

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. В. Мисевич

ФИЗИКА

В 7-ми частях

Часть 1
Механика

*Тексты лекций для студентов специальностей
1-47 02 01 «Технология полиграфических производств»,
1-57 01 01 «Охрана окружающей среды
и рациональное использование природных ресурсов»*

Минск 2015

УДК 531/534(075.8)

ББК 22.3

М65

Рассмотрены и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом Белорусского государственного технологического университета.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор
кафедры физики твердого тела БГУ *В. Г. Шепелевич*;
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры физики БГАТУ *Г. М. Чобот*

Мисевич, А. В.

М65 Физика. В 7 ч. Ч. 1. Механика : тексты лекций для студентов специальностей 1-47 02 01 «Технология полиграфических производств», 1-57 01 01 «Охрана окружающей среды и рациональное использование природных ресурсов» / А. В. Мисевич. – Минск : БГТУ, 2014. – 189 с.

Предлагаемое учебное издание составлено на основе действующей учебной программы по физике для студентов специальностей 1-47 02 01 «Технология полиграфических производств», 1-57 01 01 «Охрана окружающей среды и рациональное использование природных ресурсов». В пособии рассмотрена классическая механика Ньютона, механические колебания и волны в упругих средах, а также основы релятивистской механики.

УДК 531/534(075.8)

ББК 22.3

© УО «Белорусский государственный
технологический университет», 2015
© Мисевич А. В., 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Лекция 1. ВВЕДЕНИЕ. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА	6
1.1. Предмет физики. Механическое движение. Механика классическая, релятивистская и квантовая	6
1.2. Система отсчета. Материальная точка. Векторный, координатный и естественный способы описания движения материальной точки. Скорость и ускорение	7
1.3. Классификация движений материальной точки	16
1.4. Абсолютно твердое тело. Поступательное и вращательное движение абсолютно твердого тела. Угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение	17
ЛЕКЦИЯ 2. КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.....	24
2.1. Связь между векторами угловых и линейных кинематических величин	24
2.2. Основные понятия динамики: сила, масса, импульс. Инерциальные системы отсчета. Законы движения Ньютона.....	26
2.3. Преобразования Галилея. Классический закон сложения скоростей. Механический принцип относительности	30
2.4. Движение тел относительно неинерциальных систем отсчета. Силы инерции.....	33
ЛЕКЦИЯ 3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА. ЦЕНТР МАСС. РАБОТА СИЛЫ. МОЩНОСТЬ.....	39
3.1. Механическая система. Импульс механической системы. Закон сохранения импульса.....	39
3.2. Центр масс механической системы. Теорема о движении центра масс	42
3.3. Движение тела переменной массы	44
3.4. Работа постоянной и переменной силы. Мощность.....	47
ЛЕКЦИЯ 4. ВИДЫ И ЗАКОНЫ СИЛОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ	51
4.1. Фундаментальные взаимодействия.....	51

4.2. Закон всемирного тяготения. Гравитационное поле. Напряженность гравитационного поля	55
4.3. Силы упругости. Закон Гука. Упругие постоянные.....	62
4.4. Трение покоя, скольжения, качения. Внутреннее трение.....	67

ЛЕКЦИЯ 5. КИНЕТИЧЕСКАЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ 73

5.1. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии	73
5.2. Консервативные силы. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии	75
5.3. Работа сил гравитационного поля. Потенциальная энергия тела в гравитационном поле	79
5.4. Работа сил упругости. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.....	83

ЛЕКЦИЯ 6. МОМЕНТ СИЛЫ И МОМЕНТ ИМПУЛЬСА. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА..... 86

6.1. Момент силы. Момент импульса материальной точки. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса.....	86
6.2. Движение тел в центральном гравитационном поле. Законы Кеплера. Космические скорости.....	91
6.3. Уравнение динамики вращательного движения абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси	102

ЛЕКЦИЯ 7. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА..... 107

7.1. Работа силы и кинетическая энергия тела при вращательном движении	107
7.2. Расчет моментов инерции твердых тел	109
7.3. Свойство аддитивности момента инерции. Теорема Штейнера.....	114

ЛЕКЦИЯ 8. СВОБОДНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ 117

8.1. Свободные гармонические колебания и их характеристики	117
8.2. Пружинный, физический и математический маятники	120
8.3. Затухающие колебания.....	124

ЛЕКЦИЯ 9. ВЫНУЖДЕННЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ	129
9.1. Вынужденные колебания	129
9.2. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс.....	134
9.3. Сложение гармонических колебаний одного направления. Биения.....	138
9.4. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.....	142
ЛЕКЦИЯ 10. УПРУГИЕ ВОЛНЫ	145
10.1. Распространение колебаний в упругой среде. Уравнение волны. Характеристики волны	145
10.2. Волновое уравнение. Фазовая скорость волн в твердых телах, жидкостях и газах.....	150
10.3. Энергия упругой волны. Вектор Умова.....	154
ЛЕКЦИЯ 11. СВОЙСТВА УПРУГИХ ВОЛН. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ	160
11.1. Принцип суперпозиции упругих волн. Волновой пакет. Групповая скорость. Формула Рэлея	160
11.2. Интерференция упругих волн. Стоячие волны.....	164
11.3. Эффект Доплера	169
11.4. Звуковые волны. Характеристики звука.....	171
ЛЕКЦИЯ 12. ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ	174
12.1. Постулаты специальной теории относительности. Преобразования Лоренца. Принцип соответствия.....	174
12.2. Относительность одновременности. Замедление времени. Сокращение длины. Инвариантность интервала.....	178
12.3. Релятивистский закон сложения скоростей	181
12.4. Релятивистский импульс. Релятивистская масса. Релятивистское уравнение динамики	183
12.5. Релятивистское выражение для кинетической энергии. Полная энергия релятивистской частицы. Энергия покоя	186

ВВЕДЕНИЕ. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

1.1. Предмет физики. Механическое движение. Механика классическая, релятивистская и квантовая.

1.2. Система отсчета. Материальная точка. Векторный, координатный и естественный способы описания движения материальной точки. Скорость и ускорение.

1.3. Классификация движений материальной точки.

1.4. Абсолютно твердое тело. Поступательное и вращательное движение абсолютно твердого тела. Угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение.

1.1. ПРЕДМЕТ ФИЗИКИ. МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ. МЕХАНИКА КЛАССИЧЕСКАЯ, РЕЛЯТИВИСТСКАЯ И КВАНТОВАЯ

Физика – это наука о наиболее простых и наиболее общих формах движения материи. К таким формам движения обычно относят механическую, тепловую, электромагнитную, внутриатомную и внутриядерную формы движения материи. Физика тесно связана со всеми естественными науками – астрономией, геологией, химией, биологией.

Основным методом исследования в физике, как и в других естественных науках, является эксперимент. Эксперимент – это наблюдение исследуемого явления в точно контролируемых условиях. Если результаты эксперимента не могут быть объяснены на основе имеющихся на данный момент научных знаний, для их объяснения выдвигается гипотеза. Гипотеза – это научное предположение, объясняющее изучаемое явление, дополняющее уже существующие научные знания и требующее дальнейшей проверки на опыте. Гипотеза, успешно прошедшая экспериментальную проверку, превращается в закон. Физический закон – это устойчивая повторяющаяся объективная закономерность, существующая в природе.

Простейшей формой движения материи является механическое движение, которое представляет собой изменение положения тел или их частей друг относительно друга с течением времени. **Механика** – это раздел физики, в котором изучаются закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Классическая механика изучает законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света в вакууме. Основные законы классической механики установлены Галилео Галилеем и окончательно сформулированы Исааком Ньютоном.

Релятивистская механика изучает законы движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света. Релятивистская механика основана на специальной теории относительности, сформулированной Альбертом Эйнштейном.

Квантовая механика описывает движение микроскопических тел (элементарных частиц, атомов и молекул), для которых законы классической механики неприменимы.

Механика делится на три раздела: 1) кинематику; 2) динамику; 3) статику. **Кинематика** изучает движение тел, не рассматривая причины, вызывающие и изменяющие это движение. **Динамика** изучает законы движения тел во взаимосвязи с причинами, которые вызывают и изменяют это движение. **Статика** изучает законы равновесия системы тел.

1.2. СИСТЕМА ОТСЧЕТА. МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА. ВЕКТОРНЫЙ, КООРДИНАТНЫЙ И ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ

В механике для описания реальных тел вводят ряд абстрактных понятий. Рассмотрим некоторые из них. **Система отсчета** – это совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета, по отношению к которому определяется положение других тел в различные моменты времени. Существует большое число различных координатных систем, наиболее известными из которых являются декартова, цилиндрическая и сферическая системы координат (рис. 1.1). Выбор той или иной координатной системы не принципиален, всегда стараются подобрать такую систему координат, чтобы математические уравнения, описывающие движение тела, были как можно проще.

Например, при описании движения тела, брошенного с небольшой скоростью у поверхности земли под некоторым углом к горизонту, удобно пользоваться декартовой системой координат (x, y) , а если это же тело «брошено» со скоростью сравнимой с первой космической скоростью (7900 м/с), то для описания его движения необходимо использовать полярную систему координат (ρ, φ) , центр которой находится в центре Земли.

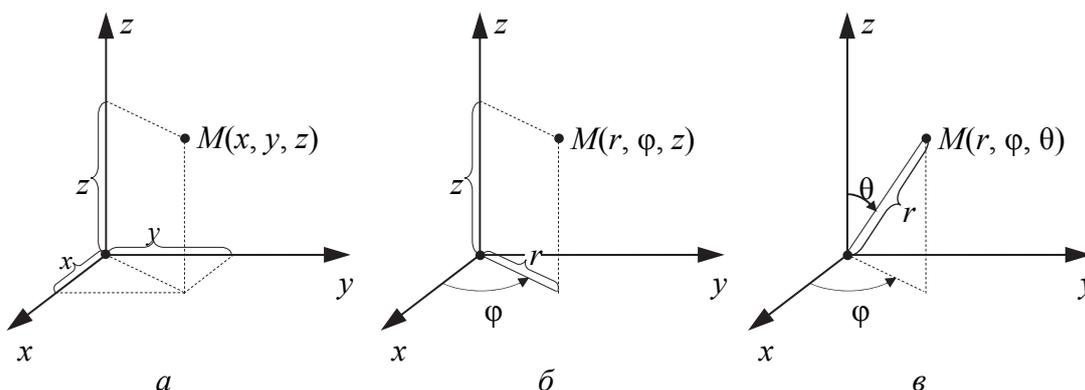


Рис. 1.1. Системы координат: а – декартова; б – цилиндрическая; в – сферическая

Материальная точка – это материальное тело, размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Как правило, тело может считаться материальной точкой, если его размеры малы по сравнению с размерами тех тел, которые оказывают воздействие на его движение. Кроме того, взаимодействующие тела могут считаться материальными точками, если размеры этих тел намного меньше расстояния между телами. Например, при рассмотрении движения планет вокруг Солнца планеты могут рассматриваться как материальные точки, так как диаметры планет гораздо меньше диаметра Солнца, а расстояния от многих планет до Солнца гораздо больше их диаметров. При этом всегда следует иметь в виду, что использование абстрактного понятия «материальная точка» позволяет описать движение тела не абсолютно точно, а с некоторым приближением.

Наиболее распространенными способами кинематического описания движения материальной точки являются: 1) векторный; 2) координатный; 3) естественный. При **векторном способе** задания движения положение материальной точки M в данный момент времени характеризуется радиус-вектором \vec{r} , проведенным из начала координат в данную точку (рис. 1.2). При движении материальной точки конец

радиус-вектора описывает в пространстве кривую, которая называется **траекторией** движущейся точки. При этом длина и направление радиус-вектора изменяются со временем согласно закону, который называется уравнением движения материальной точки:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.1)$$

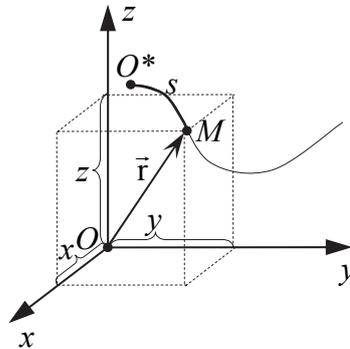


Рис. 1.2. Три способа задания движения материальной точки

При **координатном способе** задания движения, если используется декартова система координат, положение материальной точки в данный момент времени характеризуется тремя координатами x , y и z , а перемещение материальной точки может быть представлено как результат трех независимых перемещений вдоль координатных осей (рис. 1.2). Таким образом, уравнение (1.1) записывается в виде трех уравнений

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (1.2)$$

Число независимых координат, полностью определяющих положение материальной точки в пространстве, называется **числом степеней свободы**. Радиус-вектор материальной точки можно выразить через ее координаты следующим образом:

$$\vec{r} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z, \quad (1.3)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z – единичные вектора соответствующих координатных осей.

При **естественном способе** задания движения положение материальной точки характеризуется дуговой координатой s , которая представляет собой расстояние, измеряемое вдоль траектории движения материальной точки (рис. 1.2). В этом случае уравнение движения материальной точки записывается в виде

$$s = s(t). \quad (1.4)$$

Чтобы полностью описать движение материальной точки необходимо задать еще два уравнения, которые определяют ее траекторию:

$$y = y(t), z = z(t). \quad (1.5)$$

Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории. Пусть материальная точка за некоторый промежуток времени перемещается из положения A в положение B (рис. 1.3). Тогда длина участка траектории AB называется **длиной пути** Δs , а вектор проведенный из начального положения материальной точки в ее конечное положение

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0,$$

представляющий собой приращение радиус-вектора материальной точки за рассматриваемый промежуток времени, называется **перемещением**.

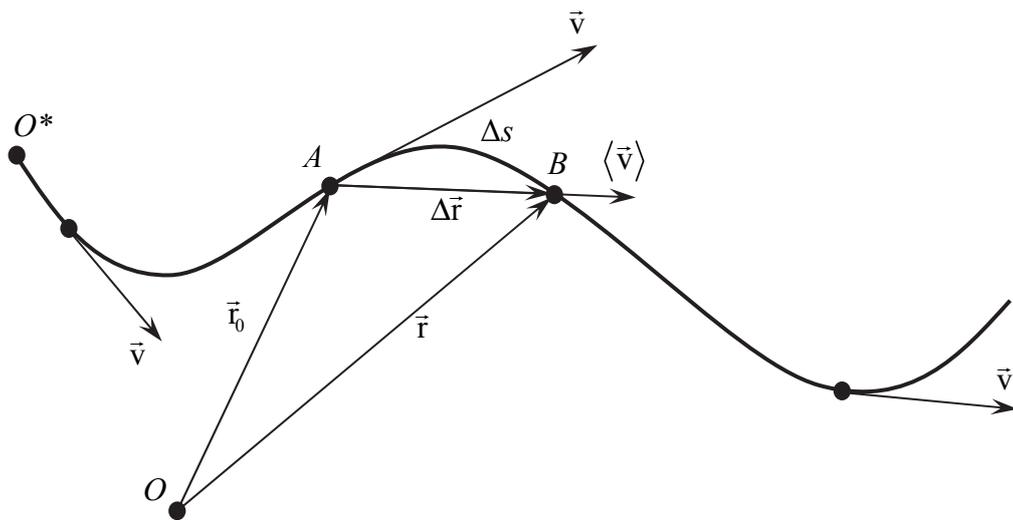


Рис. 1.3. Вектор перемещения $\Delta \vec{r}$, путь Δs , вектор средней скорости $\langle \vec{v} \rangle$, вектор мгновенной скорости \vec{v}

Единицей измерения расстояния, пути и перемещению в системе единиц СИ является *метр* (обозначается м).

При векторном способе задания движения скорость материальной точки характеризуется вектором средней скорости и вектором мгновенной скорости.

Вектором средней скорости называется отношение приращения $\Delta \vec{r}$ радиуса-вектора материальной точки к промежутку времени Δt :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.6)$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением перемещения (рис. 1.3). При неограниченном уменьшении промежутка времени Δt вектор средней скорости стремится к предельному значению, которое называется вектором мгновенной скорости:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.7)$$

Таким образом, **вектор мгновенной скорости** равен первой производной радиус-вектора движущейся точки по времени. Он направлен по касательной к траектории в сторону движения (рис. 1.3).

При координатном способе задания движения вектор мгновенной скорости проецируют на координатные оси (рис. 1.4), т. е. представляют в виде

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z, \quad (1.8)$$

где v_x, v_y, v_z – проекции вектора мгновенной скорости на координатные оси x, y, z . Чтобы определить v_x, v_y, v_z спроецируем на координатные оси радиус-вектор \vec{r} и продифференцируем его по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z. \quad (1.9)$$

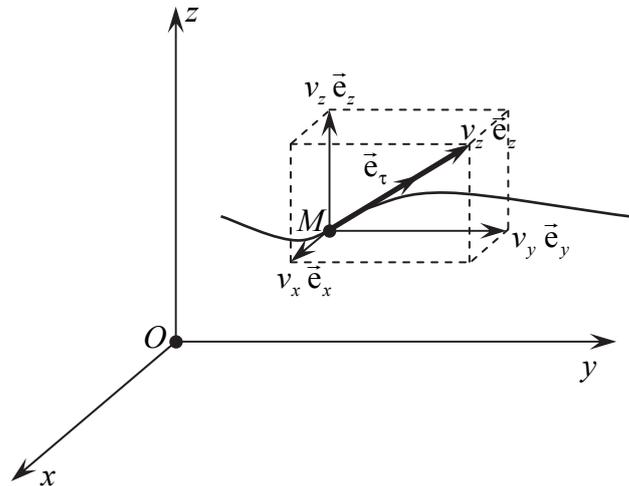


Рис. 1.4. Разложение вектора мгновенной скорости на три составляющие в декартовой системе координат

Сравнивая выражения (1.8) и (1.9) получаем:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (1.10)$$

Таким образом, проекции вектора мгновенной скорости на декартовы оси равны первым производным от соответствующих координат по времени. Модуль вектора мгновенной скорости определяется выражением

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.11)$$

При естественном способе скорость материальной точки характеризуется средней скоростью и вектором мгновенной скорости.

Средней скоростью движения называется величина равная отношению длины пути Δs к промежутку времени Δt , за который материальная точка прошла этот путь

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (1.12)$$

Вектор мгновенной скорости (рис. 1.4) при естественном способе задания движения представляется в виде

$$\vec{v} = v \vec{e}_\tau, \quad (1.13)$$

где \vec{e}_τ – единичный вектор касательной к траектории, а v – мгновенная скорость материальной точки, равная первой производной от дуговой координаты по времени:

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (1.14)$$

Если выражение (1.9) представить в виде $ds = v(t)dt$ и проинтегрировать в пределах от начального момента времени t_1 до конечного момента времени t_2 , то получим изменение дуговой координаты материальной точки за время $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (1.15)$$

Единицей измерения скорости в системе единиц СИ является *метр в секунду* (обозначается м/с). Скорость 1 м/с имеет материальная точка, которая за 1 с проходит путь 1 м (делает перемещение длиной 1 м или изменяет свою координату на 1 м).

Мгновенным ускорением называется векторная величина, характеризующая быстроту изменения вектора скорости движущейся точки и равная первой производной от скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.16)$$

При координатном способе задания движения вектор мгновенного ускорения проецируется на координатные оси (рис. 1.5):

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z, \quad (1.17)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

где a_x, a_y, a_z – проекции мгновенного ускорения на координатные оси x, y, z . Чтобы определить a_x, a_y, a_z про дифференцируем по времени выражение (1.8) для вектора мгновенной скорости и тогда получим:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (1.18)$$

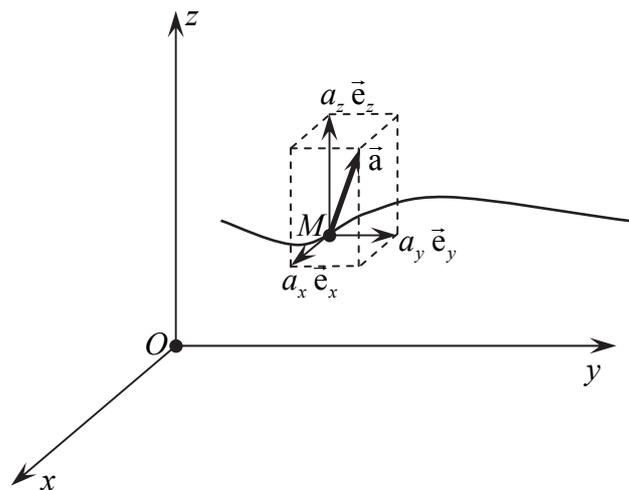


Рис. 1.5. Разложение вектора ускорения на три составляющие в декартовой системе координат

При естественном способе задания движения (рис 1.6) вектор ускорения можно разложить на две составляющие:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \vec{e}_\tau + a_n \vec{e}_n. \quad (1.19)$$

Составляющая $\vec{a}_\tau = a_\tau \vec{e}_\tau$ направлена по касательной к траектории и называется **касательным** или **тангенциальным ускорением точки**,

а составляющая $\vec{a}_n = a_n \vec{e}_n$ направлена перпендикулярно касательной и называется **нормальным ускорением точки**.

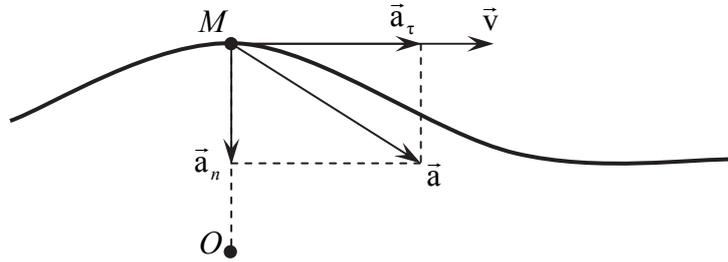


Рис. 1.6. Разложение вектора ускорения на нормальную и тангенциальную составляющие при естественном способе задания движения материальной точки

Для определения a_τ и a_n продифференцируем выражение (1.13) для мгновенной скорости точки:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_\tau) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau + v\frac{d\vec{e}_\tau}{dt}. \quad (1.20)$$

В этом выражении $d\vec{e}_\tau$ – это приращение единичного вектора касательной к траектории (рис. 1.7). Оно соответствует элементарному пути $ds = vdt$, проходимому точкой по траектории за малое время dt . Участок траектории ds можно рассматривать как малую дугу окружности радиуса R . Радиус этой окружности называется **радиусом кривизны** траектории в рассматриваемой точке, а центр этой окружности – **центром кривизны** траектории. Малой дуге окружности ds соответствует центральный угол поворота $d\alpha$, который определяется выражением

$$d\alpha = \frac{ds}{R} = \frac{v}{R}dt. \quad (1.21)$$

Из рис. 1.7 видно, что при перемещении материальной точки по траектории на расстояние ds единичный вектор касательной поворачивается на угол $d\alpha$. Причем ввиду малости угла $d\alpha$ модуль вектора $d\vec{e}_\tau$ равен длине дуги окружности, которую описывает единичный вектор \vec{e}_τ при повороте, т. е. $|d\vec{e}_\tau| = |\vec{e}_\tau|d\alpha = d\alpha$. По направлению вектор $d\vec{e}_\tau$ совпадает с единичным вектором нормали к траектории \vec{e}_n . Таким образом,

$$d\vec{e}_\tau = d\alpha\vec{e}_n,$$

$$\frac{d\vec{e}_\tau}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\vec{e}_n = \frac{v}{R}\vec{e}_n. \quad (1.22)$$

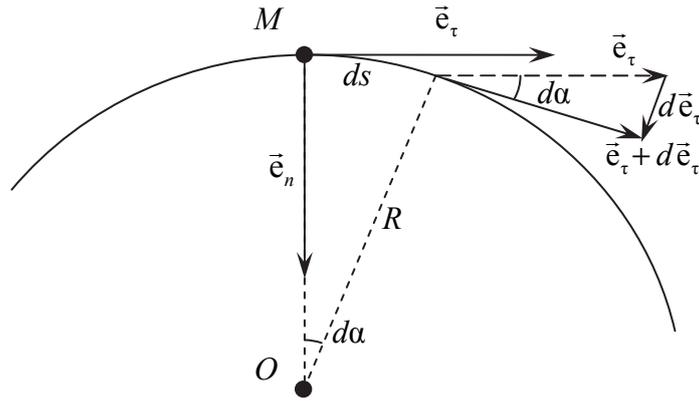


Рис. 1.7. Приращение единичного вектора касательной к траектории

Исходя из этого, выражение (1.20) для ускорения материальной точки можно записать в виде

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_\tau + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n. \quad (1.23)$$

Отсюда получаем

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad (1.24)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}; \quad (1.25)$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (1.26)$$

Касательное (тангенциальное) ускорение характеризует быстроту изменения численного значения скорости материальной точки и совпадает по направлению с вектором скорости, если численное значение скорости увеличивается, и противоположно направлению вектору скорости, если численное значение скорости уменьшается. Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения направления вектора скорости и направлено по нормали к траектории, причем всегда к центру кривизны.

Если выражение (1.24) представить в виде $dv = a_\tau(t)dt$ и проинтегрировать в пределах от начального момента времени t_1 до конечного момента времени t_2 , то получим приращение мгновенной скорости точки за время $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a_\tau(t) dt. \quad (1.27)$$

Единицей измерения ускорения в системе единиц СИ является *метр на секунду в квадрате* (обозначается м/с^2). Ускорением 1 м/с^2 обладает материальная точка, которая за 1 с изменяет свою скорость на 1 м/с .

1.3. КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В зависимости от того, как с течением времени изменяется тангенциальное ускорение a_τ , можно выделить три вида движения материальной точки: равномерное, равнопеременное и переменное.

Равномерным называется движение материальной точки с нулевым тангенциальным ускорением $a_\tau = 0$. Учитывая выражение (1.24), можно сделать вывод, что скорость материальной точки в данном случае постоянна, т. е. не изменяется с течением времени: $v = \text{const}$. Это означает, что за равные промежутки времени тело проходит равные расстояния. Воспользовавшись выражением (1.15), получаем следующее изменение дуговой координаты материальной точки за время t при равномерном движении:

$$\Delta s = \int_0^t v dt = vt. \quad (1.28)$$

Равнопеременным называется движение материальной точки с не изменяющимся с течением времени тангенциальным ускорением: $a_\tau = \text{const}$. Если вектор тангенциального ускорения \vec{a}_τ совпадает по направлению с вектором мгновенной скорости \vec{v} , то модуль скорости материальной точки с течением времени увеличивается, и движение называется **равноускоренным**. Если вектор \vec{a}_τ направлен противоположно вектору \vec{v} , то численное значение скорости с течением времени уменьшается и движение называется **равнозамедленным**. Пусть в начальный момент времени скорость материальной точки равна v_0 , тогда, воспользовавшись выражением (1.27), определим скорость материальной точки через некоторое время t :

$$v = v_0 + \Delta v = v_0 + \int_0^t a_\tau dt = v_0 + a_\tau t. \quad (1.29)$$

Из полученного выражения видно, что при равнопеременном движении зависимость скорости от времени описывается линейной функцией. Это значит, что за равные промежутки времени скорость

материальной точки будет изменяться на одну и ту же величину. Воспользуемся выражением (1.15), чтобы получить изменение дуговой координаты материальной точки за промежуток времени t при равнопеременном движении:

$$\Delta s = \int_0^t (v_0 + a_\tau t) dt = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (1.30)$$

Переменным называется движение материальной точки с тангенциальным ускорением, которое изменяется с течением времени произвольным образом $a_\tau = a_\tau(t)$. Тогда, воспользовавшись выражениями (1.27) и (1.15), можно определить скорость материальной точки в момент времени t и изменение дуговой координаты за это время:

$$v(t) = v_0 + \Delta v = v_0 + \int_0^t a_\tau(t) dt; \quad (1.31)$$

$$\Delta s = \int_0^t v(t) dt. \quad (1.32)$$

В зависимости от того, как с течением времени изменяется радиус кривизны траектории, для материальной точки можно выделить криволинейное движение, движение по окружности и прямолинейное движение. **Криволинейным** называется движение по траектории, радиус кривизны которой изменяется с течением времени произвольным образом $R = R(t)$. **Движением по окружности** называется движение по траектории, радиус кривизны которой не изменяется с течением времени $R = const$. **Прямолинейным** движением называется движение по траектории, радиус кривизны которой стремится к бесконечности $R \rightarrow \infty$. Приближенно прямолинейным можно считать движение по дуге окружности, если проходимый путь намного меньше радиуса этой окружности.

1.4. АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА. УГОЛ ПОВОРОТА, УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ И УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ

Абсолютно твердое тело – это тело, расстояние между любыми двумя точками которого остается постоянным.

Простейшие виды движения твердого тела можно представить как комбинацию поступательных и вращательных движений. **Поступательное движение** – это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению (рис. 1.8). При поступательном движении траектории всех точек тела совершенно идентичны. Следовательно, в любой момент времени все точки тела имеют одинаковые скорости и ускорения. Таким образом, кинематическое рассмотрение поступательного движения тела сводится к изучению движения любой его точки.

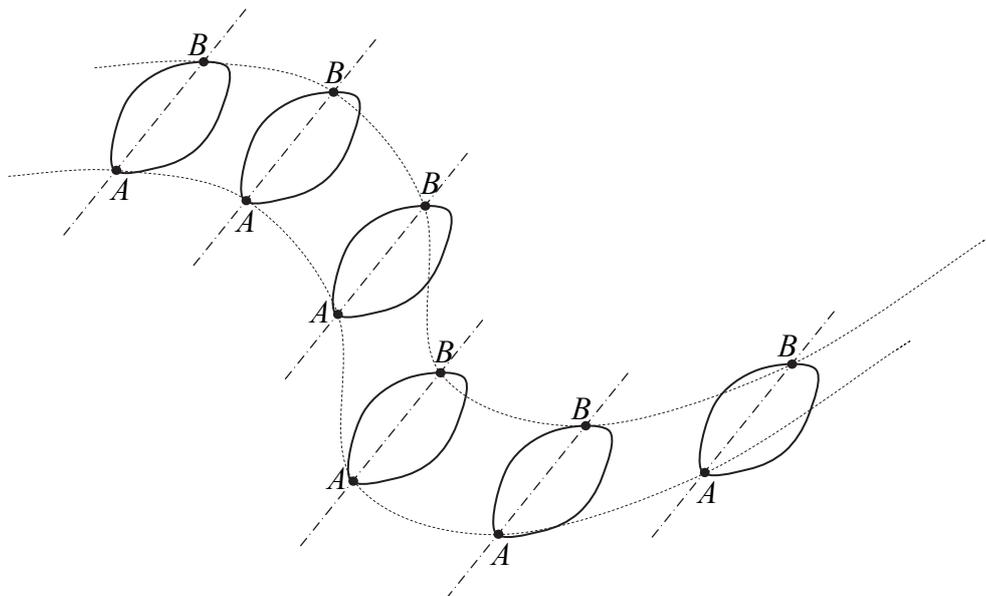


Рис. 1.8. Поступательное движение твердого тела

Вращательное движение – это движение, при котором все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения (рис. 1.9). При вращательном движении скорости и ускорения различных точек тела неодинаковы. Поэтому в качестве общих кинематических характеристик движения тела при вращении вводятся угол поворота, угловую скорость и угловое ускорение тела.

Углом поворота называется угол, на который поворачивается прямая, жестко связанная с телом и перпендикулярная оси вращения (рис. 1.9). При вращении тела угол поворота изменяется со временем по некоторому закону

$$\varphi = \varphi(t), \quad (1.33)$$

который называется уравнением вращательного движения тела.

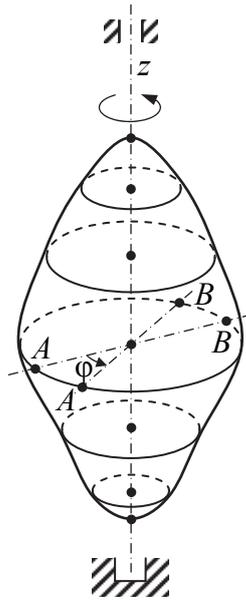


Рис. 1.9. Вращательное движение твердого тела

Единицей измерения угла поворота в системе СИ является *радиан* (обозначается рад). Тело поворачивается на угол 1 рад, если произвольная точка тела проходит по дуге окружности путь, равный радиусу этой окружности (1 рад = 1 м / 1 м). Угол, выраженный в радианах, формально является безразмерной величиной, поэтому наименование единицы измерения «рад» после численного значения угла можно не ставить, например, можно записать $\varphi = \pi$ рад или просто $\varphi = \pi$. Если угол поворота измеряют в градусах, то углу π рад соответствует угол 180° .

Угловой скоростью тела называется вектор, численно равный первой производной по времени от угла поворота тела по времени и направленный вдоль оси вращения по правилу правого винта:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.34)$$

По правилу правого винта вектор угловой скорости направлен вдоль оси вращения, причем так, что вращение, рассматриваемое с конца вектора угловой скорости, происходит против хода часовой стрелки (рис. 1.10). Это правило иногда называют правилом буравчика. Буравчик – это винт с правой резьбой, который можно представить себе как штопор для открывания бутылок. Если мысленно направить винт буравчика вдоль оси вращения и начать крутить его в направлении вращения тела, то ось буравчика станет совершать поступатель-

ное движение. Направление этого движения соответствует направлению вектора угловой скорости. Еще легче определить направление вектора угловой скорости с помощью правила правой руки. Для этого надо мысленно охватить ладонью правой руки ось вращения тела, причем так, чтобы четыре пальца ладони охватывали ось по направлению вращения. Тогда отогнутый большой палец укажет вдоль оси направление вектора угловой скорости.

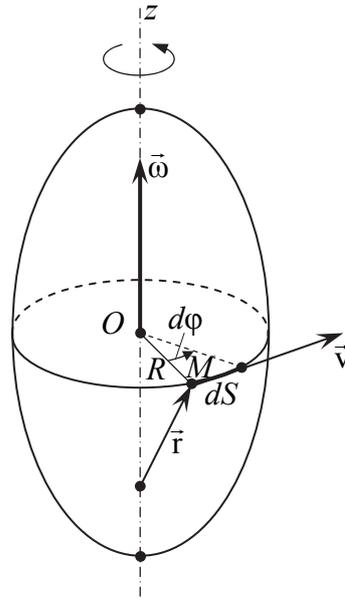


Рис. 1.10. Угловая скорость вращения тела

Единицей измерения угловой скорости в системе СИ является *радиан в секунду* (обозначается рад/с или с^{-1}). Тело вращается с угловой скоростью 1 рад/с, если за 1 с поворачивается на угол 1 рад.

Если выражение (1.34) представить в виде $d\varphi = \omega(t)dt$ и проинтегрировать в пределах от начального момента времени t_1 до конечного момента времени t_2 , то получится угол, на который повернулось тело за время $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t)dt. \quad (1.35)$$

Для характеристики неравномерного вращения тела вводится понятие **углового ускорения**. **Угловым ускорением** называется векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.36)$$

При ускоренном вращении вектор углового ускорения сонаправлен с вектором угловой скорости, а при замедленном – противоположен ему по направлению (рис. 1.11).

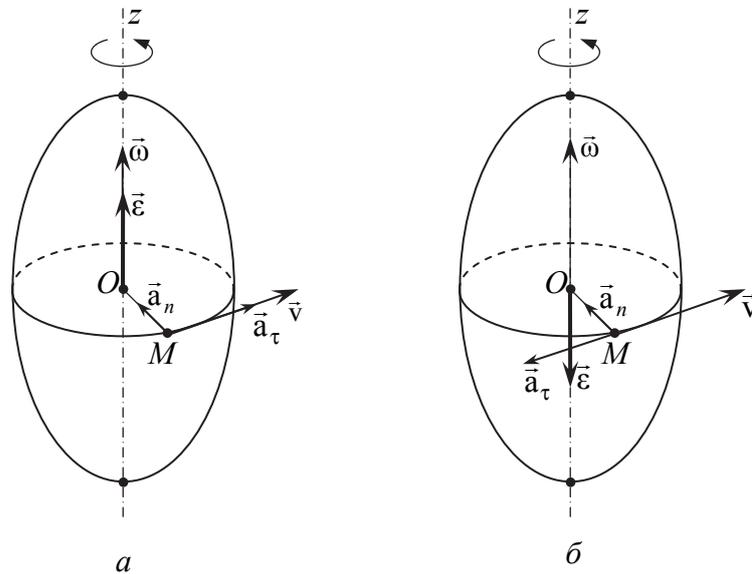


Рис. 1.11. Угловая скорость вращения тела:
a – ускоренное вращение; *b* – замедленное вращение

Если выражение (1.36) представить в виде $d\omega = \varepsilon(t)dt$ и проинтегрировать в пределах от начального момента времени t_1 до конечного момента времени t_2 , то получим приращение угловой скорости тела за время $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta\omega = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon(t)dt. \quad (1.37)$$

Единицей измерения углового ускорения в системе СИ является *радиан на секунду в квадрате* (обозначается рад/с² или с⁻²). Тело вращающееся с угловым ускорением 1 рад/с² за 1 с изменяет свою угловую скорость вращения на 1 рад/с.

