7,85 кДж. За какое время момент сил M = 50 Н·м, приложенных к маховику, увеличит угловую скорость маховика вдвое?

15. Частота вращения n_0 маховика, момент инерции которого равен J = 120 кг·м^2, составляет 240 об/мин. После прекращения действия на него вращающего момента маховик под действием сил трения в подшипниках остановился за время $t = \pi$ мин. Считая трение в подшипниках постоянным, определите момент M сил трения.

16. Вентилятор вращается с частотой n = 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки N = 75 об. Работа сил торможения A = 44,4 Дж. Найти момент инерции J вентилятора и момент сил торможения M.

17. Определите момент силы M, который необходимо приложить к диску, вращающемуся с частотой n_0 = 15 с$^{-1}$, чтобы он при равнозамедленном торможении остановился в течение времени Δt = 5 с. Радиус диска R = 0,2 м. Масса диска m = 6 кг.

18. Шар диаметром $D = 6$ см и массой $m = 0{,}25$ кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости с частотой вращения $n = 4$ об/с. Найти кинетическую энергию шара.

19. Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого $J = 1{,}5$ кг·м^2, вращаясь при торможении равнозамедленно, за время $t = 1$ мин уменьшил частоту своего вращения с $n_0 = 240$ об/мин до $n = 120$ об/мин. Определите угловое ускорение маховика и работу торможения.

20. Горизонтальная платформа массой m = 25 кг и радиусом R = 80 см вращается с частотой n = 18 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. Считая платформу диском, определите частоту вращения платформы, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции с $I_2 = 3{,}5$ кг·м^2 до $I_2 = 1$ кг·м^2.

4. РАБОТА И МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Единой мерой различных форм движения служит физическая величина, называемая *энергией*. Энергия механической системы количественно характеризует эту систему с точки зрения возможных в ней количественных и качественных превращений движения. Эти превращения обусловлены взаимодействием тел системы как между собой, так и с внешними (по отношению к системе) телами.

4.1. Работа постоянной и переменной силы. Мощность

Работа – это количественная характеристика процесса обмена энергией между взаимодействующими телами.

Если тело движется прямолинейно и на него действует постоянная сила, то работа этой силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения (рис. 4.1):

$$A = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\alpha\,, \qquad (4.1)$$

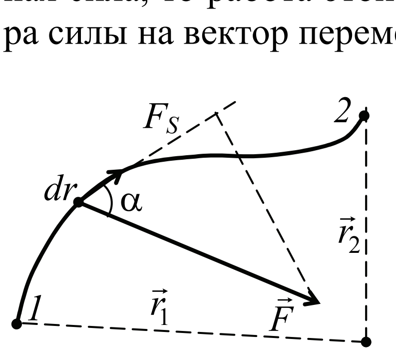

Рис. 4.1

где α – угол между направлением действия силы и направлением перемещения. Работа измеряется в [Дж]. *1 Дж* – это работа, совершаемая силой в 1 Н на пути в 1 м.

В случае переменной силы вводится понятие элементарной работы δA, равной

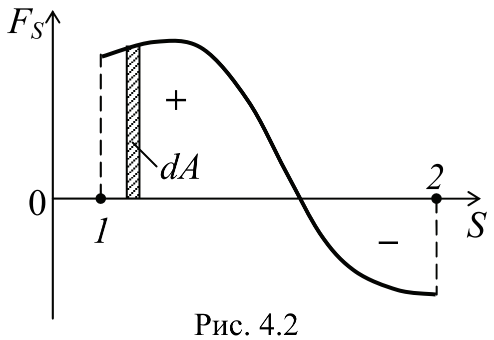

Рис. 4.2

скалярному произведению вектора силы $\vec{F}$ и вектора элементарного перемещению $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos\alpha \; = F_S dr, \quad (4.2)$$

где F_S – проекция силы на касательную к траектории (рис. 4.2).

Работа, совершаемая силой на конечном участке пути *1–2*, равна сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути. Она определяется интегралом, вычисленным вдоль участка *1–2* траектории:

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_{r_1}^{r_2} F dr \cos\alpha \,. \qquad (4.3)$$

Если изобразить график зависимости проекции силы на касательную к траектории от перемещения, то выражение (4.3) имеет смысл площади фигуры под кривой.

Для характеристики скорости совершения работы существует мощность. *Средняя мощность* равна отношению работы к промежутку времени, в течение которого эта работа производится:

$$N_{\text{ср}} = \frac{A}{t}. \qquad (4.4)$$

Мгновенная мощность, т. е. мощность в данный момент времени, определяется как

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon}\,, \qquad (4.5)$$

т. е. равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы.

За единицу мощности принимается мощность в 1 Вт, при которой в единицу времени 1 с совершается работа в 1 Дж.

4.2. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии

Рассмотрим понятие кинетической энергии тела. Пусть тело массой m движется поступательно под действием некоторой силы $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ (или результирующей нескольких сил). Найдем элементарную работу, которую совершает эта сила на элементарном перемещении $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r} = m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = md\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right) = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right). \qquad (4.6)$$

Отсюда видно, что работа силы $\vec{F}$ идет на приращение некоторой величины (стоящей в скобках), которую называют кинетической энергией тела. Таким образом, ***кинетическая энергия*** – это энергия тела, обусловленная его механическим движением.

Для тела массой m, двигающегося поступательно со скоростью $\vec{\upsilon}$, кинетическая энергия определяется соотношением

$$\text{К} = \frac{1}{2}m\upsilon^2. \qquad (4.7)$$

Изменение кинетической энергии при бесконечно малом перемещении определяется элементарной работой:

$$\delta A = d\text{К}. \qquad (4.8)$$

Проинтегрировав выражение (4.6) от начальной до конечной скорости, получим ***теорему об изменении кинетической энергии***:

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \frac{m}{2}\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) = \text{К}_2 - \text{К}_1 = \Delta\text{К}, \qquad (4.9)$$

т. е. приращение кинетической энергии тела на некотором перемещении равно работе результирующей всех сил, действующих на тело на том же перемещении.

4.3. Консервативные и неконсервативные силы

Все силы в механике делятся на *консервативные* и *неконсервативные*.

В общем случае работа, определяемая выражением (4.2), зависит от траектории, которую описывает точка приложения силы. Однако существуют силы (тяготения, тяжести, упругости, электростатические и другие, которые являются центральными), работа которых не зависит от формы траектории, а зависит только от начального и конечного положений движущейся точки. Такие силы называются ***консервативными***, а их работа по замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint dA = 0. \qquad (4.10)$$

Если работа силы зависит от формы траектории, которую описывает точка приложения силы, то такие силы называются ***неконсервативными***, а их работа по замкнутому контуру не равна нулю:

$$\oint dA \neq 0. \qquad (4.11)$$

Среди неконсервативных сил выделяют *диссипативные* и *гироскопические* силы.

1. *Диссипативные силы.* К ним относятся, в частности, силы трения и силы сопротивления среды. Полная работа этих сил является отрицательной:

$$A_{\text{тр}} = \int \vec{F}_{\text{тр}} d\vec{l} = -\int F_{\text{тр}} dl < 0. \qquad (4.12)$$

При наличии сил трения и сопротивления энергия механической системы уменьшается, переходя во внутреннюю энергию тел, что приводит к их нагреванию. Такой процесс называют *диссипацией энергии*, а силы называют *диссипативными*. Таким образом, сила называется диссипативной, если работа, совершаемая этой силой, зависит от траектории движения тела.

2. *Гироскопические силы.* Зависят от скорости движения материальной точки и действуют перпендикулярно к этой скорости. Работа таких сил всегда равна нулю, однако от консервативных сил они отличаются тем, что определяются не только положением точки, но и ее скоростью. Примером такой силы является сила Лоренца. *Сила Лоренца* – это сила, действующая на заряженную частицу q, движущуюся со скоростью $\vec{\upsilon}$, в магнитном поле индукции $\vec{B}$:

$$\vec{F}_{\text{Л}} = q\left[\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right]. \qquad (4.13)$$

4.4. Потенциальная энергия. Связь между силой и энергией потенциального поля

Важнейшей составной частью механической энергии является ***потенциальная энергия***, которая определяется как часть общей механической энергии системы, зависящей от взаимного расположения материальных точек системы и их положения во внешнем силовом поле. Из определения следует, что потенциальная энергия системы не должна зависеть от того, каким образом данная конфигурация частиц системы возникла. Это значит, что понятие потенциальной энергии имеет смысл лишь в том случае, когда на материальные точки системы действуют только консервативные силы. Изменение потенциальной энергии системы должно определяться только работой консервативных сил.

Другими словами, работа консервативных сил при переходе из состояния 1 в состояние 2 равна убыли потенциальной энергии:

$$A = -(\Pi_2 - \Pi_1). \tag{4.14}$$

Таким образом, силовое поле консервативных сил является потенциальным полем.

Полем сил называют область пространства, в каждой точке которого на помещенную туда частицу действует сила, закономерно меняющаяся от точки к точке. Примером может служить поле силы тяжести Земли или поле сил сопротивления в потоке жидкости (газа). Если сила в каждой точке силового поля не зависит от времени, то такое поле называют *стационарным*. Ясно, что силовое поле, стационарное в одной системе отсчета, в другой системе может оказаться и нестационарным. В стационарном силовом поле сила зависит только от положения частицы.

Стационарное силовое поле, в котором работа силы поля на пути между двумя любыми точками не зависит от формы пути, а зависит только от положения этих точек, называется *потенциальным*, а силы, как уже было сказано выше, – *консервативными*. Если это условие не выполняется, то силовое поле не является потенциальным. Силовое поле представляет собой особую форму существования материи, посредством которой осуществляются гравитационное, электромагнитное, ядерное и другие взаимодействия.

Взаимодействие в консервативной системе может быть описано с помощью потенциальной энергии либо с помощью сил взаимодействия точек системы. Поэтому между потенциальной энергией и силой, действующей на материальную точку, должна существовать определенная взаимосвязь. Потенциальная энергия системы является функцией координат $\Pi(x, y, z)$. Пусть силы, действующие на систему, выполнили элементарную работу

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz\,. \tag{4.15}$$

С другой стороны, используя уравнение (4.14)

$$dA = -d\Pi = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz\right). \tag{4.16}$$

Сравнивая выражения (4.15) и (4.16), получим выражения для проекций сил поля:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}dx\,,\ F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \tag{4.17}$$

Для вектора силы получаем следующее выражение:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial n}{\partial z}\vec{k}\right) = -\mathrm{grad}\Pi\,. \qquad (4.18)$$

Смысл градиента станет нагляднее и яснее, если ввести понятие ***эквипотенциальной поверхности*** – поверхности, во всех точках которой потенциальная энергия П имеет одно и то же значение. Каждому значению П соответствует своя эквипотенциальная поверхность. Из формул (4.17) и (4.18) следует, что проекция вектора $\vec{F}$ на любое направление, касательное к эквипотенциальной поверхности в данной точке, равна нулю. Это значит, что вектор нормален эквипотенциальной поверхности в данной точке. Далее, возьмем перемещение в сторону уменьшения П, тогда П < 0, и, согласно (4.17), проекция вектора силы меньше нуля, т. е. вектор направлен в сторону уменьшения П. Так как вектор $\vec{F}$ противоположен по направлению вектору $\mathrm{grad}\,\Pi$, то приходим к выводу, что градиент П – это вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциальной энергии П.

4.5. Закон сохранения механической энергии

Пусть на материальные точки системы действуют только консервативные силы. Тогда при переходе системы из одного состояния работа консервативных сил равна

$$A = -(\Pi_2 - \Pi_1),\ A = К_2 - К_1\,. \qquad (4.19)$$

Из (4.19) получаем, что

$$К_1 + \Pi_1 = К_2 + \Pi_2 = \mathrm{const}. \qquad (4.20)$$

Величину E = К + П называют ***полной механической энергией*** системы.

Из соотношения (4.20) следует **закон сохранения полной механической энергии**: полная механическая энергия системы, на материальные точки которой действуют только консервативные силы, с течением времени не изменяется:

$$E = \mathrm{const}. \qquad (4.21)$$

Если на систему, помимо консервативных сил, действуют еще и неконсервативные, то

$$A_{\text{конс}} + A_{\text{неконс}} = К_2 - К_1\,, \qquad (4.22)$$

а работа консервативных сил равна

$$A_{\text{конс}} = -(\Pi_2 - \Pi_1). \quad (4.23)$$

Тогда с учетом формулы (4.23) выражение (4.22) примет следующий вид:

$$A_{\text{неконс}} - (\Pi_2 - \Pi_1) = К_2 - К_1 \Rightarrow (К_2 + \Pi_2) - (К_1 + \Pi_1) = A_{\text{неконс}}. \quad (4.24)$$

В этом случае изменение полной механической энергии системы равно работе неконсервативных сил:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{неконс}}. \quad (4.25)$$

Таким образом, в системе, в которой кроме консервативных сил действуют также неконсервативные, полная механическая энергия системы не сохраняется и закон сохранения механической энергии не выполняется. Но всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида взамен механической энергии, т. е. выполняется фундаментальный закон сохранения и превращения энергии. Энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.

Контрольные вопросы

1. В чем различие между понятиями энергии и работы?
2. Как найти работу переменной силы?
3. Какую работу совершает равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равномерно движущемуся по окружности?
4. Что такое мощность? Вывести ее формулу.
5. Какова связь между силой и потенциальной энергией?
6. Почему изменение потенциальной энергии обусловлено только работой консервативных сил?
7. В чем заключается закон сохранения механической энергии?
8. Необходимо ли условие замкнутости системы для выполнения закона сохранения механической энергии?
9. В чем физическая сущность закона сохранения и превращения энергии? Почему он является фундаментальным законом природы?
10. Каким свойством времени обусловливается справедливость закона сохранения механической энергии?
11. Как определить скорости тел после центрального абсолютно упругого удара? Следствием каких законов являются эти выражения?

Задачи по теме «Работа и механическая энергия»

1. Ящик массой 100 кг тянут с помощью веревки, наклоненной под углом $\alpha = 30^o$ к горизонту. Коэффициент трения между ящиком и полом $\mu = 0{,}5$. Какую наименьшую работу нужно совершить, чтобы передвинуть ящик на расстояние $S = 100$ м по прямой?

2. Тело массой 1 кг движется прямолинейно из состояния покоя под действием постоянной силы. Какую работу должна совершить эта сила, чтобы скорость тела стала равной 10 м/с?

3. Определите работу, совершаемую при подъеме груза массой $m = 50$ кг по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ к горизонту на расстояние $S = 4$ м, если время подъема $t = 2$ с, а коэффициент трения $\mu = 0{,}06$.

4. Во сколько раз возрастает импульс тела при увеличении его кинетической энергии в два раза?

5. Телу, находившемуся на горизонтальной поверхности, сообщили скорость υ_0. Какое расстояние пройдет тело до полной остановки, если коэффициент трения тела о поверхность равен μ?

6. Тело скользит по наклонной плоскости с высоты h. Плоскость наклонена под углом α к горизонту. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ. Определить скорость тела в конце плоскости.

7. Конькобежец, разогнавшись до скорости υ_0, въезжает на ледяную гору. На какую высоту от начального уровня въедет конькобежец, если склон горы составляет угол α с горизонтом и коэффициент трения коньков о лед равен μ?

8. Груз массой 2 кг соскальзывает без трения с наклонной доски на неподвижную платформу массой 18 кг. С какой скоростью (в см/с) начнет двигаться платформа, когда груз упадет на нее? Угол наклона доски к горизонту 60°, высота начального положения груза над уровнем платформы 1,8 м.

9. Автомашина массой $m = 1{,}8$ т движется в гору, уклон которой составляет 3 м на каждые 100 м пути. Определите работу, совершаемую двигателем автомашины на пути 5 км, если коэффициент трения равен $\mu = 0{,}1$.

10. С башни высотой 30 м горизонтально брошен камень. Найдите потенциальную энергию камня через 2 с после начала движения. Масса камня 0,2 кг. На поверхности земли потенциальная энергия равна нулю.

11. Материальная точка массой $m = 1$ кг двигалась под действием некоторой силы согласно уравнению $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ ($B = 3$ м/с,

$C = 5$ м/с^2, $D = 1$ м/с^3). Определите мощность N, затрачиваемую на движение точки за время, равное 1 с.

12. Камень брошен с поверхности земли вертикально вверх со скоростью 10 м/с. На какой высоте кинетическая энергия камня уменьшится в 5 раз?

13. Тело массой $m = 5$ кг падает с высоты $h = 20$ м. Определите сумму потенциальной и кинетической энергии тела в точке, находящейся от поверхности Земли на высоте $h_1 = 5$ м. Трением тела о воздух пренебречь.

14. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $\upsilon_0 = 20$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, на какой высоте h кинетическая энергия тела будет равна его потенциальной энергии. Потенциальную энергию на поверхности земли принять равной нулю.

15. Пуля массой $m = 10$ г, летевшая горизонтально со скоростью $\upsilon = 500$ м/с, попадает в баллистический маятник длиной $l = 1$ м и массой $M = 5$ кг и застревает в нем. Определить угол отклонения маятника.

16. Какую работу надо совершить, чтобы заставить движущееся тело массой $m = 2$ кг: 1) увеличить скорость с 2 м/с до 5 м/с; 2) остановиться при начальной скорости 8 м/с?

17. Сани массой 60 кг, скатившись с горы, проехали по горизонтальному участку дороги 20 м. Вычислите работу силы трения на этом участке, если коэффициент трения равен 0,02.

18. Какую работу совершает двигатель автомобиля массой 1,3 т при трогании с места на первых 75 м пути, если это расстояние автомобиль проходит за 10 с, а коэффициент трения равен 0,05.

19. Автомобиль массой 2 т движется по горизонтальной дороге со скоростью 72 км/ч. Сила сопротивления движению составляет 1/20 от веса автомобиля. Определите полезную мощность (в кВт) автомобиля.

20. Какую полезную мощность (в кВт) развивает трактор, поднимаясь со скоростью 9 км/ч по дороге, уклон которой составляет 1 м на каждые 10 м пути? Масса трактора 6 т.

5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебательные процессы широко распространены в природе и технике и характеризуются той или иной степенью повторяемости. Таким свойством повторяемости обладают, например, качание маятника часов, колебания струны и т. п. В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания: механические, электромагнитные, электромеханические и т. д.

В зависимости от характера воздействия, оказываемого на колеблющуюся систему, различают *свободные* (или собственные) колебания, *вынужденные* колебания, *автоколебания* и *параметрические* колебания.

5.1. Свободные гармонические колебания и их характеристики. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение

Колебания – это движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебания, повторяются через равные промежутки времени. Наиболее важными характеристиками колебания являются: *смещение*, *амплитуда*, *период*, *частота*, *циклическая частота*, *фаза.*

Простейший вид периодических колебаний – это гармонические колебания. *Гармонические колебания* – это периодическое изменение во времени физической величины, происходящее по закону косинуса или синуса. Уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \text{ или } x = A\sin(\omega t + \varphi_1), \quad (5.1)$$

где $\varphi_1 = \varphi_0 - \dfrac{\pi}{2}$.

Смещение x – это величина, характеризующая колебания и равная отклонению тела от положения равновесия в данный момент времени.

Амплитуда колебаний A – это величина, равная максимальному отклонению тела от положения равновесия.

Период колебаний T – это наименьший промежуток времени, через который система, совершающая колебания, снова возвращается в то же состояние, в котором она находилась в начальный момент, выбранный произвольно. Единица измерения $[T] = 1$ с.

За период система совершает одно полное колебание.

Частота колебаний ν – это величина, равная числу колебаний, совершаемых в единицу времени (за 1 с). Единица измерения $[\nu] = 1$ Гц.

Частота определяется по формуле

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (5.2)$$

Циклическая частота ω – это величина, равная числу полных колебаний, совершающихся за 2π секунд. За единицу циклической частоты принята угловая частота, при которой за время 1 с совершается 2π циклов колебаний, [ω]= с$^{-1}$. Циклическая частота связана с периодом и частотой колебаний соотношением

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (5.3)$$

Фаза колебаний $\omega t + \varphi_0$ – фаза, указывающая местоположение колеблющейся точки в данный момент времени.

Начальная фаза φ_0 указывает местоположение колеблющейся точки в момент времени $t = 0$.

Продифференцируем по времени уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right). \quad (5.4)$$

и получим выражение для скорости:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)\right) = -A\omega\sin\left(\omega t + \varphi_0\right) = \\ = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.5)$$

Из сравнения уравнений (5.4) и (5.5) следует, что скорость опережает смещение по фазе на π/2. Амплитуда скорости равна $A\omega$.

Продифференцировав уравнение (5.5) еще раз по времени, получим выражение для ускорения:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-A\omega\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)\right) = \\ = -A\omega^2\cos\left(\omega t + \varphi_0\right) = \\ = A\omega^2\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \pi\right). \quad (5.6)$$

Как следует из уравнения (5.6), ускорение и смещение находятся в противофазе. Это означает, что в тот момент времени, когда смещение достигает наибольшего положительного значения, ускорение достигает наибольшего по величине отрицательного значения, и наоборот. Амплитуда ускорения равна $A\omega^2$ (рис. 5.1).

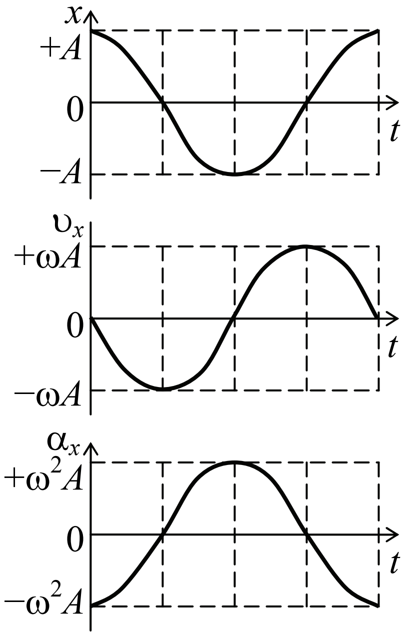

Рис. 5.1

Из выражения (5.6) следует дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{5.7}$$

где $x = A\cos(\omega t + \alpha)$.

Результирующая сила, действующая на материальную точку массой m, определяется с помощью второго закона Ньютона. Проекция этой силы

$$F = ma = -mA\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x. \tag{5.8}$$

Эта сила пропорциональна смещению точки из положения равновесия и направлена в сторону, противоположную этому смещению, т. е. она стремится вернуть точку в положение равновесия и поэтому называется ***возвращающей силой***. Таким образом, гармонические колебания происходят под действием силы F, пропорциональной смещению x и направленной к положению равновесия:

$$F = -kx, \tag{5.9}$$

где $k = m\omega^2$ – постоянный коэффициент.

Возвращающая сила подобна упругим силам, возникающим в телах при их деформации. Такая зависимость силы от смещения характерна для упругой силы, поэтому силы иной физической природы, удовлетворяющие зависимости (5.9) называются ***квазиупругими силами***.

Материальная точка, совершающая колебания под действием квазиупругой силы, называется ***линейным осциллятором***. Ее динамическое поведение описывается дифференциальным уравнением

$$F = ma = -m\omega^2 x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \tag{5.10}$$

где ω_0 – собственная частота осциллятора.

Решение этого уравнения дает закон движения линейного осциллятора $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$.

5.2. Пружинный, математический и физический маятники

Рассмотрим несколько простейших систем, совершающих свободные гармонические колебания.

1. *Пружинный маятник* – это материальная точка массой m, подвешенная (или расположенная горизонтально) на абсолютно упругой

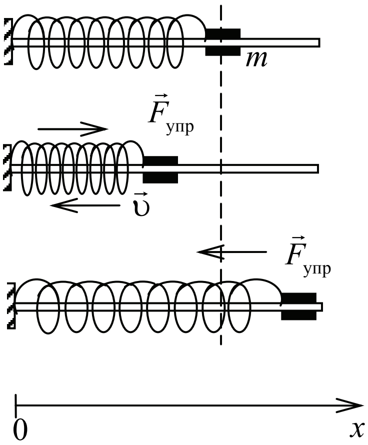

Рис. 5.2

пружине жесткостью k и совершающая гармонические колебания под действием упругой силы (рис. 5.2). Пусть шайба массой m, прикрепленная к пружине, совершает колебания. Для составления дифференциального уравнения колебаний запишем второй закон Ньютона в проекции на ось Ox $F_{упр} = ma$. Упругая сила $F_{упр} = -kx$. Приравнивая последние два уравнения и используя определение ускорения тела, получим

$$ma = -kx \text{ или } m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx . \qquad (5.11)$$

Отсюда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 . \qquad (5.12)$$

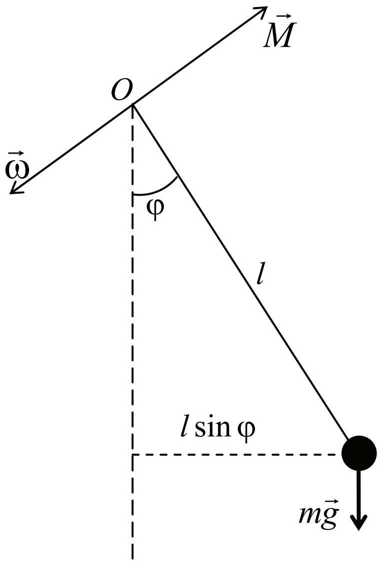

Рис. 5.3

Сравнивая уравнения (5.10) и (5.12), получаем, что пружинный маятник совершает гармонические колебания с частотой

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} . \qquad (5.13)$$

Так как период колебаний определяется по формуле $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, то *период колебаний пружинного маятника*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} . \qquad (5.14)$$

2. *Математический маятник* – это идеализированная система, состоящая из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена материальная точка массой m. Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом φ, образованным нитью с вертикалью.

При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент $\vec{M}$ силы тяжести, равный по величине $mgl\sin\varphi$ (рис. 5.3). Он имеет такое направление, что стремится вернуть маятник в положение равновесия. Следовательно, выражение для вращательного момента имеет вид $M = -mgl\sin\varphi$. Применим основное уравнение динамики вращательного движения

$$M = I\varepsilon, \tag{5.15}$$

где $I = ml^2$ – момент инерции материальной точки. Тогда, учитывая, что угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$, получим

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{5.16}$$

Если рассматривать малые колебания, то $\sin\varphi \approx \varphi$. Получим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0. \tag{5.17}$$

При малых колебаниях угловое отклонение математического маятника изменяется по гармоническому закону с частотой

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{5.18}$$

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{5.19}$$

3. *Физический маятник* – это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной оси, проходящей через точку, не совпадающую с центром масс тела (рис. 5.4). При отклонении маятника от положения равновесия на угол φ возникает вращательный момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Этот момент равен $M = -mgl\sin\varphi$.

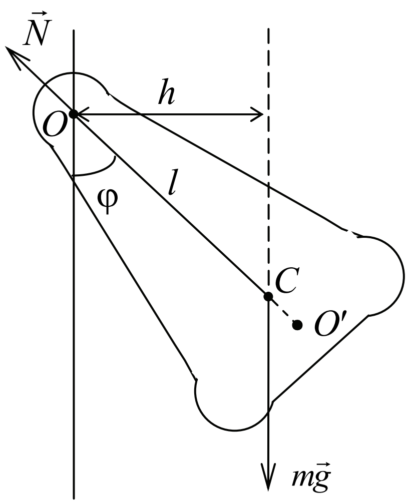

Рис. 5.4

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения получаем

$$I\varepsilon = M \Rightarrow I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi, \qquad (5.20)$$

где I – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса.

Если рассматривать малые колебания, то $\sin\varphi \approx \varphi$. Получим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0. \qquad (5.21)$$

При малых колебаниях угловое отклонение физического маятника изменяется по гармоническому закону с частотой

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}. \qquad (5.22)$$

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}. \qquad (5.23)$$

Из сопоставления формул периодов колебаний математического и физического маятников $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ и $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$ получается, что математический маятник с длиной

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ml} \qquad (5.24)$$

будет иметь такой же период колебаний, что и данный физический маятник.

Величина $l_{\text{пр}}$ (отрезок OO') называется ***приведенной длиной физического маятника*** – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс и лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется центром качания (O') физического маятника.

Точка подвеса O и центр качания обладают свойством взаимности: при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становится новым центром качания.

5.3. Затухающие колебания. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания. Их физический смысл

Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, действие которых приводит к уменьшению энергии системы. Если убыль энергии не восполняется за счет работы внешних сил, то колебания будут затухать. ***Затухающие колебания*** – это колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается. В простейшем, и вместе с тем наиболее часто встречающемся случае, сила сопротивления, вызывающая затухание, зависит от скорости колебательного движения, т. е. ее можно считать прямо пропорциональной скорости:

$$\vec{F}_{\text{c}} = -\mu\vec{\upsilon}, \tag{5.25}$$

где μ – постоянная, называемая коэффициентом сопротивления.

Знак «минус» обусловлен тем, что сила сопротивления и скорость имеют противоположные направления. Тогда второй закон Ньютона для гармонических колебаний при наличии сил сопротивления имеет вид

$$ma = -kx - \mu\upsilon. \tag{5.26}$$

Учитывая, что $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, а $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$ и разделив на массу m, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{5.27}$$

Применив обозначения $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$ и $\dfrac{\mu}{m} = 2\beta$, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \; – \tag{5.28}$$

дифференциальное уравнение затухающих колебаний. Отметим, что ω_0 представляет собой ту частоту, с которой совершались бы свободные колебания системы в отсутствие сопротивления среды. Эта частота называется ***собственной частотой***.

Решение уравнения (5.28) имеет вид (при условии $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$)

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi). \tag{5.29}$$

В случае большого сопротивления среды $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$ движение становится непериодическим.

В соответствии с видом полученной функции движение можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2m}\right)^2}, \tag{5.30}$$

периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2m}\right)^2}} \tag{5.31}$$

и амплитудой, изменяющейся по закону

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \tag{5.32}$$

На рис. 5.5 показан график данной функции. Пунктирными линиями изображены пределы, в которых находится смещение колеблющейся точки. Верхняя из пунктирных кривых дает график функции $A(t)$, причем величина A_0 представляет собой амплитуду в начальный момент времени. Начальное смещение зависит от A_0 и также от начальной фазы φ, т. е. $x_0 = A_0 \cos\varphi$.

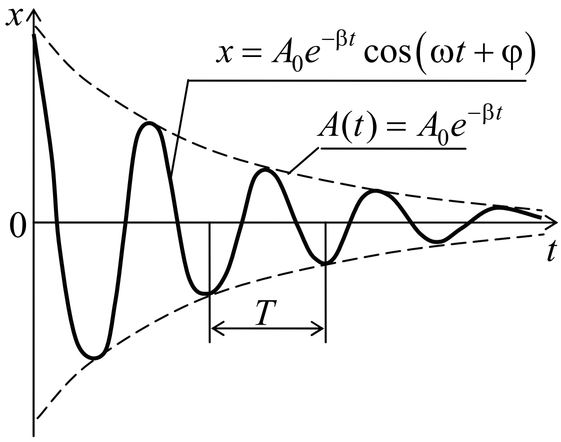

Рис. 5.5

Отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, равно

$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T} \tag{5.33}$$

и называется ***декрементом затухания***.

Для характеристики колебательной системы обычно используется *логарифмический декремент затухания*, т. е. логарифм декремента затухания:

$$\delta = \ln\Delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T. \tag{5.34}$$

Скорость затухания колебаний определяется величиной, называемой ***коэффициентом затухания*** $\beta = \frac{\mu}{2m}$.

Найдем время, называемое ***временем релаксации*** τ, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e \Rightarrow \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e^1 \Rightarrow \beta\tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}. \tag{5.35}$$

Следовательно,

$$\beta = \frac{1}{\tau}, \tag{5.36}$$

т. е. коэффициент затухания обратен по величине промежутка времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

За время релаксации τ система успевает совершить $N_e = \frac{\tau}{T}$ колебаний:

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{\tau\beta}{\delta} = \frac{1}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{1}{N_e}. \tag{5.37}$$

Следовательно, логарифмический декремент затухания δ обратно пропорционален по величине числу колебаний, за которые амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

5.4. Вынужденные колебания. Резонанс

До сих пор мы рассматривали свободные колебания, когда выведенная из положения равновесия система совершает колебания, будучи предоставленной самой себе. Рассмотрим колебательную систему, которая подвергается действию внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону $F = F_0 \cos\omega t$. Колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы, называются ***вынужденными колебаниями***. В этом случае уравнение второго закона Ньютона имеет вид

$$ma = -kx - \mu\upsilon + F_0 \cos\omega t. \tag{5.38}$$

Учитывая, что $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, а $\upsilon = \frac{dx}{dt}$ и разделив на массу m, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t. \tag{5.39}$$

Применив обозначения $\frac{k}{m}=\omega_0^2$, $\frac{\mu}{m}=2\beta$ и $\frac{F_0}{m}=f_0$, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t \; - \tag{5.40}$$

дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.

Решение уравнения (5.40) будет иметь вид

$$x=A\cos(\omega t+\varphi), \tag{5.41}$$

где ω – циклическая частота вынужденных колебаний, равная частоте вынуждающей силы; $A=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}$ – амплитуда вынужденных колебаний; $\varphi=-\operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$ – начальная фаза колебаний.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения.

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы, называется ***резонансом***, а соответствующая частота – ***резонансной частотой***.

Чтобы найти резонансную частоту $\omega_{\text{рез}}$, необходимо взять производную от выражения для амплитуды вынужденных колебаний и приравнять к нулю:

$$\frac{dA}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}\left[\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\right]=0. \tag{5.42}$$

Решая уравнение 5.42, получим что резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}. \tag{5.43}$$

При небольшом сопротивлении среды $\beta\to 0$

$$\omega_{\text{рез}}\approx\omega_0. \tag{5.44}$$

Зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы (*резонансные кривые*), соответствующие различным значениям параметра β, показаны графически на рис. 5.6.

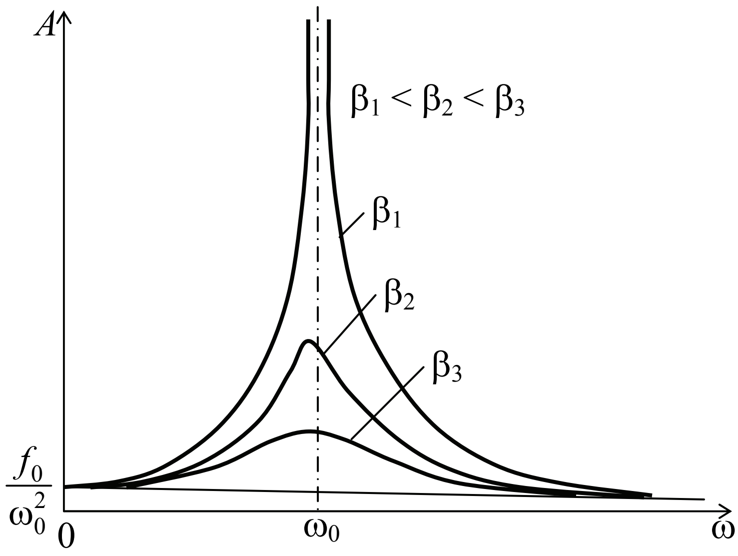

Рис. 5.6

При стремлении ω к нулю все кривые приходят к одному и тому же, отличному от нуля, предельному значению, равному f_0/ω_0^2. Это значение представляет собой смещение из положения равновесия, которое получает система под действием постоянной силы величины F_0.

При стремлении ω к бесконечности все кривые асимптотически стремятся к нулю, так как при большой частоте сила так быстро изменяет свое направление, что система не успевает заметно сместиться из положения равновесия.

5.5. Механические волны. Уравнение плоской волны

Механические колебания, распространяющиеся в упругой среде (твердой, жидкой или газообразной), называются ***механическими*** или ***упругими волнами***.

Процесс распространения колебаний в сплошной среде называется ***волновым процессом*** или ***волной***. Частицы среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются волной в поступательное движение. Они лишь совершают колебания около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице среды передаются лишь состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества.