Подобно равномерному, равнопеременному и переменному движениям материальной точки можно выделить равномерное, равнопеременное и переменное вращательные движения твердого тела. **Равномерным вращением** твердого тела называется вращательное движение с нулевым угловым ускорением: $\varepsilon = 0$. Из выражения (1.36)

следует, что угловая скорость материальной точки в данном случае постоянна, т. е. не изменяется с течением времени: $\omega = const$. Это означает, что за равные промежутки времени тело поворачивается на одинаковые углы. Воспользовавшись выражением (1.35), несложно получить угол, на который поворачивается тело за время t при равномерном вращении:

$$\Delta\varphi = \int_0^t \omega dt = \omega t. \quad (1.38)$$

Обратите внимание на то, что полученное выражение подобно выражению (1.28).

Равнопеременным вращением называется вращательное движение твердого тела с постоянным, т. е. не изменяющимся с течением времени, угловым ускорением: $\varepsilon = const$. Если с течением времени угловая скорость увеличивается, то вращение будет равноускоренным, а если уменьшается, то равнозамедленным. Пусть в начальный момент времени угловая скорость твердого тела равна ω_0 , тогда, воспользовавшись выражением (1.37), несложно получить выражение для угловой скорости через некоторое время t :

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon dt = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (1.39)$$

Таким образом, при равнопеременном вращении зависимость угловой скорости от времени описывается линейной функцией. Это значит, что за равные промежутки времени угловая скорость твердого тела изменяется на одинаковую величину. Воспользовавшись выражением (1.37), получим угол поворота тела за время t при равнопеременном вращении:

$$\Delta\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) dt = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (1.40)$$

Обратите внимание на подобие выражений (1.40) и (1.30).

Переменным вращением называется вращение твердого тела с угловым ускорением, которое изменяется с течением времени произвольным образом $\varepsilon = \varepsilon(t)$. Если зависимость $\varepsilon = \varepsilon(t)$ определена аналитически, то воспользовавшись уравнениями (1.37) и (1.35), можно получить выражения, определяющие зависимость угловой скорости и угла поворота от времени.

При описании вращательного движения твердого тела часто пользуются понятиями периода вращения T и частоты вращения ν . **Периодом вращения** T называется время, за которое тело при равномерном вращении совершает один оборот, т. е. поворачивается на угол 2π рад. Так как период T – это время, то единицей измерения периода в системе единиц СИ является *секунда*. Из выражения (1.38) следует, если разделить угол $\Delta\varphi = 2\pi$ рад, соответствующий одному обороту, на угловую скорость ω , то получится время, за которое совершается один оборот, т. е. период T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.41)$$

Частотой вращения ν называется число оборотов, совершаемых равномерно вращающимся телом, за единицу времени. Чтобы определить частоту вращения надо число оборотов N , совершенных телом за некоторое время t , разделить на это время: $\nu = N / t$. Так как тело совершает один оборот ($N = 1$) за время равное периоду вращения ($t = T$), то получим следующее:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (1.42)$$

Таким образом, частота вращения ν – это величина обратная периоду вращения T , и единицей измерения частоты в системе единиц СИ является с^{-1} .

При неравномерном вращении период ν и частота T изменяются с течением времени, но также могут быть рассчитаны по формулам (1.41) и (1.42).

КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1. Связь между векторами угловых и линейных кинематических величин.

2.2. Основные понятия динамики: сила, масса, импульс. Инерциальные системы отсчета. Законы движения Ньютона.

2.3. Преобразования Галилея. Классический закон сложения скоростей. Механический принцип относительности.

2.4. Движение тел относительно неинерциальных систем отсчета. Силы инерции.

2.1. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ УГЛОВЫХ И ЛИНЕЙНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Для описания вращательного движения твердого тела используются угловые кинематические величины: угловая скорость $\vec{\omega}$ и угловое ускорение $\vec{\epsilon}$. При этом материальные точки вращающегося тела движутся по окружностям, и их движение характеризуется линейными кинематическими величинами: линейной скоростью точки \vec{v} , векторами тангенциального \vec{a}_τ и нормального \vec{a}_n ускорений.

Скорость произвольной точки вращающегося тела называется **линейной скоростью** этой точки. Линейная скорость \vec{v} направлена по касательной к окружности, вдоль которой движется рассматриваемая точка (рис. 1.10). Пусть за время dt точка проходит по дуге окружности радиуса R путь $dS = R d\varphi$, тогда численное значение линейной скорости может быть найдено по формуле

$$v = \frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = \omega R = \omega r \sin \alpha, \quad (2.1)$$

где r – модуль радиус-вектора \vec{r} , который направлен от произвольной точки, лежащей на оси вращения, к рассматриваемой точке тела; α – угол между осью вращения и радиус-вектором \vec{r} .

Тангенциальное \vec{a}_τ и нормальное \vec{a}_n ускорения произвольной точки вращающегося тела направлены так, как показано на рис. 1.11, а их численные значения определяются следующими формулами:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = d \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{R d\omega}{dt} = \varepsilon R = \varepsilon r \sin \alpha, \quad (2.2)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R = \omega v. \quad (2.3)$$

В векторном виде выражения связывающие угловые и линейные кинематические величины запишутся в следующем виде:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}, \quad (2.4)$$

где знак « \times » обозначает векторное произведение.

Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , определяемый формулой

$$\vec{c} = ab \sin \gamma \vec{n} \quad (2.5)$$

или

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \quad (2.6)$$

где a и b – модули перемножаемых векторов; γ – угол между векторами; \vec{n} – единичный вектор нормали к плоскости, в которой лежат векторы \vec{a} и \vec{b} (рис. 2.1). Направление вектора \vec{n} выбирается таким образом, чтобы кратчайший поворот от первого вектора \vec{a} ко второму вектору \vec{b} , рассматриваемый с конца вектора \vec{n} , происходил против хода часовой стрелки. Модуль вектора \vec{c} , как это видно из выражения (2.5), может быть рассчитан по формуле

$$c = ab \sin \gamma. \quad (2.7)$$

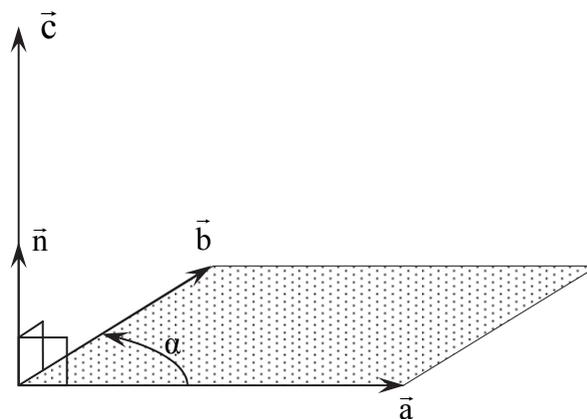


Рис. 2.1. Векторное произведение

Если в выражении (2.6) поменять местами множители \vec{a} и \vec{b} , то направление результирующего вектора \vec{c} изменится на противоположное, а модуль останется прежним.

2.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИНАМИКИ: СИЛА, МАССА, ИМПУЛЬС. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА. ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ НЬЮТОНА

Динамика является основным разделом механики и изучает законы движения тел во взаимосвязи с причинами, которые вызывают и изменяют это движение. В основе динамики лежат три закона сформулированные в 1687 г. Исааком Ньютоном¹. В то время существовало два основополагающих подхода к истолкованию движения тел по горизонтальной поверхности. Согласно первому из них, предложенному Аристотелем², находящееся на земле тело, получившее начальный толчок, всегда замедляется и останавливается. Исходя из этого, Аристотель считал, что естественным состоянием тела является покой. Основоположник второго подхода Галилео Галилей³ обратился к идеализированному случаю движения без сопротивления. Он мысленно представил, что если бы можно было устранить трение, то тело, получившее начальный толчок на горизонтальной поверхности, продолжало бы двигаться безостановочно в течение неопределенно длительного промежутка времени. Галилей сделал вывод, что для тела состояние движения столь же есте-

¹Исаак Ньютон (1642–1727) – английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисления, теорию цвета, заложил основы современной физической оптики, создал многие другие математические и физические теории.

²Аристотель (384–322 гг. до н. э.) – древнегреческий философ, основоположник формальной логики. Создал понятийный аппарат философии, стоял у истоков научного стиля мышления.

³Галилео Галилей (1564–1642) – итальянский физик, механик, астроном, философ и математик. Он первым использовал телескоп для наблюдения небесных тел и сделал ряд выдающихся астрономических открытий. Основатель экспериментальной физики. Своими экспериментами он убедительно опроверг умозрительную метафизику Аристотеля и заложил фундамент классической механики.

ственно, как и состояние покоя. Развивая идеи Галилея, Ньютон сформулировал следующий закон.



Первый закон Ньютона: всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, если на тело не действуют другие тела или их действие скомпенсировано.

Стремление тела сохранить состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется **инертностью**. Поэтому первый закон Ньютона называют также **законом инерции**. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета. Допустим, имеются две системы отсчета, двигающиеся друг относительно друга с некоторым ускорением. Если относительно одной из них тело покоится, то относительно другой оно будет двигаться с ускорением. Получается, что в одной системе отсчета первый закон Ньютона выполняется, а в другой не выполняется. Системы отсчета, по отношению к которым первый закон Ньютона выполняется, **называются инерциальными системами отсчета**. Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно и равномерно, т. е. с постоянной скоростью, будет также инерциальной. Системы отсчета, по отношению к которым первый закон Ньютона не выполняется, называются **неинерциальными системами отсчета**. Неинерциальные системы отсчета движутся относительно инерциальных систем с некоторым ускорением.

С современной точки зрения, первый закон Ньютона в том виде, как он был сформулирован Ньютоном, неверен. Во-первых, тело при отсутствии действующих на него сил может совершать вращательное движение, поэтому термин «тело» следует заменить термином «материальная точка». Во-вторых, и это главное, Ньютон в своем труде опирался на существование абсолютной неподвижной системы отсчета, существование которой современная физика отвергает, а в произвольной системе отсчета (скажем, вращающейся), как уже было объяснено выше, первый закон Ньютона не выполняется. Поэтому в современной физике первый закон Ньютона постулирует существование инерциальных систем отсчета и формулируется иначе.



Первый закон Ньютона в современной формулировке: существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, относительно которых материальная точка, когда на нее не действуют никакие силы (или их действие взаимно уравновешено), находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Опытным путем установлено, что система отсчета, центр которой совмещен с Солнцем, а оси направлены на соответствующим образом выбранные звезды, является с очень высокой степенью точности инерциальной, и она называется гелиоцентрической системой отсчета (гелиос – по гречески Солнце). Земля движется относительно Солнца и звезд по криволинейной траектории, имеющей форму эллипса. Криволинейное движение всегда происходит с некоторым ускорением. Кроме того, Земля совершает вращение вокруг своей оси. По этим причинам система отсчета, связанная с земной поверхностью, движется с ускорением относительно гелиоцентрической системы отсчета и не является инерциальной. Однако ускорение такой системы отсчета настолько мало, что в ряде случаев ее можно считать практически инерциальной.

Воздействие на данное тело со стороны других тел вызывает изменение его скорости, т. е. сообщает данному телу ускорение. Опыт показывает, что одинаковое воздействие сообщает разным телам разные по величине ускорения. Всякое тело «противится» попыткам изменить его состояние движения. Как указывалось ранее, это свойство тел называется инертностью. Количественной мерой инертности тел является **инертная масса**. В теории гравитации Ньютона присутствует также понятие **гравитационной массы**, которая является количественной мерой гравитационного взаимодействия. К настоящему времени экспериментально показано, что инертная и гравитационная массы с большой степенью точности совпадают, т. е. они эквивалентны. Этот фундаментальный закон природы называется принципом эквивалентности. Таким образом, **масса** – это физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи и определяющая ее инерционные и гравитационные свойства. Единицей массы в международной системе единиц СИ является *килограмм* (обозначается кг).

Импульсом или количеством движения материальной точки называется векторная физическая величина, равная произведению массы m материальной точки на ее скорость \vec{v} :

$$\vec{p} = m \vec{v}. \quad (2.8)$$

Направление вектора \vec{p} совпадает с направлением вектора скорости \vec{v} . Единицей измерения импульса в международной системе единиц СИ является $\text{кг} \cdot \text{м/с}$.

Сила – это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате чего тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.



Второй закон Ньютона: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.9)$$

Если на материальную точку действует несколько сил, то сила во втором законе Ньютона представляет собой равнодействующую (т. е. векторную сумму) всех приложенных сил.

Заменим в выражении (2.9) импульс \vec{p} произведением массы m на скорость \vec{v} , тогда для точки постоянной массы получим:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{a} = \vec{F}.$$



Отсюда следует еще одна формулировка второго закона Ньютона: ускорение материальной точки прямо пропорционально приложенной силе и обратно пропорционально массе:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.10)$$

Это выражение для второго закона Ньютона устанавливает связь между кинематической характеристикой движения – ускорением \vec{a} и такими понятиями, как сила \vec{F} и масса m .

Единица измерения силы в международной системе единиц СИ – *ньютон* (обозначается Н). 1 Н – это сила, которую надо приложить к телу массой 1 кг, чтобы сообщить ему ускорение 1 м/с²:

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Второй закон Ньютона позволяет решать **основную задачу механики** – определить кинематический закон движения материальной точки, если известны приложенные силы и начальные условия. Поэтому выражение (2.10) называется **основным уравнением динамики поступательного движения**.



Третий закон Ньютона: силы, с которыми две материальные точки взаимодействуют друг с другом, равны по величине, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, проходящей через эти точки:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.11)$$

В этом законе \vec{F}_{12} – это сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй, а \vec{F}_{21} – это сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой. Знак «минус» указывает на то, что эти силы направлены в противоположные стороны.

2.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ. КЛАССИЧЕСКИЙ ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ. МЕХАНИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Законы Ньютона, строго говоря, выполняются только в инерциальных системах отсчета. В классической механике при переходе от описания движения в одной инерциальной системе отсчета к описанию движения в другой инерциальной системе отсчета пользуются преобразованиями координат и времени, которые называются **преобразованиями Галилея**.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью \vec{v} (рис. 2.2). Одну из этих систем обозначим буквой K и будем считать неподвижной. Тогда вторая система K' будет двигаться поступательно прямолинейно и равномерно. Выберем координатные оси x, y, z системы K и оси x', y', z' системы K' так, чтобы оси x и x' совпадали, а оси y и y' , а также z и z' были параллельны друг другу. Найдем связь между координатами x, y, z некоторой точки M в системе K и координатами x', y', z' той же точки в системе K' . Отсчет времени начнем с того момента, когда начала координат обеих систем совпадали. Тогда очевидно, что координаты точки M в системах K и K' связаны соотношениями

$$\begin{aligned}x &= x' + vt, \\y &= y', \\z &= z'.\end{aligned}\tag{2.12}$$

При векторном способе задания движения соотношения (2.12) сводятся в выражению, которое связывает радиус-вектор \vec{r} точки M в системе K с радиус-вектором \vec{r}' точки M в системе K' :

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t.\tag{2.13}$$

Добавляя к этим соотношениям принятое в классической механике предположение, что время в обеих системах течет одинаковым образом, т. е.

$$t = t', \quad (2.14)$$

получаем совокупность уравнений, называемых преобразованиями Галилея.

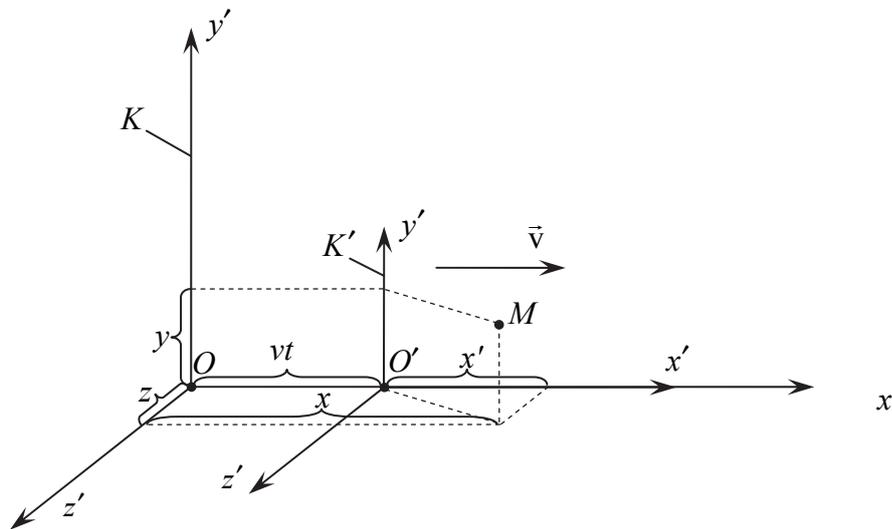


Рис. 2.2. Преобразования Галилея

Преобразования Галилея (2.12–2.14) справедливы только в классической механике, т. е. когда движение происходит со скоростями на много меньше скорости света; при скоростях сравнимых со скоростью света они должны быть заменены более общими преобразованиями Лоренца, которые мы рассмотрим на лекции, посвященной основам общей теории относительности.

Чтобы найти соотношение между скоростью точки M в системах K и K' , продифференцируем соотношения (2.12) и (2.13) по времени. В результате при координатном способе описания движения получим

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x + v, \\ u_y &= u'_y, \\ u_z &= u'_z, \end{aligned} \quad (2.15)$$

а при векторном – следующее:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}. \quad (2.16)$$

Формулы (2.15) и (2.16) представляют собой **закон сложения скоростей в классической механике**.

Чтобы получить соотношение между ускорением точки M в системах K и K' , продифференцируем выражения (2.15) и (2.16) по времени. Учитывая, что скорость $\vec{v} = const$, при координатном способе описания движения получим

$$a_x = a'_x, \quad a_y = a'_y, \quad a_z = a'_z, \quad (2.17)$$

а при векторном

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (2.18)$$



Таким образом, ускорение материальной точки не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, т. е. оно инвариантно относительно преобразований Галилея.

Силы взаимодействия материальных точек зависят только от их взаимного расположения и от скоростей движения друг относительно друга. Используя соотношения (2.9) и (2.10) можно показать, что взаимное расположение и скорость относительного движения любых двух материальных точек не зависят от выбора инерциальной системы отсчета, т. е. они инвариантны относительно преобразований Галилея. Соответственно, инвариантны относительно преобразований Галилея и силы, действующие на материальную точку:

$$\vec{F} = \vec{F}'. \quad (2.19)$$

Это означает, что во всех инерциальных системах отсчета вид второго и третьего законов Ньютона будет одним и тем же.



Таким образом, в классической механике справедлив механический принцип относительности (принцип относительности Галилея): законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Это означает, что никакими механическими опытами, проведенными в данной инерциальной системе отсчета, нельзя установить, покоится ли она или движется равномерно и прямолинейно. Все инерциальные системы отсчета эквивалентны между собой, и на основе законов механики нельзя выделить из множества инерциальных систем отсчета какую-то «главную» систему отсчета, которая обладала бы какими-то преимуществами перед другими, так что движение тел относительно нее можно было бы рассматривать как их «абсолютное движение», а покой как «абсолютный покой».

2.4. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Преобразования Галилея позволяют перейти от описания движения материальной точки в одной инерциальной системе отсчета к описанию движения этой точки в другой инерциальной системе отсчета. Однако часто приходится рассматривать движение по отношению к двум взаимно перемещающимся системам отсчета, одна из которых инерциальная, а другая неинерциальная. При этом инерциальную систему отсчета принимают как условно неподвижную, тогда неинерциальную, перемещающуюся с некоторым ускорением, считают подвижной. Движение тела, рассматриваемое одновременно по отношению к подвижной и неподвижной системам отсчета, называется **сложным движением**. При этом движение тела относительно неподвижной системы отсчета называется **абсолютным**, а относительно подвижной системы – **относительным**. Движение самой подвижной системы отсчета относительно неподвижной называется **переносным**.

Связь между кинематическими характеристиками абсолютного, относительного и переносного движений задается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{абс} &= \vec{r}_0 + \vec{r}_{отн}, \\ \vec{v}_{абс} &= \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}, \\ \vec{a}_{абс} &= \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор},\end{aligned}\tag{2.20}$$

где $\vec{r}_{абс}$ и $\vec{r}_{отн}$ – радиус-векторы материальной точки в неподвижной и подвижной системах отсчета, соответственно; \vec{r}_0 – радиус-вектор начала координат подвижной системы отсчета; $\vec{v}_{абс}$ и $\vec{a}_{абс}$ – скорость и ускорение материальной точки в неподвижной системе отсчета; $\vec{v}_{отн}$ и $\vec{a}_{отн}$ – скорость и ускорение материальной точки в подвижной системе отсчета; $\vec{v}_{пер}$ и $\vec{a}_{пер}$ – скорость и ускорение той точки подвижной системы отсчета, в которой оказалась движущаяся материальная точка в данный момент времени; $\vec{a}_{кор}$ – ускорение Кориолиса¹, которое отражает эффект взаимного кинематического влияния относительного и переносного движений друг на друга. Ускорение Кориолиса определяется выражением

¹Гаспáр-Гюста́в де Кориоли́с (1792–1843) – французский математик, механик и инженер. Больше всего известен работами по изучению ускорений и сил инерции в неинерциальных системах отсчета.

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{v}_{\text{отн}}, \quad (2.21)$$

где $\vec{\omega}_{\text{пер}}$ – угловая скорость вращения подвижной системы.

В неинерциальных системах законы Ньютона не выполняются. Однако, если кроме сил, обусловленных воздействием тел друг на друга, ввести в рассмотрение силы особого рода, так называемые **силы инерции**, то законы Ньютона становятся справедливы и для неинерциальных систем отсчета.

Чтобы вывести закон движения тела в неинерциальной системе отсчета, будем рассматривать это движение относительно неподвижной инерциальной системы отсчета и относительно неинерциальной системы, движущейся ускоренно относительно инерциальной.

С учетом выражения (2.20) для ускорения второй закон Ньютона в неподвижной инерциальной системе отсчета запишется в следующем виде:

$$m\vec{a}_{\text{отн}} + m\vec{a}_{\text{пер}} + m\vec{a}_{\text{кор}} = \vec{F}.$$

Чтобы получить уравнение динамики в неинерциальной системе отсчета, перенесем в правую часть слагаемые, содержащие $\vec{a}_{\text{пер}}$ и $\vec{a}_{\text{кор}}$:

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F} - m\vec{a}_{\text{пер}} - m\vec{a}_{\text{кор}}. \quad (2.22)$$

Для того, чтобы придать этому уравнению вид второго закона Ньютона, введем в рассмотрение две силы инерции: переносную силу инерции $\vec{F}_{\text{пер}}$ и кориолисову силу инерции $\vec{F}_{\text{кор}}$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{пер}} &= -m\vec{a}_{\text{пер}}, \\ \vec{F}_{\text{кор}} &= -m\vec{a}_{\text{кор}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Подставляя выражения (2.23) в уравнение (2.22) получим **уравнение динамики в неинерциальной системе отсчета**

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{пер}} + \vec{F}_{\text{кор}}. \quad (2.24)$$

Силы инерции обусловлены неинерциальностью той системы отсчета, в которой рассматриваются механические явления и, в отличие от реальных физических сил, описывающих взаимодействие тел, силы инерции изменяются при переходе от одной системы отсчета к другой, а при переходе к инерциальной системе отсчета вообще исчезают. Кроме того, силы инерции не подчиняются третьему закону Ньютона, ведь если к материальной точке в неинерциальной системе отсчета приложены силы инерции, то не существует противодействующей силы, приложенной к какой-либо другой материальной точке. В силу всех этих причин с позиций классической механики Ньютона силы

инерции являются фиктивными силами. Тем не менее, использование понятия «сила инерции» оказывается очень удобным при описании движения с позиции наблюдателя, находящегося в неинерциальной системе отсчета. В повседневной жизни мы постоянно ощущаем на себе действие сил инерции (например, при разгоне и торможении общественного транспорта, при катании на карусели).

Силы инерции в поступательно движущейся неинерциальной системе отсчета

Рассмотрим неинерциальную систему отсчета K' , которая движется поступательно, относительно инерциальной системы K (рис. 2.3). Пусть начало координат системы K' точка O' движется по некоторой криволинейной траектории. При поступательном движении скорости и ускорения всех точек системы отсчета K' одинаковы и равны скорости и ускорению точки O' . Движение точки O' зададим естественным способом:

$$s_0 = s_0(t), \quad v_0 = \frac{ds_0}{dt}, \quad \vec{a}_0 = \vec{a}_{0\tau} + \vec{a}_{0n},$$

где s_0 – дуговая координата точки O' ; v_0 – мгновенная скорость точки O' ; $\vec{a}_0, \vec{a}_{0\tau}, \vec{a}_{0n}$ – полное, тангенциальное и нормальное ускорения точки O' соответственно.

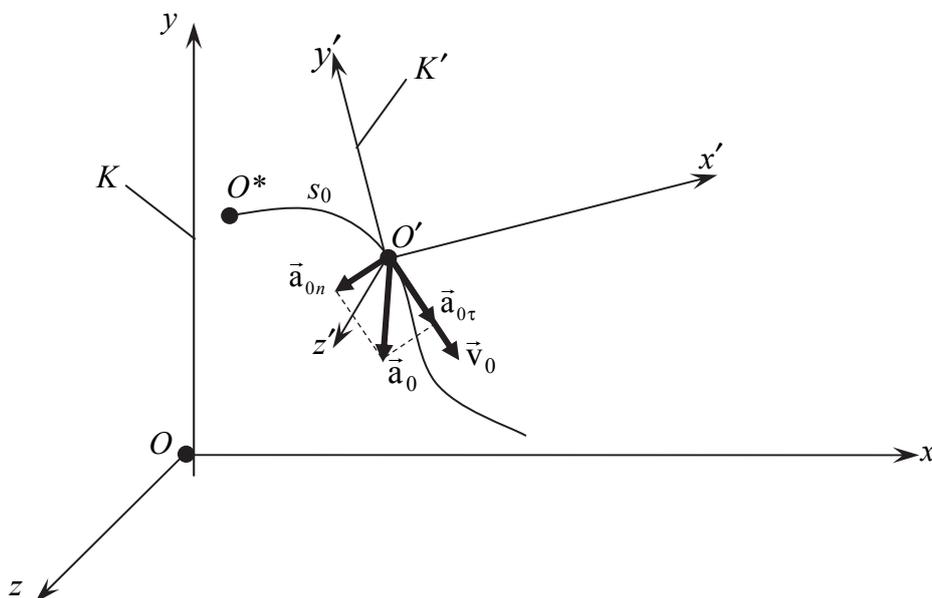


Рис. 2.3. Движение неинерциальной системы отсчета K' относительно инерциальной системы отсчета K

Движение материальной точки M в неинерционной системе K' (рис. 2.4) характеризуется относительной скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ и относительным ускорением $\vec{a}_{\text{отн}}$. Чтобы определить силы инерции, действующие на материальную точку M , необходимо найти ускорение Кориолиса и переносное ускорение точки M . Поскольку переносное движение системы K' является поступательным ($\omega_{\text{пер}} = 0$ – система не вращается), то в соответствии с (2.23) ускорение Кориолиса равно нулю, а переносное ускорение точки M равно ускорению точки O' или любой другой точки системы K' :

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\text{кор}} &= 0, \\ \vec{a}_{\text{пер}} &= \vec{a}_0 = \vec{a}_{0\tau} + \vec{a}_{0n},\end{aligned}$$

тогда

$$\vec{F}_{\text{пер}} = -m\vec{a}_0 = -m\vec{a}_{0\tau} - m\vec{a}_{0n}.$$

Таким образом, переносную силу инерции $\vec{F}_{\text{пер}}$ можно разделить на две перпендикулярные друг другу составляющие: нормальную силу инерции $\vec{F}_{\text{пер}n}$ и касательную силу инерции $\vec{F}_{\text{пер}\tau}$:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{пер}} &= \vec{F}_{\text{пер}\tau} + \vec{F}_{\text{пер}n}, \\ \vec{F}_{\text{пер}n} &= -m\vec{a}_{0n}, \\ \vec{F}_{\text{пер}\tau} &= -m\vec{a}_{0\tau}, \\ \vec{F}_{\text{кор}} &= 0.\end{aligned}\tag{2.25}$$

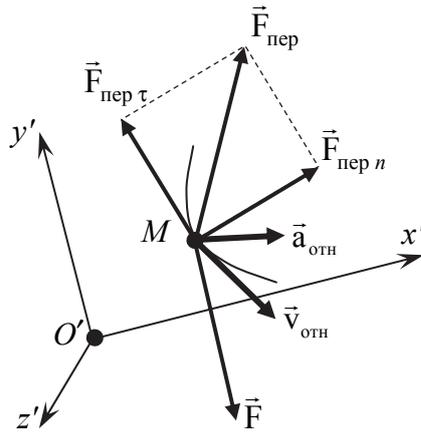


Рис. 2.4. Силы инерции в поступательно движущейся неинерциальной системе отсчета K'

Силы инерции во вращающейся неинерциальной системе отсчета

Рассмотрим неинерциальную систему отсчета K' , которая вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_{\text{пер}}$ и угловым ускорением $\vec{\epsilon}_{\text{пер}}$ вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат (точку O'). При этом точка O' и ось вращения являются неподвижными относительно инерциальной системы отсчета K . Для наглядности на рис. 2.5 система отсчета K' показана в виде диска, ось которого является осью вращения и совпадает с осью y' .

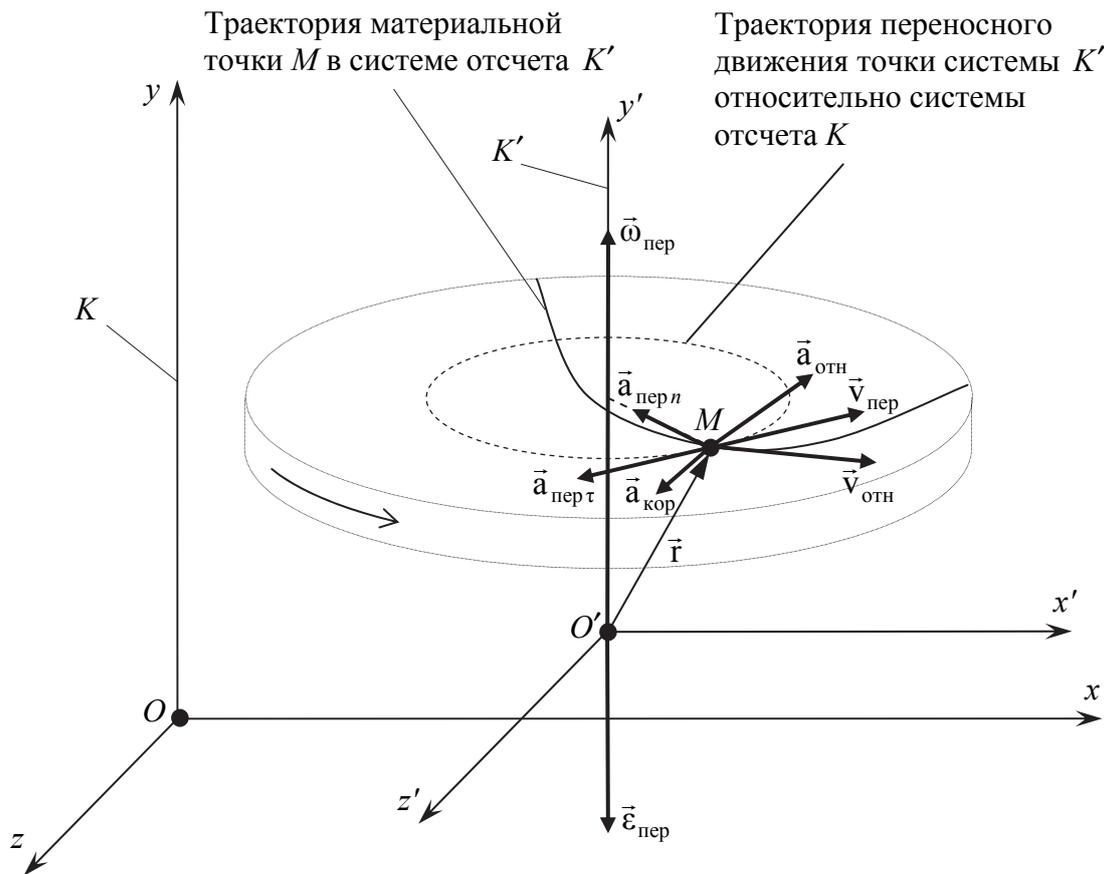


Рис. 2.5. Движение неинерциальной системы отсчета K' относительно инерциальной системы отсчета K

Точка M , движущаяся относительно системы отсчета K' со скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ и ускорением $\vec{a}_{\text{отн}}$, характеризуется также переносными касательным $\vec{a}_{\text{пер } \tau}$, переносным нормальным $\vec{a}_{\text{пер } n}$ ускорениями и ускорением Кориолиса $\vec{a}_{\text{кор}}$:

$$\vec{a}_{\text{пер } \tau} = \vec{\epsilon}_{\text{пер}} \times \vec{r},$$

$$\vec{a}_{\text{пер } n} = \vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{v}_{\text{пер}},$$

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{v}_{\text{отн}},$$

где \vec{r} – радиус-вектор точки M в системе отсчета K' ; $\vec{v}_{\text{пер}}$ – переносная скорость точки M , определяемая выражением

$$\vec{v}_{\text{пер}} = \vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{r}.$$

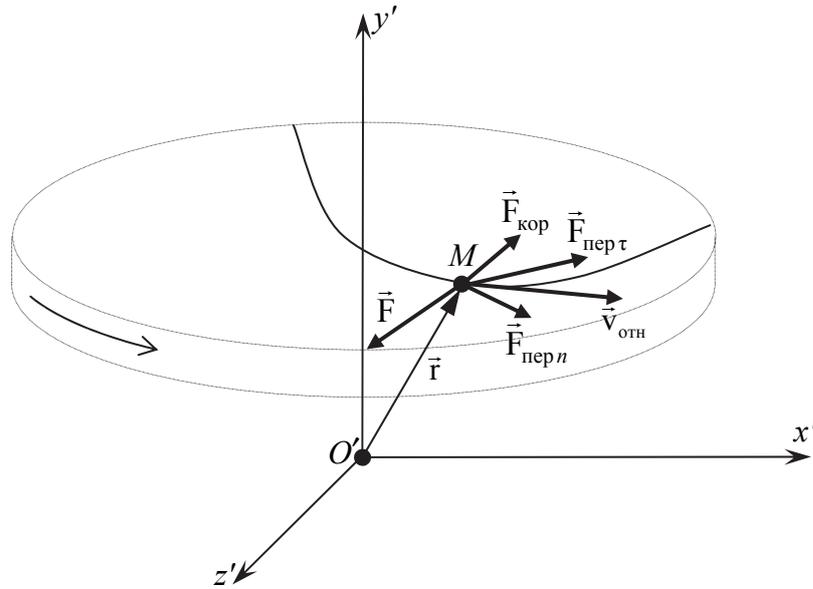


Рис. 2.6. Силы инерции во вращающейся неинерциальной системе отсчета K'

Таким образом, при изучении движения во вращающихся системах отсчета нужно принимать во внимание три силы инерции (рис. 2.6): нормальную силу инерции $\vec{F}_{\text{пер } n}$ (называемую также центробежной силой инерции), касательную силу инерции $\vec{F}_{\text{пер } \tau}$ и кориолисову силу инерции $\vec{F}_{\text{кор}}$:

$$\vec{F}_{\text{пер}} = \vec{F}_{\text{пер } \tau} + \vec{F}_{\text{пер } n} + \vec{F}_{\text{кор}},$$

$$\vec{F}_{\text{пер } n} = -m \vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{v}_{\text{пер}},$$

$$\vec{F}_{\text{пер } \tau} = -m \vec{\epsilon}_{\text{пер}} \times \vec{r},$$

$$\vec{F}_{\text{кор}} = -2m \vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{v}_{\text{отн}}.$$

(2.26)

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА. ЦЕНТР МАСС. РАБОТЫ СИЛЫ. МОЩНОСТЬ

3.1. Механическая система. Импульс механической системы. Закон сохранения импульса.