В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают *продольные* и *поперечные* волны.

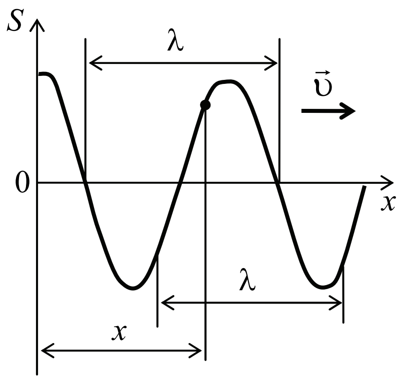

Рис. 5.7

Упругая волна называется ***продольной***, если колебания частиц среды происходят в направлении распространения волны. Продольные волны связаны с объемной деформацией растяжения – сжатия среды, поэтому они могут распространяться как в твердых телах, так и в жидкостях и газообразных средах.

Упругая волна называется ***поперечной***, если колебания частиц среды происходят в плоскостях, перпендикулярных к направлению распространения волны. Поперечные волны могут возникать только в такой среде, которая обладает упругостью формы, т. е. способна сопротивляться деформации сдвига. Этим свойством обладают только твердые тела.

На рис. 5.7 представлена гармоническая поперечная волна, распространяющаяся вдоль оси 0*x*. График волны дает зависимость смещения всех частиц среды от расстояния до источника колебаний в данный момент времени. Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется ***длиной волны***. Длина волны также равна расстоянию, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний:

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu}. \tag{5.45}$$

Колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси 0*x*, а совокупность частиц, заключенных в некотором объеме. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени *t*, называется ***фронтом волны***. Фронт волны представляет собой ту поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания еще не возникли. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется ***волновой поверхностью***. Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченного волновым процессом. Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости или сферы. Соответственно, волна в этих случаях называется ***плоской*** или ***сферической***. В плоской волне волновые поверхности представляют собой множество параллельных друг другу плоскостей, а в сферической – множество концентрических сфер.

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси $0x$ со скоростью υ, причем источник колебаний находится в начале координат 0. И пусть колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$, совершаются по гармоническому закону:

$$S(0;t) = A\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{5.46}$$

Волновые поверхности такой волны будут перпендикулярны оси $0x$ и, поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение S частиц среды будет зависеть только от координаты x и времени t.

Найдем вид уравнение колебания точек в плоскости, соответствующей произвольному значению x. Для того чтобы пройти путь от плоскости $x = 0$ до плоскости x, волне требуется время $\tau = x / \upsilon$. Следовательно, колебания частиц, лежащих в плоскости x, будут отставать по времени на величину τ от колебаний частиц в плоскости $x = 0$ и описываться уравнением

$$S(x;t) = A\cos\left[\omega(t-\tau)+\varphi_0\right] = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)+\varphi_0\right], \tag{5.47}$$

где A – амплитуда волны; φ_0 – начальная фаза волны (определяется выбором начал отсчета x и t).

Уравнение (5.47) является ***уравнением плоской волны***. Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, описывается уравнением

$$S(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{\upsilon}\right)+\varphi_0\right]. \tag{5.48}$$

Для характеристики волн используют величину k, которая называется ***волновым числом***. Волновое число можно представить в виде

$$k = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{5.49}$$

Тогда уравнение плоской волны будет

$$S(x;t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{\upsilon}x + \varphi_0\right) \Rightarrow S(x;t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0). \tag{5.50}$$

Зафиксируем какое-либо значение фазы $\omega(t - x/\upsilon) + \varphi_0 = \text{const}$. Это выражение определяет связь между временем t и тем местом с координатой x, в котором фаза имеет фиксированное значение. Продифференцировав данное выражение, получим

$$\omega\left(dt-\frac{1}{\upsilon}dx\right)=0 \Rightarrow \upsilon=\frac{dx}{dt}. \qquad (5.51)$$

Следовательно, скорость распространения волны υ есть скорость перемещения ее фазы и называется ***фазовой скоростью***.

Фазовая скорость продольных упругих волн определяется выражением

$$\upsilon=\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad (5.52)$$

где E и ρ – модуль Юнга и плотность среды.

А фазовая скорость поперечных упругих волн

$$\upsilon=\sqrt{\frac{G}{\rho}}, \qquad (5.53)$$

где G – модуль сдвига среды.

Распространение волн в однородной изотропной среде описывается ***волновым уравнением***:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \text{ или } \Delta S=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}, \qquad (5.54)$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Уравнение (5.54) является дифференциальным уравнением и его решением является уравнение волны. Для случая распространения плоской волны вдоль оси $0x$ оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\upsilon^2\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \qquad (5.55)$$

5.6. Принцип суперпозиции волн. Интерференция механических волн. Стоячие волны

Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности, и к ним применим принцип ***суперпозиции волн***: при распространении в среде с неизменяющимися свойствами нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвуя в каждом из слагающих волновых процессов.

Рассмотрим суперпозицию когерентных волн. Для этого сначала введем понятие *когерентности*. Под ***когерентностью*** понимают согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов. Волны называются ***когерентными***, если разность их фаз остается постоянной во времени. При наложении в пространстве двух или нескольких когерентных волн в разных его точках получается усиление или ослабление амплитуды результирующей волны в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Это явление называется ***интерференцией волн*** и заключается в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других ослабляют друг друга.

Рассмотрим наложение двух плоских когерентных волн, возбуждаемых точечными источниками S_1 и S_2, колеблющимися с нулевой начальной фазой и постоянной разностью фаз. Так как разность фаз постоянна, то частоты колебаний источников должны быть равны. Запишем уравнения колебаний, создаваемых волнами в точке наблюдения:

$$S_1 = A_1\cos(\omega t - kr_1) = A_1\cos\varphi_1,\ S_2 = A_2\cos(\omega t - kr_2) = A_2\cos\varphi_2, \quad (5.56)$$

где r_1 и r_2 – расстояния от источников волн до рассматриваемой точки.

По принципу суперпозиции найдем амплитуду результирующего колебания. Для простоты будем считать, что колебания, создаваемые волнами, имеют одинаковое направление. Амплитуда результирующего колебания согласно ***методу векторных диаграмм*** (рис. 5.8) равна

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (5.57)$$

Разность фаз будет равна

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = (\omega t - kr_1 - (\omega t - kr_2)) = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1). \quad (5.58)$$

Так как разность фаз $(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta = \text{const}$, то результат наложения двух волн в различных точках зависит от величины $\Delta = r_2 - r_1$, называемой ***разностью хода волн***.

Так как интенсивность волны пропорциональна амплитуде в квадрате $I \sim A^2$, то из (5.57) следует

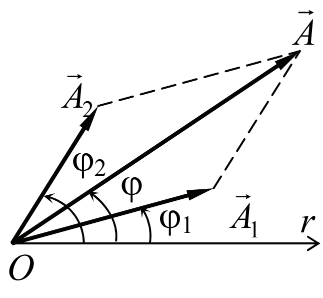

Рис. 5.8

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (5.59)$$

В точках, где выполняется условие

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right) = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \pm 2m\pi \Rightarrow \Delta = \pm m\lambda, \qquad (5.60)$$

где m = 0, 1, 2, … – порядок максимума,

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} > (I_1 + I_2), \qquad (5.61)$$

т. е. наблюдается максимальное значение интенсивности результирующей волны, или ***интерференционный максимум***.

В точках, где выполняется условие

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right) = -1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \pm(2m-1)\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta = \pm\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda, \qquad (5.62)$$

где m = 1, 2, … – порядок минимума,

$$I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} < (I_1 + I_2), \qquad (5.63)$$

т. е. наблюдается минимальное значение интенсивности результирующей волны, или ***интерференционный минимум***.

Таким образом, интерференция приводит к перераспределению энергии волны между соседними областями, хотя в среднем для больших областей энергия остается неизменной.

Особенным случаем интерференции являются *стоячие волны*. ***Стоячие волны*** – это колебательный процесс, образующийся при наложении двух бегущих волн с одинаковыми частотами и амплитудами, распространяющихся навстречу друг другу.

Запишем уравнение двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси X в противоположных направлениях:

$$S_1 = A\cos(\omega t - kx) \text{ и } S_2 = A\cos(\omega t + kx). \qquad (5.64)$$

По принципу суперпозиции найдем уравнения результирующего колебания:

$$S = S_1 + S_2 = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t - kx). \qquad (5.65)$$

Преобразуем выражение (5.65) по формуле для суммы косинусов:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

получим уравнение стоячей волны:

$$S = 2A\cos kx\cos\omega t = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t\,. \qquad (5.66)$$

Из данного уравнения видно, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты, что и у встречных волн, причем амплитуда зависит от координаты x:

$$A(x) = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\,. \qquad (5.67)$$

Точки, в которых амплитуда колебаний достигает максимального значения и координаты которых удовлетворяют условию

$$\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm m\pi \Rightarrow x = \pm m\frac{\lambda}{2}, \qquad (5.68)$$

где m = 0, 1, 2, …, называются ***пучностями*** стоячей волны.

Точки, в которых амплитуда колебаний обращается в нуль и координаты которых удовлетворяют условию

$$\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} = 0 \Rightarrow 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow x = \pm\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \qquad (5.69)$$

где m = 0, 1, 2, …, называются ***узлами*** стоячей волны.

Расстояние между двумя соседними узлами (или пучностями) называется ***длиной стоячей волны*** $\lambda_с$. Из (5.68 или 5.69) следует, что она в два раза меньше длины бегущей волны λ, т. е.

$$\lambda_с = \frac{\lambda}{2}\,. \qquad (5.70)$$

Бегущую волну всегда переносит энергия колебательного движения в направлении своего распространения. В случае стоячей волны переноса энергии не происходит, так как встречные волны имеют одинаковую амплитуду и частоту, и, соответственно, переносят одинаковую энергию в противоположных направлениях. Поэтому полная энергия колебаний стоячей волны заключена в пространстве между узлами и остается постоянной. В этой области происходит взаимное превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно.

Контрольные вопросы

1. Что такое колебания: свободные, гармонические колебания, периодические процессы?

2. Дайте определения амплитуды, фазы, периода, частоты, циклической частоты колебания.

3. Какова связь амплитуды и фазы смещения, скорости и ускорения при прямолинейных гармонических колебаниях?

4. Выведите формулы для скорости и ускорения гармонически колеблющейся точки как функции времени.

5. Что называется гармоническим осциллятором?

6. Запишите и проанализируйте дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний в контуре.

7. Какая колебательная система называется пружинным, физическим, математическим маятником?

8. Выведите формулы для периодов колебаний пружинного, физического и математического маятников.

9. Запишите и проанализируйте дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний в контуре.

10. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение.

11. Что такое коэффициент затухания, декремент затухания, логарифмический декремент затухания? В чем заключается физический смысл этих величин?

12. Что такое вынужденные колебания? Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и решите его.

13. От чего зависит амплитуда вынужденных колебаний? Запишите выражение для амплитуды при резонансе.

14. Что такое волна? Что называется поперечной волной, продольной?

15. Что такое волновой фронт, волновая поверхность? Какие волны называют сферическими, плоскими?

16. Что называется длиной волны? Какова связь между длиной волны, скоростью и периодом?

17. Уравнение плоской волны. Волновое уравнение.

18. При каких условиях возникает интерференция волн? Назовите условия интерференционных максимума и минимума.

19. Что такое стоячая волна? Чем стоячая волна отличается от бегущей?

20. Что такое пучность, узел стоячей волны?

Задачи по теме «Механические колебания и волны»

1. Определите максимальное ускорение a_{max} материальной точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой A = 15 см, если наибольшая скорость точки υ_{max} = 30 см/с.

2. Полная энергия гармонически колеблющейся материальной точки равна E = 10 мкДж, а максимальная сила, действующая на точку, составляет F_{max} = 0,5 мН. Напишите уравнение движения этой точки, если период колебаний равен T = 2 с, а начальная фаза $\varphi_0 = \pi/3$.

3. Найдите максимальную кинетическую энергию $К_{max}$ материальной точки массой m = 2 г, совершающей гармонические колебания с амплитудой A = 4 см и частотой ν = 5 Гц.

4. Частица совершает гармонические колебания вдоль оси $0x$ с частотой ν = 5 Гц. Найти массу частицы, если в некоторый момент времени координата x частицы равна 2 м, а проекция силы F_x, действующей на частицу, на ось $0x$ равна 50 Н.

5. Груз, подвешенный на пружине жесткостью 10^3 Н/м, совершает колебания с амплитудой 2 см. Найдите кинетическую и потенциальную энергию груза при фазе колебаний $\pi/3$ радиан.

6. Как изменится период колебаний математического маятника, если его перенести с поверхности Земли на Луну? Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а радиус Земли в 3,7 раза больше радиуса Луны.

7. Один из математических маятников совершил N_1 = 10 колебаний, другой за то же время совершил N_2 = 6 колебаний. Разность длин маятников равна Δl = 16 см. Определите длины маятников.

8. Один математический маятник имеет период T_1 = 3 с, а другой – T_2 = 4 с. Каков период колебаний математического маятника, длина которого равна сумме длин указанных маятников?

9. Определите период T_0 колебаний стержня массой m длиной l = = 30 см вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец.

10. Определите частоту ν_0 гармонических колебаний диска с радиусом R = 20 см относительно горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса диска перпендикулярно его плоскости.

11. Определите период T_0 гармонических колебаний диска радиусом R = 40 см относительно горизонтальной оси, проходящей через образующую диска.

12. Складываются два колебания одинакового направления и одинакового периода: $x_1 = A_1\sin\omega_1 t$ и $x_2 = A_1\sin\omega_2(t + \tau)$, где $A_1 = A_2$ = 3 см; $\omega_1 = \omega_2 = \pi$ с$^{-1}$; τ = 0,5 с. Определите амплитуду A и начальную фазу φ_0 результирующего колебания. Напишите его уравнение.

13. Определите скорости продольных $\upsilon_{\parallel}$ и поперечных $\upsilon_{\perp}$ упругих волн в золоте. Плотность золота ρ = 19,3 г/см^3, модуль Юнга $E = 7{,}8 \cdot 10^{10}$ Па, модуль сдвига $G = 2{,}7 \cdot 10^{10}$ Па.

14. Плоская волна распространяется вдоль прямой со скоростью υ = 25 м/с. Период колебаний T = 0,02 с. Запишите уравнение этой волны и найдите разность фаз колебаний двух точек среды, находящихся на указанной прямой на расстоянии x = 30 см друг от друга.

15. Уравнение плоской волны, распространяющейся в упругой среде, имеет вид $s = 1 \cdot 10^{-8} \sin(6280t - 1{,}256\,x)$. Определите длину волны λ и скорость υ ее распространения.

16. Разность фаз двух точек звуковой волны равна 5π. Разность расстояний этих точек от источника 0,25 м. Скорость волн 340 м/с. Найдите частоту колебаний.

17. Эхо, возбужденное ружейным выстрелом, дошло до стрелка через 6 с после выстрела. На каком расстоянии от стрелка находится преграда, от которой произошло отражение звука? Скорость звука в воздухе $\upsilon_{зв}$ = 335 м/с.

18. Вдоль оси x распространяется плоская волна с длиной волны λ = 90 см. Чему равно наименьшее расстояние Δx между точками среды, в которых колебания совершаются в противофазе?

19. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, отстоящих от источника колебаний на расстояниях l_1 = 10 м и l_2 = 17 м. Период колебаний T = 0,02 с, скорость распространения колебаний υ = 350 м/с.

20. Найти смещение x от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстояние $l = \lambda/12$, для момента времени $t = T/6$. Амплитуда колебаний A = 0,05 м, начальная фаза α = 0.

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Для исследования макроскопических процессов в телах, связанных с огромным числом содержащихся в них атомов и молекул, применяются два качественно различных и взаимно дополняющих друг друга метода: ***молекулярно-кинетический*** (***статистический***) и ***термодинамический***. Первый лежит в основе *молекулярной (статистической) физики*, а второй – *термодинамики*.

Молекулярная физика представляет собой раздел физики, изучающий строение и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений о природе материальных тел. Согласно этим представлениям любое тело состоит из большого количества весьма малых обособленных частиц – молекул, атомов, ионов. Эти частицы находятся в беспорядочном, хаотическом, не имеющем преимущественного направления движении (т. е. все направления движения частиц равноправны). Также учитывается, что все частицы взаимодействуют между собой.

Молекулярно-кинетическая теория ставит своей целью объяснить свойства тел, непосредственно наблюдаемые на опыте как суммарный эффект действия большого числа взаимодействующих частиц. Законы поведения огромного числа частиц изучают с помощью статистического метода. При этом методе интересуются не движением отдельных частиц, а поведением таких физических величин, средние значения которых характеризуют движение огромной совокупности частиц.

Термодинамика изучает общие свойства макроскопических систем, находящихся в определенных состояниях, и процессы перехода между этими состояниями. В отличие от статистической физики, она не рассматривает микроскопическое строение вещества, а изучает физические свойства систем на основе анализа процессов, связанных с законами превращения энергии системы. Термодинамика базируется на нескольких фундаментальных законах – началах термодинамики, установленных в результате обобщения большого числа опытных фактов. В силу этого выводы термодинамики имеют весьма общий характер и не зависят от конкретного вида взаимодействия частиц системы.

1. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

В молекулярно-кинетической теории пользуются идеализированной моделью, которую назвали *идеальный газ*. Согласно этой модели:

1) собственный объем молекул пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда, в котором находятся;

2) между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;

3) столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда являются абсолютно упругими;

4) время столкновения молекул друг с другом пренебрежимо мало по сравнению со временем свободного пробега молекул.

Реальные газы ведут себя как идеальные, если они не сильно сжаты (до 10^6 Па) и не сильно охлаждены.

1.1. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

Рассмотрим идеальный газ и определим давление газа на основе молекулярно-кинетической теории. Представим себе, что молекулы содержатся в прямоугольном сосуде, грани которого имеют площадь S, а длина его ребер равна l (рис. 1.1). Согласно этой модели, давление газа на стенки сосуда обусловлено столкновениями молекул с ними. Рассмотрим стенку площадью S с левой стороны сосуда и выясним, что происходит, когда одна молекула ударяется об нее. Эта молекула действует на стенку, а стенка, в свою очередь, действует на молекулу с равной по величине и противоположной по направлению силой. Величина этой силы, согласно второму закону Ньютона, равна скорости изменения импульса молекулы, т. е.