3.2. Центр масс механической системы. Теорема о движении центра масс.

3.3. Движение тела переменной массы.

3.4. Работа постоянной и переменной силы. Мощность.

3.1. МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА. ИМПУЛЬС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Совокупность материальных точек, выделенная для решения некоторой задачи, называется **механической системой**. Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются **внутренними**. Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются **внешними**. Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется **замкнутой**. На практике в абсолютном большинстве случаев приходится иметь дело с незамкнутыми механическими системами, т. е. практически невозможно выделить механическую систему, на материальные точки которой внешние силы не действуют. Однако в ряде случаев действием внешних сил можно пренебречь, например, когда эти силы малы по сравнению с внутренними силами.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек, массы и скорости которых соответственно равны m_1, m_2, \dots, m_n и $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Пусть $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ – равнодействующие внешних сил, действующих на каждую из этих материальных точек, а $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ – равнодействующие внутренних сил. Запишем второй закон Ньютона для каждой из n материальных точек механической системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1) = \vec{F}_1 + \vec{F}'_1, \\ \frac{d}{dt}(m_2 \vec{v}_2) = \vec{F}_2 + \vec{F}'_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt}(m_n \vec{v}_n) = \vec{F}_n + \vec{F}'_n. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Складывая почленно эти уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n) = \\ = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) + (\vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Используя знак суммы Σ , можно каждую из сил $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ представить в следующем виде:

$$\vec{F}'_1 = \sum_{j=1}^n \vec{F}'_{1j}, \quad \vec{F}'_2 = \sum_{j=1}^n \vec{F}'_{2j}, \quad \dots, \quad \vec{F}'_n = \sum_{j=1}^n \vec{F}'_{nj},$$

где $\vec{F}'_{jj} = 0$. Тогда уравнение (3.2) записать в более удобной форме:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}'_{ij}. \quad (3.3)$$

Согласно третьему закону Ньютона, силы взаимодействия между любыми двумя материальными точками механической системы равны по модулю и противоположны по направлению, это означает, что сумма векторов всех внутренних сил равна нулю $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}'_{ij} = 0$. Тогда

уравнение (3.3) упрощается:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (3.4)$$

Далее, изменив последовательность суммирования и дифференцирования, получим следующее:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

или

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (3.5)$$

где $\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$ – **импульс механической системы**, который представляет собой векторную сумму импульсов всех материальных точек механической системы. Уравнение (3.5) является следствием второго и третьего законов Ньютона. При этом необходимо понимать, что второй закон Ньютона (2.9) описывает поведение одной материальной точки, тогда как уравнение (3.5) характеризует поведение механической системы, состоящей из практически любого числа материальных точек. Уравнение (3.5) иногда называют теоремой об изменении импульса механической системы и формулируют следующим образом: **скорость изменения импульса механической системы равна векторной сумме внешних сил, действующих на систему**.

Предположим, что векторная сумма всех внешних сил, действующих на механическую систему, равна нулю. Тогда уравнение (3.5) примет вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) = 0.$$

Это означает, что импульс \vec{p} механической системы является константой, т. е. он не изменится с течением времени.



Таким образом, мы получили закон сохранения импульса: импульс механической системы не изменяется с течением времени, если векторная сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\text{если } \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \text{ то } \vec{p} = \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) = \text{const.} \quad (3.6)$$



Этот закон выполняется в том числе и для замкнутых механических систем, тогда он формулируется следующим образом: импульс замкнутой механической системы не изменяется с течением времени.

Спроецируем уравнение (3.5) на координатные оси

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{xi}, \\ \frac{dp_y}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{yi}, \\ \frac{dp_z}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{zi}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Теперь, если сумма проекций внешних сил на некоторую координатную ось равна нулю, то проекция импульса механической системы на эту же ось будет постоянной величиной (константой), т. е. не будет изменяться с течением времени:

$$\begin{aligned} \text{если } \sum_{i=1}^n F_{xi} = 0, \quad \text{то } p_{xi} &= \sum_{i=1}^n (m_i v_{xi}) = \text{const}, \\ \text{если } \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0, \quad \text{то } p_{yi} &= \sum_{i=1}^n (m_i v_{yi}) = \text{const}, \\ \text{если } \sum_{i=1}^n F_{zi} = 0, \quad \text{то } p_{zi} &= \sum_{i=1}^n (m_i v_{zi}) = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выражения (3.8) являются следствием закона сохранения импульса.

Мы получили закон сохранения импульса, основываясь на втором и третьем законах Ньютона. Однако закон сохранения импульса справедлив не только в рамках классической механики, он носит универсальный характер и выполняется в релятивистской и квантовой механике. Закон сохранения импульса – это фундаментальный закон природы. Он является следствием определенного свойства симметрии пространства – его однородности. Под однородностью пространства понимают одинаковость свойств пространства во всех его точках. Это значит, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места пространства в другое не изменяет механические свойства системы.

3.2. ЦЕНТР МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

В динамике широко используется понятие центра масс механической системы. **Центром масс** системы материальных точек называется воображаемая точка C , положение которой характеризует

распределение массы этой системы, и радиус-вектор которой определяется выражением

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (3.9)$$

где m_i и \vec{r}_i – соответственно масса и радиус-вектор i -й материальной точки; n – число материальных точек в системе; m – суммарная масса системы. Если начало координат совпадает с положением центра масс системы (т. е. радиус-векторы проводятся из центра масс), то $\vec{r}_C = 0$, и

следовательно $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0$. Таким образом, центр масс – это геометри-

ческая точка, для которой сумма произведений масс материальных точек, образующих механическую систему, на их радиус-векторы, проведенные из этой точки, равна нулю.

В случае непрерывного распределения массы в системе (например, в случае протяженного тела) радиус-вектор центра масс системы определяется выражением

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \int_{(m)} \vec{r} dm = \frac{1}{m} \int_{(V)} \vec{r} \rho dV, \quad (3.10)$$

где \vec{r} – радиус-вектор малого элемента системы, масса которого равна dm , а объем – dV ; ρ – плотность тела; интегрирование проводится по всем элементам системы, т. е. по всей ее массе m или по всему объему V .

Определим скорость центра масс механической системы:

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{p}}{m}.$$

Мы учли, что $\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$ – это импульс механической системы. Тогда

получим

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_C. \quad (3.11)$$

Таким образом, импульс механической системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс. Подставляя выражение для импульса механической системы в уравнение (3.5), получим

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (3.12)$$



Это выражение представляет собой закон движения центра масс: центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы, и на которую действует сила, равная векторной сумме всех внешних сил, приложенных к системе.

Этот закон показывает, что для изменения скорости центра масс системы необходимо, чтобы на систему действовала внешняя сила. Внутренние силы взаимодействия частей системы могут вызвать изменения скоростей этих частей (например при разрыве снаряда на несколько осколков), но они не могут повлиять на суммарный импульс системы и скорость ее центра масс.

Из закона движения центра масс следует, что скорость центра масс замкнутой механической системы не изменяется с течением времени. Иными словами, центр масс замкнутой механической системы либо покоится, либо движется с постоянной скоростью относительно инерциальной системы отсчета.

3.3. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Движение некоторых тел сопровождается изменением их массы, например масса катушки с кабелем увеличивается или уменьшается в зависимости от того, наматывается на нее кабель или сматывается. Еще одним примером является полет ракеты, масса которой уменьшается вследствие истечения газов, образующихся при сгорании топлива.

Выведем уравнение движения тела переменной массы на примере движения ракеты (рис. 3.1). Пусть в момент времени t масса ракеты m , а ее скорость \vec{v} . Тогда по истечении времени dt вследствие истечения газов ее масса уменьшится на величину dm_r и станет равной $m - dm_r$, а скорость станет равной $\vec{v} + d\vec{v}$. Изменение импульса системы (ракета – истекшие газы) за отрезок времени dt будет определяться выражением

$$d\vec{p} = [(m - dm_r)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_r(\vec{v} + \vec{u})] - m\vec{v},$$

где \vec{u} – скорость истечения газов относительно ракеты. Учтем, что приращению массы выбрасываемого из ракеты газа соответствует убыль массы ракеты, т. е. $dm_r = -dm$:

$$d\vec{p} = [(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm(\vec{v} + \vec{u})] - m\vec{v}.$$

Далее раскрывая скобки и учитывая, что член $dm d\vec{v}$ является малым высшего порядка малости по сравнению с остальными членами, получим следующее выражение:

$$d\vec{p} = m d\vec{v} - \vec{u} dm.$$

Если на систему действуют внешние силы, то согласно второму закону Ньютона $d\vec{p} = \vec{F} dt$. Тогда получим:

$$\vec{F} dt = m d\vec{v} - \vec{u} dm,$$

или

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{dm}{dt}. \quad (3.13)$$

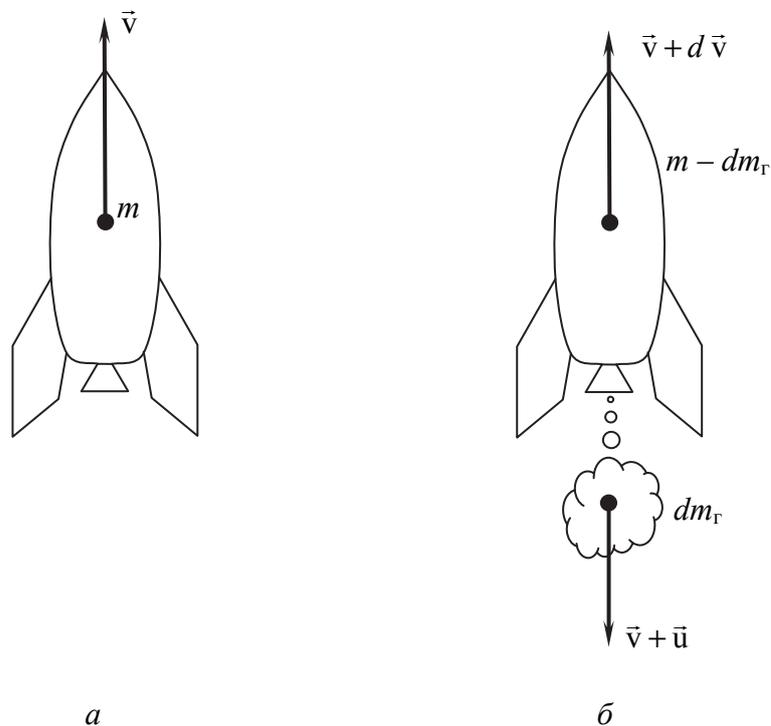


Рис. 3.1. Движение тела переменной массы на примере ракеты:
a – в момент времени *t*; *б* – в момент времени *t + dt*

Второй член в правой части получившегося выражения называют **реактивной силой \vec{F}_p** :

$$\vec{F}_p = \vec{u} \frac{dm}{dt}. \quad (3.14)$$

Так как масса ракеты уменьшается, то производная dm / dt в выражении (3.14) отрицательна, следовательно, вектор реактивной силы

\vec{F}_p противоположен по направлению вектору скорости \vec{v} . Таким образом, получаем следующее уравнение движения тела переменной массы:

$$m \vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_p. \quad (3.15)$$

Это уравнение было впервые выведено И. В. Мещерским¹ и поэтому называется **уравнением Мещерского**.

Применим уравнение (3.13) для расчета скорости ракеты, на которую не действуют никакие внешние силы. Полагая $\vec{F} = 0$ и считая, что скорость ракеты \vec{v} и скорость истечения газов \vec{u} направлены во взаимно противоположные стороны, получим в проекции на направление движения

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt}$$

или

$$dv = -u \frac{dm}{m}.$$

Проинтегрируем правую и левую части получившегося уравнения, предположив, что в начальный момент ракета находится на стартовой площадке, потом стартует и после сгорания топлива массой m_T приобретает скорость v_{max} . Масса ракеты при этом уменьшается от стартовой массы $m_p + m_T$ до конечной массы m_p , а скорость увеличивается от 0 до v_{max} :

$$\int_0^{v_{max}} dv = -u \int_{m_p+m_T}^{m_p} \frac{dm}{m}$$

или

$$v_{max} = u \ln \frac{m_p + m_T}{m_p}. \quad (3.16)$$

Формула (3.16) называется **формулой Циолковского**², а скорость v_{max} — **характеристической скоростью ракеты**. В действительности из-за влияния тяготения Земли и аэродинамического сопротивления атмосферы скорость ракеты в момент полного выгорания топлива и прекращения работы двигателя значительно меньше характеристической скорости.

¹Иван Всеволодович Мещерский (1859–1935) – русский и советский ученый-механик, основоположник механики систем переменной массы.

²Константин Эдуардович Циолковский (1857–1935) – русский и советский ученый-самоучка и изобретатель, школьный учитель. Основоположник теоретической космонавтики.

3.4. РАБОТА ПОСТОЯННОЙ И ПЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ. МОЩНОСТЬ

Энергия – универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др. Изменение механического движения вызывается силами, действующими на тело со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие работы силы.

Работой постоянной силы на прямолинейном участке пути называется физическая величина, равная скалярному произведению вектора силы \vec{F} на вектор перемещения \vec{s} :

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs \cos \alpha, \quad (3.17)$$

где α – угол между векторами \vec{F} и \vec{s} (рис. 3.2).

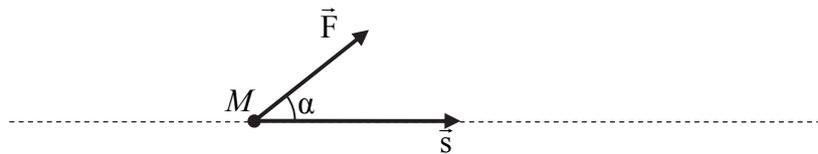


Рис. 3.2. Определение работы постоянной силы на прямолинейном участке пути

В случае переменной силы, действующей на криволинейном участке траектории, введем понятие элементарной работы δA . **Элементарной работой** δA силы \vec{F} на элементарном участке пути ds называется скалярное произведение силы \vec{F} на вектор перемещения $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F ds \cos \alpha = F_{\tau} ds, \quad (3.18)$$

где $F_{\tau} = F \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{F} на касательную к траектории (рис. 3.3).

Работа, совершаемая силой \vec{F} на конечном участке пути от точки 1 до точки 2, равна сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути и определяется криволинейным следующим интегралом:

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \alpha ds = \int_{s_1}^{s_2} F_{\tau} ds, \quad (3.19)$$

где s – дуговая координата точки, отсчитываемая вдоль ее траектории; s_1 и s_2 – значения дуговой координаты в точках 1 и 2.

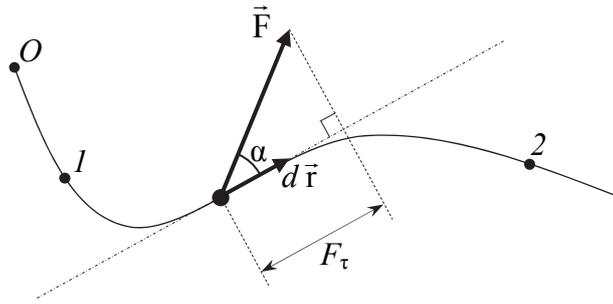


Рис. 3.3. Определение элементарной работы силы на элементарном участке пути и работы на участке траектории от точки 1 до точки 2

Если угол $\alpha < 90^\circ$, то работа силы \vec{F} положительна, тогда сила называется движущей. Если $\alpha > 90^\circ$, то работа силы \vec{F} отрицательна, сила препятствует движению. Если $\alpha = 90^\circ$, то работа силы \vec{F} равна нулю.

На графике зависимости F_τ от длины пути s , работа силы равна площади под кривой $F_\tau(s)$ (рис. 3.4).

Единицей измерения работы в международной системе единиц СИ является *джоуль* (обозначается Дж). 1 Дж – это работа, совершаемая силой 1 Н, действующей на материальную точку, которая перемещается в направлении действия силы на расстояние 1 м:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}.$$

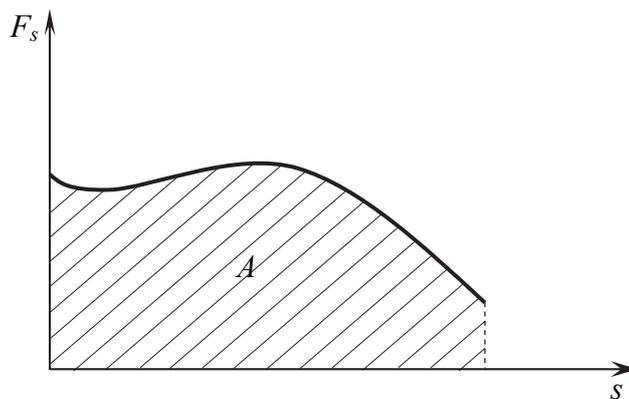


Рис. 3.4. Графическое представление работы переменной силы

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, введем понятие мощности. Мощностью называется отношение элементарной работы δA , совершаемой силой \vec{F} за малый промежуток времени dt , к величине этого промежутка:

$$N = \frac{\delta A}{dt}. \quad (3.20)$$

За время dt сила \vec{F} , действующая на материальную точку, совершает работу $\vec{F} \cdot d\vec{r}$. Тогда мощность, развиваемая этой силой, определяется следующим выражением:

$$N = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (3.21)$$

где \vec{v} – мгновенная скорость материальной точки.

Единица измерения мощности в международной системе единиц СИ – *ватт* (обозначается Вт). **Мощность** 1 Вт развивается в том случае, когда за 1 с совершается работа 1 Дж:

$$1 \text{ Вт} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ с}}.$$

Рассмотрим произвольную механическую систему, состоящую из n материальных точек. Общая элементарная работа, совершаемая внешними и внутренними силами над системой, находится следующим образом:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{F}'_{ij} \cdot d\vec{r}_i), \quad (3.22)$$

где \vec{F}_i – векторная сумма всех внешних сил, действующих на i -ю точку системы; \vec{F}'_{ij} – сила взаимодействия i -й и j -й точек системы; $d\vec{r}_i$ – элементарное перемещение i -й материальной точки.

Определим общую работу внутренних сил при движении абсолютно твердого тела. Для этого рассмотрим i -ю и j -ю материальные точки твердого тела, взаимодействующие между собой силами \vec{F}'_{ij} и \vec{F}'_{ji} . Согласно третьему закону Ньютона эти силы равны по модулю и противоположны по направлению $\vec{F}'_{ij} = -\vec{F}'_{ji}$ (рис. 3.5). В соответствии с определением абсолютно твердого тела расстояние между i -й и j -й точками остается неизменным. Движение этих точек можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движения отрезка, соединяющего эти точки (ось вращения проходит через один из концов отрезка). При поступательном движении отрезка точки совершают равные перемещения $d\vec{r}_i = d\vec{r}_j$, работы сил численно равны и противоположны по знаку $\delta A'_i = -\delta A'_j$, т. е. общая работа этих сил равна нулю. При вращательном движении ось вращения проходит через один из концов отрезка, поэтому одна из материальных точек неподвижна, а другая совершает перемещение перпендикулярно действующей на

нее силе, поэтому работа сил взаимодействия и в этом случае также равна нулю. Итак, для двух выбранных материальных точек твердого тела работа внутренних сил равна нулю, следовательно и для всего твердого тела общая работа всех внутренних сил будет равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{F}'_{ij} \cdot d\vec{r}_i) = 0. \quad (3.23)$$

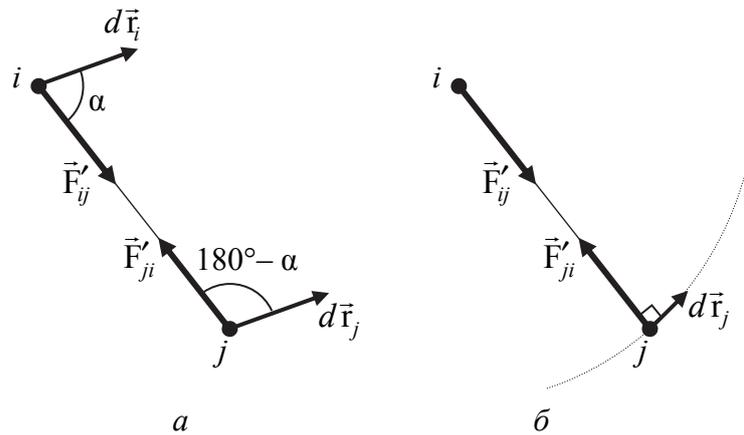


Рис. 3.5. Работа сил взаимодействия двух материальных точек твердого тела:
a – поступательное движение отрезка, соединяющего точки;
б – вращательное движение отрезка, соединяющего точки

Отсюда можно сделать вывод: при движении абсолютно твердого тела вся работа совершается только внешними силами:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i). \quad (3.24)$$

При поступательном движении твердого тела перемещения всех его точек одинаковы:

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_j = d\vec{r}_C,$$

где $d\vec{r}_C$ – элементарное перемещение центра масс твердого тела. В результате выражение для элементарной работы при поступательном движении твердого тела будет иметь следующий вид:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_C = \vec{F} \cdot d\vec{r}_C, \quad (3.25)$$

где \vec{F} – векторная сумма всех внешних сил, действующих на тело.

ВИДЫ И ЗАКОНЫ СИЛОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

- 4.1. Фундаментальные взаимодействия.
- 4.2. Закон всемирного тяготения. Гравитационное поле. Напряженность гравитационного поля.
- 4.3. Силы упругости. Закон Гука. Упругие постоянные.
- 4.4. Трение покоя, скольжения, качения. Внутреннее трение.

4.1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

При описании разнообразных явлений микро- и макромира широко используется понятие силы как меры механического взаимодействия. Понятие силы можно использовать при описании явлений в самых широких масштабах – начиная от внутриатомных и вплоть до размеров Вселенной. На разных расстояниях между взаимодействующими материальными объектами (микрочастицами, телами) действуют различные типы сил (ядерные, атомные, молекулярные, силы упругости, силы трения и т. д.), но все многообразие этих сил сводится к четырем фундаментальным взаимодействиям – **сильному, слабому, электромагнитному и гравитационному**. Они определяют характер взаимодействия между различными элементарными частицами, из которых построены все объекты окружающего нас материального мира. Согласно современным представлениям, каждое из взаимодействий возникает в результате обмена частицами, называемыми переносчиками этого взаимодействия.

Важнейшей характеристикой фундаментального взаимодействия является его радиус действия. **Радиус действия** – это максимальное расстояние между частицами, за пределами которого их взаимодействием можно пренебречь (табл.). При малом радиусе взаимодействие называют короткодействующим, при большом – дальнодействующим.

Самым всеобъемлющим является гравитационное взаимодействие. Ему подвержены все материальные взаимодействия без исключения – и микрочастицы, и макротела. Это значит, что в нем участвуют все элементарные частицы. Проявляется оно в виде всемирного тяготения.

Гравитация (от лат. *gravitas* – тяжесть) управляет наиболее глобальными процессами во Вселенной, обеспечивает строение и стабильность нашей Солнечной системы. Гравитационное взаимодействие прямо пропорционально массе взаимодействующих тел. Из-за малости массы элементарных частиц гравитационное взаимодействие между частицами невелико по сравнению с другими видами взаимодействия, поэтому в процессах микромира это взаимодействие несущественно. При увеличении массы взаимодействующих тел (т. е. при увеличении числа содержащихся в них частиц) гравитационное взаимодействие между телами возрастает прямо пропорционально их массе. Гравитационное взаимодействие является дальнодействующим, в связи с этим в макромире при рассмотрении движения планет, звезд, галактик, а также движения небольших макроскопических тел в их полях гравитационное взаимодействие становится определяющим. Оно удерживает атмосферу, моря и все живое и неживое на Земле, Землю, вращающуюся по орбите вокруг Солнца, Солнце в пределах Галактики. Гравитационное взаимодействие играет главную роль в процессах образования и эволюции звезд.

Основные характеристики фундаментальных взаимодействий

Вид	Радиус действия, м	Переносчик взаимодействия	Место взаимодействия	Относительная интенсивность
Гравитационное	Бесконечно большой	Гравитоны (гипотетические частицы)	Между телами, имеющими массу	1
Электромагнитное	Бесконечно большой	Фотоны	Между телами, имеющими заряд	10^{36}
Ядерное (сильное)	10^{-15}	Глюоны	Между нуклонами, элементарными частицами	10^{38}
Слабое	10^{-18}	Промежуточные векторные бозоны	Между лептонами и кварками	10^{25}

В настоящее время общепринятой теорией гравитации является общая теория относительности, предложенная А. Эйнштейном в 1915 г. В этой теории постулируется, что гравитационные эффекты обусловлены не силовым взаимодействием тел, находящихся в пространстве-

времени, а деформацией самого пространства-времени, которая вызвана присутствием массы. Такая геометрическая теория не может быть сформулирована как классический предел квантовой теории. На данном этапе развития теоретической физики проблема создания квантовой теории гравитации не решена. Тем не менее, нет никаких сомнений, что такая теория со временем будет разработана, и гипотетическую частицу-переносчика гравитационного взаимодействия называли гравитоном.

Электромагнитное взаимодействие, как и гравитационное, по своей природе дальнедействующее: соответствующие силы могут проявляться на очень значительных расстояниях. В этом взаимодействии участвуют частицы и тела, имеющие электрический заряд. В отличие от тяготения, электромагнитные силы способны быть как силами притяжения, так и силами отталкивания. Из-за того, что в электромагнитном взаимодействии участвуют заряды двух знаков (положительные и отрицательные), входящие в состав вещества в равных количествах и нейтрализующие друг друга, силы электромагнитного взаимодействия не влияют на движение планет, звезд и галактик, а проявляются наиболее сильно на атомном и молекулярном уровне. Физические и химические свойства разнообразных веществ, материалов и самой живой ткани обусловлены именно этим взаимодействием. Оно же приводит в действие всю электрическую и электронную аппаратуру. Электромагнитное взаимодействие примерно в 100 раз слабее сильного, поэтому на расстояниях, меньших радиуса действия сильного взаимодействия (10^{-15} м), электромагнитными силами можно пренебречь по сравнению с ядерными, т. е. электромагнитное взаимодействие определяет структуру вещества за пределами радиуса действия сильного взаимодействия. Электромагнитное взаимодействие связывает электроны и ядра в атомах и молекулах. Оно объединяет атомы и молекулы в различные вещества, определяет химические и биологические процессы. Это взаимодействие обуславливает возникновение сил упругости, сил трения и вязкости, магнитных сил, сил притяжения и отталкивания между молекулами. В частности, электромагнитное отталкивание молекул, находящихся на малых расстояниях, вызывает силу реакции опоры, в результате чего мы, например, не проваливаемся сквозь пол.

Классической теорией электромагнитного взаимодействия является классическая электродинамика, основополагающие постулаты которой были сформулированы Дж. К. Максвеллом в 1863 году. Взаимодействие заряженных частиц в этой теории описывается с помощью

представлений об электромагнитном поле – особом виде материи, возникающем в окружающем заряженные частицы пространстве. Развитие квантовой теории в начале 20-го века привело к разработке квантовой теории электромагнитного взаимодействия – квантовой электродинамики. С точки зрения этой теории переносчиком электромагнитного взаимодействия является элементарная частица фотон, который испускается одной из взаимодействующих заряженных частиц и поглощается другой.

Сильное взаимодействие – самое мощное из всех фундаментальных взаимодействий. В сильном взаимодействии участвуют кварки, глюоны и составленные из них частицы, называемые адронами (барионы и мезоны). Оно действует в масштабах порядка размера атомного ядра и менее, отвечая за связь между кварками в адронах и за притяжение между нуклонами (разновидность барионов – протоны и нейтроны) в ядрах. В отличие от гравитационного и электромагнитного взаимодействий оно короткодействующее, поэтому на расстоянии большем 10^{-15} м (порядка размера ядра), силы взаимодействия между протонами и нейтронами, резко уменьшаясь, перестают их связывать друг с другом. Согласно теории сильного взаимодействия, получившей название квантовая хромодинамика, частицы, участвующие в сильном взаимодействии, обладают особым зарядом, который назвали цветом. Переносчиком сильного взаимодействия в этой теории выступает элементарная частица глюон.

Слабое взаимодействие называется слабым, поскольку два других взаимодействия, значимые для ядерной физики (сильное и электромагнитное), характеризуются значительно большей интенсивностью. Однако оно значительно сильнее четвертого из фундаментальных взаимодействий, гравитационного. В слабом взаимодействии участвуют все фундаментальные фермионы (лептоны и кварки), и составные фермионы (протоны, нейтроны, мюоны). Слабое взаимодействие является короткодействующим – оно проявляется на расстояниях, значительно меньших размера атомного ядра (характерный радиус 10^{-18} м). Слабое взаимодействие имеет большое значение для целого ряда природных процессов. Например, слабым взаимодействием обусловлено протекание термоядерной реакции, являющейся основным источником энергии большинства звезд, включая Солнце – реакции синтеза гелия из четырех протонов с испусканием двух позитронов и двух нейтрино. Слабым взаимодействием определяется β -распад радиоактивных ядер. В 1960-х годах XX века Шелдоном Ли Глэшоу, Стивеном Вайнбергом и Абдусом Саламом на основе хорошо разра-

ботанной к тому времени квантовой теории поля была создана теория электрослабых взаимодействий, объединяющая в себе слабое и электромагнитное взаимодействия. В роли переносчиков слабого взаимодействия ими были введены калибровочные поля и кванты этих полей – векторные бозоны.

Теория, построенная в результате объединения квантовой хромодинамики и теории электрослабых взаимодействий, получила название стандартной модели элементарных частиц. Она объединяет три вида взаимодействий: сильное, слабое и электромагнитное. Одна из важнейших задач современного естествознания – создание единой теории фундаментальных взаимодействий (теории великого объединения), объединяющей все четыре вида фундаментальных взаимодействий. Однако из-за трудностей построения квантовой теории гравитации такая теория в настоящий момент не разработана. Создание подобной теории означало бы построение единой теории элементарных частиц.

В классической механике в основном изучаются гравитационные силы, силы упругости и силы трения. Силы упругости и силы трения не являются фундаментальными и по своему происхождению они относятся к электромагнитным силам.

4.2. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ



Все тела в природе взаимно притягивают друг друга. Закон, которому подчиняется это притяжение, был установлен И. Ньютоном и носит название закона всемирного тяготения. Согласно этому закону, между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (4.1)$$

Эта сила называется **гравитационной** или силой всемирного **тяготения**. Коэффициент пропорциональности G называется **гравитационной постоянной**:

$$G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Таким образом, два точечных тела массой по 1 кг каждое, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, притягиваются с силой $6,67 \cdot 10^{-11}$ Н.

Сила всемирного тяготения направлена вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие материальные точки (рис. 4.1). В векторной форме закон всемирного тяготения записывается следующим образом:

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_{12}, \quad (4.2)$$

где \vec{F}_{12} – сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; \vec{e}_{12} – единичный вектор, направленный от первой материальной точки ко второй.

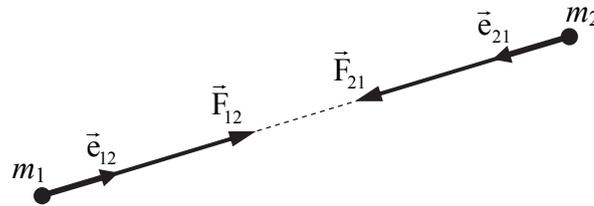


Рис. 4.1. Гравитационное взаимодействие двух материальных точек

Закон всемирного тяготения установлен для тел, принимаемых за материальные точки, т. е. для таких тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Если же размеры взаимодействующих тел сравнимы с расстоянием между ними, то эти тела надо разбить на точечные элементы, подсчитать по формуле (4.2) силы притяжения между всеми попарно взятыми элементами, а затем сложить их векторно. Практически суммирование сводится к интегрированию и является очень сложной математической задачей. Для случая, когда взаимодействующие тела представляют собой однородные шары, такие вычисления приводят к формуле (4.2), в которой под m_1 и m_2 следует понимать массы шаров, а под r – расстояние между центрами шаров. Если одно из тел представляет собой шар очень большого радиуса с центральносимметричным распределением массы (например земной шар), а второе тело принимается за материальную точку, то их взаимодействие также можно описывать формулой (4.2).

Экспериментальное доказательство закона всемирного тяготения и первое экспериментальное определение гравитационной постоянной было сделано на основании результатов опыта Г. Кавендиша¹.

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью **гравитационного поля** или **поля тяготения**. Всякое тело изменяет свойства окружающего его пространства – создает в нем гравитационное поле. Основное свойство гравитационного поля заключается в том, что на всякое тело, внесенное в это поле, действует сила всемирного тяготения.

Силовой характеристикой гравитационного поля является **напряженность гравитационного поля**, которая равна отношению силы всемирного тяготения \vec{F} , действующей на материальную точку массой m_0 , к массе этой материальной точки:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m_0}. \quad (4.3)$$

Размерность напряженности совпадает с размерностью ускорения. Напряженность поля тяготения вблизи поверхности Земли равна ускорению свободного падения g с точностью до поправки обусловленной вращением Земли. Сопоставляя выражения (4.2) и (4.3) получим, что напряженность поля, создаваемая материальной точкой массой m на расстоянии r от нее, равна:

$$\vec{g} = -G \frac{m}{r^2} \vec{e}_r, \quad (4.4)$$

где \vec{e}_r – единичный вектор, направленный от материальной точки в рассматриваемую точку поля (рис. 4.2).

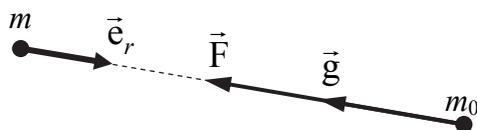


Рис. 4.2. Напряженность гравитационного поля

¹Генри Кавендиш (1731–1810) – британский физик и химик, член Лондонского королевского общества. Сделал множество важных для своего времени открытий в химии газов и электричестве. Основную известность получил благодаря опыту по определению средней плотности Земли. Полученные им результаты послужили основой для расчета гравитационной постоянной.

Для графического изображения силового поля используются **силовые линии** или **линии напряженности**, в каждой точке которых вектор напряженности направлен по касательной (рис. 4.3).

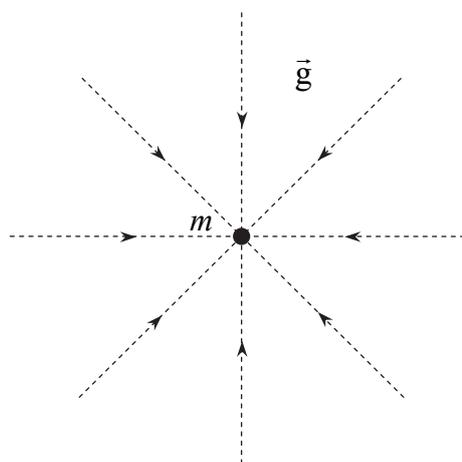


Рис. 4.3. Силовые линии гравитационного поля точечной массы

Поле сил называется **центральный**, если силы, действующие на частицу в любой точке такого поля, направлены вдоль прямых, которые пересекаются в некоторой неподвижной точке, называемой центром поля, а величина силы зависит только от расстояния между частицей и центром поля. Гравитационное поле точечной массы, а также тел со сферически симметричным распределением массы (звезда, планета, однородный шар) является центральным. Напряженность центрального гравитационного поля определяется выражением (4.4).

Поле сил называется **однородным**, если во всех точках поля силы, действующие на частицу, одинаковы по абсолютной величине и направлению. Примером однородного гравитационного поля с некоторым приближением можно считать малую область центрального гравитационного поля у поверхности Земли. Если высота этой области не превышает 30 км, а длина, отмеряемая вдоль поверхности Земли, менее 60 км, то изменение силы тяготения по высоте не превышает 1%, а направление вектора силы в пределах области изменяется не более чем на $0,5^\circ$. Напряженность однородного гравитационного поля у поверхности Земли с точностью до поправки, обусловленной вращением Земли, является постоянной величиной и численно равна ускорению свободного падения $9,81 \text{ м/с}^2$.

Вращение Земли уменьшает ускорение свободного падения g , из-за того, что на все тела находящиеся на поверхности Земли кроме гравитационной силы $\vec{F}_{\text{гр}}$ действует также центробежная сила инерции

$\vec{F}_{\text{пер}n}$ (рис. 4.4). Радиус окружности R , по которой тело вращается вместе с планетой, может быть найден по формуле

$$R = r \cos \theta,$$

где r – радиус Земли; θ – широта местности, в которой расположено тело. Тогда для переносной скорости тела в соответствии с формулой (2.1) можно записать выражение

$$v_{\text{пер}} = \omega_{\text{пер}} R = \omega_{\text{пер}} r \cos \theta,$$

где $\omega_{\text{пер}}$ – угловая скорость вращения планеты. Отсюда для центробежной силы инерции, действующей на тело массой m , в соответствии с выражением (2.19) получим

$$F_{\text{пер}n} = m\omega_{\text{пер}}^2 r \cos \theta. \quad (4.5)$$

Из этого выражения следует, что центробежная сила инерции уменьшается с увеличением широты местности, принимая максимальное значение на экваторе Земли ($\theta = 0$) и обращаясь в нуль на полюсах ($\theta = 90^\circ$).

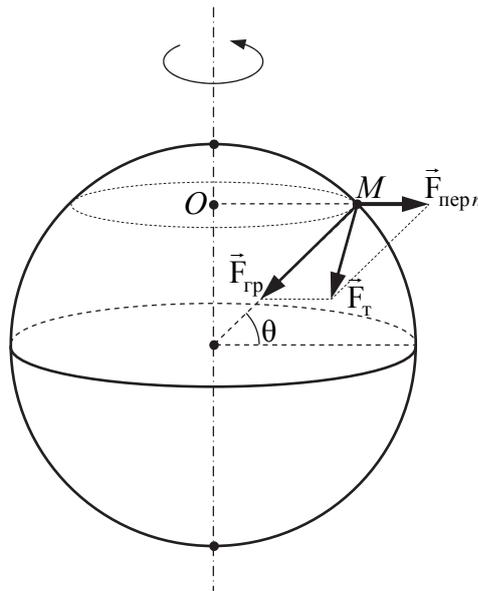


Рис. 4.4. Силы, действующие на тело, расположенное на поверхности Земли

Сила тяжести \vec{F}_T , действующая на тело на поверхности Земли, представляет собой векторную сумму силы всемирного тяготения $\vec{F}_{\text{гр}}$ и центробежной силы инерции $\vec{F}_{\text{пер}n}$. Следовательно, величина и направление силы тяжести зависят от широты местности, однако, из-за того, что центробежная сила инерции $\vec{F}_{\text{пер}n}$ мала по сравнению

с гравитационной силой $\vec{F}_{\text{гр}}$, при решении многих практических задач этой зависимостью пренебрегают, считая силу тяжести равной гравитационной силе. Наибольшее отличие силы тяжести от гравитационной силы наблюдается на экваторе, где центробежная сила инерции достигает максимального значения и направлена противоположно гравитационной силе. Но даже на экваторе это отличие составляет всего 0,35%.

Ускорение свободного падения, равное отношению силы тяжести к массе тела

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_{\text{г}}}{m},$$

также зависит от широты местности. Измерения показали, что на экваторе Земли ускорение свободного падения минимально и составляет $9,78 \text{ м/с}^2$, а на полюсах оно достигает своего максимального значения $9,83 \text{ м/с}^2$. Еще одной причиной непостоянства ускорения свободного падения является нешарообразность Земли, которая слегка сплюснута вдоль оси вращения. Поэтому на полюсах гравитационная сила немного больше, чем на экваторе. Влияние вращения Земли и ее нешарообразности на величину ускорения свободного падения не очень велико и при решении практических задач этим влиянием часто пренебрегают и пользуются усредненным значением ускорения свободного падения $9,81 \text{ м/с}^2$.

С силой тяжести связано понятие веса тела. **Весом тела** называется сила \vec{P} , с которой тело действует на опору или подвес, т. е. вес тела – это сила противодействующая силе реакции опоры \vec{R} (рис. 4.5):

$$\vec{P} = -\vec{R}.$$

Если опора (или точка подвеса тела) неподвижны относительно Земли, то вес тела равен силе тяжести, а именно:

$$\vec{P} = -\vec{R} = \vec{F}_{\text{г}}.$$

При равномерном и прямолинейном движении опоры на вес тела будет оказывать влияние кориолисова сила инерции $\vec{F}_{\text{кор}}$, определяемая выражением (2.26), однако, при малых скоростях этим влиянием пренебрегают. Когда опора движется относительно Земли с ускорением $\vec{a}_{\text{отн}}$, то согласно второму закону Ньютона получим следующее:

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F}_{\text{г}} + \vec{R}.$$

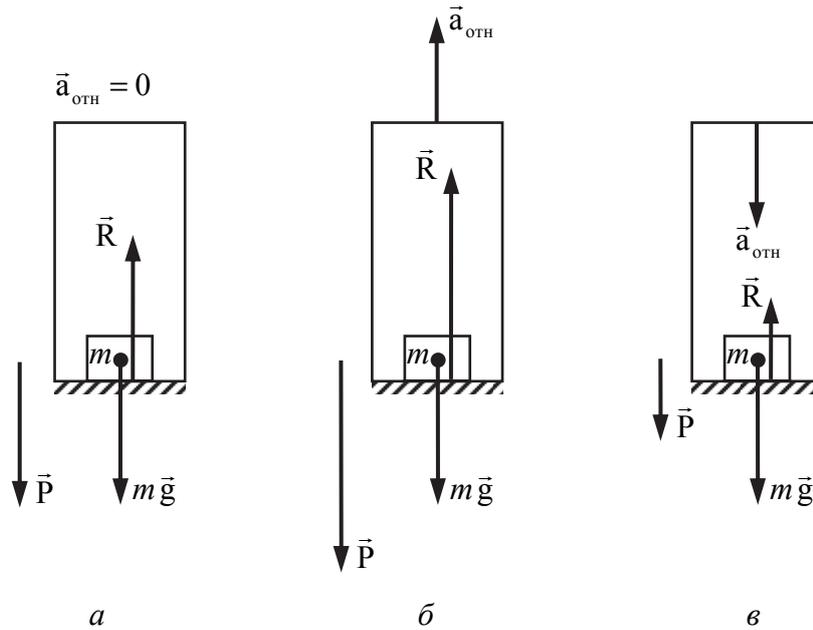


Рис. 4.5. Вес тела:
a – опора не ускоряется; *б* – ускорение опоры направлено вверх;
в – ускорение опоры направлено вниз

Принимая во внимание, что сила тяжести определяется выражением $\vec{F}_T = m\vec{g}$, для веса тела получим выражение

$$\vec{P} = -\vec{R} = \vec{F}_T - m\vec{a}_{\text{отн}} = m(\vec{g} - \vec{a}_{\text{отн}}), \quad (4.6)$$

из которого следует, что вес тела зависит от ускорения опоры. На рис. 4.5 представлены случаи, когда опора движется вертикально вверх (рис. 4.5, *б*) и вертикально вниз (рис. 4.5, *в*) с ускорением $\vec{a}_{\text{отн}}$. В первом случае вес тела увеличивается по сравнению с силой тяжести на величину $ma_{\text{отн}}$, а во втором – уменьшается на эту же величину. Когда ракета, стартуя с поверхности Земли, быстро набирает скорость, космонавты на ее борту испытывают серьезные перегрузки, так как их вес многократно возрастает. Аналогично военные летчики испытывают перегрузки, когда самолет, делая на большой скорости резкий разворот, движется с огромным центростремительным ускорением.

Если представить себе опору, которая движется с ускорением свободного падения ($\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{g}$), то согласно (4.6), вес тела будет равен нулю, т. е. тело будет невесомым. Реакция опоры \vec{R} в данном случае также равна нулю, следовательно тело движется только под действием силы тяжести \vec{F}_T . Состояние тела, при котором оно движется только

под действием силы тяжести, называется **невесомостью**. Например, в состоянии невесомости находится любое тело, подброшенное вверх и совершающее под действием силы тяжести свободное движение с не очень большой скоростью, когда можно пренебречь силой сопротивления воздуха. В состоянии невесомости находятся все предметы на борту космического корабля, если он движется с выключенными двигателями, т. е. только под действием гравитационных сил. Если же космический корабль включает двигатели, то все предметы на борту приобретают вес. На несколько мгновений ощутить состояние невесомости можно в тихоходном самолете, когда он, проходя через турбулентные потоки воздуха, начинает падать вниз с ускорением \vec{g} . При подготовке космонавтов состояние невесомости создают на несколько десятков секунд в салоне самолета. Для этого пилот поднимает самолет на очень большую высоту и затем начинает снижение с ускорением свободного падения.

4.3. СИЛЫ УПРУГОСТИ. ЗАКОН ГУКА. УПРУГИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Все реальные тела под действием сил изменяют свою форму и размеры, т. е. деформируются. Деформация называется **упругой**, если после прекращения действия внешних сил тело восстанавливает первоначальную форму и размеры. Деформации, которые остаются в теле после прекращения действия внешних сил, называются **пластическими** (или остаточными). При упругой деформации в твердом теле возникают силы упругости, которые уравнивают внешние силы, приложенные к телу. При прекращении действия внешних сил силы упругости возвращают телу первоначальную форму и размеры.

Существуют следующие виды деформаций твердого тела: растяжение – сжатие, сдвиг, изгиб, кручение. Все эти виды деформаций могут быть сведены к двум основным – деформации растяжения – сжатия и деформации сдвига.

Рассмотрим деформацию растяжения – сжатия (рис. 4.6). Пусть один из концов однородного стержня длиной l и площадью поперечного сечения S жестко закреплен, а к другому концу приложена сила \vec{F} , направленная вдоль оси стержня. В результате длина стержня изменится на величину Δl , которую называют **абсолютной деформацией**. Если $\Delta l > 0$, то происходит деформация растяжения, если $\Delta l < 0$ – деформация сжатия. **Силы упругости** \vec{F}_n уравнивают внешнюю

силу \vec{F} , перпендикулярны поперечному сечению стержня и распределены по поверхности S . Мерой интенсивности сил упругости является **нормальное напряжение** σ_n – сила упругости, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения:

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S}. \quad (4.7)$$

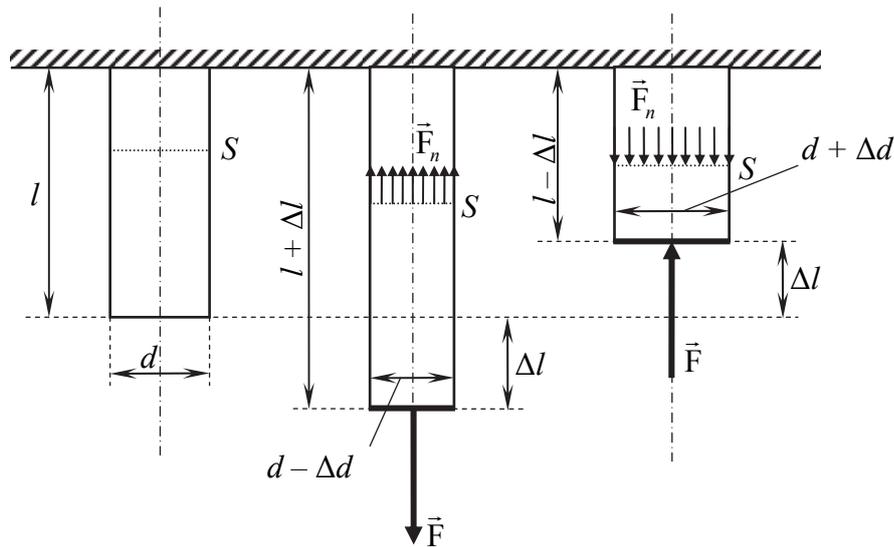


Рис. 4.6. Деформация растяжения – сжатия

Количественной мерой степени деформированности тела является **относительная деформация** ϵ_n , равная отношению абсолютной деформации Δl к длине недеформированного стержня:

$$\epsilon_n = \frac{\Delta l}{l}. \quad (4.8)$$

Изменение размеров стержня вдоль направления действия внешней силы сопровождается изменением его поперечных размеров. Экспериментально установлено, что

$$\epsilon_{\perp} = -\mu \epsilon_n, \quad (4.9)$$

где ϵ_{\perp} – относительная поперечная деформация, $\epsilon_{\perp} = \frac{\Delta d}{d}$; μ – коэффициент пропорциональности, который называется коэффициентом Пуассона¹ и зависит только от рода вещества. Знак «минус» перед μ

¹Симеон Дени Пуассон (1781–1840) – знаменитый французский математик, механик и физик.

означает, что продольное растяжение сопровождается поперечным сжатием, и наоборот.

Рассмотрим теперь деформацию сдвига (рис. 4.7). Эту деформацию проще всего осуществить, если одну поверхность бруска закрепить неподвижно, а к другой поверхности приложить касательную силу \vec{F} . При деформации сдвига слои вещества перемещаются параллельно один другому, а силы упругости \vec{F}_τ направлены по касательной к слоям. Поэтому напряжение σ_τ , возникающее при деформации сдвига, называется **касательным**:

$$\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{S}, \quad (4.10)$$

где S – площадь поверхности, к которой приложена касательная сила \vec{F}_τ . Верхний слой бруска при сдвиге смещается на величину Δb , которая называется **абсолютной деформацией сдвига**. Тогда **относительная деформация сдвига** определяется как

$$\epsilon_\tau = \frac{\Delta b}{h} = \operatorname{tg} \gamma, \quad (4.11)$$

где h – толщина бруска; γ – угол сдвига. В случае малых деформаций $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ и $\epsilon_\tau \approx \gamma$.

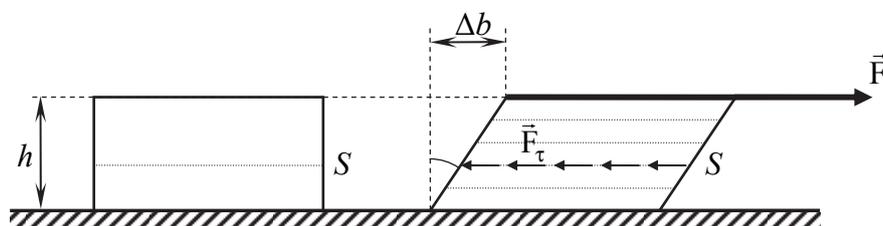


Рис. 4.7. Деформация сдвига

Английский физик Р. Гук¹ экспериментально установил, что для малых деформаций относительная деформация ϵ и напряжение σ прямо пропорциональны друг другу. Для относительных деформаций **закон Гука** записывается в следующем виде:

¹Роберт Гук (1635–1703) – английский естествоиспытатель, ученый-энциклопедист. В физике и многих других науках ему принадлежат одни из первых основополагающих работ и множество открытий.

$$\begin{aligned}\sigma_n &= E\varepsilon_n, \\ \sigma_\tau &= G\varepsilon_\tau,\end{aligned}\tag{4.12}$$

где коэффициент пропорциональности E называется **модулем Юнга**¹, а коэффициент пропорциональности G – **модулем сдвига**. Эти коэффициенты зависят только от рода вещества и не зависят от размеров и формы образца.

Модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона называются упругими постоянными материала. Из теории упругости известно соотношение между этими тремя постоянными:

$$E = 2G(1 + \mu),\tag{4.13}$$

т. е. упругие свойства материала полностью определяются двумя упругими постоянными.

Если в уравнения (4.12) подставить выражения (4.7)–(4.11) для σ и ε , то получится закон Гука для абсолютных деформаций:

$$\begin{aligned}F_n &= k_n \Delta l, \\ F_\tau &= k_\tau \Delta b,\end{aligned}\tag{4.14}$$

где коэффициенты пропорциональности k_n и k_τ , называются **коэффициентами упругости** или **жесткостями** образца при соответствующих деформациях. Они зависят не только от рода материала, но и от размеров образца:

$$k_n = \frac{ES}{l},\tag{4.15}$$

$$k_\tau = \frac{GS}{h}.\tag{4.16}$$

Закон Гука выполняется, только если напряжение не превышает некоторое граничное значение $\sigma_{\text{пр}}$, называемое **пределом пропорциональности** и зависящее от рода вещества. При дальнейшем увеличении напряжения закон Гука не выполняется, но деформация остается упругой до некоторого граничного значения σ_y , называемого **пределом упругости**. При превышении этого напряжения в образце возникают остаточные деформации и при некотором значении напряжения σ_t (**предел текучести**) деформация становится **пластической**, т. е. ε_n

¹Томас Юнг (1773–1829) – английский физик, механик, врач, астроном и востоковед, один из создателей волновой теории света.

возрастает даже без увеличения напряжения. Материалы, у которых имеется область пластических деформаций, называются **вязкими**, а у которых отсутствует – **хрупкими**. Максимальное напряжение, возникающее в образце до его разрушения, называется **пределом прочности** σ_p . На рис. 4.8 представлены зависимости нормального напряжения от относительной деформации для вязкого и хрупкого материала.

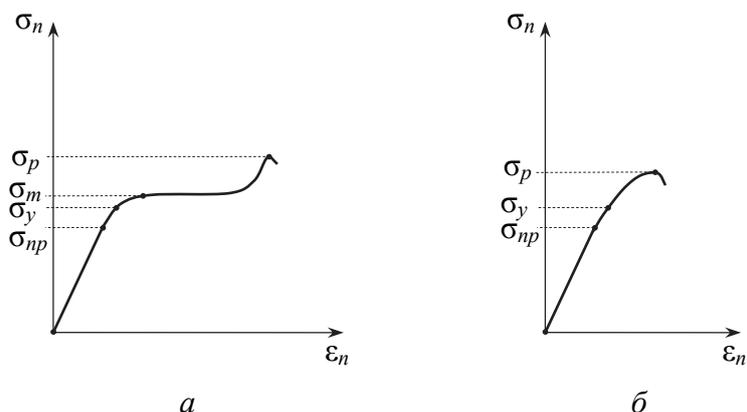


Рис. 4.8. Зависимости нормального напряжения от относительной деформации: *а* – для вязкого материала; *б* – для хрупкого материала

Кратко рассмотрим неоднородные деформации. При деформации изгиба сила приложена перпендикулярно оси стержня (рис. 4.9). С внутренней стороны изогнутого стержня слои сжаты, а с наружной – растянуты, таким образом, деформация изгиба сводится к деформациям растяжения и сжатия. Закон Гука для изгиба имеет следующий вид:

$$F = k_{\text{из}} \lambda, \quad (4.17)$$

где $k_{\text{из}}$ – изгибная жесткость; λ – стрела прогиба.

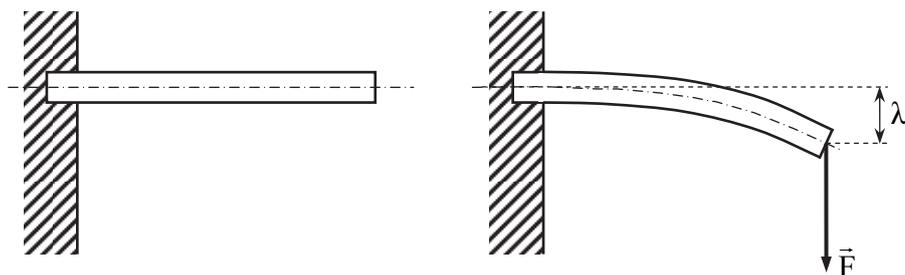


Рис. 4.9. Деформация изгиба

При деформации кручения один конец стержня закреплен неподвижно, а к другому приложена пара сил с вращательным моментом M

(рис. 4.10). Слои перпендикулярные оси стержня сдвигаются друг относительно друга. При этом относительные деформации сдвига элементов стержня при увеличении расстояния от оси стержня будут увеличиваться.

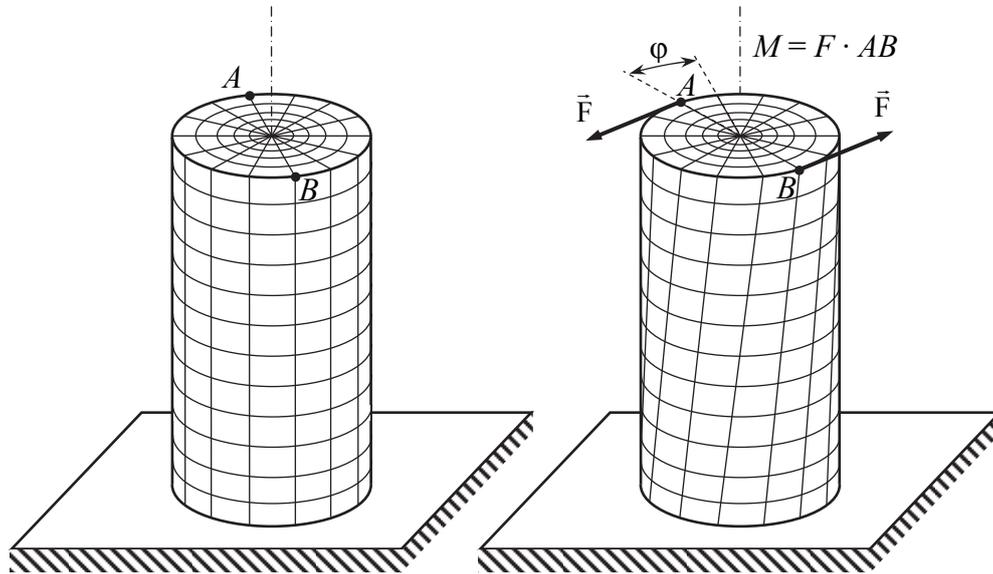


Рис. 4.10. Деформация кручения

Таким образом, имеет место неоднородная деформация сдвига. Закон Гука для кручения имеет следующий вид:

$$M = f_{кр} \varphi, \quad (4.18)$$

где $f_{кр}$ – крутильная жесткость стержня; φ – угол закручивания стержня.

4.4. ТРЕНИЕ ПОКОЯ, СКОЛЬЖЕНИЯ, КАЧЕНИЯ. ВНУТРЕННЕЕ ТРЕНИЕ

Всякое тело, свободно движущееся по горизонтальной поверхности другого тела, с течением времени замедляется и останавливается. Это можно объяснить существованием сил трения, которые препятствуют относительному перемещению соприкасающихся тел. Различают внешнее (сухое) и внутреннее (вязкое) трение. **Внешним трением** называется трение, возникающее в плоскости контакта двух соприкасающихся тел. Если соприкасающиеся тела неподвижны друг относительно друга, то говорят о **трении покоя**, если же происходит

относительное перемещение этих тел, то говорят о **трении скольжения**, если поверхности соприкасающихся тел при движении остаются параллельными друг другу, или **трении качения**, если одно из соприкасающихся тел совершает вращательное движение, т. е. катится по поверхности другого. **Внутренним** называется трение между двумя слоями жидкости или газа, движущимися друг относительно друга с разными скоростями.

Из-за того, что поверхности реальных физических тел не являются абсолютно гладкими, при трении покоя и скольжения касание тел происходит не по всей геометрической площади соприкосновения, а в местах, расположенных на выступах, – так называемых «пятнах касания». В этих местах и возникают силы трения, обусловленные взаимодействием атомов и молекул на поверхности выступов. При скольжении «пятна касания» могут разрушаться и появляться вновь, но суммарная площадь пятен остается приблизительно постоянной величиной, составляющей от 0,1 до 1% реальной геометрической площади соприкосновения тел.

Рассмотрим некоторое тело, расположенное на горизонтальной поверхности (рис. 4.11). Пусть на это тело кроме силы тяжести $m\vec{g}$ и нормальной составляющей силы реакции опоры \vec{N} действует сила тяги \vec{F} , направленная параллельно поверхности соприкосновения. Если сила \vec{F} не превышает некоторого предельного значения \vec{F}_0 , то тело с места не трогается, так как в плоскости контакта соприкасающихся тел возникает сила трения покоя $\vec{F}_{\text{пок}}$, равная по величине силе тяги \vec{F} и противоположная ей по направлению $\vec{F}_{\text{пок}} = -\vec{F}$. Исследованиями французских физиков Г. Амонтона и Ш. Кулона было получено эмпирическое (т. е. найденное экспериментально) выражение для предельной силы трения покоя:

$$F_{\text{пок}0} = f_0 N, \quad (4.19)$$

где f_0 – безразмерный коэффициент, называемый **коэффициентом трения покоя**.

Если к телу приложить силу тяги \vec{F} , превышающую предельную силу трения покоя, то начнется скольжение одного тела по поверхности другого, причем сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{ск}}$ будет пропорциональна нормальной реакции опоры \vec{N} и направлена противоположно вектору скорости:

$$F_{\text{ск}} = fN, \quad (4.20)$$

где f – безразмерный коэффициент трения скольжения.

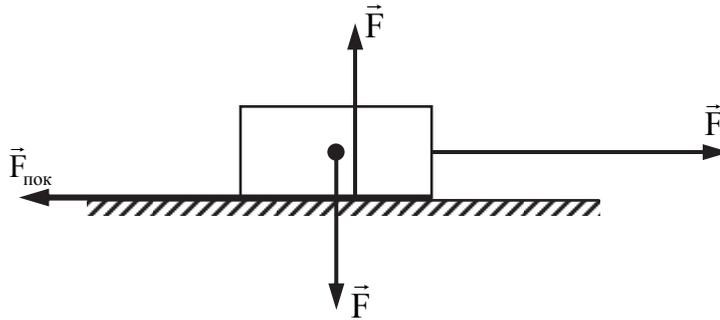


Рис. 4.11. Трение покоя

Коэффициенты f и f_0 зависят от химической природы и состояния поверхности соприкасающихся тел и практически не зависят от площади соприкасающихся тел. Коэффициент трения покоя несколько больше коэффициента трения скольжения. Это объясняется тем, что в состоянии покоя неровности на поверхности одного тела глубоко цепляются за неровности на поверхности другого, тогда как при относительном движении тел глубина зацепления неровностей уменьшается. По этой же причине при увеличении скорости скольжения коэффициент трения скольжения уменьшается. Однако при высоких скоростях относительного движения тел увеличение скорости приводит к росту коэффициента трения скольжения. Это объясняется процессами деструкции (истирания) поверхностей, при которых происходит постоянное разрушение одних «пятен касания» и появление новых, при этом продукты деструкции поверхностей (микрочастицы отколовшиеся от трущихся тел), попадая в область контакта, способствуют активизации всех этих процессов и еще большему увеличению коэффициента трения скольжения.

Физический смысл коэффициента трения скольжения можно пояснить на примере тела, расположенного на наклонной плоскости (рис. 4.12). Если увеличивать угол наклона плоскости α , то при некотором предельном угле α_0 тело начнет скользить по поверхности вниз. При этом сила тяги $F = mg \sin \alpha$ будет уравновешена силой трения скольжения $F_{\text{ск}} = fN$. Тогда учитывая, что сила нормальной реакции опоры в данном случае определяется выражением $N = mg \cos \alpha$, получим следующее выражение для коэффициента трения скольжения:

$$f = \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (4.21)$$

Таким образом, коэффициент трения скольжения равен тангенсу угла α_0 , при котором начинается скольжение тела по наклонной плоскости. Коэффициент трения определяется на опыте и может в зависимости

от природы трущихся тел принимать самые различные значения, например при трении металла по металлу $f = 0,15-0,25$, для стали по льду $f = 0,027$.

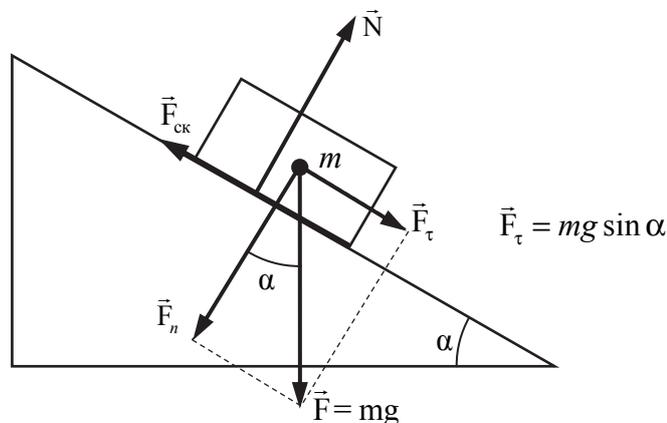


Рис. 4.12. Трение скольжения

Трение играет огромную роль в окружающем нас мире. Благодаря трению мы можем ходить, бегать, кататься на коньках, лазить по деревьям и скалам, удерживать в руках различные предметы, можем не привинчивать мебель к полу, не изобретать способов крепления вещей на полках шкафа и посуды на обеденном столе и т. д. Автомобили и поезда перемещаются по дороге тоже благодаря трению. В некоторых случаях трение играет неблагоприятную роль, тогда его стремятся уменьшить. Наиболее действенным способом уменьшения трения скольжения является его замена трением качения (колеса, катки, подшипники качения).

Для выяснения причин трения качения рассмотрим цилиндрическое тело, расположенное на горизонтальной поверхности (рис. 4.13). Когда тело покоится, на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции опоры \vec{N} , которые компенсируют друг друга. Если теперь на тело подействовать силой тяги \vec{F} , не превышающей предельное значение силы трения покоя $\vec{F}_{\text{пок}0}$, то в точке касания возникнет сила трения покоя $\vec{F}_{\text{пок}}$, полностью уравновешивающая силу тяги \vec{F} и, следовательно, скольжение происходить не будет. Однако под действием силы трения покоя $\vec{F}_{\text{пок}}$, которая направлена по касательной к окружности цилиндрического тела, может начаться вращение этого тела и оно покатится по горизонтальной поверхности. Если бы касание тел происходило только в одной точке, то качение началось бы при любой сколь угодно малой силе тяги \vec{F} , но опыт показывает, что для

возникновения качения необходимо приложить к телу силу тяги, превышающую некоторое ее предельное значение \vec{F}_0 . Данный факт объясняется тем, что на самом деле поверхность и катящееся тело деформируются, в результате чего касание тел происходит не в одной точке, а в пределах некоторой площадки, по которой распределены контактные силы взаимодействия тел. Равнодействующая этих контактных сил в горизонтальном направлении является силой трения покоя, а в вертикальном направлении – нормальную реакцию опоры. Точка приложения нормальной реакции опоры смещена на расстояние f_k от точки A в направлении качения. В результате на цилиндрическое тело действует момент силы относительно оси цилиндра

$$M_{\text{кач}} = f_k N, \quad (4.22)$$

получивший название момента трения качения. Этот момент силы замедляет вращение катящегося тела.

При равномерном качении момент трения качения уравновешивается моментом силы трения покоя $\vec{F}_{\text{пок}}$

$$f_k N = F_{\text{пок}} r. \quad (4.23)$$

Отсюда получаем выражение для силы трения покоя, которую при трении качения называют силой трения качения:

$$F_{\text{кач}} = F_{\text{пок}} = \frac{f_k N}{r}. \quad (4.24)$$

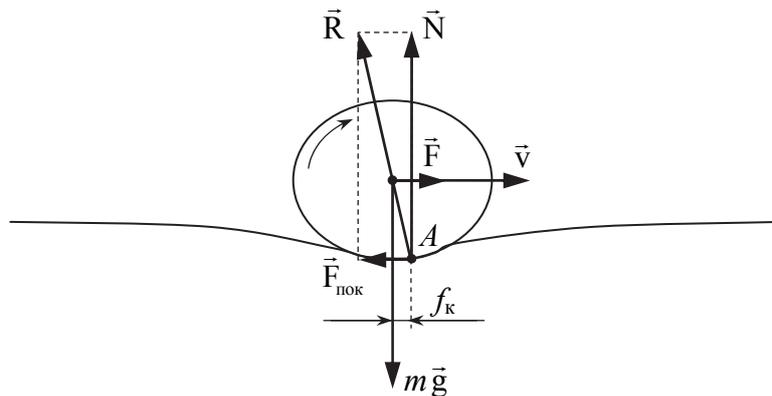


Рис. 4.13. Трение качения

Расстояние f_k , на которое смещается точка приложения нормальной реакции опоры, называется **коэффициентом трения качения**.

Значения f_k определяются на опыте и зависят от материала поверхности и катящегося тела, например, при качении стали по стали $f_k = 5 \cdot 10^{-5}$. Для большинства практически важных случаев отношение f_k / r значительно меньше, чем коэффициент трения скольжения f . Именно поэтому, когда надо уменьшить трение, целесообразно заменить трение скольжения трением качения.

Если поверхности двух тел, движущихся друг относительно друга, разделены слоем жидкости или газа, то говорят о внутреннем трении. Внутреннее трение является причиной возникновения сил сопротивления при движении тел в жидкой или газообразной среде. Направление и величина сил сопротивления сложным образом зависят от формы тела и направления его движения, например, вспомните, по какой замысловатой траектории падает на пол лист тонкой бумаги. В отличие от сил сухого трения при внутреннем трении отсутствует трение покоя. В самом простом случае (рис. 4.14), когда в жидкости или газе происходит поступательное движение тела, обладающего осевой симметрией, по направлению оси симметрии, сила сопротивления прямо пропорциональна скорости и направлена противоположно вектору скорости:

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -\mu \vec{v}, \quad (4.25)$$

где μ – коэффициент сопротивления тела, определяемый опытным путем и зависящий от формы и размеров тела, состояния его поверхности, а также свойств жидкой или газообразной среды.

Силы внутреннего трения играют важную роль в природе и технике. Например, благодаря этим силам рыбы могут передвигаться в воде, а птицы – летать, а скорость течения рек не увеличивается до бесконечности. Слой смазки между трущимися деталями существенно уменьшает трение и препятствует их преждевременному износу.

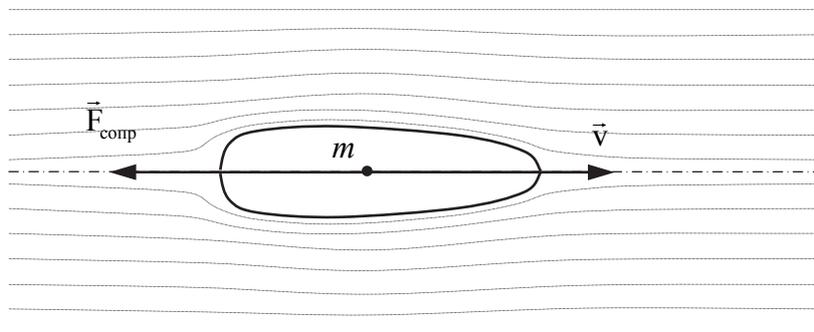


Рис. 4.14. Вязкое трение

КИНЕТИЧЕСКАЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

5.1. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии.

5.2. Консервативные силы. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии.

5.3. Работа сил гравитационного поля. Потенциальная энергия тела в гравитационном поле.

5.4. Работа сил упругости. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

5.1. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

В механике различают два вида механической энергии: кинетическую и потенциальную. **Кинетическая энергия** механической системы – это энергия механического движения этой системы, зависящая от скоростей материальных точек системы и независящая от их расположения в пространстве.

Получим выражение для кинетической энергии. Для этого запишем второй закон Ньютона для материальной точки и скалярно умножим его левую и правую части на вектор элементарного перемещения $d\vec{r} = \vec{v} dt$:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

после сокращения времени dt :

$$m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5.1)$$

Далее учитывая, что

$$m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(m\vec{v} \cdot \frac{\vec{v}}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

а выражение в правой части уравнения (5.1) есть работа силы при элементарном перемещении материальной точки $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, получаем

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \delta A.$$

Так как работа силы δA характеризует обмен энергией между взаимодействующими телами, то выражение в скобках представляет собой **кинетическую энергию материальной точки**:

$$K = \frac{mv^2}{2}. \quad (5.2)$$

Если умножить числитель и знаменатель полученного выражения на m и принять во внимание, что $p = mv$, то выражение для кинетической энергии примет вид:

$$K = \frac{p^2}{2m}. \quad (5.3)$$

Если материальная точка совершает перемещение вдоль конечного участка траектории из точки с дуговой координатой s_1 в точку с дуговой координатой s_2 , то работа силы A_{12} на этом участке с учетом равенства (5.1) будет следующей:

$$A_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F_{\tau} ds = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m \vec{v} \cdot d\vec{v} = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{K_1}^{K_2} dK = K_2 - K_1$$

или

$$A_{12} = K_2 - K_1, \quad (5.4)$$

где K_1 и K_2 – начальная и конечная кинетическая энергия материальной точки. Равенство (5.4) выражает **теорему об изменении кинетической энергии материальной точки**.