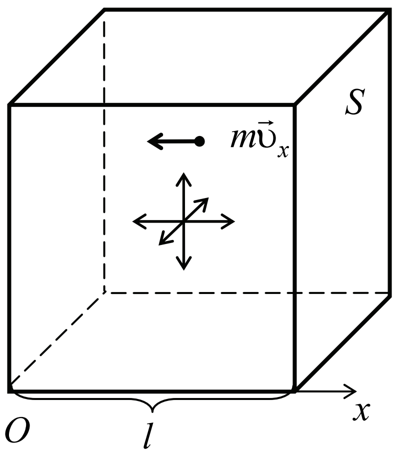

Рис. 1.1

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \qquad (1.1)$$

Так как столкновение является абсолютно упругим, то изменяется лишь составляющая импульса молекулы по оси Ox, т. е. от $-m_0\upsilon_x$ до $+m_0\upsilon_x$. Таким образом, изменение импульса для одного столкновения равно

$$\Delta p = m_0\,\upsilon_x - (-m_0\,\upsilon_x) = 2m_0\,\upsilon_x. \qquad (1.2)$$

Эта молекула будет много раз сталкиваться со стенкой, причем столкновения будут происходить через промежуток времени, который требуется молекуле для того, чтобы пересечь сосуд и вернуться обратно, т. е. пройти расстояние $2l$. Тогда $2l = \upsilon_x \Delta t$, откуда

$$\Delta t = \frac{2l}{\upsilon_x}. \tag{1.3}$$

При этом средняя сила равна

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2m_0\upsilon_x}{2l/\upsilon_x} = \frac{m_0\upsilon_x^2}{l}. \tag{1.4}$$

Во время движения по сосуду туда и обратно молекула может сталкиваться с верхними и боковыми стенками сосуда, однако проекция ее импульса на ось Ox при этом остается без изменения (так как удар абсолютно упругий). Чтобы вычислить силу, действующую со стороны всех молекул в сосуде, просуммируем вклады каждой из них:

$$F = \frac{m_0}{l}\left(\upsilon_{x_1}^2 + \upsilon_{x_2}^2 + \ldots + \upsilon_{x_n}^2\right). \tag{1.5}$$

Среднее значение квадрата υ_x равно $\left\langle \upsilon_x^2 \right\rangle = \dfrac{\left(\upsilon_{x_1}^2 + \upsilon_{x_2}^2 + \ldots. + \upsilon_{x_n}^2\right)}{N}$, следовательно

$$F = \frac{m_0}{l}\left\langle \upsilon_x^2 \right\rangle N. \tag{1.6}$$

Для любой скорости выполняется соотношение $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2$, или $\left\langle \upsilon^2 \right\rangle = \left\langle \upsilon_x^2 \right\rangle + \left\langle \upsilon_y^2 \right\rangle + \left\langle \upsilon_z^2 \right\rangle$. Так как молекулы движутся хаотически, то все направления движения равноправные и $\left\langle \upsilon_x^2 \right\rangle = \left\langle \upsilon_y^2 \right\rangle = \left\langle \upsilon_z^2 \right\rangle$. Значит

$$\left\langle \upsilon^2 \right\rangle = 3\left\langle \upsilon_x^2 \right\rangle \Rightarrow \left\langle \upsilon_x^2 \right\rangle = \frac{\left\langle \upsilon^2 \right\rangle}{3}; \tag{1.7}$$

$$F = \frac{m_0}{l}\left\langle \upsilon_x^2 \right\rangle N \Rightarrow F = \frac{m_0}{l} N \frac{\left\langle \upsilon^2 \right\rangle}{3}. \tag{1.8}$$

Давление на стенку сосуда примет вид

$$p=\frac{F}{S}=\frac{1}{3}\frac{m_0N\left\langle\upsilon^2\right\rangle}{Sl}=\frac{1}{3}\frac{m_0N\left\langle\upsilon^2\right\rangle}{V}\Rightarrow p=\frac{1}{3}m_0n\left\langle\upsilon^2\right\rangle, \tag{1.9}$$

где $n=\dfrac{N}{V}$ – концентрации молекул газа. Выражение (1.9) является ***основным уравнением молекулярно-кинетической теории газов***. Его можно представить в следующем виде:

$$p=\frac{2}{3}\frac{m_0\left\langle\upsilon^2\right\rangle}{2}n\Rightarrow p=\frac{2}{3}n\left\langle\varepsilon_n\right\rangle, \tag{1.10}$$

где $\left\langle\varepsilon_n\right\rangle=\dfrac{m_0\left\langle\upsilon^2\right\rangle}{2}$ – среднее значение кинетической энергии поступательного движения одной молекулы.

1.2. Опытные газовые законы

Рассмотрим экспериментальные законы, описывающие поведение идеального газа:

1. **Закон Бойля – Мариотта**. Для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем есть величина постоянная:

$$pV=\text{const}. \tag{1.11}$$

Процесс, протекающий при постоянной температуре, называется ***изотермическим***. Кривая, изображающая зависимость между параметрами p и V, характеризующими состояние газа при постоянной температуре, называется ***изотермой*** (рис. 1.2).

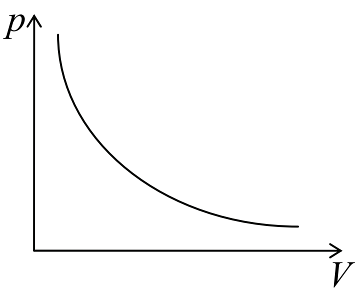

Рис. 1.2

2. **Закон Гей – Люссака**. Объем данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой:

$$V=V_0(1+\alpha t)\text{ или }\frac{V}{T}=\text{const}, \tag{1.12}$$

где V_0 – объем при 0°С; t – температура по шкале Цельсия; α – коэффициент, равный $\alpha=\dfrac{1}{273{,}15}$ К$^{-1}$.

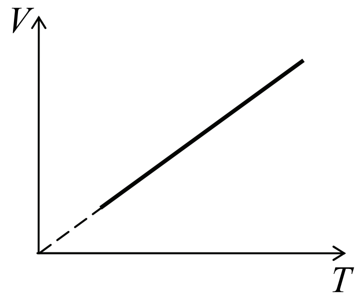

Рис. 1.3

Процесс, протекающий при постоянном давлении, называется ***изобарическим***. На диаграмме в координатах V, T этот процесс изображается прямой линией, называемой ***изобарой*** (рис. 1.3).

3. **Закон Шарля**. Давление данной массы газа при постоянном объеме изменяется линейно с температурой:

$$p = p_0(1 + \alpha t) \text{ или } \frac{p}{T} = \text{const}, \qquad (1.13)$$

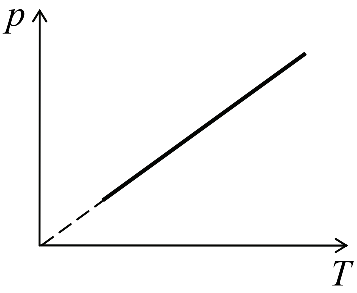

Рис. 1.4

где p_0 – давление при 0°С; t – температура по шкале Цельсия; α – коэффициент, равный $\alpha = \dfrac{1}{273{,}15}$ К$^{-1}$.

Процесс, протекающий при постоянном давлении, называется ***изохорическим***. На диаграмме в координатах p, T этот процесс изображается прямой линией, называемой ***изохорой*** (рис. 1.4).

4. **Закон Авогадро**. Моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объемы. При нормальных условиях этот объем равен $22{,}41 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль. В одном моле различных веществ содержится одно и то же число молекул, равное ***постоянной Авогадро***: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

5. **Закон Дальтона**. Давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений входящих в нее газов:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n. \qquad (1.14)$$

Парциальное давление – это давление, которое оказывал бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

Состояние некоторой массы газа определяется тремя термодинамическими параметрами: давлением, объемом и температурой, между которыми существует связь, называемая ***уравнением состояния*** $f(p, V, T) = 0$, где каждая из переменных является функцией двух других. Французский физик и инженер Клапейрон, объединив законы Бойля – Мариотта, Шарля и Гей – Люссака, вывел ***уравнение состояния идеального газа*** (***уравнение Клапейрона***): для данной массы газа величина $\dfrac{pV}{T}$ остается постоянной, т. е.

$$\frac{pV}{T} = \text{const}. \qquad (1.15)$$

Д. И. Менделеев объединил уравнение Клапейрона с законом Авогадро, отнеся уравнение Клапейрона к одному молю газа и использовав молярный объем V_m. Согласно закону Авогадро, при одинаковых давлении и температуре моли всех газов занимают одинаковый молярный объем, поэтому газовая постоянная будет одинаковой для всех газов. Эту общую для всех газов постоянную обозначили R = = 8,31 Дж/(кг · К) и назвали ***универсальной газовой постоянной***. Таким образом, уравнение Клапейрона приобрело вид

$$\frac{pV_m}{T} = R \Rightarrow pV_m = RT. \qquad (1.16)$$

Выражение (1.16) называют ***уравнением состояния идеального газа*** или ***уравнение Менделеева – Клапейрона***.

От уравнения состояния идеального газа можно перейти к уравнению для произвольной массы газа. Молярный объем равен

$$V_m = \frac{V}{\nu}, \qquad (1.17)$$

где $\nu = \dfrac{m}{M}$ – количество вещества; m – масса газа; M – молярная масса газа.

Молярной массой называется масса 1 моля вещества, и она равна

$$M = N_A m_0, \qquad (1.18)$$

где m_0 – массы одной молекулы.

Таким образом, получаем

$$\frac{pV}{\nu} = RT \Rightarrow pV = \nu RT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT. \qquad (1.19)$$

Пользуются также другой формой уравнения состояния идеального газа, вводя постоянную Больцмана $k = R / N_A = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К:

$$pV = \nu RT \Rightarrow pV = \nu N_A kT \Rightarrow pV = NkT \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p = \frac{N}{V}kT \Rightarrow p = nkT, \qquad (1.20)$$

где $n = N/V$ – концентрации молекул газа.

Сравнивая выражение (1.20) с уравнением (1.10), получаем что

$$\langle \varepsilon_n \rangle = \frac{3}{2}kT, \qquad (1.21)$$

Из формулы (1.21) следует, что абсолютная температура есть величина, пропорциональная средней энергии поступательного движения молекул.

1.3. Распределение Максвелла по скоростям

В соответствии с молекулярно-кинетической теорией молекулы газа совершают хаотическое движение. Это позволяет предположить, что в состоянии термодинамического равновесия все направления скоростей молекул в пространстве равновероятны, хотя значения этих скоростей не являются равновероятными (опыт Штерна).

Разобьем общее число молекул N на небольшие группы из dN_υ молекул, значения скорости которых лежат в пределах от υ до $\upsilon + d\upsilon$. Тогда $dp = dN_\upsilon/N$ – это вероятность того, что молекула газа имеет скорость в заданном интервале от υ до $\upsilon + d\upsilon$ (или доля частиц от общего числа, скорости которых лежат в интервале от υ до $\upsilon + d\upsilon$). Согласно теории вероятности, ***плотность вероятности*** (а в статистической физике ее называют ***функцией распределения***) будет

$$f(\upsilon) = \frac{dp}{d\upsilon}. \tag{1.22}$$

В каждую такую группу при заданной температуре T попадает число молекул

$$dN_\upsilon = Nf(\upsilon)d\upsilon. \tag{1.23}$$

Функция $f(\upsilon)$, зависящая от модуля скорости υ, называется ***функцией распределения молекул по скоростям***. В 1859 г. Джеймс Максвелл получил в явном виде эту функцию. Функция распределения молекул газа по скоростям (*функция распределение Максвелла*) имеет вид

$$f(\upsilon) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right) 4\pi\upsilon^2. \tag{1.24}$$

Число молекул, скорости которых имеют значения, заключенные в пределах от υ до $\upsilon + d\upsilon$, равно

$$dN_\upsilon = Nf(\upsilon)d\upsilon = N\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right) 4\pi\upsilon^2 d\upsilon. \tag{1.25}$$

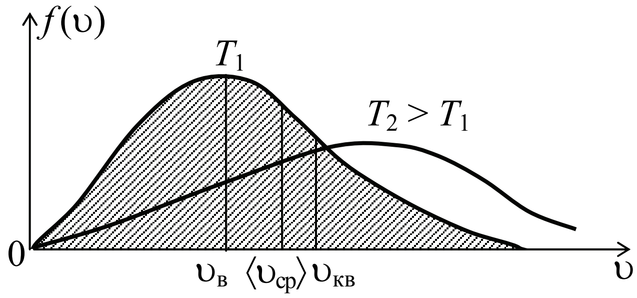

Рис. 1.5

А вероятность того, что молекула газа имеет скорость в заданном интервале от υ до υ + *d*υ (или доля частиц от общего числа, скорости которых лежат в заданном интервале от υ до υ + *d*υ), определяется выражением

$$dp_{\upsilon} = \frac{dN_{\upsilon}}{N} = f(\upsilon)d\upsilon = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)4\pi\upsilon^2 d\upsilon. \qquad (1.26)$$

График функции распределения молекул газа по скоростям представлен на рис. 1.5. Скорость, отвечающая максимуму функции распределения молекул газа по скоростям, называют ***наиболее вероятной скоростью***. Этой скоростью обладает наибольшее количество частиц при заданной температуре *T*. Найдем наиболее вероятную скорость. Для этого возьмем производную по υ от выражения (1.24) и приравняем к нулю:

$$\frac{df(\upsilon)}{d\upsilon} = \frac{d}{d\upsilon}\left(4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)\upsilon^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)\left(2 - \frac{m_0\upsilon^2}{kT}\right)\upsilon = 0 \Rightarrow 2 - \frac{m_0\upsilon^2}{kT} = 0. \qquad (1.27)$$

$$\upsilon_{в} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2kTN_{A}}{m_0 N_{A}}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \qquad (1.28)$$

Найдем ***среднюю арифметическую скорость*** молекул газа:

$$\langle\upsilon\rangle = \int_o^{\infty} \upsilon f(\upsilon)d\upsilon = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi\int_o^{\infty} \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)\upsilon^3 d\upsilon. \qquad (1.29)$$

Интегрирование данного выражения по частям приводит к тому, что

$$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (1.30)$$

Найдем ***среднее значение квадрата скорости*** молекул газа:

$$\left\langle \upsilon^2 \right\rangle = \int_o^\infty \upsilon^2 f(\upsilon) d\upsilon = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_o^\infty \exp\left(-\frac{m_0 \upsilon^2}{2kT} \right) \upsilon^4 d\upsilon = \frac{3kT}{m_0}. \quad (1.31)$$

Корень квадратный из среднего значения квадрата скорости $\left\langle \upsilon^2 \right\rangle$ называется ***средней квадратичной скоростью***, и она равна

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\left\langle \upsilon^2 \right\rangle} \Rightarrow \upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (1.32)$$

Для определения доли Δp частиц, скорости которых лежат в некотором интервале скоростей от υ_1 до υ_2, необходимо вычислить интеграл

$$\Delta p = \frac{\Delta N_\upsilon}{N} = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} f(\upsilon) d\upsilon = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \exp\left(-\frac{m_0 \upsilon^2}{2kT} \right) \upsilon^2 d\upsilon. \quad (1.33)$$

С точки зрения математики величина Δp – это площадь под криволинейной трапецией, ограниченной интервалом от υ_1 до υ_2 (рис. 1.6).

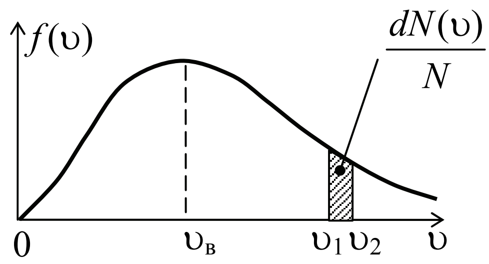

Рис. 1.6

Вероятность того, что скорость молекулы газа лежит в интервале от 0 до ∞, равна

$$\Delta p = \frac{\Delta N_\upsilon}{N} = \int_0^\infty f(\upsilon) d\upsilon = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{m_0 \upsilon^2}{2kT} \right) \upsilon^2 d\upsilon = 1. \quad (1.34)$$

Условие (1.34) является *условием нормировки* для функции распределения Максвелла.

Исходя из распределения Максвелла по скоростям, можно также найти *распределение молекул по значениям кинетической энергии поступательного движения*. Для этого перейдем от переменной υ к переменной $\varepsilon = \frac{m_0 \upsilon^2}{2}$. Произведя подстановку $\upsilon = \left(\frac{2\varepsilon}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}}$ и $d\upsilon = (2m_0\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} d\varepsilon$ в выражение (1.26), получим

$$\frac{dN_\varepsilon}{N} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) (kT)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT} \right) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon, \quad (1.35)$$

где dN_ε / N – доля молекул, кинетическая энергия поступательного движения которых имеет значения, заключенные в пределах от ε до ε + dε, или вероятность того, что кинетическая энергия поступательного движения молекулы имеет значение, заключенное в пределах от ε до ε + dε.

Выражение (1.35) называют ***распределением молекул по значениям кинетической энергии поступательного движения***.

С помощью этой функции можно вычислить среднее значение кинетической энергии поступательного движения молекулы:

$$\langle\varepsilon\rangle = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)(kT)^{-\frac{3}{2}} e\int_0^\infty xp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon = \frac{3kT}{2}. \quad (1.36)$$

Полученный результат согласуется с выражением (1.21).

1.4. Барометрическая формула. Распределение Больцмана

Атмосферное давление на какой-либо высоте обусловлено силой тяжести вышележащих слоев газа. Допустим, что на высоте h давление будет p (рис. 1.7). Тогда давление на высоте $h + dh$ будет $p + dp$, причем если dh больше нуля, то $dp < 0$, так как давление с высотой убывает. Разность давлений равна давлению силы тяжести газа dmg, заключенного в объеме цилиндра с площадью основания S и высотой dh, т. е.

$$p - (p + dp) = \frac{dm}{S} g \Rightarrow -d\rho = \frac{\rho S dh g}{S} \Rightarrow dp = -\rho g dh, \quad (1.37)$$

где ρ – плотность газа на высоте h.