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех материальных точек этой системы:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (5.5)$$

Если твердое тело движется поступательно, то скорости всех его материальных точек одинаковы и равны скорости движения центра масс тела \vec{v}_C . Тогда выражение для **кинетической энергии поступательного движения твердого тела** будет иметь следующий вид:

$$K = \frac{v_C^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i = \frac{mv_C^2}{2}. \quad (5.6)$$

Закон изменения кинетической энергии механической системы можно получить, просуммировав выражения (5.4) для всех точек системы, учитывая при этом, что работу могут совершать как внешние, так и внутренние силы:

$$A_{12} + A'_{12} = K_2 - K_1, \quad (5.7)$$

где A_{12} – работа внешних сил; A'_{12} – работа внутренних сил; K_1 и K_2 – начальная и конечная кинетическая энергия механической системы. Для твердого тела общая работа внутренних сил равна нулю, следовательно, в этом случае уравнение (5.7) будет иметь следующий вид:

$$A_{12} = K_2 - K_1. \quad (5.8)$$

5.2. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Сила, действующая на материальную точку, называется **консервативной** (или **потенциальной**), если работа этой силы зависит лишь от начального и конечного положений точки и не зависит от вида траектории, по которой эта точка двигалась. Из независимости работы консервативных сил от вида траектории вытекает, что работа таких сил на замкнутом пути равна нулю:

$$\oint_{(L)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (5.9)$$

В этой формуле кружок на знаке интеграла показывает, что интегрирование производится по замкнутому контуру L . Такой интеграл называется **циркуляцией**. Таким образом, циркуляция вектора консервативной силы по замкнутому контуру равна нулю.

Типичными примерами консервативных сил являются силы тяготения, силы упругости и силы электростатического взаимодействия. Кроме того легко доказать (попробуйте сделать это самостоятельно), что любое стационарное однородное поле и любое стационарное центральное поле является полем консервативных сил.

Типичным примером неконсервативных сил являются **диссипативные силы**, к которым относятся сила трения скольжения, качения и сила сопротивления движению тел в жидкостях и газах. Работа этих сил всегда отрицательна, что приводит к уменьшению механической

энергии замкнутой системы, т. е. происходит превращение механической энергии в другие немеханические виды энергии, например в тепловую энергию.

Работа, совершаемая консервативными силами при перемещении материальных точек системы, не зависит от того, по каким конкретно траекториям движутся материальные точки, а определяется только их начальным и конечным расположением в пространстве. Следовательно, работу консервативных сил можно представить в виде разности значений некоторой функции Π , зависящей от расположения в пространстве материальных точек системы и получившей название **потенциальная энергия** системы:

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (5.10)$$

Соответственно, элементарная работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы:

$$dA = -d\Pi. \quad (5.11)$$

Таким образом, **потенциальная энергия** – это часть общей механической энергии системы, зависящая от расположения материальных точек системы в пространстве и определяемая взаимодействием материальных точек системы между собой и с внешними силовыми полями. Понятие потенциальной энергии имеет смысл лишь только в том случае, когда на материальные точки системы действуют консервативные силы.

Потенциальная энергия материальной точки изменяется в результате перемещения этой точки в пространстве. При этом изменяются ее координаты x , y , z . Поэтому полный дифференциал потенциальной энергии $d\Pi$, стоящий в выражении (5.11), в декартовой системе координат будет определяться выражением

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz. \quad (5.12)$$

Элементарная работа dA , совершаемая силой \vec{F} при перемещении материальной точки, в декартовой системе координат может быть представлена в виде

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (5.13)$$

Тогда, учитывая равенство (5.11), сопоставив выражения (5.12) и (5.13), получим

$$F_x = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

что в векторном виде запишется следующим образом:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \vec{e}_z \right).$$

Полученное выражение для консервативной силы есть не что иное, как градиент потенциальной энергии, взятый со знаком «минус»:

$$\vec{F} = -\text{grad } \Pi. \quad (5.14)$$

Градиент – это вектор, направленный в сторону увеличения физической величины. Знак «минус» в выражении (5.14) показывает, что направление вектора консервативной силы противоположно направлению возрастания потенциальной энергии материальной точки, помещенной в потенциальное силовое поле. В операторной форме выражение (5.14) имеет следующий вид

$$\vec{F} = -\nabla \Pi, \quad (5.15)$$

где $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$ – оператор Гамильтона¹, который также

называют **оператором набла**². Этот оператор является вектором и действует на стоящую после него величину, поэтому в выражениях, содержащих оператор Гамильтона, нельзя произвольным образом переставлять множители.

Поле консервативных сил получило название **потенциального силового поля**. В случае, когда потенциальная энергия не зависит явно от времени, потенциальное поле является **стационарным**, в противном случае **нестационарным**. Как в случае стационарного поля,

¹Уильям Рóуэн Гáмилътон (1805–1865) – ирландский математик, механик, и физик-теоретик. Известен фундаментальными открытиями в математике (кватернионы, основы векторного анализа, вариационное исчисление, обоснование комплексных чисел), аналитической механике (гамильтонова механика) и оптике. Автор предельно общего вариационного принципа наименьшего действия, применяемого во многих разделах физики.

²В 1853 году У. Р. Гамильтон ввел этот оператор и придумал для него символ в виде перевернутой греческой буквы Δ (дельта). Позднее этот символ стали называть «на́бла» из-за сходства с остовом древнеассирийского музыкального инструмента наблы.

так и в случае нестационарного поля, связь между силой и потенциальной энергией описывается выражением (5.14).

Измеряемой на опыте величиной является работа сил, а не потенциальная энергия, т. е. измеряя работу сил, мы определяем только разность потенциальных энергий. Таким образом, потенциальная энергия механической системы определена неоднозначно. Процедура придания потенциальной энергии однозначности называется **нормировкой**. Она заключается в том, что некоторому состоянию механической системы приписывают нулевое значение потенциальной энергии, и это состояние системы называют **нулевой конфигурацией** механической системы. Пусть в выражении (5.10) потенциальная энергия в конечном состоянии равна нулю $\Pi_2 = 0$, т. е. конечное состояние – это состояние с нулевой конфигурацией. Тогда, исходя из равенства (5.10), можем записать:

$$\Pi_1 = A_{10}. \quad (5.16)$$

Таким образом, потенциальная энергия равна работе консервативных сил при переходе механической системы из заданного состояния в состояние с нулевой конфигурацией.

Механическая система называется **консервативной**, если все внешние и внутренние силы, действующие на материальные точки системы, являются консервативными. В этом случае изменение кинетической энергии механической системы при ее переходе из состояния 1 в состояние 2 в соответствии с выражением (5.6) определяется работой консервативных сил, которая согласно выражению (5.10) равна убыли потенциальной энергии системы:

$$K_2 - K_1 = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Тогда получаем следующее:

$$K_1 + \Pi_1 = K_2 + \Pi_2.$$

Величина равная сумме кинетической и потенциальной энергий механической системы называется **полной механической энергией**:

$$E = K + \Pi.$$

Таким образом,

$$E_1 = E_2.$$

Так как состояния 1 и 2 консервативной системы были выбраны произвольно, то и в любом другом состоянии полная механическая энергия системы не изменится, т. е. в консервативной системе

$$E = K + \Pi = \text{const}. \quad (5.17)$$



Равенство (5.17) выражает закон сохранения механической энергии: механическая энергия консервативной системы не изменяется с течением времени.

Закон сохранения энергии – это фундаментальный закон природы. Он связан с однородностью времени. Однородность времени заключается в инвариантности физических законов относительно выбора начала отсчета времени.

5.3. РАБОТА СИЛ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ТЕЛА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Определим работу сил центрального гравитационного поля, создаваемого неподвижной материальной точкой массой m , при перемещении в этом поле материальной точки массой m_0 из пункта 1 в пункт 2 (рис. 5.1). Выделим бесконечно малый участок траектории, на котором материальная точка m_0 выполняет элементарное перемещение $d\vec{l}$ под действием гравитационной силы \vec{F} . Согласно закону всемирного тяготения (4.1), модуль вектора силы \vec{F} определяется выражением

$$F = G \frac{m m_0}{r^2},$$

где r – расстояние между материальными точками m и m_0 ; G – гравитационная постоянная. Элементарная работа на выделенном участке траектории будет следующей:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F dl \cos \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{F} и $d\vec{l}$.

Расстояние r между материальными точками m и m_0 при таком перемещении изменится на величину dr , причем

$$dr = dl \cos(180^\circ - \alpha) = -dl \cos \alpha.$$

Тогда элементарную работу можно представить в виде

$$\delta A = -F dr = -G \frac{m m_0}{r^2} dr.$$

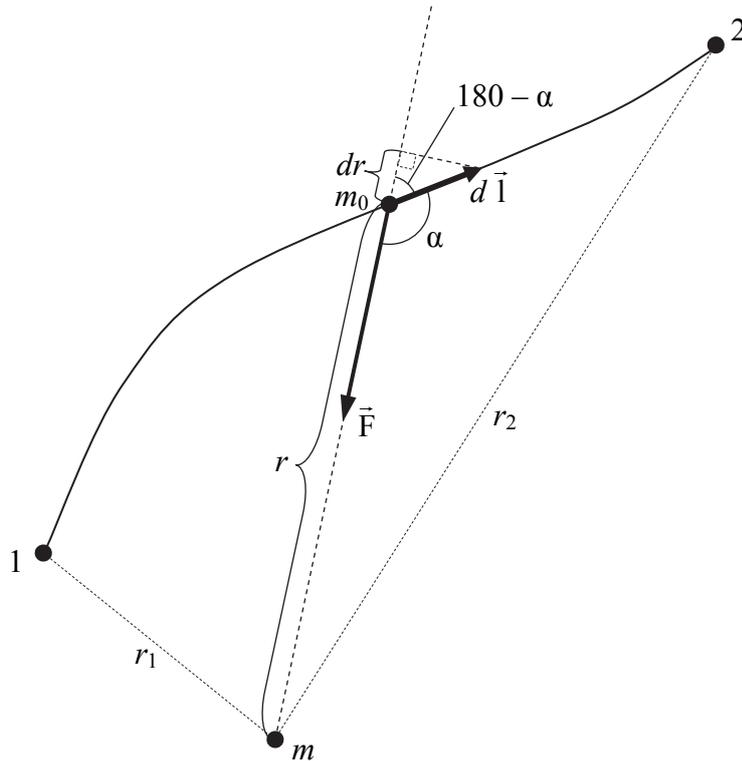


Рис. 5.1. Расчет работы силы центрального гравитационного поля, создаваемого точечной массой m , при перемещении в поле точечной массы m_0

Работа, совершаемая силой \vec{F} на конечном участке траектории от пункта 1 до пункта 2, равна сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках траектории и определяется криволинейным интегралом:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_1}^{r_2} G \frac{m m_0}{r^2} dr = G \frac{m m_0}{r_2} - G \frac{m m_0}{r_1}. \quad (5.18)$$

Отсюда следует, что работа гравитационной силы зависит от начального r_1 и конечного r_2 расстояния между материальными точками и не зависит от вида траектории, по которой происходит перемещение. Это означает, что силы тяготения действительно консервативны, а гравитационное поле потенциально.

Сравнивая выражения (5.10) и (5.18), получаем следующее выражение для потенциальной энергии взаимодействия двух точечных масс:

$$\Pi = -G \frac{m m_0}{r} + C,$$

где C – некоторая постоянная величина, зависящая от того, какую конфигурацию механической системы принять в качестве нулевой. В данном случае механическая система состоит из двух материальных точек. Если развести эти точки на бесконечно большое расстояние, то гравитационное взаимодействие между ними исчезнет. Поэтому потенциальную энергию гравитационного взаимодействия двух материальных точек, удаленных друг от друга на бесконечно большое расстояние, принято считать равной нулю, т. е.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(-G \frac{m m_0}{r} + C \right) = 0.$$

Из этого следует, что $C = 0$, и нормированное выражение для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух материальных точек имеет следующий вид:

$$\Pi = -G \frac{m m_0}{r}. \quad (5.19)$$

Чтобы подчеркнуть обратно пропорциональную зависимость потенциальной энергии от расстояния r , выражение (5.19) можно записать в следующем виде

$$\Pi = \frac{\beta}{r}, \quad (5.20)$$

где $\beta = -Gmm_0$ – величина, не зависящая от расстояния r .

Получить выражение (5.19) можно и другим способом. Как отмечалось выше, потенциальная энергия механической системы равна работе консервативных сил при переходе механической системы в состояние с нулевой конфигурацией. Тогда, принимая во внимание равенство (5.16), получим для потенциальной энергии выражение аналогичное (5.19):

$$\Pi_1 = A_{10} = - \int_r^{\infty} G \frac{m m_0}{r^2} dr = -G \frac{m m_0}{r}.$$

Для однородного гравитационного поля у поверхности Земли в качестве нулевой конфигурации механической системы принимают положение материальной точки m_0 на высоте $h = 0$, т. е. на поверхности Земли. Тогда потенциальная энергия материальной точки на высоте h от поверхности Земли равна работе, которую совершает сила тяжести $m\vec{g}$ при перемещении материальной точки с высоты h на нулевую высоту:

$$\Pi_1 = A_{10} = \int_1^0 m \vec{g} \cdot d\vec{l} = - \int_h^0 mg dh = mgh. \quad (5.21)$$

При интегрировании учтено, что увеличение пути l приводит к уменьшению высоты h , т. е. $dl = -dh$.

Энергетической характеристикой гравитационного поля является потенциал. **Потенциалом гравитационного поля** в некоторой точке поля называется величина, равная отношению потенциальной энергии частицы, помещенной в эту точку гравитационного поля, к массе этой частицы:

$$\varphi = \frac{\Pi}{m_0}. \quad (5.22)$$

Единицей измерения потенциала гравитационного поля является Дж/кг.

Выражение для потенциала точечной массы m можно получить, если в выражение (5.22) подставить потенциальную энергию взаимодействия точечных масс (5.19):

$$\varphi = \frac{\Pi}{m_0} = \frac{-G \frac{m m_0}{r}}{m_0} = -G \frac{m}{r}. \quad (5.23)$$

С учетом выражения (5.22) работа сил тяготения при перемещении точечной массы из пункта 1 в пункт 2 может быть представлена в следующем виде:

$$A_{12} = m_0 (\varphi_1 - \varphi_2),$$

где φ_1 и φ_2 – гравитационные потенциалы в начальном и конечном пунктах перемещения материальной точки.

Согласно выражению (4.3) на частицу массой m_0 в гравитационном поле напряженностью $\vec{F} = m_0 \vec{g}$ действует сила $\vec{F} = m_0 \vec{g}$. Потенциальная энергия такой частицы в соответствии с выражением (5.22) может быть найдена по формуле $\Pi = m_0 \varphi$. Тогда используя уравнение (5.15), связывающее консервативную силу и потенциальную энергию, получим

$$m_0 \vec{g} = -\nabla (m_0 \varphi).$$

Вынеся из-под знака градиента константу m_0 и сократив затем на эту константу, приходим к соотношению между напряженностью и потенциалом гравитационного поля:

Знак минус в этой формуле показывает, что вектор напряженности гравитационного поля \vec{g} направлен в сторону убывания гравитационного потенциала.

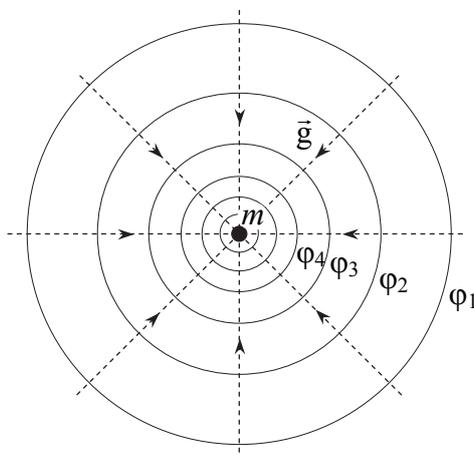


Рис. 5.2. Эквипотенциальные поверхности гравитационного поля

$$\vec{g} = -\nabla\varphi. \quad (5.24)$$

Для графического представления гравитационных полей кроме силовых линий часто используют эквипотенциальные поверхности. **Эквипотенциальной поверхностью** называется геометрическое место точек, имеющих одинаковый гравитационный потенциал. Эквипотенциальные поверхности строят таким образом, чтобы разность потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями была постоянной. Частота следования эквипотенциальных поверхностей определяет интенсивность гравитационного поля, т. е. там, где эквипотенциальные поверхности проведены чаще, напряженность больше. Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности всегда пересекаются под прямым углом. На рис. 5.2 приведен пример построения эквипотенциальных поверхностей для точечной массы.

5.4. РАБОТА СИЛ УПРУГОСТИ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ УПРУГО ДЕФОРМИРОВАННОГО ТЕЛА

Найдем работу, совершаемую силами упругости при деформации растяжения – сжатия (рис. 5.3). Если деформирование проводить очень медленно, то сила упругости, возникающая в сечении стержня, будет численно равна и противоположна по направлению внешней

силе, действующей на стержень. Согласно закону Гука, сила упругости F_n определяется выражением

$$F_n = -k_n x,$$

где k_n – жесткость стержня; x – абсолютная деформация стержня. Знак «минус» показывает, что направление силы упругости противоположно направлению деформации стержня, т. е. сила упругости стремится вернуть стержень в исходное недеформированное состояние.

При изменении длины стержня на величину dx силы упругости совершают элементарную работу δA :

$$\delta A = F_n dx = -k_n x dx.$$

Проинтегрируем это выражение и найдем работу, которую совершают силы упругости при изменении абсолютной деформации стержня от x_1 до x_2

$$A_{12} = -\int_{x_1}^{x_2} k_n x dx = \frac{k_n x_1^2}{2} - \frac{k_n x_2^2}{2}. \quad (5.25)$$

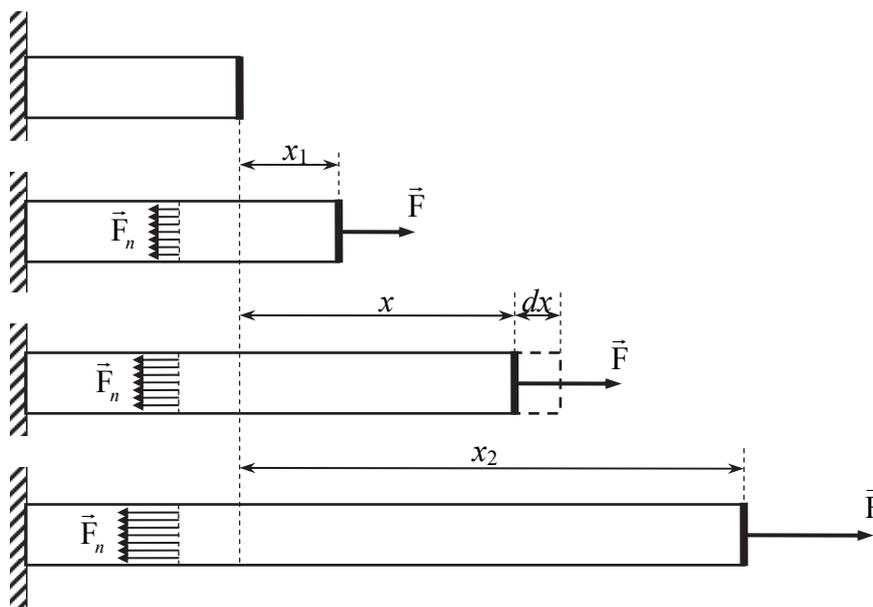


Рис. 5.3. Расчет работы сил упругости при деформации растяжения – сжатия

Из полученного выражения видно, что работа сил упругости определяется начальной x_1 и конечной x_2 абсолютными деформациями

тела и не зависит от того, каким промежуточным деформациям подвергалось тело при переходе из начального состояния в конечное. Это доказывает, что силы упругости являются консервативными. Работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии. Сопоставив выражение (5.25) и равенство (5.10), получаем выражение для потенциальной энергии упруго деформированного тела при деформации растяжения – сжатия:

$$\Pi = \frac{k_n x^2}{2} + C,$$

где C – некоторая константа, зависящая от выбора нулевой конфигурации деформируемого тела. Удобно считать, что потенциальная энергия равна нулю тогда, когда тело не деформировано, т. е. $x = 0$ и силы упругости не действуют:

$$\frac{k_n 0^2}{2} + C = 0.$$

Отсюда видно, что $C = 0$, и нормированное выражение для потенциальной энергии упруго деформированного тела при деформации растяжения – сжатия будет иметь следующий вид:

$$\Pi = \frac{k_n x^2}{2}. \quad (5.26)$$

Аналогичный результат можно получить, если воспользоваться равенством (5.16), согласно которому потенциальная энергия равна работе консервативных сил при переходе механической системы из заданного состояния в состояние с нулевой конфигурацией. Тогда получим

$$\Pi_1 = A_{10} = - \int_x^0 k_n x dx = \frac{k_n x^2}{2}.$$

МОМЕНТ СИЛЫ И МОМЕНТ ИМПУЛЬСА. ДИНАМИКА ВРЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

6.1. Момент силы. Момент импульса материальной точки. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса.

6.2. Движение тел в центральном гравитационном поле. Законы Кеплера. Космические скорости.

6.3. Уравнение динамики вращательного движения абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси.

6.1. МОМЕНТ СИЛЫ. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Моментом силы относительно неподвижной точки O называется векторное произведение радиуса-вектора \vec{r} , проведенного из точки O в точку приложения силы, на вектор силы \vec{F} :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (6.1)$$

Вектор момента силы \vec{M} направлен перпендикулярно плоскости векторов \vec{r} и \vec{F} по правилу правого винта (рис. 6.1). Вспомним, как применяется это правило. Сначала нужно выполнить параллельный перенос вектора силы \vec{F} в точку O . Теперь посмотрим на кратчайший поворот от первого вектора \vec{r} ко второму вектору \vec{F} . Если такой поворот происходит против хода часовой стрелки, то результирующий вектор \vec{M} направлен перпендикулярно плоскости векторов \vec{r} и \vec{F} на нас, а если по ходу часовой стрелки, то в противоположную сторону.

Модуль момента силы определяется выражением

$$M = Fr \sin \alpha = Fh, \quad (6.2)$$

где α – угол между векторами \vec{r} и \vec{F} ; $h = r \sin \alpha$ – плечо силы. **Плечом силы** называется длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы \vec{F} .

Момент силы характеризует способность силы вызывать вращение тела относительно точки O . Единицей измерения момента силы в международной системе единиц СИ является *ньютон на метр* (обозначается $\text{Н} \cdot \text{м}$).

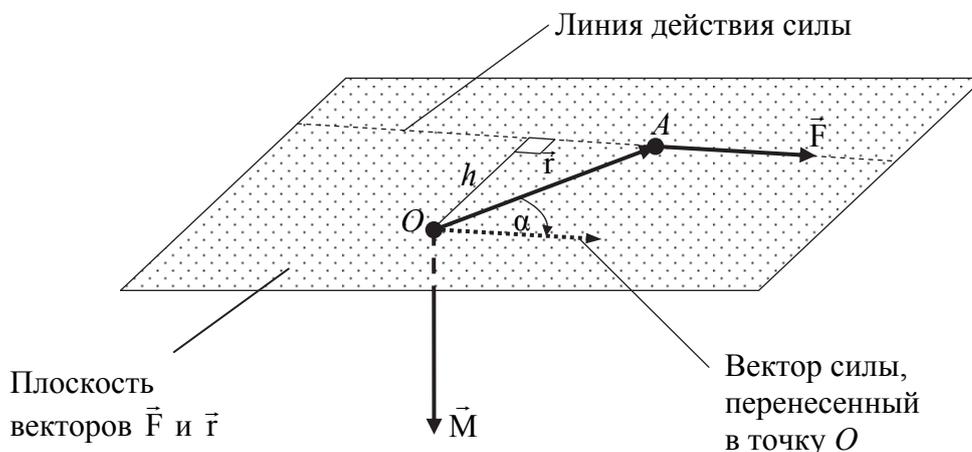


Рис. 6.1. Момент силы, приложенной к точке A , относительно центра O

Моментом импульса материальной точки относительно неподвижной точки O называется векторное произведение радиуса-вектора \vec{r} материальной точки, проведенного из точки O , на импульс этой материальной точки \vec{p} :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v}, \quad (6.3)$$

где m и \vec{v} – масса и скорость материальной точки. Вектор момента импульса \vec{L} направлен перпендикулярно каждому из перемножаемых векторов \vec{r} и \vec{p} в соответствии с правилом правого винта (рис. 6.2). Единицей измерения момента импульса в международной системе единиц СИ является *килограмм, умноженный на метр квадратный и деленный на секунду* (обозначается $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$).

Уравнение моментов устанавливает связь между изменением момента импульса точки и моментом силы, действующим на эту материальную точку. Уравнение моментов не является независимым законом природы, а следует из второго закона Ньютона. Для его получения продифференцируем по времени выражение (6.3) для момента импульса материальной точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (6.4)$$

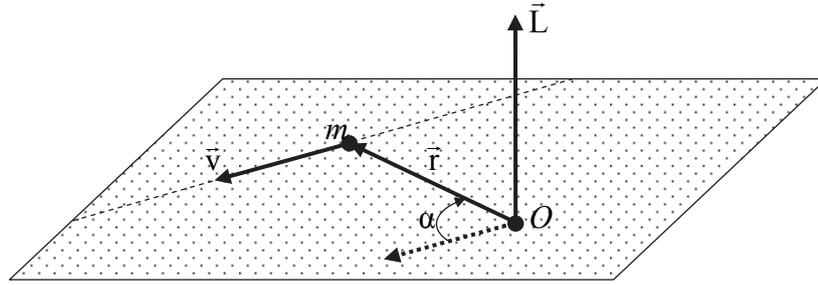


Рис. 6.2. Момент импульса материальной точки M относительно центра O

Так как вектор $\frac{d\vec{r}}{dt}$ есть не что иное, как скорость материальной точки \vec{v} , то он сонаправлен с импульсом $m\vec{v}$. Поэтому первое слагаемое в формуле (6.4) равно нулю. Вектор $\frac{d\vec{p}}{dt}$ согласно второму закону Ньютона представляет собой силу \vec{F} , действующую на материальную точку. Поэтому второе слагаемое в формуле (6.4) можно заменить моментом этой силы \vec{M} :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (6.5)$$

Полученное уравнение называется **уравнением моментов для материальной точки** или **теоремой об изменении момента импульса материальной точки**.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Пусть m_i и \vec{v}_i – масса и скорость i -й точки системы. **Моментом импульса механической системы** относительно неподвижной точки O называется вектор, равный векторной сумме моментов импульса всех материальных точек системы относительно той же точки O :

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i). \quad (6.6)$$

Для каждой i -й материальной точки справедливо уравнение моментов (6.5), которое с учетом того, что на каждую материальную точку системы действуют внешние и внутренние силы, запишется в следующем виде:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}'_{ij}, \quad (6.7)$$

где \vec{F}_i – равнодействующая внешних сил, действующих на i -ю материальную точку системы; \vec{F}'_{ij} – сила действующая на i -ю материальную точку со стороны j -й материальной точки. Первое слагаемое в выражении (6.7) представляет собой момент внешних сил, действующих на i -ю материальную точку, а второе слагаемое – сумму моментов внутренних сил взаимодействия i -й материальной точки со всеми остальными материальными точками системы.

Чтобы получить закон изменения момента импульса механической системы, продифференцируем по времени выражение (6.6) для момента импульса механической системы:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}'_{ij} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}'_{ij}). \end{aligned} \quad (6.8)$$

В силу третьего закона Ньютона силы взаимодействия двух материальных точек механической системы равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}'_{ij} = -\vec{F}'_{ji}.$$

Плечи этих сил относительно неподвижной точки O равны. Из этого следует, что моменты сил взаимодействия двух материальных точек механической системы равны по величине и противоположны по направлению (рис. 6.3):

$$\vec{r}_i \times \vec{F}'_{ij} = -\vec{r}_j \times \vec{F}'_{ji}.$$

Тогда сумма моментов всех внутренних сил будет равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}'_{ij}) = 0,$$

и уравнение (6.8) упростится:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i), \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^n \vec{M}_i, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i$ – векторная сумма моментов внешних сил.

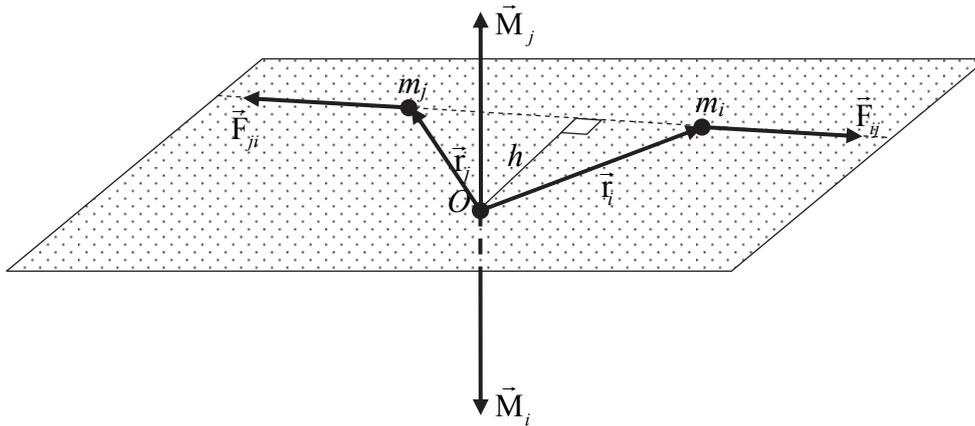


Рис. 6.3. Моменты сил взаимодействия двух материальных точек



Уравнение (6.9) представляет собой уравнение моментов для механической системы. Это уравнение называют теоремой об изменении момента импульса механической системы: производная по времени от момента импульса механической системы равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на систему.

Если суммарный момент внешних сил, действующих на механическую систему равен нулю $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$, то уравнение моментов (6.9) запишется в следующем виде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = 0.$$

Это означает, что момент импульса \vec{L} механической системы является константой, т. е. он не изменится с течением времени.



Таким образом, мы получили закон сохранения момента импульса: момент импульса механической системы не изменяется с течением времени, если суммарный момент внешних сил, действующих на систему, равен нулю:

если $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$, то $\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \text{const.}$ (6.10)



Этот закон выполняется в том числе и для замкнутых механических систем, тогда он формулируется следующим образом: момент импульса замкнутой механической системы не изменяется с течением времени.

В случае центрального силового поля силы, действующие на материальные точки системы, направлены в одну точку – центр поля, поэтому моменты этих сил относительно центра поля равны нулю. Поэтому закон сохранения момента импульса справедлив для любого центрального поля.

Подобно законам сохранения импульса и механической энергии, закон сохранения момента импульса принадлежит к числу самых фундаментальных законов природы и справедлив не только в рамках классической механики. Он носит универсальный характер и выполняется также в релятивистской и квантовой механике. Этот закон является следствием особого свойства пространства – его изотропности. **Изотропность** – это инвариантность физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета. Это значит, что физические законы не изменяются при повороте системы отсчета в пространстве на любой угол.

6.2. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА. КОСМИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ

Момент импульса в центральном поле сил. Второй закон Кеплера

В центральном поле сил радиус-вектор \vec{r} и вектор силы \vec{F} направлены вдоль одной прямой, проходящей через центр поля точку O . Поэтому момент силы, действующий на материальную точку относительно центра поля O , равен нулю $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$. Тогда, согласно закону сохранения момента импульса, момент импульса \vec{L} материальной точки относительно центра поля не изменяется с течением времени $\vec{L} = const$. Постоянство вектора \vec{L} означает, что движение материальной точки в поле центральных сил – *плоское*, т. е. центр поля O и все точки траектории, по которой движется материальная точка, принадлежат одной, перпендикулярной вектору \vec{L} плоскости.

Разложим вектор скорости на две составляющие так, как это показано на рис. 6.4. Радиальная скорость \vec{v}_r , направлена вдоль прямой проходящей через центр поля O , а трансверсальная скорость \vec{v}_φ – перпендикулярно этой прямой:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi.$$

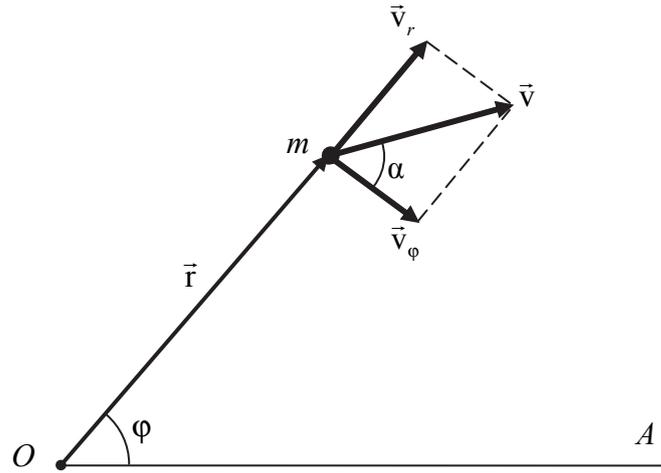


Рис. 6.4. Разложение вектора скорости на составляющие при движении в центральном силовом поле

Тогда выражение (6.3) для момента импульса примет следующий вид:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v}_r + \vec{r} \times m \vec{v}_\varphi. \quad (6.11)$$

Так как векторы \vec{r} и \vec{v}_r направлены вдоль одной прямой, то первое слагаемое в выражении (6.11) равно нулю. Векторы \vec{r} и \vec{v}_φ перпендикулярны, поэтому модуль момента импульса

$$L = mrv_\varphi = mrv \cos \alpha, \quad (6.12)$$

где α – угол между вектором скорости \vec{v} и линией перпендикулярной радиус-вектору \vec{r} .

Трансверсальная скорость v_φ , характеризующая быстроту изменения полярного угла φ , определяется выражением

$$v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\sigma}{r}, \quad (6.13)$$

где σ – секторальная скорость, показывающая какую площадь S покрывает радиус-вектор \vec{r} материальной точки за единицу времени:

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{rv_\varphi}{2}. \quad (6.14)$$

С учетом выражения (6.13), формулу (6.12) можно представить в следующем виде:

$$L = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2m\sigma. \quad (6.15)$$

Тогда в центральном силовом поле секторальная скорость σ материальной точки, также как и ее момент импульса L , есть величина постоянная, не изменяющаяся с течением времени:

$$\sigma = \frac{L}{2m} = \frac{1}{2}vr \cos \alpha = \text{const}. \quad (6.16)$$

Закон постоянства секторальной скорости (6.16) был впервые установлен И. Кеплером¹ в 1609 г. как результат обобщения огромного количества астрономических наблюдений движения планет в центральном силовом поле Солнца.



Его называют вторым законом Кеплера: при движении материальной точки в центральном поле сил секторальная скорость материальной точки остается постоянной.

Уравнение траектории в центральном поле сил

Так как сила, действующая в центральном поле сил на материальную точку, является консервативной, то выполняется закон сохранения механической энергии:

$$E = K + \Pi = \text{const}. \quad (6.17)$$

Кинетическую энергию материальной точки можно представить в следующем виде:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_r^2 + v_\varphi^2) = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right). \quad (6.18)$$

Из выражения (6.15) следует, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}. \quad (6.19)$$

Тогда формула (6.18) примет вид

¹Иоганн Кéплер (1571–1630) – немецкий математик, астроном, механик, оптик и астролог, первооткрыватель законов движения планет Солнечной системы.

$$K = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{L}{mr} \right)^2 \right). \quad (6.20)$$

Подставляя это выражение в уравнение (6.17) и выражая dr / dt , получим

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - \Pi) - \left(\frac{L}{mr} \right)^2}. \quad (6.21)$$

Делим уравнение (6.19) на уравнение (6.21) и получаем следующее дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L / r^2}{\sqrt{2m(E - \Pi) - \left(\frac{L}{r} \right)^2}}, \quad (6.22)$$

решение которого можно найти, если учесть, что

$$\frac{L}{r^2} dr = -d \left(\frac{L}{r} \right). \quad (6.23)$$

Тогда получим следующее:

$$\phi = - \int \frac{d(L/r)}{\sqrt{2m(E - \Pi) - (L/r)^2}}. \quad (6.24)$$

Чтобы найти этот интеграл, подставляем в него выражение (5.19) для потенциальной энергии центрального поля

$$\phi = - \int \frac{d(L/r)}{\sqrt{2mE - 2m\beta / r - (L/r)^2}}. \quad (6.25)$$

Преобразуем подкоренное выражение, для этого добавим к нему и отнимем от него величину $(m\beta / L)^2$, тогда интеграл (6.25) можно свести к виду

$$\phi = - \int \frac{d(L/r + m\beta / L)}{\sqrt{[2mE + (m\beta / L)^2] - [L/r + m\beta / L]^2}}. \quad (6.26)$$

Введя обозначения

$$\eta = L/r + m\beta / L, \quad a^2 = 2mE + (m\beta / L)^2, \quad (6.27)$$

получаем табличный интеграл

$$\varphi = -\int \frac{d\eta}{\sqrt{a^2 - \eta^2}} = \arccos \frac{\eta}{a} + \varphi_0, \quad (6.28)$$

где φ_0 – постоянная интегрирования, определяемая выбором начала отсчета угла φ . Удобно принять, что угол $\varphi = 0$ при $\eta = a$, тогда $\varphi_0 = 0$.

Подставив формулы (6.27) в выражение (6.28), получим уравнение $\varphi = f(r)$ траектории движения материальной точки в центральном силовом поле:

$$\varphi = \arccos \frac{L/r + m\beta/L}{\sqrt{2mE + (m\beta/L)^2}}. \quad (6.29)$$

Это уравнение удобнее анализировать, если представить его в виде зависимости $r = f(\varphi)$:

$$r = \frac{L}{-m\beta/L + \cos \varphi \sqrt{2mE + (m\beta/L)^2}} = \frac{-\frac{L^2}{m\beta}}{1 + \cos \varphi \sqrt{\frac{2EL^2}{m\beta^2} + 1}}. \quad (6.30)$$

Рассмотрим два возможных случая: 1) $\beta < 0$, т. е. материальная точка притягивается к центру поля, например, притяжение тела к центру Земли или притяжение электрона к ядру атома; 2) $\beta > 0$, т. е. материальная точка отталкивается от центра поля, например, отталкивание протона при его столкновении в ускорителе с положительно заряженным ионом. Если принять обозначения

$$p = \frac{L^2}{m|\beta|}, \quad e = \sqrt{\frac{2EL^2}{m\beta^2} + 1}, \quad (6.31)$$

то в первом случае уравнение траектории (6.30) примет вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (6.32)$$

а во втором – следующий:

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos \varphi}. \quad (6.33)$$

Полученные уравнения представляют собой уравнения кривых второго порядка, причем p – это фокальный параметр, а e – эксцентриситет. Если в выражениях (6.31) заменить энергию E , момент импульса L и коэффициент β соответствующими им выражениями для гравитационного поля:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{\beta}{r} = \frac{mv^2}{2} - G \frac{Mm}{r}, \quad L = mvr \cos \alpha, \quad \beta = -GMm,$$

то получим

$$p = \frac{r^2 v^2 \cos^2 \alpha}{GM}, \quad e = \sqrt{\frac{(v^2 r^2 - 2GM/r)v^2 \cos^2 \alpha}{G^2 M^2} + 1}, \quad (6.34)$$

где G – гравитационная постоянная; M – точечная масса, создающая гравитационное поле; m – масса тела, движущегося в центральном гравитационном поле. Таким образом, при движении тела в центральном гравитационном поле параметры траектории p и e не зависят от массы тела m .

Конические сечения

К кривым второго порядка, которые часто называют также коническими сечениями, относятся *эллипс*, *гипербола* и *парабола*. Эти кривые получаются пересечением прямого кругового конуса плоскостью. Дать математическое определение сразу всем коническим сечениям можно следующим образом. Пусть точка O_1 на рис. 6.5 – фокус конического сечения, а LL' – прямая, не проходящая через точку O_1 , называемая директрисой. Тогда коническое сечение – это геометрическое место точек C , для которых отношение расстояний $e = CO_1 / CD$ является неотрицательной постоянной (CD – длина перпендикуляра, опущенного из точки C на директрису). Это отношение называется *эксцентриситетом* конического сечения. При $e < 1$ коническое сечение – эллипс, при $e > 1$ – гипербола, при $e = 1$ – парабола, при $e = 0$ – окружность. Эксцентриситет характеризует вытянутость конического сечения, так например, чем ближе к нулю эксцентриситет эллипса, тем больше эллипс напоминает окружность и наоборот, чем эксцентриситет ближе к единице, тем сильнее вытянут эллипс. Если через фокус провести прямую параллельную директрисе LL' , то отрезок этой прямой O_1F , отсекаемый кривой конического сечения, называется фокальным параметром p . Фокальный параметр имеет размерность длины и определяет геометрический размер конического сечения.

Все конические сечения имеют два фокуса и две директрисы. Центр поля всегда находится в одном из фокусов конического сечения.

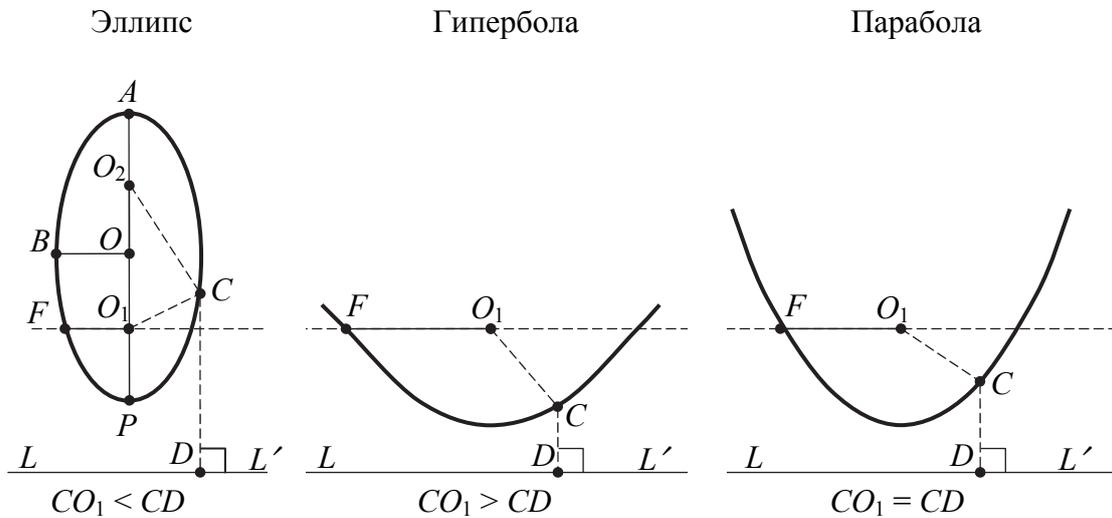


Рис. 6.5. Конические сечения

Наряду с параметрами p и e эллиптическую орбиту можно характеризовать также расстояниями r_P от центра поля O_1 до ближайшей точки эллипса P , называемой перигелием для планетных орбит и перигеем для орбит спутников Земли, и расстоянием r_A от центра поля O_1 до наиболее удаленной точки эллипса A , называемой соответственно афелием или апогеем. Минимальному расстоянию r в формуле (6.32) соответствует угол $\varphi = 0$, а максимальному $\varphi = 180^\circ$. Тогда для параметров r_P и r_A получаются следующие выражения:

$$r_P = \frac{p}{1+e}, \quad r_A = \frac{p}{1-e}. \quad (6.35)$$

Эксцентриситет e эллипса выражается через r_P и r_A следующим образом:

$$e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}, \quad (6.36)$$

где $r_A - r_P$ – расстояние между фокусами эллипса O_1O_2 , а $r_A + r_P$ – большая ось эллипса AP . Отсюда следует выражение для большой полуоси эллипса OP :

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad (6.37)$$

а также для расстояния между центром эллипса и его фокусами:

$$OO_1 = \frac{r_A - r_P}{2} = a - r_P = ae. \quad (6.38)$$

Далее учитывая, что сумма расстояний от фокусов до любой точки эллипса постоянна ($O_1C + O_2C = 2a$), несложно получить выражение для малой полуоси эллипса OB :

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (6.39)$$

Возможные виды траекторий в центральном поле сил

Если материальная точка притягивается к центру поля, т. е. $\beta < 0$, то потенциальная энергия материальной точки Π , определяемая выражением (5.19), отрицательна. Полная механическая энергия материальной точки E в этом случае может быть как отрицательной, так и положительной. Траектория материальной точки описывается уравнением (6.32), и в зависимости от знака полной механической энергии можно в соответствии с выражением (6.31) выделить следующие виды траекторий материальной точки:

- а) если $E < 0$, то $e < 1$, и траектория представляет собой эллипс;
- б) если $E > 0$, то $e > 1$, и материальная точка движется по гиперболе;
- с) если $E = 0$, то $e = 1$, и траекторией движения материальной точки является парабола.

Если момент импульса материальной точки L равен нулю, эти виды траекторий вырождаются в прямую линию, проходящую через центр поля. Примерами движения в центральном поле сил притяжения являются: 1) движение небесных тел (планет, астероидов, комет) в гравитационном поле Солнца; 2) движение точечного электрического заряда q_0 в электростатическом поле разноименного с ним заряда q .

Если материальная точка отталкивается от центра поля, т. е. $\beta < 0$, то потенциальная энергия материальной точки Π , определяемая выражением (5.19), положительна. Тогда полная механическая энергия материальной точки E может быть только положительной, и в соответствии с выражением (6.31) $e > 1$. Поэтому материальная точка движется в центральном поле сил отталкивания либо по гиперболической орбите, описываемой уравнением (6.33), либо по прямой проходящей через центр поля, если $L = 0$. Примером такого движения является движение точечного электрического заряда q_0 в электростатическом поле одноименного с ним заряда q .

Первый и третий законы Кеплера



Для планет, движущихся в поле тяготения Солнца, $E < 0$, поэтому для них справедлив первый закон Кеплера: все планеты Солнечной системы движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которого находится Солнце.

В соответствии со вторым законом Кеплера секторальная скорость σ , определяемая выражением (6.16), постоянна. Тогда период обращения планеты по эллиптической орбите можно определить как отношение площади эллипса $S = \pi ab$ к секторальной скорости σ : $T = \pi ab / \sigma$. Учитывая, выражения (6.16), (6.37) и (6.39), получаем

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{\sigma^2} = \frac{\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{L^2 / 4m^2} = \frac{\pi^2 a^3 p}{L^2 / 4m^2}. \quad (6.40)$$

Далее, принимая во внимание формулу (6.31) для фокального параметра p и выражение для параметра β , приходим к соотношению

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^3 L^2 / m |\beta|}{L^2 / 4m^2} = \frac{4\pi^2}{GM} a^3, \quad (6.41)$$



которое выражает третий закон Кеплера: квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца прямо пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

Космические скорости

Первой космической скоростью v_1 называется наименьшая скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно могло стать искусственным спутником некоторого космического тела (планеты). При этом подразумевается, что эта скорость направлена горизонтально, т. е. параллельно поверхности планеты; обращение спутника вокруг космического тела происходит в отсутствие сопротивления атмосферы под действием одной только силы тяготения; спутник движется по круговой орбите радиусом $r = R + H$, где R – радиус планеты, H – высота траектории над поверхностью (рис. 6.5). Понятно, что вблизи поверхности планеты такое движение не может быть реализовано на практике, так как силой сопротивления атмосферы в этом случае пренебрегать нельзя, однако уже на высоте

$H = 100$ км, что на много меньше среднего радиуса Земли $R = 6371$ км, плотность атмосферы примерно в 2 миллиона раз меньше, чем на уровне моря. Поэтому при расчете первой космической скорости высотой H пренебрегают.

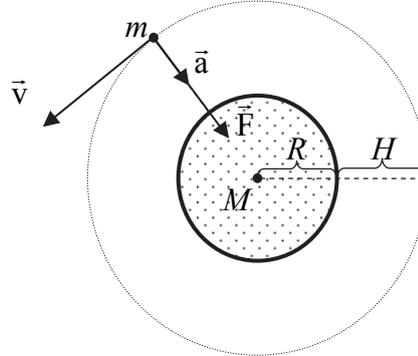


Рис. 6.5. Первая космическая скорость

На спутник действует сила определяемая законом всемирного тяготения (4.1), движение происходит по круговой орбите с центростремительным ускорением v_1^2 / r . Запишем второй закон Ньютона для спутника:

$$G \frac{Mm}{(R+H)^2} = m \frac{v_1^2}{R+H}, \quad (6.42)$$

где M – масса планеты, m – масса спутника. Тогда для v_1 получается выражение

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R+H}}. \quad (6.43)$$

Расчет по формуле (6.43) при условии $H \approx 0$ дает следующее значение первой космической скорости для движения у поверхности Земли: $v_1 = 7,9$ км/с. Так как движение происходит по окружности, то первую космическую скорость часто называют круговой скоростью.

Второй космической скоростью v_2 называется наименьшая скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение планеты и превратиться в искусственный спутник Солнца. По мере удаления от планеты вследствие действия силы тяготения скорость тела, а следовательно, и его кинетическая энергия, постепенно уменьшаются и на бесконечном удалении достигают некоторых остаточных значений. Второй космической скорости, которая

равна наименьшей стартовой скорости, соответствуют равные нулю значения остаточной скорости и остаточной кинетической энергии. В центральном поле тяготения потенциальная энергия тела определяется выражением (6.18), она отрицательна и по мере удаления от планеты уменьшается по модулю, обращаясь в нуль на бесконечно большом расстоянии. Таким образом, если телу сообщить на поверхности Земли вторую космическую скорость, то на бесконечно большом удалении от планеты и кинетическая, и потенциальная энергии тела, становятся равными нулю. Полная механическая энергия в этом случае также равна нулю. Согласно закону сохранения энергии, она равна нулю в любой точке траектории, в том числе и самой начальной:

$$E = \frac{mv_2^2}{2} - G \frac{Mm}{R+H} = 0. \quad (6.44)$$

Отсюда для второй космической скорости получаем выражение

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R+H}} = \sqrt{2} v_1, \quad (6.45)$$

согласно которому при старте с поверхности Земли ($H = 0$) вторая космическая скорость равна 11,2 км/с. Нулевой механической энергии E соответствует траектория парабола, поэтому вторую космическую скорость часто называют **параболической скоростью**. Если скорость тела меньше параболической скорости, то траекторией движения в общем случае является эллипс, если больше – гипербола.

Вследствие суточного вращения Земли первая и вторая космические скорости зависят от условий запуска. При запуске по касательной к поверхности по направлению вращения планеты эти скорости меньше, чем при запуске по касательной к поверхности против направления вращения планеты. Этот эффект тем сильнее, чем ближе точка старта к экватору Земли.

Третьей космической скоростью v_3 называется наименьшая скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно могло удалиться за пределы Солнечной системы, т. е. преодолеть тяготение не только Земли, но и Солнца. Величина третьей космической скорости определяется условиями запуска. При запуске тела в направлении орбитального движения Земли $v_3 = 16,7$ км/с, против – $v_3 = 72,7$ км/с.

6.3. УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Будем рассматривать твердое тело как совокупность материальных точек, к которым приложены как внешние, так и внутренние силы. Внутренние силы при этом представляют собой силы взаимодействия жестко связанных между собой отдельных частиц твердого тела. Для описания вращательного движения твердого тела будем использовать полученное ранее уравнение моментов для системы материальных точек (6.9):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i),$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i).$$

где \vec{L} – момент импульса тела относительно некоторого центра O , лежащего на оси вращения; \vec{M} – результирующий момент внешних сил, действующих на тело, относительно этого же центра O .

Спроецируем правую и левую части уравнения моментов на ось вращения z . Получим:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (6.46)$$

Здесь проекция L_z момента импульса тела равна сумме проекций на ось z моментов импульсов отдельных частиц тела:

$$L_z = \sum_{i=1}^n L_{iz} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)_z, \quad (6.47)$$

а M_z – проекция на ось z суммарного момента внешних сил, действующих на тело, равная сумме проекций на ось z всех моментов внешних сил:

$$M_z = \sum_{i=1}^n M_{iz} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{M}_i)_z. \quad (6.48)$$

Уравнение (6.46) является уравнением динамики вращательного движения абсолютно твердого тела относительно оси z . Оно похоже на уравнение динамики поступательного движения (2.9). При этом не трудно заметить соответствие импульса \vec{p} и проекции момента импульса L_z , а также силы \vec{F} и проекции момента силы M_z . Чтобы воспользоваться уравнением (6.46), надо уметь рассчитывать проекции на ось z момента импульса тела и момента внешней силы.

На рис. 6.6 показано абсолютно твердое тело, вращающееся относительно оси z , с угловой скоростью ω . Пусть некоторая материальная точка этого тела, имеющая массу m_i , движется по окружности радиусом R_i с линейной скоростью v_i . Радиус-вектор \vec{r}_i этой материальной точки проводится из лежащего на оси z центра O и образует с осью z угол α . Так как вектора \vec{r}_i и \vec{v}_i перпендикулярны друг другу, то модуль момента импульса материальной точки определяется выражением

$$L_i = m_i v_i r_i.$$

Вектор $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ перпендикулярен радиус-вектору \vec{r}_i и вектору линейной скорости \vec{v}_i , и поэтому лежит в одной плоскости с осью z и радиус-вектором \vec{r}_i , образуя с осью z угол $\beta_i = 90^\circ - \alpha_i$. Тогда проекция вектора \vec{L}_i на ось z определяется выражением

$$L_{iz} = L_i \cos \beta_i = m_i v_i r_i \sin \alpha_i = m_i v_i R_i$$

и не зависит от положения точки O на оси z .

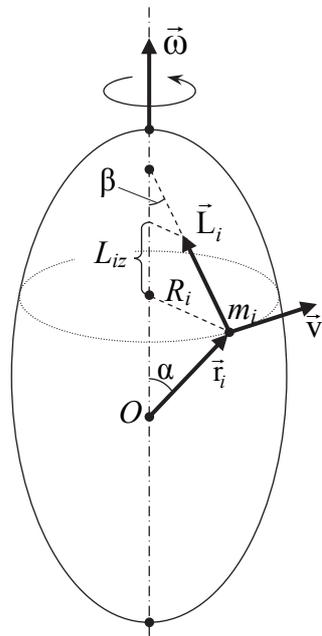


Рис. 6.6. Проекция момента импульса материальной точки на ось вращения тела

Если учесть, что при вращательном движении линейная и угловая скорости связаны соотношением $v_i = \omega R_i$, то с учетом выражения (6.47) получим следующее:

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i \omega R_i^2 = \omega \sum_{i=1}^n m_i R_i^2, \\ L_z = I_z \omega, \quad (6.49)$$

где I_z – момент инерции твердого тела относительно оси z , определяемый выражением

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2. \quad (6.50)$$



Таким образом, моментом инерции твердого тела относительно оси z называется скалярная величина, равная сумме произведений масс частиц тела на квадраты их расстояний до оси z .

Моментом инерции материальной точки массой m , расположенной на расстоянии R от оси z , называется величина

$$I_z = mR^2. \quad (6.51)$$

Единицей измерения момента инерции в международной системе единиц СИ является *килограмм на метр в квадрате* (обозначается $\text{кг} \cdot \text{м}^2$).

Рассмотрим, как определяется проекция момента силы на ось вращения z . На рис. 6.7 показано тело, способное вращаться относительно оси z .

Пусть на одну из точек этого тела с радиус-вектором \vec{r} действует сила \vec{F} , направленная произвольным образом. Разложим эту силу на две составляющие:

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_{xy},$$

где \vec{F}_z – сила, параллельная оси z ; \vec{F}_{xy} – сила, перпендикулярная \vec{F}_z и лежащая в плоскости xy . Окружность, по которой при вращении тела движется точка приложения силы, также лежит в этой плоскости xy . Радиус этой окружности определяется выражением

$$R = r \sin \alpha,$$

где α – угол между радиус-вектором и осью z . Далее разложим на две составляющих силу \vec{F}_{xy} :

$$\vec{F}_{xy} = \vec{F}_r + \vec{F}_\tau,$$

где \vec{F}_r – радиальная сила, направленная вдоль радиуса окружности, по которой движется точка приложения силы; \vec{F}_τ – касательная сила, направленная по касательной к той же окружности. Таким образом, мы разложили силу \vec{F} на три составляющие:

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_r + \vec{F}_\tau.$$

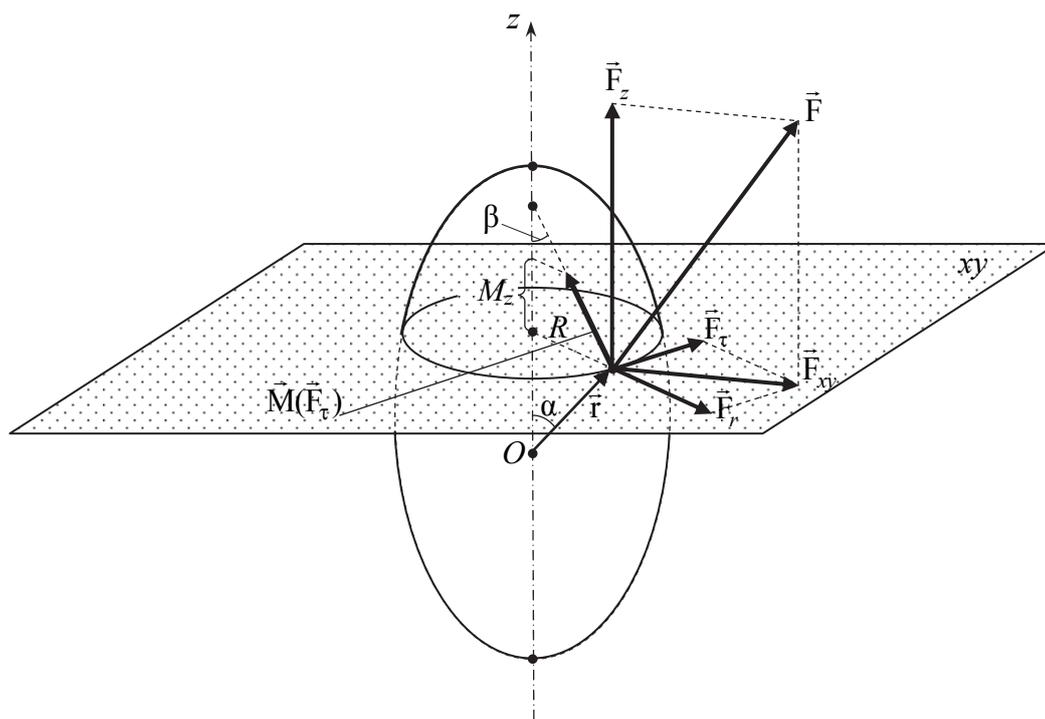


Рис. 6.7. Проекция момента силы на ось вращения тела

Параллельная оси z сила \vec{F}_z и радиальная сила \vec{F}_r не могут вызвать вращательного движения тела вокруг оси z . Действительно, моменты этих сил направлены по касательной к окружности, по которой при вращении тела движется точка приложения силы и, следовательно, их проекции на ось z равны нулю. Момент касательной силы \vec{F}_τ лежит в одной плоскости с радиус-вектором \vec{r} и осью z , его проекция на ось z не равна нулю. Таким образом, вращение тела вокруг оси z будет вызывать только касательная сила \vec{F}_τ , момент которой относительно точки O , лежащей на оси z , равен $M(\vec{F}_\tau) = F_\tau r$. Проекцию этого момента на ось z можно найти по формуле

$$M_z = M(\vec{F}_\tau) \cos \beta = F_\tau r \sin \alpha = F_\tau R, \quad (6.52)$$

где $\beta = 90^\circ - \alpha$ – угол между вектором момента силы \vec{F}_τ и осью z ; радиус окружности R выполняет здесь роль плеча силы.

С учетом выражения (6.49) уравнение динамики (6.46) для вращения тела относительно оси z примет вид

$$\frac{d(I_z \omega)}{dt} = M_z.$$

Поскольку для твердого тела момент инерции I_z не зависит от времени, то это уравнение можно переписать в виде

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z,$$

или, учитывая, что $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, получим

$$\varepsilon = \frac{M_z}{I_z}. \quad (6.53)$$

Уравнение (6.53) представляет собой **уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси**. По своему физическому смыслу это уравнение аналогично второму закону Ньютона для движения материальной точки. При этом можно заметить соответствие между линейным \vec{a} и угловым ε ускорениями, между силой \vec{F} и проекцией момента силы M_z и между массой m и моментом инерции I_z .



Отсюда следует важный вывод, что момент инерции тела относительно оси является мерой инертности тела при вращательном движении подобно тому, как масса является мерой инертности тела при поступательном движении.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

7.1. Работа силы и кинетическая энергия тела при вращательном движении.

7.2. Расчет моментов инерции твердых тел.

7.3. Свойство аддитивности момента инерции. Теорема Штейнера.

7.1. РАБОТА СИЛЫ И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТЕЛА ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси z силу \vec{F} , действующую на тело, раскладывают на три составляющие: силу \vec{F}_z параллельную оси z , радиальную силу \vec{F}_r и касательную силу \vec{F}_τ (рис. 7.1).

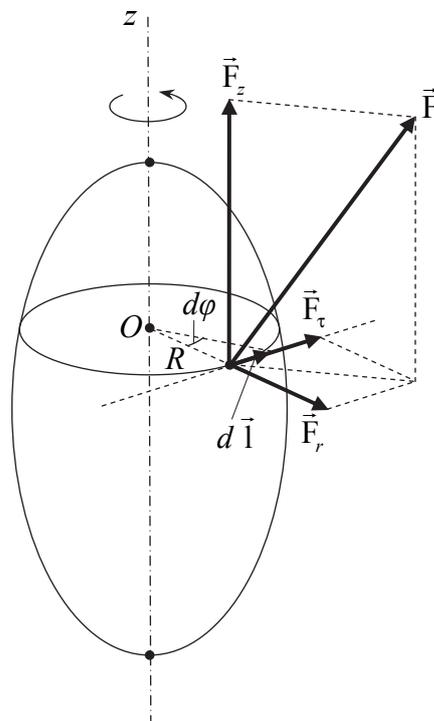


Рис. 7.1. Работа силы при вращении тела относительно неподвижной оси

Точка приложения силы движется по окружности радиуса R , совершая элементарное перемещение $d\vec{l}$. Силы \vec{F}_z и \vec{F}_r перпендикулярны вектору $d\vec{l}$ и, следовательно, работы не совершают. Сила \vec{F}_τ направлена по касательной к окружности, по которой движется точка приложения силы, т. е. она либо совпадает по направлению с вектором $d\vec{l}$, либо противоположна ему. Тогда элементарная работа силы \vec{F} определяется выражением

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F}_\tau \cdot d\vec{l} = F_\tau \cdot dl,$$

где F_τ – проекция силы \vec{F} на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$.

Учитывая, что элементарное перемещение dl происходит при повороте тела на элементарный угол $d\phi$, причем $dl = R d\phi$, представим элементарную работу в следующем виде:

$$\delta A = F_\tau dl = F_\tau R d\phi.$$

Далее, принимая во внимание выражение для проекции момента силы на ось вращения $M_z = F_\tau R$, получим выражение для элементарной работы внешней силы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси z :

$$\delta A = M_z d\phi. \quad (7.1)$$

Работа силы при повороте тела на конечный угол от начального угла поворота ϕ_1 до конечного угла поворота ϕ_2 будет тогда определяться интегралом

$$A_{12} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} M_z d\phi. \quad (7.2)$$

Если твердое тело совершает вращательное движение относительно оси z , то скорость i -й материальной точки этого тела определяется выражением

$$v_i = \omega R_i,$$

где R_i – радиус окружности, по которой движется материальная точка.

Подставляем это выражение для скорости в формулу (5.5) для кинетической энергии механической системы:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i (\omega R_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i R_i^2.$$

Учтем, что момент инерции тела относительно оси z определяется выражением $I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$. Тогда **кинетическая энергия вращательного движения твердого тела** будет

$$K = \frac{I_z \omega^2}{2}. \quad (7.3)$$

Это выражение для кинетической энергии можно получить также на основе теоремы об изменении кинетической энергии, согласно которой кинетическая энергия вращающегося тела равна работе, которую надо совершить, чтобы перевести тело из состояния покоя 1 в состояние вращения 2:

$$K = A = \int_1^2 M_z d\varphi.$$

Далее учитывая уравнение динамики вращательного движения (6.53) $M_z = I_z \varepsilon$, определения углового ускорения (1.36) $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ и угловой скорости (1.34) $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, получаем

$$K = \int_1^2 I_z \varepsilon d\varphi = I_z \int_1^2 \frac{d\omega}{dt} d\varphi = I_z \int_0^\omega \frac{d\varphi}{dt} d\omega = I_z \int_0^\omega \omega d\omega = \frac{I_z \omega^2}{2}.$$

Если твердое тело участвует одновременно в поступательном и во вращательном движениях, то его кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений:

$$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2}, \quad (7.4)$$

где m – масса тела; v_c – скорость движения центра масс тела.

7.2. РАСЧЕТ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Как было показано в лекции 6, момент инерции тела входит в уравнение динамики вращательного движения тела относительно неподвижной оси (6.53), и при вращательном движении играет такую же роль, как масса при поступательном движении, т. е. момент инерции

тела относительно оси является мерой инертности тела при вращательном движении.

В лекции 6 было дано определение момента инерции тела относительно оси

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2, \quad (7.5)$$

т. е. момент инерции тела относительно некоторой оси представляет собой сумму произведений масс частиц тела на квадраты их расстояний до этой оси. Однако в реальных телах невозможно выделить отдельные частицы, так как масса распределена по объему тел непрерывно. Поэтому для реальных тел сумма (7.5) сводится к следующему интегралу:

$$I_z = \int_{(m)} R^2 dm = \int_{(V)} R^2 \rho dV, \quad (7.6)$$

где ρ – плотность тела; а $dm = \rho dV$ – масса малого элемента тела объемом dV , отстоящего от оси вращения z на расстояние R .

Рассмотрим несколько примеров расчета моментов инерции для тел простой формы.

Пример 1. Определить момент инерции тонкостенного кругового цилиндра массой m и радиусом R относительно его оси (рис. 7.2).

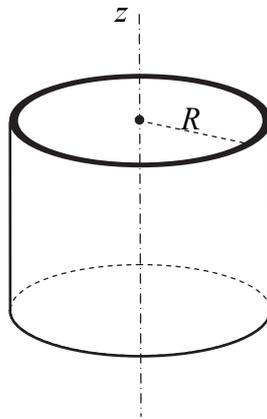


Рис. 7.2. Момент инерции тонкостенного цилиндра относительно его оси

Все малые элементы такого цилиндра находятся на одном и том же расстоянии R от его оси, поэтому

$$I_z = \int_{(m)} R^2 dm = R^2 \int_{(m)} dm = mR^2. \quad (7.7)$$

Пример 2. Определить момент инерции сплошного однородного кругового цилиндра массой m и радиусом R относительно его оси.

Разобьем мысленно цилиндр на очень большое число коаксиальных (имеющих общую ось) тонкостенных цилиндров (рис. 7.3). Пусть r – радиус какого-либо из них, а dr – толщина его стенки, причем $dr \ll r$. Объем такого тонкостенного цилиндра dV может быть найден по формуле $dV = 2\pi r h dr$, где h – высота цилиндра. Тогда согласно (7.7) момент инерции такого тонкостенного цилиндра следующий:

$$dI_z = r^2 dm = r^2 \rho dV = r^2 \rho 2\pi r h dr, \quad (7.8)$$

где ρ – плотность цилиндра.

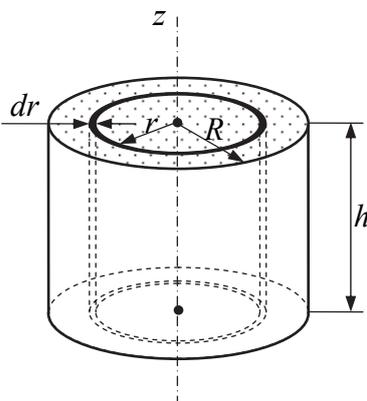


Рис. 7.3. Момент инерции сплошного однородного цилиндра относительно его оси

Искомый момент инерции сплошного цилиндра находим, суммируя моменты инерции всех его малых элементов, т. е. интегрируя выражение (7.8) по переменной r в пределах от 0 до R :

$$I_z = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi R^4 h \rho.$$

Массу цилиндра можно найти по формуле $m = \rho V = \rho \pi R^2 h$. Тогда выражение для момента инерции сплошного однородного кругового цилиндра примет следующий вид:

$$I_z = \frac{mR^2}{2}. \quad (7.9)$$

Пример 3. Определить момент инерции однородного тонкого стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину.

Разобьем мысленно стержень на малые отрезки (рис. 7.4). Пусть x – расстояние от одного из таких отрезков (элементов стержня) до оси вращения, а dx – его длина. Объем dV одного элемента стержня определяется формулой $dV = Sdx$, где S – площадь поперечного сечения стержня. Тогда момент инерции этого элемента будет

$$dI_z = x^2 dm = x^2 \rho dV = x^2 \rho S dx, \quad (7.10)$$

где ρ – плотность стержня. Момент инерции одной половины стержня находим, интегрируя выражение (7.10) по переменной x в пределах от 0 до $l/2$, тогда искомый момент инерции всего стержня будет вдвое больше:

$$I_z = 2 \int_0^{l/2} x^2 \rho S dx = \frac{2}{3} \rho S \left(\frac{l}{2} \right)^3.$$

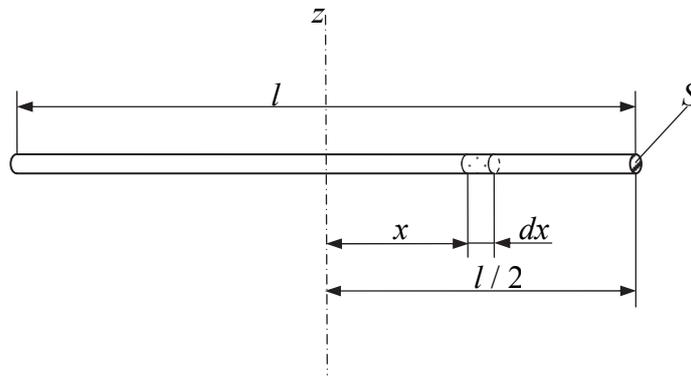


Рис. 7.4. Момент инерции тонкого стержня относительно оси

Так как масса стержня определяется простой формулой $m = \rho l S$, то для момента инерции стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину, получим выражение

$$I_z = \frac{ml^2}{12}. \quad (7.11)$$

Пример 4. Определить момент инерции однородного шара массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через его центр.

Мысленно разобьем шар на тонкие слои перпендикулярные оси z (рис. 7.5). Каждый такой слой представляет собой диск толщиной dz , расположенный на расстоянии z от центра шара. Радиус диска может быть определен по теореме Пифагора $r = \sqrt{R^2 - z^2}$. Тогда масса dm

диска будет равна $dm = \rho dV = \rho S dz = \rho \pi r^2 dz = \rho \pi (R^2 - z^2) dz$. С учетом формулы (7.9), момент инерции элемента шара в виде тонкого диска будет выражаться следующим образом:

$$dI_z = \frac{dm r^2}{2} = \frac{\rho \pi (R^2 - z^2) dz (R^2 - z^2)}{2} = \frac{\rho \pi (R^2 - z^2)^2 dz}{2}, \quad (7.12)$$

где ρ – плотность шара.