В условиях, близких к «нормальным», воздух мало чем отличается по своему поведению от идеального газа, поэтому, применив уравнение Менделеева – Клапейрона для произвольной массы газа, выразим его плотность

$$pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow \frac{pM}{RT} = \frac{m}{V} \Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT}. \quad (1.38)$$

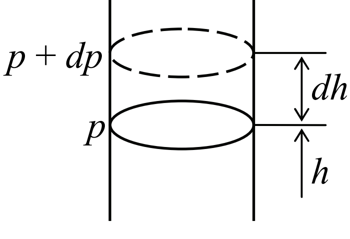

Рис. 1.7

Подставим выражение (1.38) в (1.37) и получим

$$dp = -\frac{pMg}{RT}dh \text{ или } \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dh. \quad (1.39)$$

Предположим, что температура воздуха не зависит от высоты (***изотермическая***

атмосфера) и на высоте $h = 0$ давление равно p_0. Тогда, проинтегрировав выражение (1.39), получим

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\int_{0}^{h} \frac{Mg}{RT} dh \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mgh}{RT}. \qquad (1.40)$$

Потенцируя выражение (1.40), получим

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right) - \qquad (1.41)$$

которое называют ***барометрической формулой***.

Полученная барометрическая формула дает зависимость давления от высоты над поверхностью Земли для воображаемой изотермической атмосферы.

Если учесть, что

$$\frac{M}{R} = \frac{m_0 N_A}{k N_A} = \frac{m_0}{k}, \qquad (1.42)$$

где m_0 – масса одной молекулы; k – постоянная Больцмана.

Тогда

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{m_0 gh}{kT}\right). \qquad (1.43)$$

Учитывая, что $p = nkT$, а следовательно $p_0 = n_0 kT$, от формулы (1.43) придем к формуле для концентраций частиц

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 gh}{kT}\right). \qquad (1.44)$$

Так как молекулы воздуха находятся в поле тяготения Земли, то на разной высоте молекулы обладают различным запасом потенциальной энергии $\Pi = m_0 gh$. Следовательно, распределение молекул по высоте является и распределением молекул по значениям потенциальной энергии:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\Pi}{kT}\right), \qquad (1.45)$$

где n_0 – концентрация молекул в том месте, где потенциальная энергия молекул равна нулю.

Больцман доказал, что распределение (1.45) справедливо не только в случае поля тяготения Земли, но и в любом потенциальном поле сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения. В соответствии с этим выражение (1.45) получило название ***распределение Больцмана***.

Например, для частиц находящихся в поле центробежных сил $\Pi = -\frac{m_0 \omega^2 r^2}{2}$ (где r – расстояние от оси вращения до частицы), выражение (1.45) примет вид

$$n = n_0 \exp\left(\frac{m_0 \omega^2 r^2}{2kT}\right). \tag{1.46}$$

Для идеального газа в любом внешнем потенциальном поле распределение молекул будет подчиняться распределению Больцмана. В общем случае функция распределения Больцмана будет иметь вид

$$f(x,y,z) = A \exp\left(-\frac{\Pi(x,y,z)}{kT}\right), \tag{1.47}$$

где A – нормировочная постоянная; $\Pi(x, y, z)$ – потенциальная энергия молекулы в точке с координатами x, y, z.

Общее распределение молекул идеального газа во внешнем поле по их значениям проекций скоростей υ_x, υ_y, υ_z и координат x, y, z имеет вид

$$f(\varepsilon) = B \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) - \tag{1.48}$$

функция распределения Максвелла – Больцмана,

где $\varepsilon = \frac{m_0 \upsilon_x^2}{2} + \frac{m_0 \upsilon_y^2}{2} + \frac{m_0 \upsilon_z^2}{2} + \Pi(x,y,z) = \frac{m_0 \upsilon^2}{2} + \Pi(x,y,z)$ – полная энергия молекулы; B – нормировочная постоянная.

Контрольные вопросы

1. В чем отличие термодинамического и статистического (молекулярно-кинетического) методов исследования макроскопических систем?
2. Что такое термодинамическая система, термодинамические параметры? Какие термодинамические параметры Вам известны?

3. Сформулируйте основные положения молекулярно-кинетической теории.

4. Какой газ называют идеальным?

5. Молекулярно-кинетическое истолкование давления газа.

6. В чем смысл основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов?

7. Сформулируйте опытные газовые законы.

8. Что понимают под парциальным давлением?

9. Каков физический смысл постоянной Авогадро?

10. Какие уравнения состояния идеального газа Вы знаете? Запишите и поясните их.

11. В чем физический смысл абсолютной температуры?

12. Каков физический смысл функции распределения Максвелла по скоростям?

13. Как найти наиболее вероятную скорость движения молекул идеального газа? Каков ее физический смыл?

14. Запишите и поясните барометрическую формулу.

15. В чем физический смысл распределения Больцмана?

Задачи по теме «Молекулярно-кинетическая теория газов»

1. Определите суммарную кинетическую энергию поступательного движения всех молекул идеального газа, находящегося в сосуде вместимостью $V = 3$ л под давлением $p = 540$ кПа.

2. Найти среднюю кинетическую энергию молекулы одноатомного газа при давлении 20 кПа. Концентрация молекул этого газа при указанном давлении составляет $3 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

3. Из баллона со сжатым воздухом (молярная масса 29 г/моль) емкостью 10 л вследствие неисправности вентиля утекает газ. При температуре 7°C манометр показывал 5 МПа. Через некоторое время при температуре 17°C манометр показал такое же давление. Сколько газа утекло?

4. Считая, что атмосферный воздух состоит только из кислорода и азота и что молярная масса воздуха 29,12 г/моль, определите процентное содержание молекул кислорода в смеси. Молярная масса кислорода 32 г/моль, азота – 28 г/моль.

5. Какова плотность газа в колбе электрической лампочки, если давление газа в ней $8 \cdot 10^4$ Па, а средняя квадратичная скорость молекул 500 м/с?

6. При повышении температуры газа на 100 К средняя квадратичная скорость его молекул возросла от 300 до 500 м/с. На сколько еще градусов надо поднять температуру, чтобы средняя квадратичная скорость возросла до 700 м/с?

7. Плотность газа в газонаполненной электрической лампе равна 0,9 кг/м^3. Средняя квадратичная скорость движения его молекул равна 100 м/с. На сколько изменится давление газа в лампе при горении, если средняя квадратичная скорость движения его молекул при этом 200 м/с?

8. Чему равна плотность смеси 1,5 моль водорода и 2,5 моль кислорода при температуре 27°С и давлении 240 кПа? Молярная масса водорода 2 г/моль, кислорода – 32 г/моль, универсальная газовая постоянная – 8,3 Дж/(моль·К).

9. Два баллона соединены между собой тонкой трубкой с краном. В одном баллоне находится газ массой 2 г под давлением 400 кПа, в другом – такой же газ массой 4 г под давлением 200 кПа. Какое давление (в кПа) установится в баллонах, если открыть кран? Температура газа в баллонах одинакова.

10. В баллоне находится газ массой 2 кг при температуре 27°С и давлении $2 \cdot 10^5$ Па. Когда часть газа была выпущена, а оставшаяся часть нагрета до 627°С, то давление возросло до $3 \cdot 10^5$ Па. Какова будет плотность оставшейся части газа, если объем баллона 1 м^3?

11. Найти среднюю арифметическую $\langle \upsilon \rangle$, среднюю квадратич-ную $\upsilon_{кв}$ и наиболее вероятную $\upsilon_в$ скорости молекул газа, который при давлении $p = 40$ кПа имеет плотность $\rho = 0,3$ кг/м^3.

12. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода больше их наиболее вероятной скорости на $\Delta\upsilon = 100$ м/с?

13. На какой высоте давление воздуха составляет 60% от давления на уровне моря? Считайте, что температура воздуха везде одинакова и равна $t = 10$°С.

14. Определите отношение давления воздуха на высоте $h_1 = 1$ км к давлению на дне скважины глубиной $h_2 = 1$ км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях, и его температура не зависит от высоты.

15. Определите высоту полета самолета, если давление снаружи самолета в 2,5 раза меньше, чем на уровне моря. Температуру считать не зависящей от высоты и равной $t = 0$°С.

16. Определите массу пылинок, если их концентрация вблизи потолка в 5 раз меньше, чем у пола. Высота комнаты $h = 3$ м, температура воздуха равна $t = 20$°С.

17. На уровне моря в воздухе концентрация молекул кислорода в $6{,}7 \cdot 10^6$ раз больше концентрации молекул водорода. На какой высоте над уровнем моря концентрации этих газов одинаковы? Температуру воздуха принять не зависящей от высоты и равной $t = 0°C$.

18. Определите плотность воздуха на поверхности Земли и на высоте $h = 4$ км. Температура воздуха ровна $T = 273$ К, давление на поверхности Земли нормальное.

19. С какой частотой должен вращаться барабан центрифуги диаметром $d = 20$ см, чтобы концентрация пылинок массой $m_0 = 10^{-22}$ кг на оси барабана была в 10 раз меньше, чем у стенок. Температура внутри барабана $t = 20°C$.

20. Барабан центрифуги диаметром $D = 20$ см, вращающийся с частотой $n = 10\,000$ об/мин, заполнен суспензией, твердые частицы которой имеют массу $m_0 = 10^{23}$ кг. Температура суспензии $t = 23°C$. Определите отношение концентрации частичек у стенок барабана и на его оси.

2. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

В термодинамике имеют дело с ***термодинамическими системами***. Это совокупность макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией как между собой, так и с другими телами. Состояние термодинамической системы задается ***термодинамическими параметрами*** – совокупностью физических величин, характеризующих свойства термодинамической системы. Любое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из термодинамических параметров, называется ***термодинамическим процессом***. Если состояние системы с течением времени не меняется, то говорят что она находится в ***термодинамическом равновесии***.

2.1. Число степеней свободы молекул. Закон распределения энергии молекулы по степеням свободы. Внутренняя энергия идеального газа

Число степеней свободы – это число независимых координат (переменных), которые полностью определяют положение системы в пространстве.

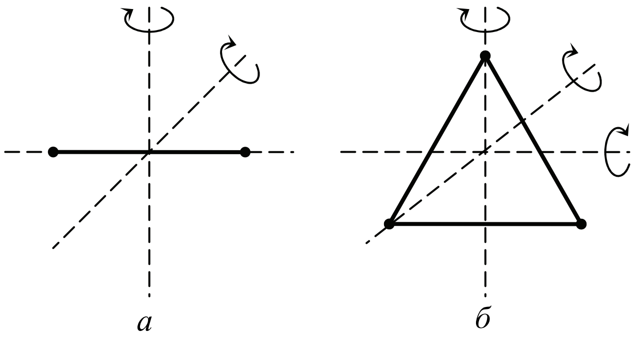

Рис. 2.1

Молекулу одноатомного газа рассматривают как материальную точку, которой приписывают три степени свободы поступательного движения. Молекула двухатомного газа рассматривается как совокупность двух материальных точек, жестко связанных недеформированной связью. Эта система, кроме трех степеней свободы поступательного движения, имеет еще две степени свободы вращательного движения. Вращение вокруг третьей оси, которая проходит через оба атома, не меняет положение молекулы в пространстве (рис. 2.1, *а*). Трехатомная молекула имеет шесть степеней свободы: три поступательные и три вращательные (рис. 2.1, *б*). Столько же степеней свободы будут иметь и многоатомные молекулы (четырех, пяти и т. д.).

Так как на поступательное движение приходится три степени свободы, то согласно выражению (1.21) на одну поступательную степень свободы в среднем приходится энергия

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{1}{2} kT . \tag{2.1}$$

Возникает вопрос, какая энергия в среднем приходится на вращательную степень свободы. В классической статистической физике выводится **закон (теорема) Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы**: для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная $\frac{1}{2} kT$.

Таким образом, средняя кинетическая энергия одной молекулы, с жестко связанными атомами равна

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT , \tag{2.2}$$

где i – число степеней свободы.

Естественно, что жесткой связи между атомами не существует, поэтому для реальных молекул необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения. Колебательная степень обладает вдвое большей энергией потому, что на нее приходится не только кинетическая, но и потенциальная энергия. Причем средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы. Поэтому на каждую колебательную степень свободы в среднем приходится энергия, равная kT.

В этом случае полное число степеней свободы для молекулы газа равно

$$i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{к}}, \tag{2.3}$$

где $i_{\text{п}}$ – число поступательных степеней свободы; $i_{\text{вр}}$ – число вращательных степеней свободы; $2i_{\text{к}}$ – число колебательных степеней свободы.

В середине XIX в. было доказано, что наряду с механической энергией макроскопические тела обладают еще и энергией, заключенной внутри них самих. С точки зрения молекулярно-кинетической теории ***внутренняя энергия макроскопического тела*** равна сумме кинетических энергий теплового движения всех молекул и потенциальных энергий взаимодействия всех молекул друг с другом. ***Внутренняя энергия идеального газа*** равна сумме только кинетических энергий теплового движения всех молекул газа, так как потенциальная энергия взаимодействия равна нулю (отсутствуют силы взаимодействия).

Внутренняя энергия идеального газа равна

$$U = N\langle\varepsilon\rangle = N\frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}\frac{N}{N_{\text{А}}}kN_{\text{А}}T = \frac{i}{2}\nu RT = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT, \tag{2.4}$$

где N – число молекул идеального газа; $\langle\varepsilon\rangle$ – средняя кинетическая энергия одной молекулы газа; R – универсальная газовая постоянная.

Изменение внутренней энергии определяется соотношением

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}\nu R\Delta T. \tag{2.5}$$

Внутренняя энергия является функцией состояния системы. Это означает, что всякий раз, когда система оказывается в данном состоянии, ее внутренняя энергия принимает присущее этому состоянию значение, независимо от предыстории системы. Изменение внутренней энергии при переходе системы из одного состояния в другое будет всегда равно разности значений внутренней энергии в этих состояниях, независимо от пути, по которому совершался переход, т. е. независимо от процессов, приведших к переходу системы из одного состояния в другое.

2.2. Теплота и работа. Первое начало термодинамики

Процесс передачи внутренней энергии от одного тела к другому без совершения работы (без изменения объема) называется ***теплообменом***. Количество энергии, передаваемое системе внешними телами при теплообмене, называют ***количеством теплоты Q***. Сообщение системе теплоты Q не связано с макроскопическими перемещениями тел системы. Изменение внутренней энергии при теплообмене состоит в том, что отдельные молекулы более нагретого тела в процессе неупругих столкновений передают часть своей кинетической энергии молекулам менее нагретого тела.

Существует три вида теплообмена: *теплопроводность*, *конвекция*, *излучение.*

Теплопроводностью называется процесс теплообмена между телами при их непосредственном контакте, обусловленный хаотическим движением частиц тела.

Конвекцией называется процесс переноса энергии, который осуществляется перемещением слоев жидкости и газа от места с более высокой температурой к месту с более низкой температурой. Конвекция наблюдается только в жидкостях и газах.

Излучением называется перенос энергии от одного тела к другому (а также между частями одного и того же тела) путем обмена электромагнитным излучением, т. е. теплообмен, обусловленный процессами испускания, распространения, рассеяния и поглощения электромагнитных волн. Передача энергии излучением может осуществляться при отсутствии материальной среды, разделяющей поверхности теплообмена, т. е. в вакууме.

Внутреннюю энергию можно также изменить путем совершения работы. Передача внешними телами энергии в форме работы сопровождается макроскопическими перемещениями внешних тел. Например:

1) если внешняя сила вызывает деформацию тела, то при этом изменяются расстояния между частицами, из которых оно состоит, а следовательно, изменяется потенциальная энергия взаимодействия частиц. При неупругих деформациях, кроме того, изменяется температура тела, т. е. изменяется кинетическая энергия теплового движения частиц. При деформации тела совершается работа, которая и является мерой изменения внутренней энергии тела;

2) внутренняя энергия тела изменяется также при его неупругом соударении с другим телом. При неупругом соударении тел их кинетическая энергия уменьшается, она превращается во внутреннюю.

Мерой изменения кинетической энергии тела является, согласно теореме о кинетической энергии, работа действующих сил;

3) изменение внутренней энергии тела происходит под действием силы трения, поскольку, как известно из опыта, трение всегда сопровождается изменением температуры трущихся тел. Работа силы трения может служить мерой изменения внутренней энергии.

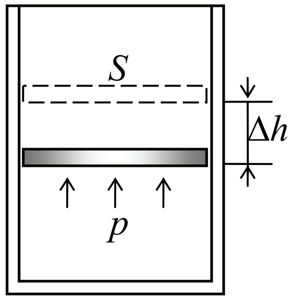

Рис. 2.2

Определим в общем виде внешнюю работу, совершаемую газом при малом изменении его объема. Пусть газ заключен в цилиндрический сосуд, закрытый плотно пригнанным легко скользящим поршнем (рис. 2.2). Если по каким-либо причинам газ станет расширяться, он будет перемещать поршень и совершать над ним работу. Элементарная работа, совершаемая газом при перемещении поршня на отрезок dh, равна

$$dA = Fdh, \tag{2.6}$$

где $F = pS$ – сила давления, с которым газ действует на поршень.

Заменив эту силу произведением давления газа p на площадь поршня S, получим

$$dA = pSdh = pdV. \tag{2.7}$$

При конечном изменении объема работа должна вычисляться как сумма элементарных работ, т. е.

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} dA = \int_{V_1}^{V_2} pdV. \tag{2.8}$$

Выражение (2.8) справедливо при любых изменениях объема твердых, жидких и газообразных тел.

В отличие от внутренней энергии системы, которая является функцией состояния системы, понятия теплоты и работы имеют смысл только в связи с процессом изменения состояния системы. Теплота и работа – энергетические характеристики термодинамического процесса, обусловливающего переход системы из одного состояния в другое.

Рассмотрим термодинамическую систему, для которой механическая энергия не изменяется, а изменяется лишь ее внутренняя энергия. Допустим, что некоторая система (газ, заключенный в цилиндр под поршнем), обладая внутренней энергией U_1, получила некоторое количество теплоты Q_1, и перейдя в новое состояние, которое характеризуется внутренней энергией U_2, совершила работу A над внешней средой. Количество теплоты считается положительным, когда оно подводится к системе, а работа – когда система совершает ее против внешних сил.

В соответствии с законом сохранения энергии при любом способе перехода системы из одного состояния в другое изменение ΔU внутренней энергии будет одинаковым. Это изменение будет равно разности между количеством теплоты, полученной системой, и работой, совершенной системой против внешних сил, т. е. $\Delta U = Q - A$ или

$$Q = \Delta U + A. \tag{2.9}$$

Первое начало термодинамики*:* теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение ею работы против внешних сил. В дифференциальной форме первое начало термодинамики имеет вид

$$\delta Q = dU + \delta A. \tag{2.10}$$

Если система периодически возвращается в первоначальное состояние, то изменение ее внутренней энергии равно нулю ($\Delta U = 0$). Тогда, согласно первому началу термодинамики, $A = Q$, т. е. ***невозможен вечный двигатель первого рода*** – периодически действующий двигатель, который совершал бы большую работу, чем сообщенная ему извне энергия.

2.3. Теплоемкость тела и вещества

Теплоемкостью какого-либо тела называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один Кельвин. Если при сообщении телу количества теплоты dQ его температура повышается на dT, то теплоемкость по определению равна

$$C = \frac{dQ}{dT}. \tag{2.11}$$

Единица измерения теплоемкости [Дж/К].

Из определения следует, что теплоемкость тела будет зависеть от химического состава, массы, температуры, а также от вида процесса, определяющего изменение состояния тела при сообщении ему теплоты dQ.

Теплоемкость моля вещества называется ***молярной теплоемкостью*** – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания одного моля вещества на один Кельвин:

$$C^M = \frac{dQ}{\nu dT}. \quad (2.12)$$

Единица измерения молярной теплоемкости [Дж/(моль · К)].

Теплоемкость единицы массы вещества **называется *удельной теплоемкостью*** – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания одного килограмма вещества на один Кельвин:

$$c^{\text{уд}} = \frac{dQ}{mdT}. \quad (2.13)$$

Единица измерения удельной теплоемкости [Дж/(кг · К)].

Если разделим (2.12) на (2.13), то получим связь между молярной и удельной теплоемкостями одного и того же вещества:

$$\frac{C^M}{c^{\text{уд}}} = \frac{m}{\nu} \Rightarrow C^M = c^{\text{уд}} M, \quad (2.14)$$

где $M = \dfrac{m}{\nu}$ – молярная масса вещества.

Величина теплоемкости зависит от условий, при которых происходит нагревание тела. Если нагревание происходит при постоянном объеме, то теплоемкость называется ***теплоемкостью при постоянном объеме*** и обозначается

$$C_V^M = \left(\frac{dQ}{\nu dT}\right)_{V=\text{const}} \text{ и } c_V^{\text{уд}} = \left(\frac{dQ}{mdT}\right)_{V=\text{const}}. \quad (2.15)$$

Если же нагревание происходит при постоянном давлении – ***теплоемкостью при постоянном давлении*** и обозначается

$$C_p^M = \left(\frac{dQ}{\nu dT}\right)_{p=\text{const}} \text{ и } c_p^{\text{уд}} = \left(\frac{dQ}{mdT}\right)_{p=\text{const}}. \quad (2.16)$$

2.4. Первое начало термодинамики при изохорическом, изобарическом и изотермическом процессах

Изохорический процесс. Если газ нагревается или охлаждается при постоянном объеме (рис. 2.3), то $dV = 0$ и работа внешних сил равна нулю:

$$\delta A = pdV \Rightarrow A_{12} = \int_1^2 \delta A = 0. \quad (2.17)$$

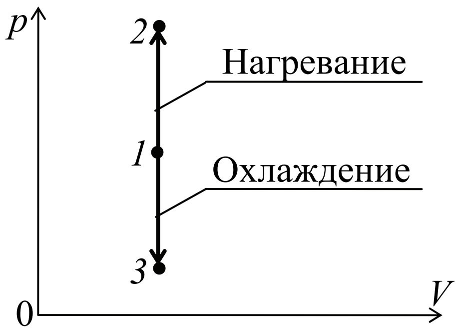

Рис. 2.3

Сообщаемая газу извне теплота пойдет только на увеличение его внутренней энергии, т. е.

$$\delta Q = dU + \delta A \Rightarrow \delta Q = dU. \quad (2.18)$$

С учетом выражения (2.15)

$$\delta Q = dU \Rightarrow C_V^M \nu dT = dU$$

или $dU = \nu C_V^M dT$. (2.19)

Изменение внутренней энергии газа определяется соотношением

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} C_V^M \nu dT . \quad (2.20)$$

Если C_V^M = const (что справедливо для идеального газа), то соотношение (2.20) можно записать в виде

$$\Delta U = \nu C_V^M \int_{T_1}^{T_2} dT = C_V^M \nu (T_2 - T_1). \quad (2.21)$$

Получим выражения для молярной и удельной теплоемкостей идеального газа при постоянном объеме. Для идеального газа изменение внутренней энергии определяется соотношением

$$dU = \frac{i}{2} \nu R dT . \quad (2.22)$$

Подставим выражение (2.22) в (2.19) и выразим C_V^M:

$$\frac{i}{2} \nu R dT = \nu C_V^M dT \Rightarrow C_V^M = \frac{i}{2} \frac{\nu R dT}{\nu dT} = \frac{i}{2} R . \quad (2.23)$$

Удельная теплоемкость соответственно равна

$$c_V^{\text{уд}} = \frac{C_V^M}{M} = \frac{i}{2} \frac{R}{M} . \quad (2.24)$$

Изобарический процесс. Работа, совершаемая газом при изобарическом процессе (рис. 2.4), равна

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1) = pV_2 - pV_1 =$$

$$= \nu R T_2 - \nu R T_1 = \nu R (T_2 - T_1) . \quad (2.25)$$

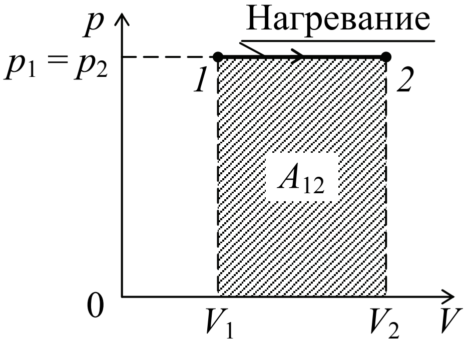

Рис. 2.4

Сообщаемая газу извне теплота, согласно выражению (2.22), равна

$$\delta Q = C_p^M \nu dT. \qquad (2.26)$$

Первое начало термодинамики запишем в следующем в виде:

$$\delta Q = dU + \delta A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_p^M \nu dT = dU + pdV. \qquad (2.27)$$

Продифференцировав уравнение Менделеева – Клапейрона при условии, что p = const, получим

$$pdV = \nu RdT. \qquad (2.28)$$

Подставим выражение (2.28) в (2.27):

$$C_p^M \nu dT = \frac{i}{2}\nu RdT + \nu RdT. \qquad (2.29)$$

Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении равна

$$C_p^M = \frac{i\nu RdT + 2\nu RdT}{2\nu dT} = \frac{i+2}{2}R. \qquad (2.30)$$

А удельная теплоемкость равна

$$c_p^{\text{уд}} = \frac{C_p^M}{M} = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}. \qquad (2.31)$$

Из уравнений (2.23) и (2.31) можно получить ***формулу Майера***:

$$C_p^M = \frac{i+2}{2}R = \frac{i}{2}R + R = C_V^M + R. \qquad (2.32)$$

Изотермический процесс. Работа, совершаемая газом при изотермическом процессе (рис. 2.5), равна $A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV$. Выразим давление из уравнения Менделеева – Клапейрона ($p = \frac{\nu RT}{V}$) и подставим

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \nu RT \frac{dV}{V} = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (2.33)$$

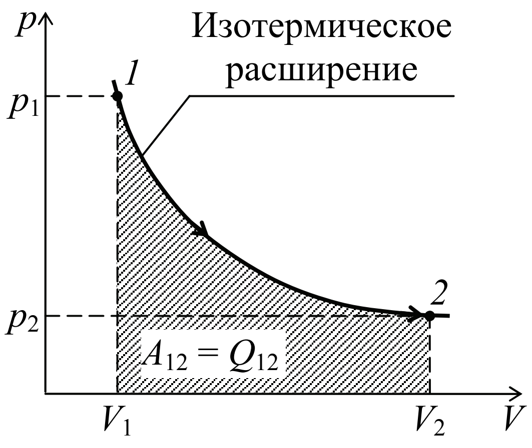

Рис. 2.5

Эту формулу можно преобразовать и к иному виду, если учесть, что при изотермическом процессе выполняется закон Бойля – Мариотта: $p_1 V_1 = p_2 V_2$, откуда $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{p_1}{p_2}$. Тогда

$$A_{12} = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \qquad (2.34)$$

Так как для идеального газа при $T = \mathrm{const}$ ($dU = 0$), то первое начало термодинамики можно записать в следующем виде:

$$\delta Q = \delta A \Rightarrow Q_{12} = A_{12} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \qquad (2.35)$$

2.5. Адиабатический процесс. Уравнение Пуассона

Адиабатическим называется процесс, протекающий без теплообмена с окружающей средой. Определим уравнение, связывающее параметры идеального газа при адиабатическом процессе. Так как по условию $\delta Q = 0$, то первое начало термодинамики можно записать в следующем виде:

$$0 = \delta A + dU \Rightarrow \delta A = -dU. \qquad (2.36)$$

Работа газа при адиабатическом процессе происходит за счет убыли внутренней энергии.

Учитывая, что $dU = \dfrac{i}{2} URdT = \nu C_V^M dT$, а $\delta A = pdV$, получим

$$pdV = -\nu C_V^M dT. \qquad (2.37)$$

Выразим давление из уравнения Менделеева – Клапейрона $p = \dfrac{\nu RT}{V}$ и подставим в (2.36):

$$-\nu C_V^M dT = \nu RT \frac{dV}{V} \Rightarrow -C_V^M dT = RT \frac{dV}{V}. \qquad (2.38)$$

Приведем полученное выражение (2.38) к виду

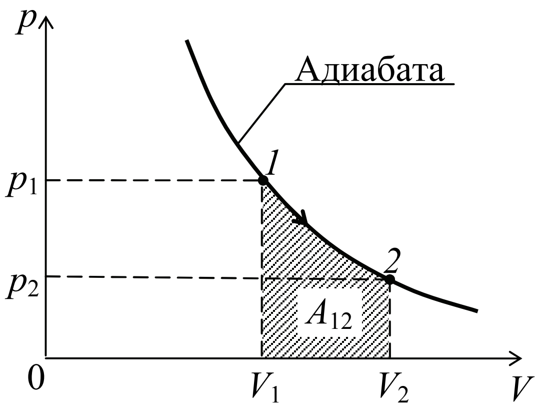

Рис. 2.6

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V^M}\frac{dV}{V}. \qquad (2.39)$$

Проинтегрируем выражение (2.39) в пределах от T_1 до T_2, и от V_1 до V_2:

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V^M}\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{T_2}{T_1} = -\frac{R}{C_V^M}\ln\frac{V_2}{V_1}; \qquad (2.40)$$

$$\frac{R}{C_V^M} = \frac{C_p^M - C_V^M}{C_V^M} = \frac{C_p^M}{C_V^M} - 1 = \gamma - 1 \Rightarrow \gamma = \frac{C_p^M}{C_V^M} = \frac{\frac{i+2}{2}R}{\frac{i}{2}R} = \frac{i+2}{i}, \qquad (2.41)$$

где γ – адиабатическая постоянная.

Выражение (2.40) можно переписать в виде

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = -(\gamma - 1)\ln\frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \ln\frac{T_2}{T_1} = \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_2V_2^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1} \qquad (2.42)$$

или

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}. \qquad (2.43)$$

Перейдем от этого уравнения к уравнению в переменных p, V. Для этого выразим из уравнения Менделеева – Клапейрона температуру $T = \dfrac{pV}{\nu R}$ и подставим в уравнение (2.43):

$$\frac{pV}{\nu R}V^{\gamma-1} = \text{const} \Rightarrow \frac{pV^{\gamma}}{\nu R} = \text{const}. \qquad (2.44)$$

Учитывая, что ν и R – постоянные величины, получим

$$pV^{\gamma} = \text{const}. \qquad (2.45)$$

Выражение (2.45) получило название ***уравнение Пуассона***.

Теперь перейдем к уравнению в переменных p, T. Из уравнения Менделеева – Клапейрона выразим объем $V = \frac{\nu RT}{p}$. Тогда, подставив в уравнение (2.45), получим

$$p\left(\frac{\nu RT}{p}\right)^{\gamma} = \text{const}. \quad (2.46)$$

Так как ν и R – постоянные, получим

$$p\left(\frac{T}{p}\right)^{\gamma} = \text{const} \text{ или } p^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{const}. \quad (2.47)$$

Определим работу, совершаемую газом при адиабатическом процессе (рис. 2.6). Так как при адиабатическом процессе $\delta A = -dU$, и учитывая, что $dU = \nu C_V^M dT$, получим

$$\delta A = -\nu C_V^M dT. \quad (2.48)$$

Проинтегрировав полученное выражение от T_1 до T_2, получим

$$A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} -\nu C_V^M dT = -\nu C_V^M \int_{T_1}^{T_2} dT = \nu C_V^M (T_1 - T_2) =$$

$$= \frac{m}{M} C_V^M (T_1 - T_2). \quad (2.49)$$

Формулу (12.49) можно преобразовать следующим образом: $C_V^M = \frac{R}{\gamma - 1}$, а $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$.

Отсюда

$$T_2 = \frac{T_1V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}. \quad (2.50)$$

Подставим (2.50) в выражение (2.49) и получим

$$A = \nu\frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] \text{ или } A = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right], \quad (2.51)$$

учитывая, что $\nu RT_1 = p_1 V_1$.

2.6. Обратимые и необратимые термодинамические процессы. Циклы

Термодинамический процесс называется ***обратимым***, если он может быть проведен как в прямом, так и в обратном направлении через одни и те же состояния. При этом в окружающих термодинамическую систему телах никаких изменений не должно произойти. В противном случае процесс называется ***необратимым***.

В качестве примера обратимого процесса в механике можно привести движения математического маятника. При отсутствии сил трения в подвесе и сопротивления среды колебательное движение маятника обратимо во времени. Механические процессы при наличии сопротивления и трения необратимы, поскольку связаны с необратимыми изменениями состояния окружающей среды.

Примерами необратимых процессов в молекулярной физике могут служить расширение газа в пустоту и переход теплоты от более нагретого тела к менее нагретому. Если с помощью каких-то механизмов осуществить эти процессы в обратном направлении и вернуть систему в исходное состояние, то в окружающих телах обязательно возникнут изменения, связанные с превращением некоторого количества механической энергии в тепловую.

Пусть, например, имеется идеальный газ в объеме, отделенном перегородкой от объема, в котором создан абсолютный вакуум (рис. 2.7). Если удалить перегородку, то газ, расширяясь без совершения работы, займет весь объем сосуда (рис. 2.7). Этот процесс происходит необратимо. Можно ждать сколь угодно долго, однако газ сам по себе не соберется вновь в объеме V_1. Вернуть его опять в состояние с объемом V_1 можно, но для этого нужно правую стенку передвинуть как поршень. При этом силы давления поршня совершат над газом некоторую работу A. В результате газ нагреется. Следовательно, при проведении обратного процесса от сжимаемого газа нужно будет отвести количество теплоты $Q = A$, которое увеличит энергию теплового движения молекул окружающих тел. Таким образом, при проведении обратного процесса во внешних телах произошли бы изменения (они нагрелись бы). Следовательно, рассмотренный здесь процесс расширения газа в пустоту является необратимым. Аналогично рассуждая, можно убедиться, что

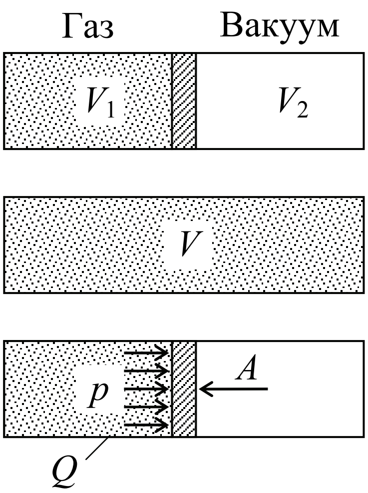

Рис. 2.7

процесс перехода теплоты от более нагретого тела к более холодному также необратим. Все тепловые процессы, протекающие с конечной скоростью, необратимы. Однако бесконечно медленно проводимый процесс, состоящий из бесконечно большой последовательности промежуточных равновесных состояний (квазистатический процесс), является обратимым. Примером такого обратимого процесса может служить адиабатическое (или изотермическое) изменение объема идеального газа при его квазистатическом расширении или сжатии.

Циклом или ***круговым процессом*** называется процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное.

На термодинамической диаграмме pV равновесный цикл изображается замкнутой кривой (рис. 2.8).