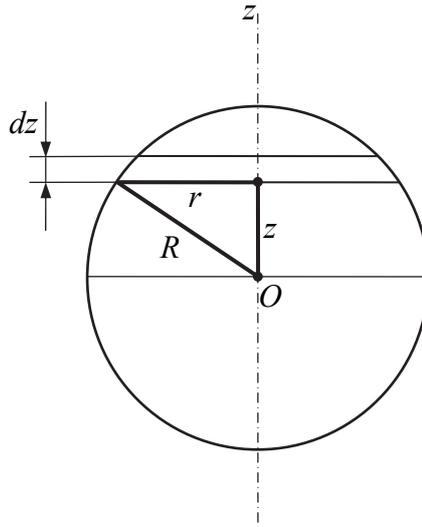


Рис. 7.5. Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр

Момент инерции всего шара находим, суммируя моменты инерции отдельных слоев шара, т. е. проводим интегрирование выражения (7.12) по переменной z в пределах от $-R$ до R :

$$I_z = \int_{-R}^R \frac{\rho \pi (R^2 - z^2)^2 dz}{2} = \frac{8}{15} \rho \pi R^5.$$

Учитывая, что масса шара может быть определена по формуле $m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$, получим выражение для момента инерции однородного шара относительно оси z , проходящей через центр шара:

$$I_z = \frac{2}{5} m R^2. \quad (7.13)$$

7.3. СВОЙСТВО АДДИТИВНОСТИ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ. ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА

Расчеты моментов инерции тел сложной геометрической формы существенно облегчаются при использовании двух свойств момента инерции.



Первое свойство – это аддитивность – момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции составных частей этого тела относительно этой же оси.

Это свойство следует из самого определения момента инерции и уже использовалось в примерах 2, 3, 4.



Второе свойство – это теорема Штейнера¹, которая формулируется следующим образом: момент инерции тела относительно некоторой оси z равен моменту инерции I_{zc} относительно параллельной оси z_c , проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I_z = I_{zc} + md^2. \quad (7.14)$$

Пример 5. Определить момент инерции кольца массой m , внешним радиусом R_1 и внутренним радиусом R_2 относительно оси кольца.

Рассмотрим сначала сплошной диск массой m_1 и радиусом R_1 . Момент инерции этого диска согласно формуле (7.9) равен:

$$I_{1z} = \frac{m_1 R_1^2}{2}.$$

Этот диск можно рассматривать состоящим из кольца массой m , внешним радиусом R_1 и внутренним радиусом R_2 и вложенного в это кольцо сплошного диска массой m_2 и радиусом R_2 (рис. 7.6). Момент инерции вложенного диска можно определить по следующей формуле:

$$I_{2z} = \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

Согласно свойству аддитивности момент инерции диска I_{1z} равен сумме моментов инерции кольца I_z и вложенного диска I_{2z} :

¹Якоб Штейнер (1796–1863) – швейцарский математик.

$$I_{1z} = I_z + I_{2z}.$$

Тогда момент инерции кольца будет

$$I_z = I_{1z} - I_{2z} = \frac{m_1 R_1^2}{2} - \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

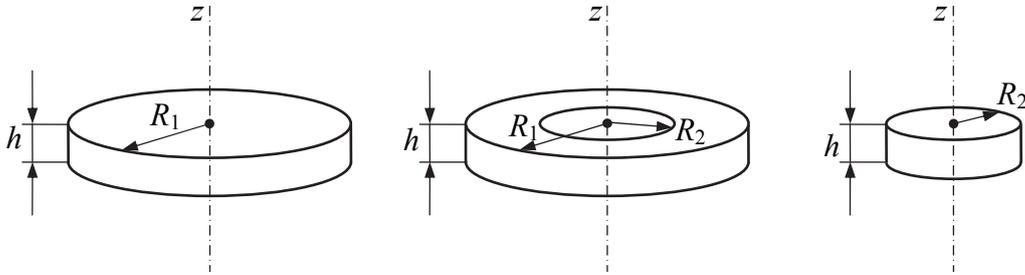


Рис. 7.6. Момент инерции кольца относительно его оси

Массы дисков определяются выражениями

$$m_1 = \rho V_1 = \rho \pi R_1^2 h, \quad m_2 = \rho V_2 = \rho \pi R_2^2 h.$$

Тогда выражение для момента инерции кольца примет вид

$$I_z = \frac{\rho \pi h}{2} (R_1^4 - R_2^4) = \frac{\rho \pi h}{2} (R_1^2 - R_2^2)(R_1^2 + R_2^2) = \frac{m(R_1^2 + R_2^2)}{2}.$$

С учетом того, что масса кольца равна разности масс дисков

$$m = m_1 - m_2 = \rho \pi h (R_1^2 - R_2^2),$$

получаем итоговое выражение для момента инерции кольца

$$I_z = \frac{m(R_1^2 + R_2^2)}{2}. \quad (7.15)$$

Пример 6. Определить момент инерции тонкого стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через один из его концов (рис. 7.7).

Центр масс стержня расположен на его середине. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину, определяется выражением (7.11):

$$I_{zc} = \frac{ml^2}{12}.$$

Расстояние между осями равно половине длины стержня $d = l / 2$. Тогда, применяя теорему Штейнера, получаем:

$$I_z = I_{z_c} + md^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

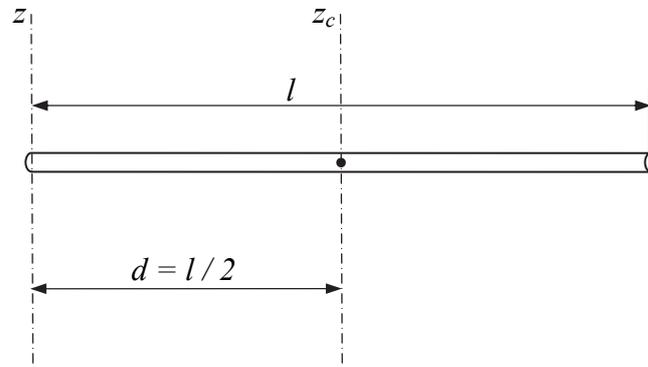


Рис. 7.7. Момент инерции тонкого стержня относительно оси перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов

Приведя к общему знаменателю, получаем искомое выражение для момента инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через один из его концов:

$$I_{z_c} = \frac{ml^2}{3}. \quad (7.16)$$

СВОБОДНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

- 8.1. Свободные гармонические колебания и их характеристики.
- 8.2. Пружинный, физический и математический маятники.
- 8.3. Затухающие колебания.

8.1. СВОБОДНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Колебательным движением (механическими колебаниями) называется движение тела, характеризующееся той или иной степенью повторяемости во времени. Примерами колебательного движения являются колебания маятников, струн, частей машин и механизмов, зданий, мостов и других сооружений, качка корабля, волнение моря, деформации тел при распространении звука.

Свободными (собственными) называются колебания, происходящие в отсутствие переменных внешних воздействий на колебательную систему и возникающие вследствие какого-либо начального отклонения этой системы от состояния устойчивого равновесия. **Вынужденными** называются колебания, которые возникают в какой-либо системе под влиянием переменного внешнего воздействия.

Колебания называются **периодическими**, если значения всех физических величин, характеризующих колебательную систему, повторяются через равные промежутки времени. Наименьший промежуток времени T , через который повторяется значение колеблющейся величины, называется **периодом колебаний**. За время равное периоду колебаний колебательная система совершает одно полное колебание. **Частотой колебаний** называется величина $\nu = 1 / T$, равная числу полных колебаний, совершаемых за единицу времени.

Простейшим типом периодических колебаний, являются **гармонические колебания** – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется по закону синуса или косинуса. Этот тип колебаний имеет важное значение, так как многие колебания, встречающиеся в природе и технике, имеют характер близкий к гармоническому. Более того, любой периодический колебательный процесс может быть представлен

как наложение нескольких гармонических колебаний. Гармонические колебания величины s описываются следующим уравнением:

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.1)$$

где A – максимальное значение колеблющейся величины, называемое **амплитудой колебаний**, $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – **фаза колебаний**, ω_0 – **циклическая частота**, φ_0 – **начальная фаза колебаний**, т. е. фаза колебаний в начальный момент времени $t = 0$.

Пусть некоторая материальная точка совершает гармонические колебания вдоль оси x . Тогда координата x точки изменяется с течением времени t в соответствии с уравнением гармонических колебаний (8.1). График зависимости координаты x от времени t , удовлетворяющий этому уравнению, показан на рис. 8.1, *a*.

Получим выражение для скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2); \quad (8.2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi). \quad (8.3)$$

Таким образом, скорость и ускорение совершают колебания с циклической частотой ω_0 , при этом колебания скорости опережают по фазе колебания координаты на величину $\pi/2$, что соответствует четверти периода колебаний. В свою очередь колебания ускорения сдвинуты по фазе относительно колебаний координаты на величину π , т. е. опережают эти колебания на половину периода колебаний. Графики зависимости скорости v и ускорения a от времени t для случая $\varphi_0 = 0$ показаны на рис. 8.1, *б* и 8.1, *в*.

Определим кинетическую и потенциальную энергии колеблющейся точки:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)]; \quad (8.4)$$

$$П = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)]. \quad (8.5)$$

Полученные выражения показывают, что кинетическая и потенциальная энергия изменяются гармонически от 0 до $\frac{mA^2\omega_0^2}{2}$ с циклической частотой $2\omega_0$. При этом сдвиг по фазе между колебаниями

кинетической и потенциальной энергий составляет π , так что полная механическая энергия колеблющейся точки не изменяется с течением времени:

$$E = K + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = const. \quad (8.6)$$

На рис. 8.1, *г* показаны графики зависимостей кинетической K , потенциальной Π и полной механической энергии E от времени t для случая $\varphi_0 = 0$.

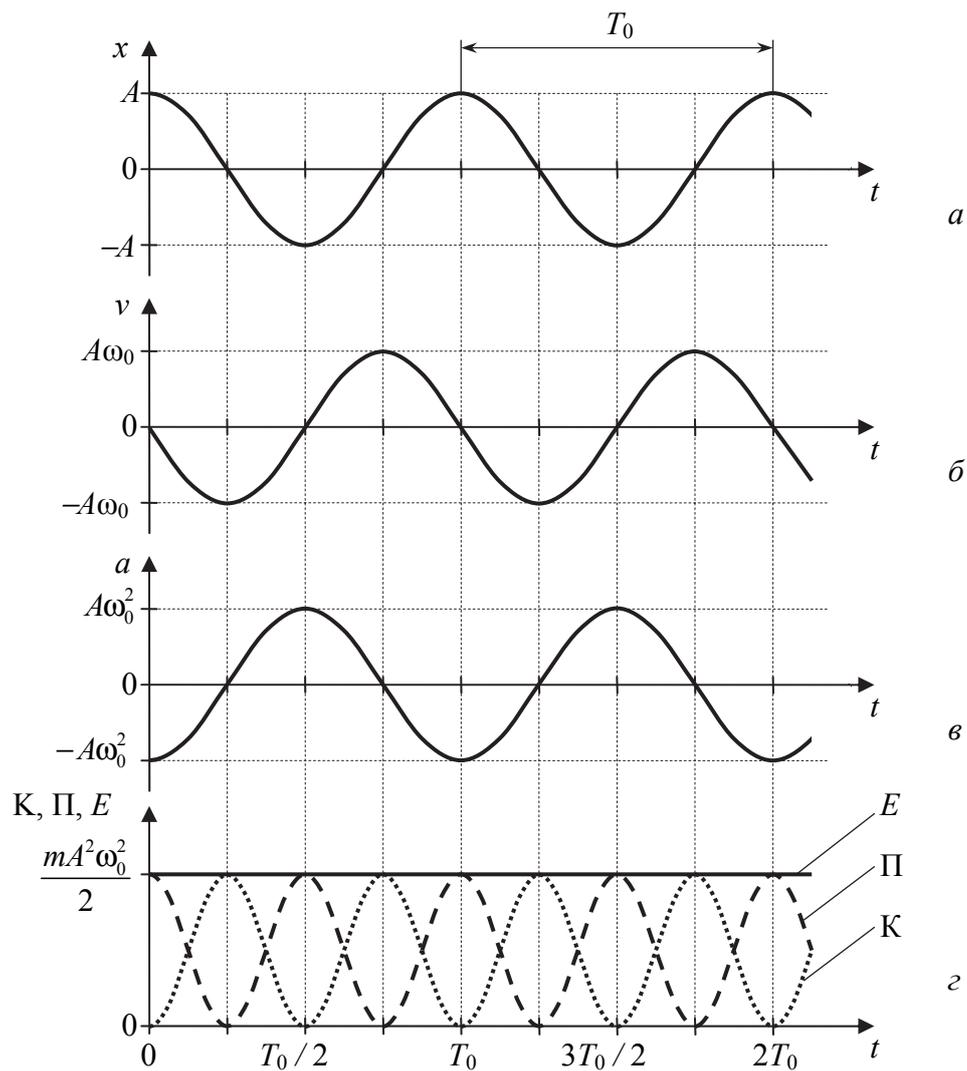


Рис. 8.1. Графики зависимостей координаты (*а*), скорости (*б*), ускорения (*в*), кинетической, потенциальной и полной энергии (*г*) материальной точки от времени при гармонических колебаниях

8.2. ПРУЖИННЫЙ, ФИЗИЧЕСКИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ

Наиболее простым примером механической системы, в которой происходят гармонические колебания, является **пружинный маятник**, представляющий собой груз, подвешенный на упругой пружине и совершающий колебания под действием силы упругости (рис. 8.2).

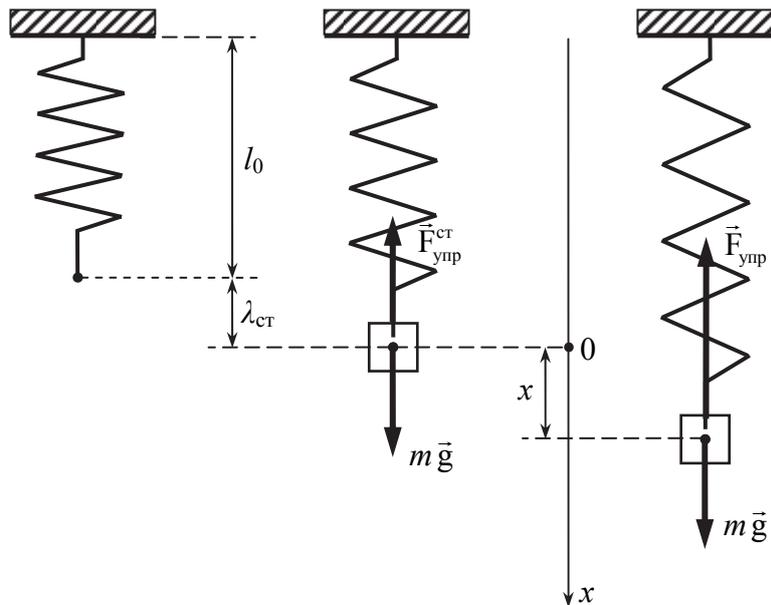


Рис. 8.2. Пружинный маятник

Если на пружине жесткостью k и длиной l_0 подвесить груз массой m , то в состоянии статического равновесия, т. е. при отсутствии колебаний, длина пружины возрастет на величину $\lambda_{ст}$, называемую статической деформацией пружины. В этом случае действующая на груз сила тяжести mg будет полностью уравниваться силой упругости пружины $F_{упр}^{ст} = k\lambda_{ст}$:

$$mg = k\lambda_{ст}. \quad (8.7)$$

Координата x тела в состоянии статического равновесия принимается равной нулю. Если сместить груз вдоль вертикальной оси на расстояние x и отпустить, пружинный маятник начнет совершать колебания. В этом случае сила тяжести mg уже не уравнивается силой упругости $F_{упр} = k(\lambda_{ст} + x)$, поэтому маятник движется с некоторым ускорением a . На основании второго закона Ньютона запишем уравнение движения маятника:

$$ma = mg - k(\lambda_{\text{ст}} + x). \quad (8.8)$$

Учитывая выражение (8.7), а также то, что ускорение – это вторая производная от координаты x по времени $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, получим дифференциальное уравнение колебаний пружинного маятника

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (8.9)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x = \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.10)$$

т. е. в точности соответствует уравнению гармонических колебаний (8.1), причем циклическая частота ω_0 определяется выражением

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (8.11)$$

а амплитуда A и начальная фаза φ_0 зависят от начальных условий, т. е. координаты x_0 и скорости v_0 в начальный момент времени.

Из уравнения (8.9) следует, что сила тяжести $m\vec{g}$ не оказывает влияния на движение пружинного маятника. Следовательно, можно говорить о том, что пружинный маятник совершает колебания лишь только под действием упругой силы

$$F_{\text{упр}} = -kx. \quad (8.12)$$

Знак «минус» показывает, что сила упругости направлена противоположно направлению смещения тела и стремится вернуть тело в состояние равновесия. Поэтому силу, определяемую выражением (8.12), называют **возвращающей** силой. Силы, удовлетворяющие выражению (8.12), но по своей природе не являющиеся упругими, называются **квазиупругими**.

Материальная точка, колеблющаяся под действием возвращающей силы, называется **гармоническим осциллятором**. Сопоставив выражения (8.9) и (8.11), можно получить дифференциальное уравнение гармонического осциллятора для колеблющейся величины s :

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0. \quad (8.13)$$

Модель гармонического осциллятора используется для описания самых разнообразных явлений и процессов, в частности:

- колебаний пружинного и крутильного маятников,
- малых колебаний математического и физического маятников,

- колебаний силы тока и напряжения в колебательном контуре,
- колебаний атомов в молекулах,
- колебаний электронов в атомах.

Физическим маятником называется твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, которая не проходит через центр масс маятника. На рис. 8.3 показан физический маятник, центр масс которого расположен в точке C , а горизонтальная ось z , называемая осью качаний, проходит через точку O перпендикулярно плоскости рисунка.

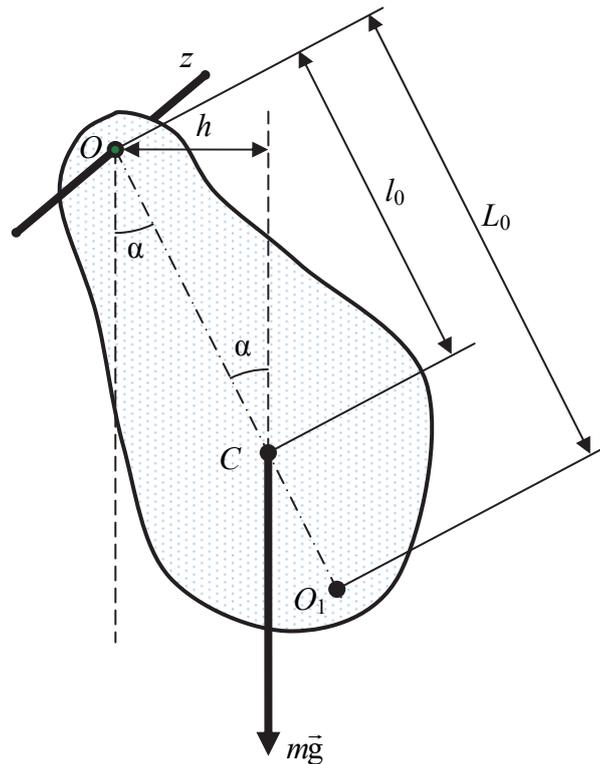


Рис. 8.3. Физический маятник

Когда маятник отклонен от положения равновесия на угол α против часовой стрелки, сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная к центру масс маятника, создает относительно оси качаний момент M_z , который стремится вернуть маятник по часовой стрелке в положение равновесия:

$$M_z = -mgh = -mgl_0 \sin \alpha, \quad (8.14)$$

где h – плечо силы $m\vec{g}$; l_0 – расстояние между точками O и C . Знак «минус» показывает, что момент силы направлен противоположно углу поворота маятника.

Поскольку при колебаниях маятник совершает вращательное движение относительно горизонтальной оси z , то в соответствии с уравнением динамики вращательного движения ($I_z \varepsilon = M_z$) получим дифференциальное уравнение колебаний физического маятника:

$$I_z \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mgl_0 \sin \alpha, \quad (8.15)$$

где I_z – момент инерции маятника относительно оси качаний z .

Уравнение (8.15) не соответствует дифференциальному уравнению гармонических колебаний (8.13), поэтому колебания физического маятника не являются гармоническими. Но если маятник совершает малые колебания, то $\sin \alpha \approx \alpha$ и уравнение (8.15) сводится к дифференциальному уравнению гармонических колебаний

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mgl_0}{I_z} \alpha = 0, \quad (8.16)$$

решение которого имеет следующий вид:

$$\alpha = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8.17)$$

Из сопоставления уравнений (8.16) и (8.13) получаем выражение для циклической частоты ω_0 и периода T_0 малых колебаний физического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl_0}{I_z}}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgl_0}}. \quad (8.18)$$

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Математический маятник можно рассматривать как частный случай физического маятника, вся масса которого сосредоточена в одной точке. Подставляя момент инерции материальной точки $I_z = ml_0^2$ в формулы (8.18), получаем выражения для циклической частоты и периода малых колебаний математического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}. \quad (8.19)$$

Приведенной длиной L_0 физического маятника называется длина математического маятника, имеющего такой же период колебаний,

что и данный физический маятник. Сопоставив выражения (8.18) и (8.19), а затем, применив теорему Штейнера, получим

$$L_0 = \frac{I_z}{ml_0} = \frac{I_{cz} + ml_0^2}{ml_0} = \frac{I_{cz}}{ml_0} + l_0, \quad (8.20)$$

где I_{cz} – момент инерции маятника относительно оси, которая параллельна оси качаний z и проходит через центр масс маятника точку C . Точка O_1 на продолжении прямой OC , отстоящая от точки O подвеса маятника на расстояние приведенной длины L_0 , называется **центром качаний** физического маятника (рис. 8.3). Точка подвеса O и центр качаний O_1 обладают свойством взаимозаменяемости: если точку подвеса перенести в центр качаний, то период колебаний физического маятника не изменится, причем прежняя точка подвеса O станет новым центром качаний. Это легко доказать. Действительно, второй центр качаний расположен от центра масс маятника на расстоянии $L_0 - l_0$, которое можно выразить из выражения (8.20):

$$L_0 - l_0 = \frac{I_{cz}}{ml_0}.$$

Тогда период колебаний маятника относительно второго центра качаний равен:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cz} + m(L_0 - l_0)^2}{mg(L_0 - l_0)}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cz} + m\left(\frac{I_{cz}}{ml_0}\right)^2}{mg\left(\frac{I_{cz}}{ml_0}\right)}},$$

после несложных преобразований сводится к выражению (8.18).

8.3. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Затухающими называются колебания, амплитуда которых уменьшается с течением времени из-за потерь энергии в колебательной системе. Потери механической энергии обусловлены тем, что на колебательную систему кроме консервативной возвращающей силы, например, силы упругости (8.12), действует также диссипативная сила, например, сила сопротивления среды:

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -\mu \vec{v}, \quad (8.21)$$

где \vec{v} – скорость тела в вязкой среде; μ – коэффициент сопротивления тела. Знак «минус» в выражении (8.21) показывает, что сила сопротивления $\vec{F}_{\text{сопр}}$ направлена противоположно скорости движения тела \vec{v} .

В качестве примера затухающих колебаний рассмотрим колебания пружинного маятника, происходящие в вязкой среде (рис. 8.4).

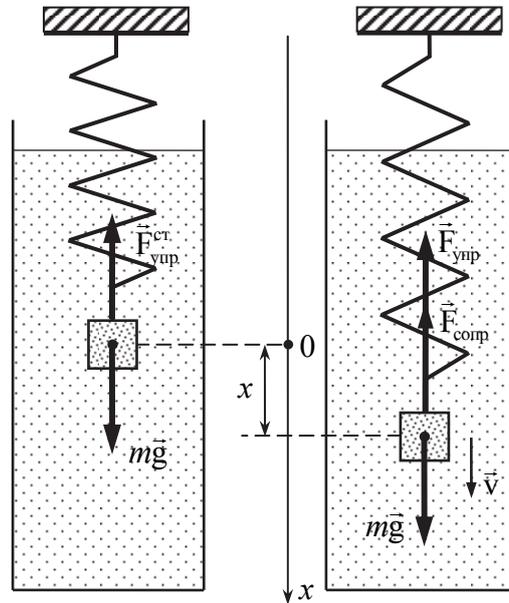


Рис. 8.4. Затухающие колебания пружинного маятника

Второй закон Ньютона для такого маятника будет иметь следующий вид:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}}.$$

Тогда с учетом формул (8.12) и (8.21), а также того, что скорость – это первая производная от координаты по времени $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$, а уско-

рение – вторая $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, получим **дифференциальное уравнение**

затухающих колебаний

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu \frac{dv}{dt}$$

или

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Это уравнение обычно записывают в виде

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (8.22)$$

где β – **коэффициент затухания**, определяемый для данной механической системы выражением

$$\beta = \frac{\mu}{2m}; \quad (8.23)$$

ω_0 – **собственная частота** колебательной системы, т. е. такая частота с которой происходили бы колебания при отсутствии затухания. Для пружинного маятника, рассматриваемого в данном случае, эта частота определяется выражением (8.11), для физического – (8.18), для математического – (8.19).

Решением дифференциального уравнения затухающих колебаний является следующее выражение для координаты x :

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (8.24)$$

которое получило название **уравнение затухающих колебаний**. Выражению (8.24) можно придать вид уравнения гармонических колебаний

$$x = A(t) \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $A(t)$ – амплитуда затухающих колебаний, определяемая выражением

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}; \quad (8.25)$$

ω – **циклическая частота затухающих колебаний**, которая может быть определена по формуле

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (8.26)$$

В том, что уравнение (8.24) действительно является решением дифференциального уравнения (8.22), можно убедиться, если подставить (8.24) в уравнение (8.22). Одновременно будет получена формула (8.26) для циклической частоты затухающих колебаний.

На рис. 8.5 сплошной линией показана зависимость координаты колеблющейся точки x от времени t , соответствующая уравнению затухающих колебаний (8.24), а пунктирной линией – зависимость $A = A(t)$, соответствующая уравнению (8.25). Из этих графиков видно, что затухающие колебания не являются периодическими, так как колебательная система периодически не повторяет свое состояние. Максимальные отклонения колеблющейся точки от положения равновесия при каждом новом колебании становятся все меньше и меньше.

Поэтому понятия периода и частоты при затухающих колебаниях являются условными.

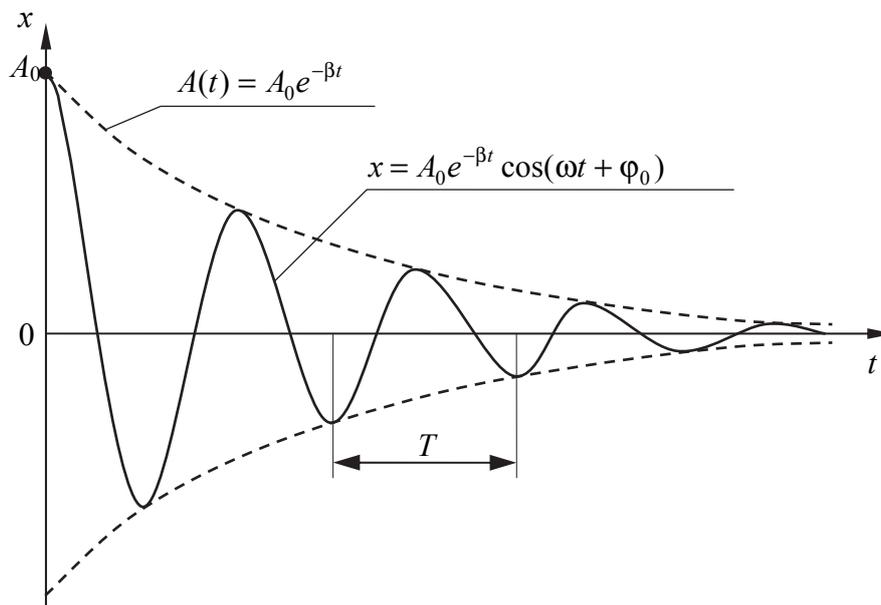


Рис. 8.5. Графики, соответствующие уравнению затухающих колебаний (8.24) и уравнению для амплитуды затухающих колебаний (8.25)

Временем релаксации τ затухающих колебаний называется промежуток времени, за который амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз ($e = 2,72$ – основание натурального логарифма). Тогда запишем уравнение (8.25) для момента времени τ :

$$\frac{A_0}{e} = A_0 e^{-\beta \tau}.$$

Выражая отсюда время релаксации τ , получим

$$\beta = \frac{1}{\tau}. \quad (8.27)$$

Отсюда следует определение коэффициента затухания: **коэффициент затухания** – это величина обратная времени релаксации. Единицей измерения коэффициента затухания является с^{-1} .

Логарифмическим декрементом колебаний δ называется натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд затухающих колебаний:

$$\delta = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T, \quad (8.28)$$

где A_i и A_{i+1} – амплитуды двух следующих друг за другом колебаний; T – период затухающих колебаний, определяемый выражением

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (8.29)$$

Определим число полных колебаний, совершаемых за время релаксации:

$$N_\tau = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\delta}.$$

Отсюда следует, что логарифмический декремент колебаний δ – это величина обратная числу полных колебаний N_τ , происходящих за время релаксации $\delta = 1 / N_\tau$.

Еще одной величиной, характеризующей степень затухания колебаний, является **добротность** колебательной системы Q , которая определяется выражением

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_\tau. \quad (8.30)$$

ВЫНУЖДЕННЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

9.1. Вынужденные колебания.

9.2. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс.

9.3. Сложение гармонических колебаний одного направления.

Биения.

9.4. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.

9.1. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Вынужденными называются колебания, которые возникают в какой-либо системе под влиянием переменного внешнего воздействия. Сила, производящая переменное воздействие на колебательную систему, получила название **вынуждающей силы**. В самом простом случае вынуждающая сила изменяется с течением времени по гармоническому закону

$$F_{\text{вын}} = F_0 \cos(\Omega t), \quad (9.1)$$

где F_0 – амплитуда вынуждающей силы; Ω – циклическая частота вынуждающей силы. Пример механической системы, совершающей вынужденные колебания под действием силы (9.1), приведен на рис. 9.1. Тут показан пружинный маятник, помещенный в сосуд заполненный жидкостью. При этом сосуд совершает возвратно поступательное движение по гармоническому закону, в результате чего в системе отсчета сосуда возникает сила инерции, изменяющаяся с течением времени согласно уравнению (9.1) и вызывающая вынужденные колебания маятника.

Запишем второй закон Ньютона для материальной точки, на которую действуют сила упругости $F_{\text{упр}} = -kx$, сила сопротивления среды $F_{\text{сопр}} = -\mu v$ и вынуждающая сила (9.1) $F_{\text{вын}} = F_0 \cos(\Omega t)$:

$$ma = F_{\text{упр}} + F_{\text{сопр}} + F_{\text{вын}}.$$

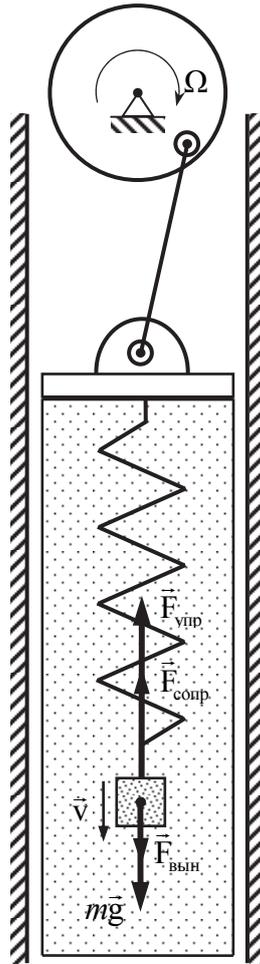


Рис. 9.1. Вынужденные колебания пружинного маятника

Далее, учитывая приведенные выше выражения для сил, а также выражения для скорости $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ и ускорения $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, получим

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\Omega t).$$

Разделим это уравнение на массу материальной точки m и перенесем все члены, содержащие переменную x , в левую часть равенства:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t), \quad (9.2)$$

где $\beta = \mu / 2m$ – коэффициент затухания; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – собственная частота колебательной системы, т. е. частота с которой происходили бы колебания под действием одной лишь силы упругости; $f_0 = F_0 / m$ – величина, имеющая размерность ускорения и определяющая эффективность вынуждающей силы (определяет максимальное ускорение, которое может сообщить материальной точке вынуждающая сила).

Полученное **дифференциальное уравнение вынужденных колебаний** (9.2) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Его общее решение имеет вид

$$x = x_1(t) + x_2(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + A \cos(\Omega t - \alpha), \quad (9.3)$$

где первое слагаемое $x_1(t)$ – это общее решение соответствующего однородного уравнения (8.22); второе слагаемое $x_2(t)$ – частное решение неоднородного уравнения (9.2). Таким образом, маятник одновременно участвует в двух колебательных движениях. Первое слагаемое в (9.3) соответствует свободным затухающим колебаниям маятника:

$$x_1(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота этих затухающих колебаний. Второе слагаемое в (9.3) соответствует незатухающим гармоническим колебаниям маятника с частотой Ω , равной частоте вынуждающей силы.

Амплитуда свободных затухающих колебаний $A_0 e^{-\beta t}$ после начала вынужденных колебаний начинает уменьшаться и через некоторое время $t > 1 / \beta$ свободные затухающие колебания маятника практически прекращаются и маятник переходит в состояние **установившихся вынужденных колебаний**, совершающихся с частотой вынуждающей силы Ω (рис. 9.2).

Уравнение установившихся вынужденных колебаний имеет следующий вид:

$$x = A \cos(\Omega t - \alpha), \quad (9.4)$$

где A – амплитуда установившихся вынужденных колебаний; α – сдвиг фазы вынужденных колебаний величины x относительно колебаний вынуждающей силы.

Получим выражения для скорости и ускорения точки, совершающей установившиеся вынужденные колебания:

$$v = \dot{x} = -A\Omega \sin(\Omega t - \alpha) = A\Omega \cos(\Omega t - \alpha + \pi / 2), \quad (9.5)$$

$$a = \ddot{x} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha) = A\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha + \pi). \quad (9.6)$$

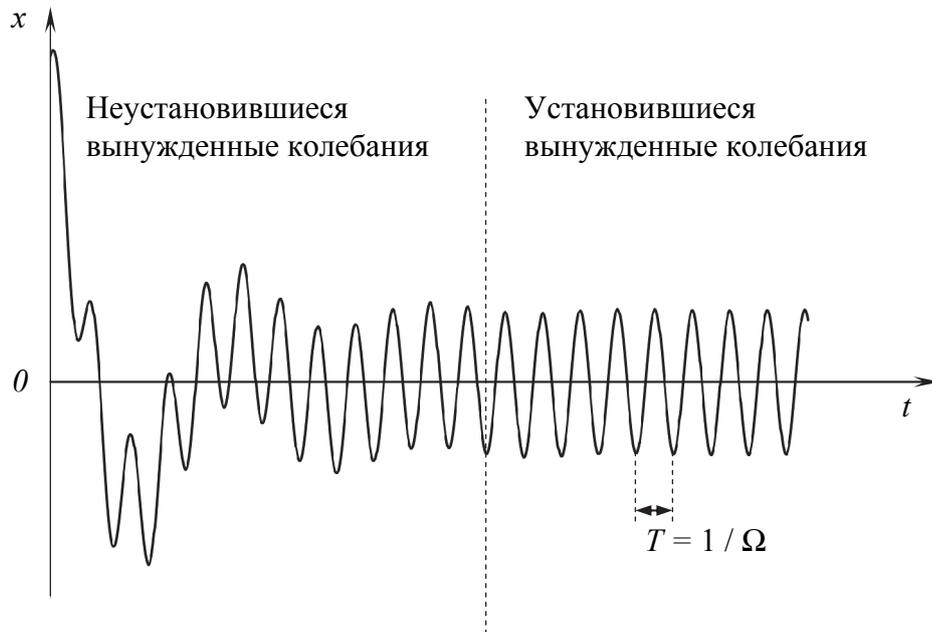


Рис. 9.2. Вынужденные колебания

Таким образом, колебания скорости опережают колебания координаты x на угол $\pi / 2$, т. е. на четверть периода колебаний, а колебания ускорения опережают колебания координаты x на угол π , т. е. на половину периода колебаний.

Чтобы получить выражения для амплитуды A и сдвига фазы α подставим уравнение (9.4) и выражения для производных (9.5) и (9.6) в дифференциальное уравнение (9.2). В результате получим следующее тригонометрическое уравнение:

$$A\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha + \pi) + 2\beta A\Omega \cos(\Omega t - \alpha + \pi / 2) + \omega_0^2 A \cos(\Omega t - \alpha) = f_0 \cos(\Omega t). \quad (9.7)$$

Решим это уравнение, используя **метод векторных диаграмм** (рис. 9.3).