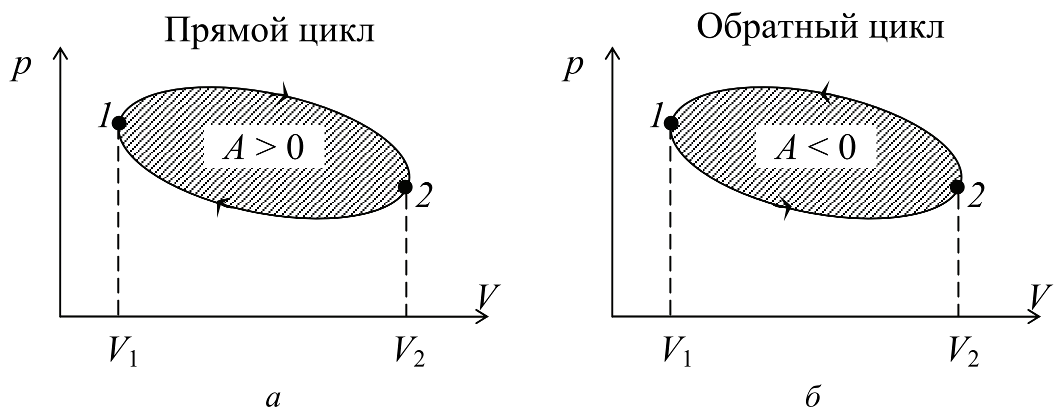

Рис. 2.8

Цикл, совершаемый системой, можно разбить с помощью точек *1* и *2* на процессы расширения *1–2* и сжатия *2–1*. Работа расширения является положительной, а работа сжатия – отрицательной. Следовательно, суммарная работа, совершаемая за цикл, определяется площадью, охватываемой кривой цикла в переменных p, V. Если за цикл совершается положительная работа $A = \oint pdV > 0$, цикл осуществляется по ходу часовой стрелки (рис. 2.8, *а*) и называется ***прямым***. Если за цикл выполняется отрицательная работа $A = \oint pdV < 0$, цикл протекает против хода часовой стрелки (рис. 2.8, *б*) и называется ***обратным***.

Прямой цикл реализуется в ***тепловом двигателе*** – периодически действующем устройстве, которое совершает работу за счет полученной от нагревателя теплоты Q. Обратный цикл используется в ***холодильных установках*** – периодически действующих устройствах, в которых за счет работы A внешних сил теплота переносится от более холодного тела к телу с более высокой температурой.

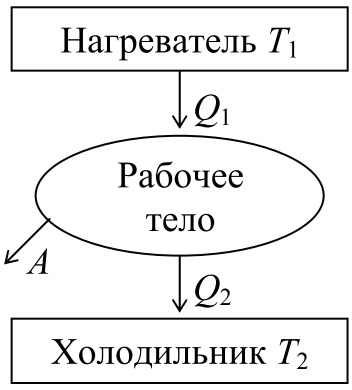

Рис. 2.9

Рассмотрим принцип действия теплового двигателя (рис. 2.9). В тепловом двигателе от нагревателя с температурой T_1 за цикл отнимается количество теплоты Q_1, а холодильнику с более низкой температурой ($T_2 < T_1$) за цикл передается количество теплоты Q_2. При этом совершается работа. Поскольку термодинамическая система (тепловая машина) за цикл возвращается в исходное состояние (внутренняя энергия оказывается прежней), то на основании первого начала термодинамики получим значение работы теплового двигателя за цикл:

$$A = Q_1 - |Q_2|. \qquad (2.52)$$

Термический коэффициент полезного действия (КПД) определяется отношением

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}. \qquad (2.53)$$

Рассмотрим принцип действия холодильной установки (рис. 2.10). В холодильной установке за счет совершения внешними силами работы A от более холодного тела с температурой T_2 за цикл отнимается количество теплоты Q_2 и отдается во внешнюю среду с температурой ($T_1 > T_2$) количество теплоты, равное Q_1. Для оценки эффективности работы холодильной установки используют отношение количества теплоты, отнятого за цикл от холодильной камеры, к работе A внешних сил. Эта величина называется ***показателем цикла*** k или ***холодильным коэффициентом***:

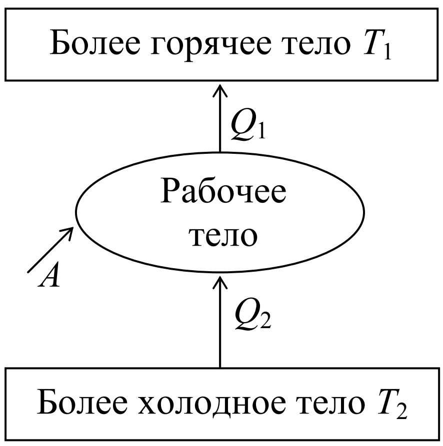

Рис. 2.10

$$k = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2}. \qquad (2.54)$$

2.7. Идеальная тепловая машина Карно и ее КПД

При изучении работы различных тепловых машин большую роль сыграл цикл, предложенный Карно и детально рассмотренный им в 1824 г. в связи с определением КПД тепловых машин. ***Циклом Карно*** называют обратимый круговой процесс, состоящий из двух изотермических и двух адиабатических равновесных процессов.

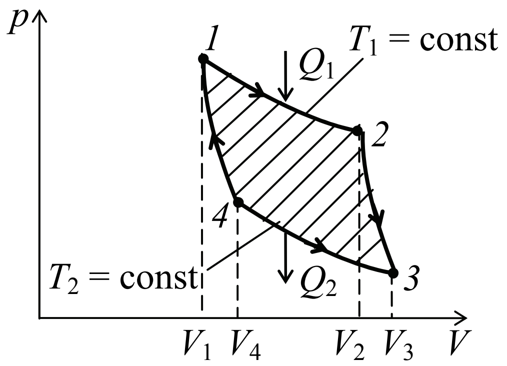

Рис. 2.11

На рис. 2.11 изображен прямой цикл Карно, состоящий из четырех последовательных процессов: *1–2* – изотермическое расширение при температуре T_1; *2–3* – адиабатическое расширение (Q_{23} = 0); *3–4* – изотермическое сжатие при температуре T_2; *4–1* – адиабатическое сжатие (Q_{41} = 0).

Рассчитаем работу A, совершаемую идеальным газом в прямом равновесном цикле Карно. При изотермическом расширении на участке *1–2* внутренняя энергия $U(T)$ = const, поэтому количество теплоты Q_1, полученное газом от нагревателя, равно работе расширения, совершаемой газом при переходе из состояния *1* в состояние *2*:

$$Q_1 = Q_{12} = A_{12} = \nu R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}. \quad (2.55)$$

При адиабатическом расширении *2–3* теплообмен с окружающей средой отсутствует и работа расширения A_{23} совершается за счет изменения внутренней энергии газа:

$$A_{23} = -\Delta U_{23} = \nu C_V^M\ (T_1 - T_2). \quad (2.56)$$

При изотермическом сжатии на участке *3–4* теплота, отданная газом холодильнику, отрицательна и равна

$$Q_2 = Q_{34} = A_{34} = \nu R T_2 \ln\frac{V_4}{V_3}. \quad (2.57)$$

При адиабатическом сжатии на участке *4–1* работа A_{41} равна

$$A_{41} = -\Delta U_{41} = \nu C_V^M\ (T_2 - T_1) = -\nu C_V^M\ (T_1 - T_2) = -A_{23}. \quad (2.58)$$

Суммарная работа равна

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2|. \qquad (2.59)$$

Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{T_1 \ln(V_2 / V_1) - T_2 \ln(V_3 / V_4)}{T_1 \ln(V_2 / V_1)}. \qquad (2.60)$$

Применим уравнение адиабаты $TV^{\gamma-1}$ = const на участках *2–3* и *4–1* цикла Карно:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \text{ и } T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}. \qquad (2.61)$$

Разделим одно выражение на второе и получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \qquad (2.62)$$

С учетом соотношения (2.62) выражение (2.60) для КПД цикла можно упростить:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (2.63)$$

Таким образом, для цикла Карно КПД определяется только температурами нагревателя и холодильника.

Сравнение КПД различных обратимых и необратимых циклов с КПД обратимого цикла Карно (идеальной тепловой машины) позволило сделать следующий вывод: *КПД любого реального обратимого или необратимого прямого кругового процесса* (*тепловой машины*) *не может превышать КПД идеальной тепловой машины с теми же температурами* T_1 *нагревателя и* T_2 *холодильника*. Принимая во внимание формулы (2.53) и (2.63), можно записать

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} \le \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (2.64)$$

Более общий анализ показывает, что формула (2.63) справедлива, если цикл Карно совершает любое рабочее тело, а не только идеальный газ. В этом случае формула (2.63) выражает *теорему Карно*: КПД цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и от технических способов осуществления цикла. Единственные параметры, определяющие КПД этого цикла, – это температуры нагревателя и холодильника.

Другая формулировка *теоремы Карно:* коэффициент полезного действия всех обратимых машин, работающих в идентичных условиях (т. е. при одной и той же температуре нагревателя и холодильника), одинаков и определяется только температурами нагревателя и холодильника.

2.8. Второе начало термодинамики

Анализ различных термодинамических процессов свидетельствует о том, что первое начало термодинамики не указывает направление протекания термодинамического процесса. Действительно, самопроизвольный процесс передачи энергии от холодного тела горячему не противоречит первому закону термодинамики, если только уменьшение внутренней энергии первого тела равно энергии, полученной вторым телом. Однако в природе такой процесс не наблюдается. Основываясь на первом законе термодинамики, можно было бы попытаться построить периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет непрерывного охлаждения одного и того же источника теплоты, например за счет внутренней энергии океанов. Однако такой процесс, хотя он и удовлетворяет первому началу термодинамики, реализовать невозможно, что равноценно утверждению о невозможности построения так называемого *вечного двигателя второго рода.* Неоднократные попытки создания такого двигателя привели к открытию ***второго начала термодинамики***. Его содержание, являясь обобщением огромного экспериментального материала, указывает на направленность самопроизвольного термодинамического процесса в замкнутой системе. Существует ряд эквивалентных формулировок второго начала термодинамики:

1. Невозможен процесс, единственным результатом которого является передача энергии в форме теплоты от менее нагретого тела более нагретому (*формулировка Клаузиуса*).

2. Невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение всей теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную работу (*формулировка Кельвина*).

Второе начало термодинамики указывает на неравноценность двух форм передачи энергии – работы и теплоты. Этот закон учитывает тот факт, что процесс перехода энергии упорядоченного движения тела как целого (механической энергии) в энергию неупорядоченного движения его частиц (тепловую энергию) необратим. Например, механическая энергия при трении переходит в теплоту без каких-либо дополнительных (компенсирующих) процессов. Переход же энергии неупорядоченного движения частиц (внутренней энергии) в работу возможен лишь при условии, что он сопровождается каким-либо дополнительным процессом.

2.9. Понятие об энтропии. Статистический смысл второго начала термодинамики

Квазистатическим или ***равновесным процессом*** в термодинамике называют бесконечно медленный переход термодинамической системы из одного равновесного состояния в другое, при котором в любой момент времени физическое состояние системы бесконечно мало отличается от равновесного. Равновесие в системе при квазистатическом процессе устанавливается во много раз быстрее, чем происходит изменение физических параметров системы. Всякий квазистатический процесс является *обратимым процессом*. Термин «квазистатический процесс» был предложен в 1909 г. немецким математиком Каратеодори К.

Рассмотрим квазистатический процесс, протекающий в идеальном газе. Запишем первое начало термодинамики в дифференциальной форме для этого процесса:

$$\delta Q = dU + \delta A \Rightarrow \delta Q = \nu C_V dT + pdV\ . \qquad (2.65)$$

Правая часть этого равенства не является полным дифференциалом, следовательно, количество теплоты Q не является функцией состояния. Разделив (2.65) на температуру T, получим

$$\frac{\delta Q}{T} = \nu C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV\ . \qquad (2.66)$$

С помощью уравнения Клапейрона – Менделеева уравнение (2.66) можно преобразовать к виду

$$\frac{\delta Q}{T} = \nu C_V \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V} = d(\nu C_V \ln T + \nu R \ln V)\,. \qquad (2.67)$$

Правая часть равенства (2.67) является полным дифференциалом. Следовательно, левая часть, которая называется ***приведенным количеством теплоты***, также является полным дифференциалом. Функция состояния, полный дифференциал которой равен $\delta Q / T$, называется ***энтропией*** и обозначается S:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}\,. \qquad (2.68)$$

В термодинамике понятие энтропии было введено Р. Клаузиусом в 1865 г. Энтропия обладает следующими свойствами:

– энтропия – величина аддитивная: энтропия системы равна сумме энтропии всех тел, входящих в эту систему;

– энтропия изолированной системы не уменьшается: она либо возрастает, либо остается постоянной. Если в изолированной системе происходят обратимые процессы, то ее энтропия остается *неизменной*. Если в изолированной системе происходят необратимые процессы, то ее энтропия *возрастает* (***закон возрастания энтропии***).

Закон возрастания энтропии замкнутых (изолированных) систем представляет собой еще одну формулировку второго начала термодинамики. Величина возрастания энтропии в замкнутой системе служит мерой направленности процессов, протекающих в этой системе (возможны лишь такие процессы, которые ведут к увеличению энтропии изолированной системы). Математически это можно записать с помощью неравенства

$$\Delta S \geq 0\,. \qquad (2.69)$$

Чтобы определить изменение энтропии при квазистатическом переходе термодинамической системы из одного равновесного состояния в другое, необходимо проинтегрировать выражение (2.68):

$$\Delta S = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}\,. \qquad (2.70)$$

Большинство явлений в природе сопровождается необратимыми процессами, поэтому все самопроизвольные процессы имеют такую направленность, при которой энтропия замкнутой системы возрастает и стремится к своему максимально возможному значению, соответствующему равновесному состоянию. Необратимый характер процессов связан с переходом от состояний менее вероятных к состояниям более вероятным. Поэтому энтропия, определяющая направление протекания необратимых процессов, должна быть связана с вероятностью. Л. Больцман показал, что энтропия S пропорциональна логарифму вероятности состояния:

$$S = k \ln W, \qquad (2.71)$$

где k – постоянная Больцмана; W – вероятность данного состояния, равная числу способов, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы.

Необходимо подчеркнуть, что второе начало термодинамики (принцип возрастания энтропии) не столь универсально, как первое (закон сохранения энергии). В самом деле, случаи уменьшения энтропии (и вероятности состояния) не исключены: они принципиально возможны, хотя и маловероятны.

Принцип возрастания энтропии применим только к конечным изолированным системам, т. е. к системам, состоящим из достаточно большого, конечного числа молекул. К бесконечным системам и системам, состоящим из малого числа молекул, этот принцип неприменим. Это нетрудно понять. В системе из малого числа молекул вероятность равновесного состояния незначительно превосходит вероятность неравновесного состояния. Переход такой системы в неравновесное состояние и уменьшение ее энтропии весьма вероятны и часто имеют место. Что касается бесконечной системы, то в этом случае число состояний становится бесконечно большим. Кроме того, становится бесконечно большим число способов, которыми может осуществиться любое из этих состояний, как равновесие, так и неравновесие. Очевидно, что в этих условиях бессмысленно говорить о наиболее вероятном (равновесном) состоянии системы, ибо все ее состояния равновероятны. Поэтому вероятность состояния и энтропия бесконечной системы остаются неизменными. Следовательно, принцип возрастания энтропия к бесконечной системе не применим.

В заключение коснемся тепловой ***теоремы Нернста*** (***третье начало термодинамики***), согласно которой при приближении к абсолютному нулю энтропия системы также стремится к нулю, независимо от того, какие значения принимают все остальные параметры состояния системы. При абсолютном нуле состоянию термодинамической системы соответствует наибольший порядок. Такое состояние, являясь при абсолютном нуле единственно возможным (достоверным), обладает вероятностью, равной единице. Следовательно, $S = 0$. Немецкий физик Нернст пришел к этому соотношению иным путем – изучая изменения теплоемкости тел при низких температурах.

Поскольку энтропия равна

$$S = \int_0^T \frac{\delta Q}{T} = \int_0^T C\frac{dT}{T}, \tag{2.72}$$

а температура T стремится к нулю, теплоемкость вещества также должна стремиться к нулю, причем быстрее, чем T. Отсюда следует *недостижимость абсолютного нуля температуры при конечной последовательности термодинамических процессов* (например, конечного числа операций – циклов работы холодильной машины).

Контрольные вопросы

1. Что понимают под числом степеней свободы молекулы газа?
2. Почему колебательная степень свободы обладает вдвое большей энергией, чем поступательная или вращательная?
3. Сформулируйте закона Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул. В чем его суть?
4. Что понимают под внутренней энергией макроскопического тела?
5. Что такое внутренняя энергия идеального газа? Какими термодинамическими параметрами она определяется?
6. В результате каких процессов может изменяться внутренняя энергия термодинамической системы?
7. Что такое теплообмен? Какие виды теплообмена Вы знаете?
8. Выведите формулу для расчета работы идеального газа. Определите работу газа при изотермическом процессе.
9. Что такое теплоемкость тела, удельная и молярная теплоемкости вещества?
10. Сформулируйте первое начало термодинамики.
11. Используя первое начало термодинамики, определите молярную теплоемкость идеального газа при изобарическом, изохорическом процессах. Получите уравнение Майера.
12. Какой процесс называется адиабатическим? Каким уравнением он описывается?
13. Как изменится температура газа при его адиабатическом сжатии (расширении)?
14. Чем отличаются обратимые и необратимые процессы? Приведите примеры.
15. Почему все реальные процессы необратимы?
16. Что понимают под круговым процессом (циклом)? Какой цикл называют прямым, обратным?
17. Объясните принцип действия теплового двигателя. Чему равен термический КПД такого двигателя?
18. Объясните принцип действия холодильной установки. Чему равен холодильный коэффициент такой установки?
19. Что представляет собой цикл Карно? Чему равен его КПД?
20. Сформулируйте теорему Карно. В чем ее физический смысл?
21. Сформулируйте второе начало термодинамики. В чем его физический смысл?
22. Какой процесс называется квазистатическим (равновесным)?
23. Что такое энтропия? Поясните ее термодинамический и статистический смысл.

24. Как может изменяться энтропия замкнутой, незамкнутой системы?

25. Сформулируйте третье начало термодинамики. В чем его физический смысл?

Задачи по теме «Термодинамика»

1. Вычислите удельные теплоемкости c_V и c_p смеси неона и водорода, если массовые доли неона и водорода соответственно равны 80 и 20%. Газы считать идеальными.

2. Определите суммарную кинетическую энергию поступательного движения всех молекул идеального газа, находящегося в сосуде вместимостью $V = 3$ л под давлением $p = 540$ кПа.

3. Для одного моля ($\nu = 1$ моль) некоторого двухатомного газа внутренняя энергия $U = 6{,}02$ кДж/моль. Определите среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы этого газа. Газ считать идеальным.

4. Определите молярную массу M двухатомного идеального газа и его удельные теплоемкости, если известно, что разность удельных теплоемкостей этого газа равна $c_p - c_V = 260$ Дж/(кг·К).

5. Определите показатель адиабаты идеального газа, который при температуре $T = 350$ К и давлении $p = 0{,}4$ МПа занимает объем $V =$ $= 300$ л, а его теплоемкость $C_V = 857$ Дж/К.

6. Определите молярные теплоемкости идеального газа, если его удельные теплоемкости $c_V = 10{,}4$ кДж/(кг·К) и $c_p = 14{,}6$ кДж/(кг·К).

7. Трехатомный идеальный газ под давлением $p = 240$ кПа и при температуре $t = 20$°С занимает объем $V = 10$ л. Определите теплоемкость C_p этого газа при постоянном давлении.

8. Углекислый газ массой $m = 88$ г занимает при температуре $T =$ $= 290$ К объем $V = 1000$ см^3. Рассчитайте его внутреннюю энергию, если газ идеальный.

9. Определите показатель адиабаты (C_p/C_V) для смеси газов, содержащей гелий массой $m_1 = 8$ г и водород массой $m_2 = 2$ г. Газы считать идеальными.

10. Чему равна степень диссоциации молекул азота, если известно, что отношение $C_p / C_V = 1{,}47$? Газ считать идеальным.

11. Определите количество теплоты Q, которое надо сообщить кислороду объемом $V = 50$ л при его изохорном нагревании, чтобы давление газа повысилось на $\Delta p = 0{,}5$ МПа. Газ считать идеальным.

12. Азот массой $m = 280$ г занимает объем $V_1 = 100$ л и находится под давлением $p_1 = 100$ кПа. При нагревании газ расширился при постоянном давлении до объема $V_2 = 500$ л, а затем его давление возросло до $p_3 = 300$ кПа при неизменном объеме. Найдите изменение внутренней энергии ΔU газа, совершенную газом работу A и теплоту Q, переданную газу. Постройте график процесса. Газ считать идеальным.

13. При изотермическом расширении азота при температуре $T = 280$ К его объем увеличился в 2 раза. Масса азота $m = 0{,}2$ кг. Определите: 1) совершенную при расширении работу A; 2) изменение ΔU внутренней энергии; 3) количество теплоты Q, полученное газом. Газ считать идеальным.

14. Кислород массой $m = 200$ г занимает объем $V_1 = 100$ л и находится под давлением $p_1 = 200$ кПа. При нагревании газ расширился при постоянном давлении до объема $V_2 = 300$ л, а затем его давление возросло до $p_3 = 500$ кПа при неизменном объеме. Найдите изменение внутренней энергии ΔU газа, совершенную газом работу A и теплоту Q, переданную газу. Постройте график процесса. Газ считать идеальным.

15. При изобарном нагревании некоторого идеального газа ($\nu = 2$ моль) на $\Delta T = 90$ К ему было сообщено количество теплоты $Q = 5{,}25$ кДж. Определите: 1) работу, совершенную газом; 2) изменение внутренней энергии.

16. Идеальный газ занимал объем 0,01 $м^3$ и находился под давлением 100 кПа при температуре 300 К. Затем газ был нагрет без изменения объема до температуры 320 К, а после этого нагрет при постоянном давлении до 350 К. Найдите работу, совершенную газом при переходе из начального в конечное состояние.

17. Азот массой $m = 0{,}1$ кг был изобарно нагрет от температуры $T_1 = 200$ К до температуры $T_2 = 400$ К. Определите работу A, совершенную газом, полученную им теплоту Q и изменение ΔU внутренней энергии азота. Газ считать идеальным.

18. Определите работу A, которую совершит двухатомный идеальный газ, если ему при постоянном давлении сообщить количество теплоты $Q = 21$ кДж. Найдите также изменение ΔU внутренней энергии этого газа.

19. Кислород объемом $V = 1$ л находится под давлением $p = 1$ МПа. Определите, какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы: 1) увеличить его объем вдвое в результате изобарного процесса; 2) увеличить его давление вдвое в результате изохорного процесса. Газ считать идеальным.

20. Азот массой $m = 14$ г сжимают изотермически при температуре $T = 300$ К от давления $p_1 = 100$ кПа до давления $p_2 = 500$ кПа. Определите:

1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу сжатия; 3) количество выделившейся теплоты. Газ считать идеальным.

21. Во сколько раз увеличится объем водорода, содержащий количество вещества $\nu = 0{,}4$ моль при изотермическом расширении, если при этом газ получит количество теплоты $Q = 800$ Дж? Температура водорода $T = 300$ К. Газ считать идеальным.

22. Определите работу A, которую совершит трехатомный идеальный газ, если ему при постоянном давлении сообщить количество теплоты $Q = 21$ кДж. Найдите также изменение ΔU внутренней энергии этого газа.

23. Работа расширения некоторого двухатомного идеального газа $A = 2$ кДж. Определите количество подводимой теплоты, если процесс протекал: 1) изотермически; 2) изобарно.

24. Азот массой $m = 1$ кг занимает при температуре $T_1 = 300$ К объем $V_1 = 0{,}5$ м^3. В результате адиабатного сжатия давление газа увеличилось в 3 раза. Определите: 1) конечный объем газа; 2) конечную температуру; 3) изменение внутренней энергии газа. Газ считать идеальным.

25. Кислород, занимающий при давлении $p_1 = 0{,}5$ МПа объем $V_1 = 5$ л, расширяется так, что объем увеличивается в 3 раза. Определите конечное значение давления и работу, совершенную газом, если процесс протекал адиабатически. Газ считать идеальным.

26. Азот, находившийся при температуре $T_1 = 400$ К, подвергли адиабатному расширению. В результате расширения объем увеличился в 5 раз, а внутренняя энергия уменьшилась на 4 кДж. Определите массу азота. Газ считать идеальным.

27. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Температура теплоотдатчика $T_1 = 500$ К, температура теплоприемника $T_2 = 250$ К. Определить термический КПД η цикла, а также работу A_1 рабочего вещества при изотермическом расширении, если при изотермическом сжатии совершена работа $A_2 = 70$ Дж.

28. Газ, совершающий цикл Карно, получает теплоту $Q_1 = 84$ кДж. Определить работу A газа, если температура T_1 теплоотдатчика в три раза выше температуры T_2 теплоприемника.

29. При нагревании аргона массой $m = 8$ г его абсолютная температура увеличилась в 2 раза. Определите изменения энтропии при изохорном и изобарном нагревании. Газ считать идеальным.

30. Масса $m = 10{,}5$ г азота изотермически расширятся от объема $V_1 = 2$ л до объема $V_2 = 5$ л. Найти изменение ΔS энтропии при этом процессе.

3. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что между атомами и молекулами вещества на малых расстояниях действуют силы отталкивания $F_о$, а на больших – силы притяжения $F_п$. Эти силы являются результатом квантовомеханического взаимодействия элементарных частиц (электронов, протонов), из которых состоят эти атомы или молекулы. Поэтому при рассмотрении *реальных газов* необходимо учитывать силы межмолекулярного взаимодействия. Эти силы проявляются на небольших расстояниях (~10^{-9} нм) и быстро убывают с увеличением расстояния.

3.1. Уравнение Ван-дер-Ваальса

В случае простых неполярных веществ притяжение в основном обусловлено взаимодействием наведенных дипольных моментов молекул. Эти сравнительно слабые *ван-дер-ваальсовы силы* зависят от расстояния r между молекулами по степенному закону ($F \approx r^{-n}$) и, следовательно, носят короткодействующий характер. Область их действия порядка 10^{-9} м, т. е. на расстояниях, больших нм, эти силы практически равны нулю. Переход от отталкивания на малых расстояниях к притяжению на больших расстояниях способствует появлению минимума на кривой зависимости потенциальной энергии W взаимодействия двух частиц от расстояния r между ними (рис. 3.1). На расстоянии r_0, которое соответствует минимуму потенциальной энергии, сила взаимодействия F обращается в нуль. Положение минимума определяет равновесное расстояние для системы из двух частиц.

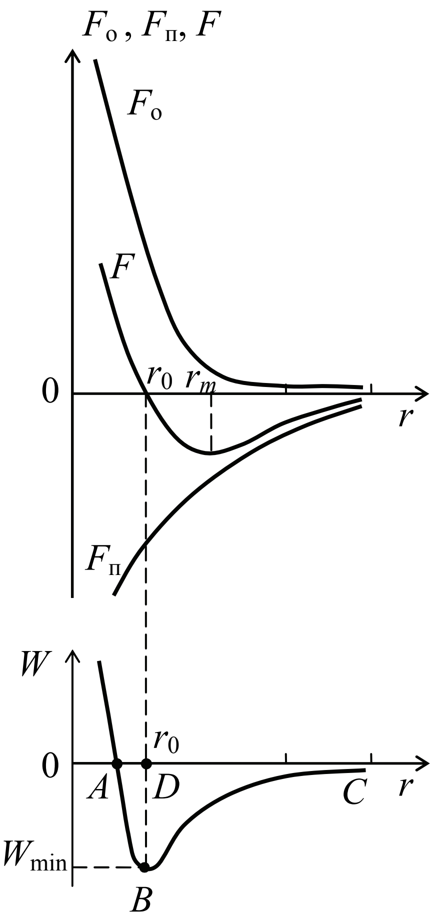

Рис. 3.1

Наличие сил притяжения и отталкивания приводит к тому, что при больших давлениях (когда расстояние между молекулами уменьшается) поведение реального газа будет отличаться от модели идеального газа. Одно из наиболее известных приближенных уравнений, описывающих состояние реального газа, было предложено голландским физиком Ван-дер-Ваальсом. Это уравнение базируется на законе Менделеева – Клапейрона и содержит два параметра (a и b), с помощью которых учитывается вклад сил притяжения на больших расстояниях и сил отталкивания на малых расстояниях между молекулами реального газа.

Силы отталкивания противодействуют проникновению данной частицы в ту область объема сосуда, которая занята другими молекулами. Собственный объем V_0, занятый частицей, представляется как объем шара с некоторым эффективным диаметром d. Поэтому «*свободный объем*» V^*, в котором могут свободно (как в идеальном газе) двигаться молекулы реального газа, будет на некоторую величину меньше, чем объем V, занимаемый газом. «*Свободный объем*» будет равен

$$V^* = V - \nu b, \tag{3.1}$$

где b – поправочный коэффициент для одного моля газа.

Приближенные расчеты показывают, что объем, занятый молекулой, равен учетверенному собственному объему этой молекулы V_0. Тогда поправка b равна

$$b = 4N_a V_0. \tag{3.2}$$

Наличие сил притяжения между молекулами приводит к дополнительному «*внутреннему*» давлению p^i, которое оказывается обратно пропорциональным квадрату V:

$$p_i = \nu^2 \frac{a}{V^2}, \tag{3.3}$$

где a – второй поправочный коэффициент.

В результате внешнее давление p, которое необходимо приложить к реальному газу для удержания его в заданном объеме V, уменьшается по сравнению с давлением p^* в случае идеального газа. Это значит, что

$$p = p^* - p_i = p^* - \nu^2 \frac{a}{V^2}. \tag{3.4}$$

Свободный объем V^* и давление p^* связаны уравнением Менделеева – Клапейрона:

$$p^* V^* = \nu RT. \tag{3.5}$$

Подставляя в (3.5) выражения (3.1) и (3.4), получаем приближенное ***уравнение состояния для реального газа***:

$$\left(p+\nu^2\frac{a}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT\,. \tag{3.6}$$

Следует отметить, что уравнение Ван-дер-Ваальса лучше согласуется с опытными данными, чем уравнение Менделеева – Клапейрона, особенно при больших давлениях.

3.2. Внутренняя энергия реального газа

У идеального газа внутренняя энергия $U_{\text{ид}}$ равна средней энергии поступательного, вращательного и колебательного движений его молекул. Внутренняя энергия идеального газа определяется соотношением

$$U_{\text{ид}}=\frac{i}{2}\nu RT\,. \tag{3.7}$$

В случае реальных газов внутренняя энергия равна сумме средней энергии поступательного, вращательного и колебательного движений его молекул и потенциальной энергии их взаимодействия. С достаточной степенью точности можно считать, что кинетическая энергия теплового движения молекул реального газа определяется выражением (3.7):

$$\text{К}_{\text{реал}}=\text{К}_{\text{ид}}=U_{\text{ид}}=\frac{i}{2}\nu RT\,. \tag{3.8}$$

Учтем потенциальную энергию взаимодействия всех молекул. Вклад сил отталкивания в потенциальную энергию определяется поправкой b, которая считается независящей от T и V. Поэтому этот вклад во внутреннюю энергию можно не учитывать. Среднее значение энергии притяжения равно работе, которую нужно затратить, чтобы разнести все молекулы на бесконечно большие расстояния. Внутреннее давление в уравнении Ван-дер-Ваальса как раз и учитывает действие сил притяжения, поэтому потенциальная энергия взаимодействия равна

$$\Pi_{\text{реал}}=-A=-\int_V^{\infty}p^i dV=\int_{\infty}^{V}\nu^2\frac{a}{V^2}dV=-\nu^2\frac{a}{V}\,. \tag{3.9}$$

Полная внутренняя энергия реального газа

$$U_{\text{реал}}=\text{К}_{\text{реал}}+\Pi_{\text{реал}}=\nu\left(\frac{i}{2}RT-\nu\frac{a}{V}\right)=\nu\left(C_V^{\text{M}}RT-\frac{\nu a}{V}\right). \tag{3.10}$$

Из формулы (3.10) видно, что внутренняя энергия реального газа зависит не только от температуры, но и от объема. Если газ будет расширяться или сжиматься без теплообмена с внешней средой и без совершения внешней работы, то, согласно первому началу термодинамики, его внутренняя энергия должна оставаться постоянной. Для реального газа должно при этом соблюдаться следующее условие:

$$U_1 = U_2 \Rightarrow C_V^{\text{M}} R T_1 - \frac{\nu a}{V_1} = C_V^{\text{M}} R T_2 - \frac{\nu a}{V_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{\nu a}{C_V^{\text{M}}}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right). \tag{3.11}$$

Следовательно, при расширении в таких условиях $(V_2 > V_1)$ газ должен охлаждаться $(T_2 < V_1)$, а при сжатии $(V_2 < V_1)$ – нагреваться.

Этот тепловой эффект проявляется при расширении газа в пустоту, а также в опыте Джоуля – Томсона.

Контрольные вопросы

1. В чем отличие реальных газов от модели идеального газа?
2. Запишите уравнение Ван-дер-Ваальса и поясните его.
3. Что учитывают поправки Ван-дер-Ваальса в уравнении состояния реального газа?
4. Запишите выражение для внутренней энергии реального газа и поясните его.
5. От каких термодинамических параметров зависит внутренняя энергия реального газа?

Задачи по теме «Реальные газы»

1. Для некоторого газа поправка в уравнении Ван-дер-Ваальса b = 0,136 м^3/моль. Определите эффективный диаметр молекулы газа.

2. При каком давлении должен находиться кислород в количестве 0,1 кмоль, чтобы при T = 320 К он занимал объем 0,1 м^3. Задачу решить, рассматривая кислород как: а) идеальный газ; б) реальный газ. Поправки для кислорода: a = 1,37·10^5 Н·м^4/кмоль^2, b = 0,0317 м^3/кмоль.

3. Объем кислорода массой 4,0 г увеличивается от 1,0 до 5,0 дм^3. Рассматривая газ как реальный, определите работу внутренних сил при этом процессе. Постоянная a = 0,137 Н·м^4/моль^2.

4. В баллоне емкостью 20 л находится 80 моль некоторого газа. При t = 14°С давление газа равно 9 · 10^6 Па; при t = 63°С давление газа равно 10,9 · 10^6 Па. Определите поправки Ван-дер-Ваальса для данного газа.

5. В баллоне емкостью 20 л находится углекислый газ массой m = 1,1 кг при температуре t = 13°С. Определите давление газа, считая его: а) идеальным, б) реальным. Определить относительную ошибку первого допущения, считая, что уравнение Ван-дер-Ваальса точно описывает состояние газа. Для углекислого газа a = 0,364 Н·м^4/моль^2, b = 4,26 · 10^{-5} м^3/моль.

6. 10 г гелия занимают объем 100 см^3 при давлении 10^8 Па. Найдите температуру газа, рассматривая его как: 1) идеальный и 2) реальный. Для гелия a = 0,00343 Н·м^4/моль^2, b = 2,34 · 10^{-5} м^3/моль. Оцените относительную ошибку первого допущения, считая, что уравнение Ван-дер-Ваальса точно описывает состояние газа.

7. Количество 1 кмоль азота находится при температуре t = 27°С и давлении p = 5 МПа. Найдите объем V газа, считая, что азот при данных условиях ведет себя как реальный газ. Для азота a = 0,137 Н·м^4/кмоль^2, b = 3,85·10^{-5} м^3/моль.

8. Водород в количестве 10 моль находится в сосуде объемом V = 5 л. Определите внутреннее давление газа и собственный объем молекул. Для водорода a = 0,0244 Н·м^4/моль^2, b = 2,63 · 10^{-5} м^3/моль.

9. Кислород массой 100 г расширяется от объема 5 л до объема 10. Определите работу межмолекулярных сил притяжения при этом расширении. Для кислорода a = 1,37 · 10^5 Н·м^4/кмоль^2, b = 0,0317 м^3/кмоль.

10. В закрытом сосуде объемом V = 0,5 м^3 находится ν = 0,6 кмоля углекислого газа при давлении p = 3 · 10^6 Па. Пользуясь уравнением для реального газа, найдите, во сколько раз необходимо увеличить температуру газа, чтобы давление увеличилось вдвое. Для углекислого газа a = 0,364 Н·м^4/моль^2, b = 4,26 · 10^{-5} м^3/моль.

Учебное издание

Бобрович Олег Георгиевич
Тульев Валентин Валентинович

ФИЗИКА

В 3-х частях

Ч. 1. МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Пособие

Редактор *Е. И. Гоман*
Компьютерная верстка *Е. В. Ильченко*
Корректор *Е. И. Гоман*

Издатель:
УО «Белорусский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/227 от 20.03.2014.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.