В этом методе гармоническое колебание представляется в виде вектора исходящего из начала координат комплексной плоскости и вращающегося относительно начала координат с угловой скоростью, равной циклической частоте колебания. Угол между вектором и действительной осью при этом равен фазе колебания. Тогда проекция вектора на действительную ось будет изменяться с течением времени по гармоническому закону, который в точности соответствует уравнению гармонического колебания. Как правило, на векторной диаграмме вектор колебания изображают в положении, соответствующем определенному

моменту времени t . Метод векторных диаграмм позволяет складывать гармонические колебания геометрически, т. е. по правилам суммирования векторов легко определять амплитуду результирующего колебания и его фазу.

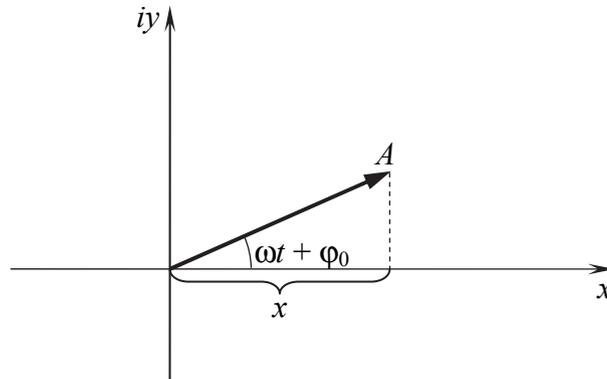


Рис. 9.3. Метод векторных диаграмм

Осуществим сложение трех гармонических функций в левой части уравнения (9.7) и приравняем результат к гармонической функции в правой части (9.7). Каждая из этих функций на векторной диаграмме (рис. 9.4) изображена в виде вектора, построенного согласно вышеприведенным правилам. При суммировании двух противоположно направленных векторов $A\omega_0^2$ и $A\Omega^2$ получился вектор $A(\omega_0^2 - \Omega^2)$, направленный под прямым углом к вектору $2A\beta\Omega$. Тогда длину результирующего вектора, соответствующего сумме трех гармонических функций в левой части уравнения (9.7), можно определить по теореме Пифагора. С другой стороны, этот результирующий вектор соответствует гармонической функции, стоящей в правой части уравнения (9.7) и, следовательно, имеет длину f_0 . В итоге получаем следующее уравнение:

$$\left(A(\omega_0^2 - \Omega^2)\right)^2 + (2A\beta\Omega)^2 = f_0^2,$$

из которого выражаем амплитуду вынужденных колебаний, а именно:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \quad (9.8)$$

Сдвиг фазы α определяем по векторной диаграмме из треугольника OAB :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (9.9)$$

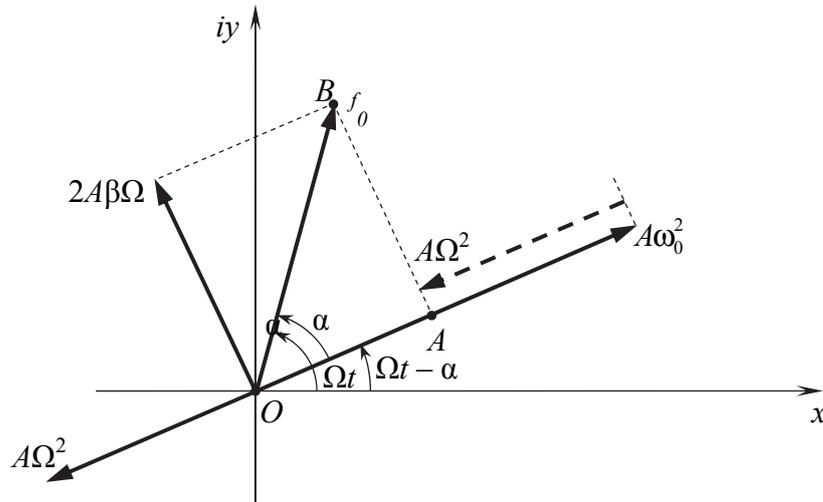


Рис. 9.4. Использование векторной диаграммы для решения уравнения (9.7)

Из полученных выражений следует, что амплитуда и сдвиг фазы вынужденных колебаний не зависят от начальных условий колебательного процесса, а определяются параметрами колебательной системы (ω_0 и β) и параметрами вынуждающей силы (f_0 и Ω).

9.2. АМПЛИТУДА И ФАЗА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ. РЕЗОНАНС

Рассмотрим зависимость амплитуды A вынужденных колебаний от циклической частоты Ω (рис. 9.5).

Эта зависимость, определяемая выражением (9.8), имеет максимум при некоторой частоте $\Omega_{\text{рез}}$, называемой **резонансной циклической частотой** колебательной системы (осциллятора). Максимальному значению амплитуды A соответствует минимальное значение подкоренного выражения в формуле (9.8), продифференцировав которое по переменной Ω , получим условие, определяющее циклическую частоту $\Omega_{\text{рез}}$:

$$-4(\omega_0^2 - \Omega^2)\Omega + 8\beta^2\Omega = 0.$$

Решение этого уравнения имеет три корня:

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_{2,3} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Первый корень Ω_1 соответствует минимуму зависимости $A(\Omega)$, а из двух других корней физический смысл имеет только положительный корень, определяющий резонансную циклическую частоту колебательной системы:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (9.10)$$

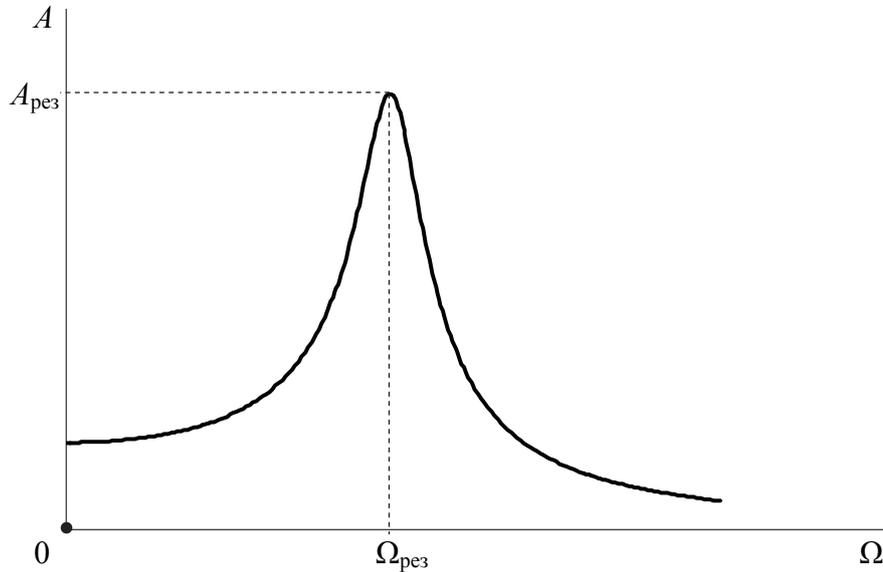


Рис. 9.5. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты

Если затухание очень велико, т. е. $\beta > \omega_0 / \sqrt{2}$, максимум на зависимости $A(\Omega)$ отсутствует. Когда осциллятор имеет слабое затухание, т. е. $\beta \ll \omega_0$, частота $\Omega_{\text{рез}}$ приблизительно равна собственной частоте колебательной системы ω_0 .

Явление увеличения амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте осциллятора называется **резонансом**.

Чтобы получить выражение для резонансной амплитуды $A_{\text{рез}}$, подставим выражение (9.10) для резонансной циклической частоты в уравнение (9.8):

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - (\omega_0^2 - 2\beta^2))^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}}.$$

Далее упрощаем это выражение, раскрывая скобки под корнем:

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}}. \quad (9.11)$$

При слабом затухании, когда $\beta \ll \omega_0$, можно записать приближенную формулу для резонансной амплитуды:

$$A_{\text{рез}} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}. \quad (9.12)$$

Если циклическая частота вынуждающей силы Ω стремится к нулю, то используя формулу (9.8) получаем отклонение осциллятора из положения равновесия при статическом действии возвращающей силы:

$$A_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2}. \quad (9.13)$$

Определим соотношение между резонансной амплитудой (9.12) и статическим отклонением осциллятора (9.13) при слабом затухании ($\beta \ll \omega_0$):

$$\frac{A_{\text{рез}}}{A_0} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0} \bigg/ \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{\omega_0}{2\beta} = Q.$$

Таким образом, при вынужденных колебаниях добротность показывает, во сколько раз резонансная амплитуда $A_{\text{рез}}$ превышает статическое отклонение осциллятора A_0 .

При частоте вынуждающей силы Ω , стремящейся к бесконечности ($\Omega \gg \omega_0$), амплитуда вынужденных колебаний стремится к нулю.

На рис. 9.6 приведены **амплитудно-частотные характеристики**, т. е. зависимости амплитуды A вынужденных колебаний от частоты Ω при различных значениях коэффициента затухания β . Чем больше β , тем левее и ниже лежит максимум амплитудно-частотной характеристики, а при $\beta = 0,8\omega_0$ максимум отсутствует. Когда коэффициент затухания β равен нулю, резонансная частота в точности равна собственной частоте осциллятора, а резонансная амплитуда стремится к бесконечности. Если частота Ω стремится к нулю, то в соответствии с формулой (9.13) все кривые достигают одного и того же предельного значения – статического отклонения A_0 .

На рис. 9.7 представлены **фазо-частотные характеристики** осциллятора при различных значениях коэффициента затухания β , которые показывают зависимость от частоты Ω сдвига фазы α вынужденных колебаний по отношению к фазе вынуждающей силы $F_{\text{вын}}$.

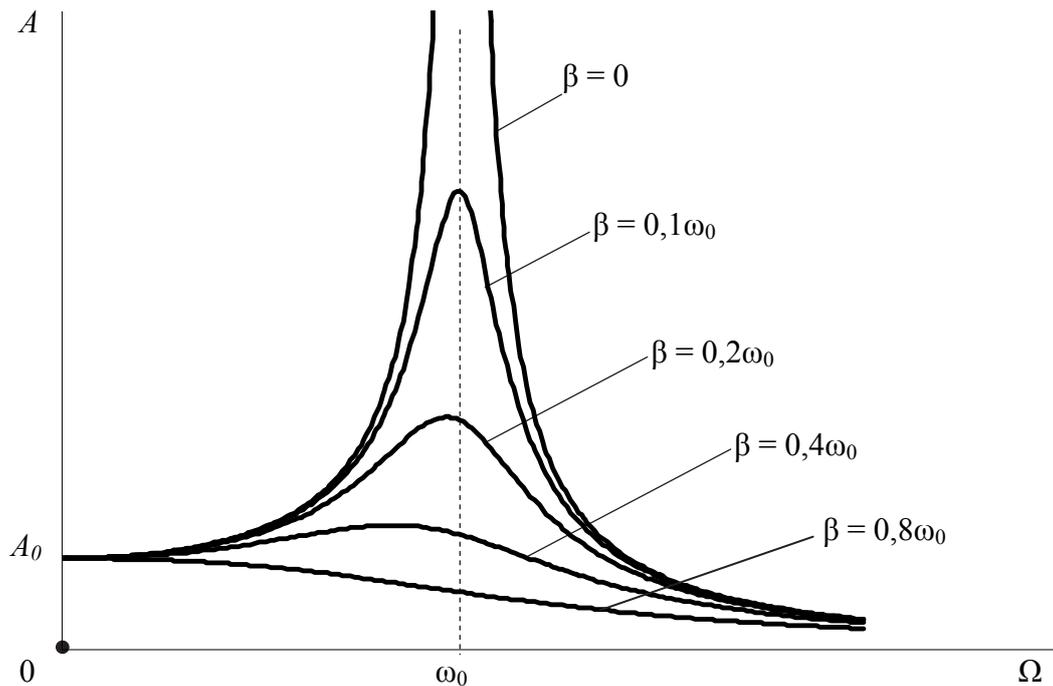


Рис. 9.6. Амплитудно-частотные характеристики при различных значениях коэффициента затухания β

Эти кривые, построенные на основе выражения (9.9), показывают, что вынужденные колебания отстают по фазе от колебаний вынуждающей силы, причем при частотах $\Omega < \omega_0$ угол сдвига фаз α меньше $\pi / 2$, т. е. запаздывание колебаний координаты x по отношению к колебаниям вынуждающей силы не превышает четверти периода колебаний. При частотах $\Omega > \omega_0$ угол сдвига фаз становится больше $\pi / 2$ и меньше π , т. е. запаздывание колебаний координаты x по отношению к колебаниям вынуждающей силы составляет от четверти до половины периода колебаний.

При очень малых частотах ($\Omega \ll \omega_0$) сдвиг фаз α стремится к нулю, т. е. колебания координаты x и силы $F_{\text{вын}}$ происходят без сдвига фаз: x и $F_{\text{вын}}$ одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают минимальных значений. При очень больших частотах ($\Omega \gg \omega_0$) сдвиг фаз α приближается к значению π , т. е. колебания координаты x и вынуждающей силы $F_{\text{вын}}$ происходят в противофазе. Если частота вынужденных колебаний равна собственной частоте осциллятора, сдвиг фаз равен $\pi / 2$.

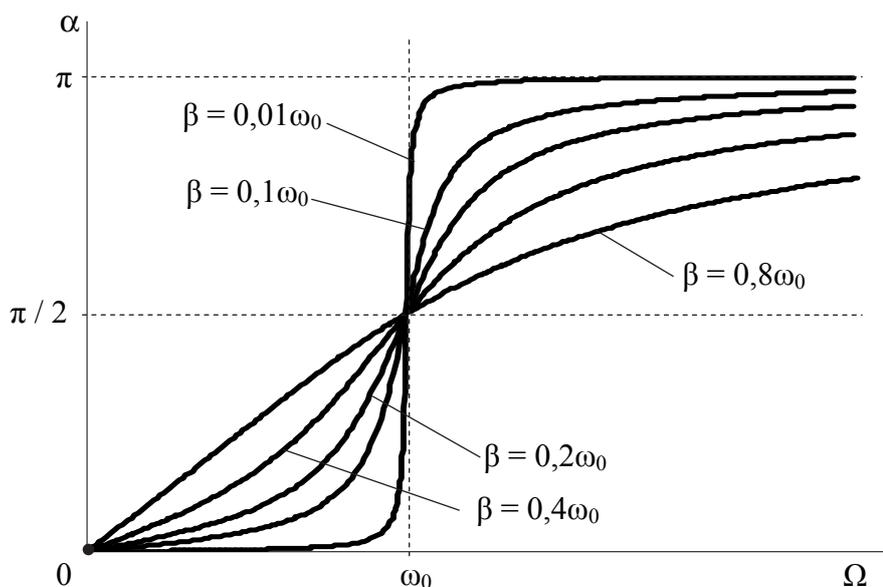


Рис. 9.7. Фазочастотные характеристики осциллятора при различных значениях коэффициента затухания β

Явление резонанса может быть как вредным, так и полезным. Например, если частота внешнего периодического воздействия на некоторую колебательную систему (механизм, сооружение, здание) совпадет с одной из собственных частот колебаний этой системы, то возрастание амплитуды колебаний может привести к серьезным разрушениям. С другой стороны, явление резонанса позволяет обнаружить, усилить и измерить очень слабые изменения физических параметров. Например, в атомно-силовой микроскопии зонд, сканирующий поверхность твердого тела, совершает вынужденные колебания на резонансной частоте, что позволяет по изменению амплитуды и фазы этих колебаний обнаруживать очень малые особенности рельефа изучаемой поверхности.

9.3. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ. БИЕНИЯ

Пусть материальная точка одновременно участвует в двух колебательных процессах одного направления и одинаковой частоты:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \end{cases} \quad (9.14)$$

Чтобы сложить эти гармонические колебания воспользуемся методом векторных диаграмм. Для этого на комплексной плоскости построим векторы складываемых колебаний. Вектор каждого колебания исходит из начала координат комплексной плоскости, имеет длину, равную амплитуде колебания, и образует с действительной осью x угол, равный начальной фазе колебания (рис. 9.8).

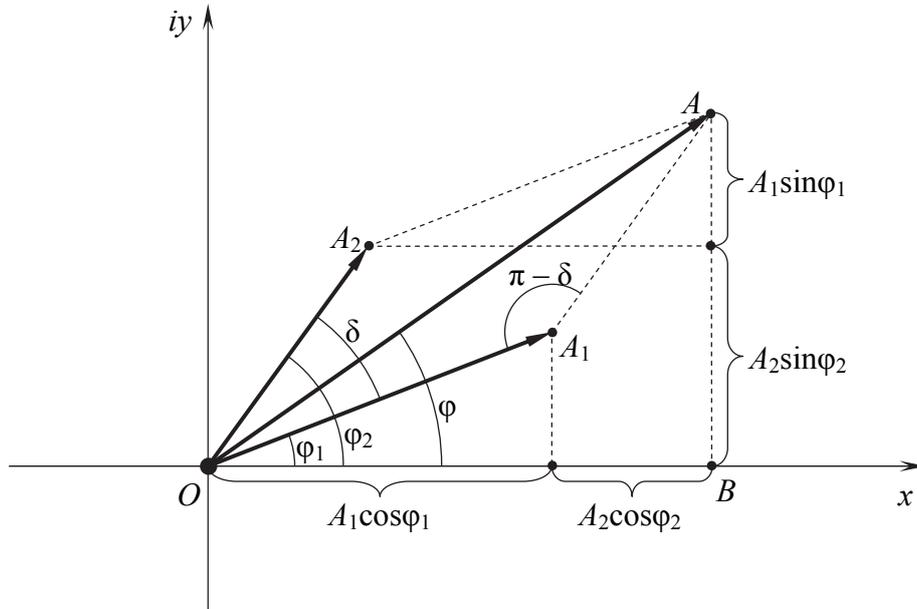


Рис. 9.8. Сложение двух гармонических колебаний одинаковой частоты и одного направления

Если оба эти вектора привести во вращение с угловой скоростью ω_0 , равной циклической частоте складываемых колебаний, то проекции этих векторов на ось x будут изменяться согласно уравнениям (9.14). Угол между векторами ($\delta = \varphi_2 - \varphi_1$), называемый разностью фаз складываемых колебаний, будет оставаться постоянным. Поэтому вектор результирующего колебательного процесса равен сумме векторов A_1 и A_2 будет вращаться с той же угловой скоростью ω_0 , а проекция этого вектора на ось x будет изменяться согласно уравнению

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (9.15)$$

где A и φ – амплитуда и начальная фаза результирующего колебания. Применяя теорему косинусов для треугольника OA_1A , выводим следующее выражение для амплитуды результирующего колебания:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta}. \quad (9.16)$$

Выражение для тангенса начальной фазы результирующего колебания получаем из треугольника OBA :

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}. \quad (9.17)$$

Из выражения (9.16) следует:

1) если $\delta = 2\pi m$, где m – целое число ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то вектора складываемых колебаний совпадают по направлению, и амплитуда результирующего колебания максимальна: $A = A_1 + A_2$;

2) если $\delta = 2\pi m + \pi$, где m – целое число ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то вектора складываемых колебаний противоположны, и амплитуда результирующего колебания минимальна $A = |A_1 - A_2|$.

Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. Пусть амплитуды складываемых колебаний одинаковы и равны A , начальные фазы равны нулю, а циклические частоты составляют ω и $\omega + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega \ll \omega$:

$$\begin{cases} x_1 = A \cos(\omega t), \\ x_2 = A \cos[(\omega + \Delta\omega)t]. \end{cases} \quad (9.18)$$

Складываем эти уравнения, используя известную тригонометрическую формулу, а именно:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

После несложных преобразований получим следующее:

$$x = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right],$$

или учитывая, что $\frac{\Delta\omega}{2} \ll \omega$:

$$x \approx 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\omega t). \quad (9.19)$$

На рис. 9.9 показан график колебательного движения описываемого уравнением (9.19) и являющегося результатом сложения двух гармонических колебаний (9.18) при соотношении частот $\Delta\omega / \omega = 1 / 10$. Результирующее колебание можно рассматривать как

гармоническое с частотой ω и амплитудой A_6 , которая изменяется по следующему периодическому закону:

$$A_6 = \left| 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right|. \quad (9.20)$$

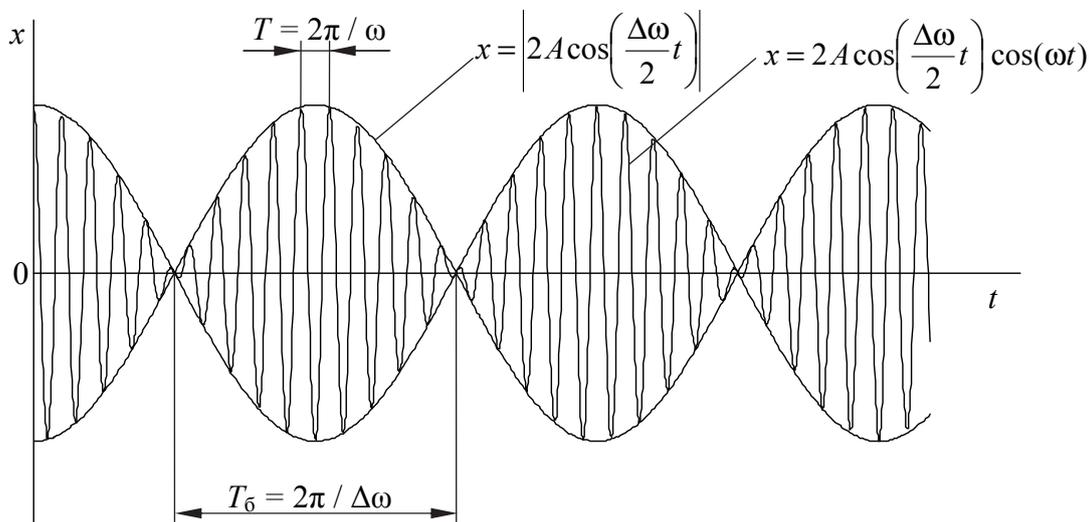


Рис. 9.9. Биения

Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются **биениями**. В выражении (9.20) частота изменения амплитуды A_6 в два раза больше частоты изменений косинуса, так как берется по модулю. Таким образом, частота биений равна разности частот складываемых колебаний: $\omega_6 = \Delta\omega$.

Если складывать гармонические колебания с кратными частотами ω , 2ω , 3ω и т. д., то получится достаточно сложное периодическое движение с периодом $T = 2\pi / \omega$, при этом результат сложения зависит от амплитуд и начальных фаз складываемых колебаний. Справедливо и обратное утверждение: любое сколь угодно сложное периодическое движение с периодом $T = 2\pi / \omega$, может быть представлено в виде суммы гармонических колебаний с частотами ω , 2ω , 3ω и т. д., амплитудами A_0 , A_1 , A_2 и т. д. и начальными фазами φ_0 , φ_1 , φ_2 и т. д. Такое разложение периодической функции в тригонометрический ряд называется **дискретным преобразованием Фурье**¹. Циклические

¹Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) – французский математик и физик.

частоты ω , 2ω , 3ω и т. д. образуют дискретный ряд, называемый спектром. Если колебательное движение является непериодическим, например затухающим, то спектр частот будет не дискретным, а непрерывным.

9.4. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω , происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей x и y . Пусть уравнения этих колебаний имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t), \\ y = B \cos(\omega t + \delta), \end{cases} \quad (9.21)$$

где A и B – амплитуды складываемых колебаний; δ – разность фаз колебаний.

Уравнение траектории результирующего колебания находится исключением из выражений (9.21) параметра t . Для этого в уравнении для координаты y преобразуем косинус суммы в соответствии с известной тригонометрической формулой

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

В результате получим следующее:

$$y = B(\cos(\omega t) \cos \delta - \sin(\omega t) \sin \delta). \quad (9.22)$$

Из уравнения (9.21) для координаты x следует, что $\cos(\omega t) = x / A$, тогда $\sin(\omega t) = \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)}$. Подставим эти выражения для косинуса и синуса в уравнение (9.22). Этим самым мы исключаем из рассмотрения переменную t , и после преобразований получаем уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \delta + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \delta. \quad (9.23)$$

Таким образом, в самом общем случае при сложении взаимно перпендикулярных колебаний материальная точка совершает результирующее движение в плоскости xy по эллиптической траектории (рис. 9.10, а).

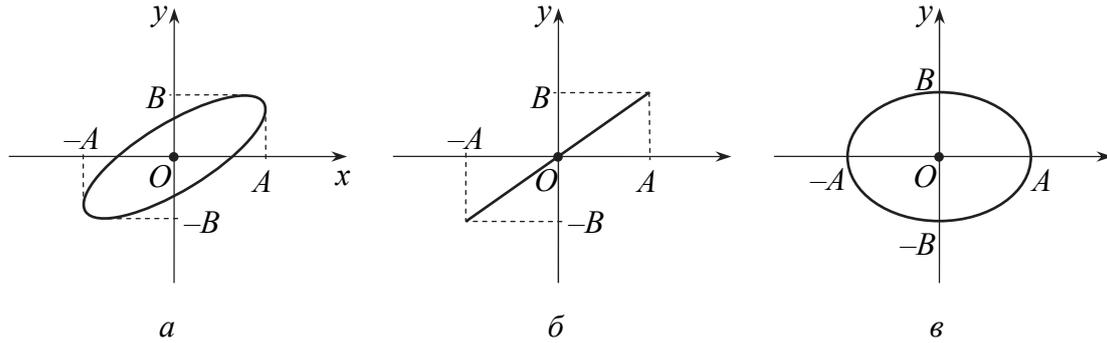


Рис. 9.10. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний, имеющих произвольную разность фаз δ (а), $\delta = \pi m$ (б), $\delta = \pi m + \pi / 2$ (в)

Ориентация эллипса относительно координатных осей x и y зависит от разности фаз δ . Рассмотрим два частных случая.

1. Пусть $\delta = \pi m$, где m – целое число ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), тогда уравнение эллипса вырождается в следующее уравнение прямой:

$$y = \pm (B / A)x, \quad (9.24)$$

где знак «плюс» соответствует четным, а знак «минус» – нечетным значениям числа m (рис. 9.10, б). Результирующее движение представляет собой линейное гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$, происходящее вдоль прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью x угол α , тангенс которого определяется выражением $\operatorname{tg} \alpha = \pm B / A$.

2. Пусть $\delta = \pi m + \frac{\pi}{2}$, где m – целое число ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), тогда уравнение (9.23) примет следующий вид:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (9.25)$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а полуоси равны амплитудам A и B (рис. 9.10, в). Если $A = B$, то эллипс вырождается в окружность.

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний не равны друг другу, а относятся как целые числа, то траектория результирующего колебания довольно сложна и представляет собой

замкнутую кривую. Такие траектории называются **фигурами Лиссажу**¹. Примеры фигур Лиссажу для различных отношений ω_1/ω_2 и разностей фаз δ показаны на рис. 9.11.

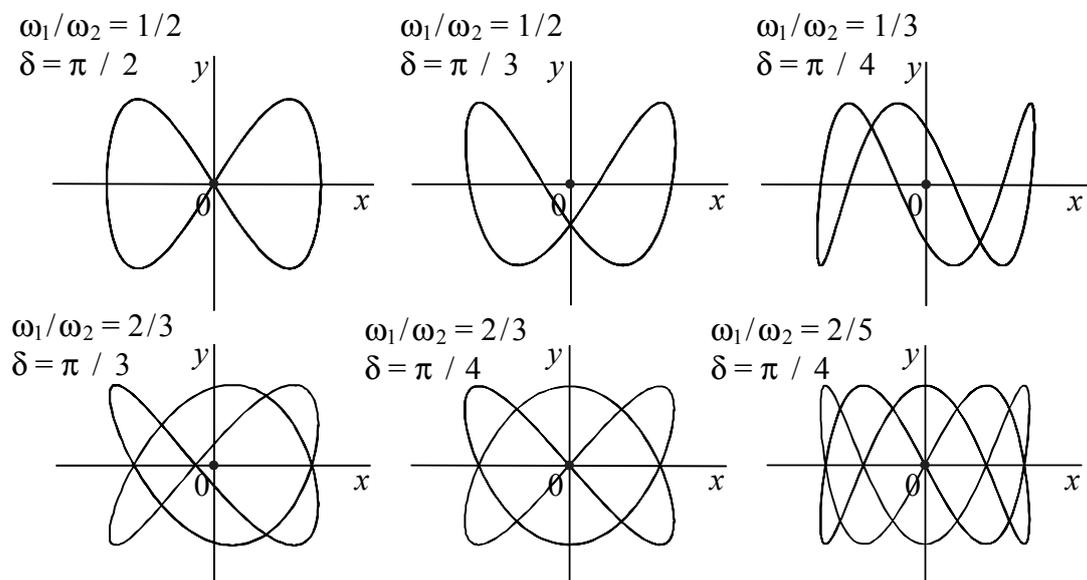


Рис. 9.11. Примеры фигур Лиссажу

¹Жюль Антуан Лиссажé (1822–1880) – французский математик, член-корреспондент Парижской Академии наук (1879).

УПРУГИЕ ВОЛНЫ

10.1. Распространение колебаний в упругой среде. Уравнение волны. Характеристики волны.

10.2. Волновое уравнение. Фазовая скорость волн в твердых телах, жидкостях и газах.

10.3. Энергия упругой волны. Вектор Умова.

10.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В УПРУГОЙ СРЕДЕ. УРАВНЕНИЕ ВОЛНЫ. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛНЫ

Если в некоторой точке упругой среды (твердой, жидкой или газообразной) возбудить механические колебания, то эти колебания начнут передаваться соседним частицам среды, которые тоже станут совершать колебания и передавать их следующим частицам среды. Явление распространения колебаний в сплошной среде называется **упругой волной**. При распространении волны частицы среды не перемещаются вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Например, представьте себе волны на поверхности водоема. Частицы среды при этом не перемещаются в горизонтальном направлении, а совершают колебательное движение в вертикальном направлении, периодически поднимаясь вверх и опускаясь вниз. Вместе с волной от частицы к частице передается лишь состояние колебательного движения и его энергия. Таким образом, при распространении волны происходит перенос энергии без переноса вещества.

В зависимости от направления колебаний частиц среды различают поперечные и продольные волны. **Продольными** называются волны, в которых частицы колеблются вдоль направления распространения волны. Таковыми являются, например, звуковые волны. **Поперечными** называются волны, в которых частицы совершают колебания перпендикулярно направлению распространения волны. Например, упоминавшаяся ранее волна на поверхности водоема является поперечной.

Продольные волны могут возбуждаться в тех средах, где возможны деформации растяжения-сжатия. Такими средами являются

твердые тела, а также жидкости и газы. Поперечные волны могут возбуждаться только в тех средах, где могут происходить деформации сдвига. К таким средам относятся твердые тела, а вот жидкости и газы не испытывают деформаций сдвига, и поэтому упругие поперечные волны в них не распространяются. Таким образом, в твердых телах могут распространяться как продольные, так и поперечные волны, а в жидкостях и газах – только продольные.

Упругая волна называется гармонической, если соответствующие ей колебания частиц среды происходят по гармоническому закону

$$\xi(t, x, y, z) = A \cos[\omega t + \alpha(x, y, z)], \quad (10.1)$$

где $\xi(t, x, y, z)$ – смещение из положения равновесия колеблющейся частицы, расположенной в точке с координатами x, y, z , в момент времени t ; A – амплитуда волны, т. е. максимальное смещение частиц из их положений равновесия; ω – циклическая частота волны; $\alpha(x, y, z)$ – начальная фаза колебаний, а выражение $[\omega t + \alpha(x, y, z)]$ – фаза колебаний частицы, равновесное положение которой соответствует точке с координатами x, y, z .

Геометрическое место точек пространства, в которых располагаются частицы, совершающие колебания с одинаковой фазой, называется **волновой поверхностью**. Если разность фаз колебаний двух частиц среды кратна 2π , т. е. равна $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots, 2\pi m$, где m – целое число, то смещение этих частиц из их положений равновесия в любой момент времени одинаково, следовательно, эти частицы совершают колебания в одной фазе. Поэтому для любой гармонической волны можно построить множество волновых поверхностей с разностью фаз между соседними поверхностями 2π . В зависимости от формы волновых поверхностей различают плоские и сферические волны. Волна называется **плоской**, если ее волновые поверхности представляют собой параллельные плоскости. Волна называется **сферической**, если волновые поверхности представляют собой концентрические сферы, в центре которых находится точечный источник колебаний. Частным случаем волновой поверхности является **фронт волны** (или волновой фронт), который представляет собой геометрическое место точек, до которых к некоторому моменту времени распространились колебания. В отличие от волновой поверхности волновой фронт всегда один.

При распространении волны волновые поверхности перемещаются в пространстве, причем скорость их перемещения, называемая **фазовой скоростью** волны v_ϕ , зависит от направления нетривиальным

образом. Действительно, минимальное значение фазовая скорость имеет по направлению нормали к волновой поверхности. В то же самое время фазовая скорость вдоль направления, отклоненного от нормали на некоторый угол, будет больше, а в направлении перпендикулярном нормали вообще стремится к бесконечности. Таким образом, фазовая скорость не является вектором, и при использовании этой величины необходимо всегда указывать ее направление. Чаще всего фазовая скорость определяется по направлению нормали к волновой поверхности.

Длиной волны λ называется расстояние, на которое перемещается волновая поверхность по направлению собственной нормали за время, равное периоду колебаний частиц среды:

$$\lambda = v_{\phi} T = \frac{v_{\phi}}{\nu} = \frac{2\pi v_{\phi}}{\omega}, \quad (10.2)$$

где v_{ϕ} – фазовая скорость волны вдоль нормали к волновой поверхности; T – период колебаний частиц среды; ν – частота волны. Так как через время равное периоду колебаний состояние всех колеблющихся частиц среды повторяется, то расстояние, на которое перемещается вдоль собственной нормали волновая поверхность, равно кратчайшему расстоянию между соседними волновыми поверхностями. Таким образом, можно дать еще одно определение длине волны: длина волны λ – это кратчайшее расстояние между соседними волновыми поверхностями, для которых разность фаз колебаний частиц составляет 2π .

Гармоническая волна, для которой фазовая скорость вдоль нормали к волновой поверхности одинакова во всех точках однородной среды, называется **бегущей волной**. Бегущие волны неограниченно распространяются в пространстве, перенося при этом энергию колебаний частиц среды.

Для вывода уравнения бегущей волны рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x . Пусть источник колебаний находится в начале координат и совершает колебания по гармоническому закону

$$\xi = A \cos(\omega t).$$

Рассмотрим частицу среды, находящуюся от источника колебаний на расстоянии x . Колебания этой частицы будут отставать по фазе от колебаний источника, так как для прохождения волной расстояния x требуется время:

$$\tau = x / v_{\varphi},$$

где v_{φ} – фазовая скорость волны вдоль оси x . Тогда уравнение колебания частицы среды в точке с координатой x будет иметь следующий вид:

$$\xi = A \cos[\omega(t - \tau)]$$

или

$$\xi = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_{\varphi}} \right) \right].$$

В более общем случае уравнение плоской бегущей волны, распространяющейся в положительном направлении оси x , будет иметь следующий вид:

$$\xi = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_{\varphi}} \right) + \varphi_0 \right], \quad (10.3)$$

где φ_0 – **начальная фаза волны**, равная начальной фазе колебаний источника волны, расположенного в начале координат.

На рис. 10.1 показан график зависимости смещения ξ от координаты x , соответствующий уравнению плоской бегущей волны (10.3). Этот график внешне подобен графику гармонического колебания, но принципиально отличается по физическому смыслу. Действительно, если график гармонического колебания – это зависимость колеблющейся величины от времени (например, зависимость от времени смещения маятника из положения равновесия), то график волны – это зафиксированная в некоторый момент времени t зависимость смещения колеблющихся частиц из их положений равновесия от расстояния, измеряемого вдоль направления распространения волны (в данном случае от координаты x). Если изобразить график волны для следующего момента времени $t + \Delta t$, то он сдвинется вдоль оси x на расстояние $\Delta x = v_{\varphi} \Delta t$. Таким образом, рассматривая график бегущей волны надо представлять его себе движущимся со скоростью v_{φ} по направлению распространения волны.

Часто уравнение плоской бегущей волны записывают в следующем виде:

$$\xi = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (10.4)$$

где k – **волновое число**, выражение для которого получаем, сопоставляя уравнения (10.3) и (10.4):

$$k = \frac{\omega}{v_{\varphi}}. \quad (10.5)$$

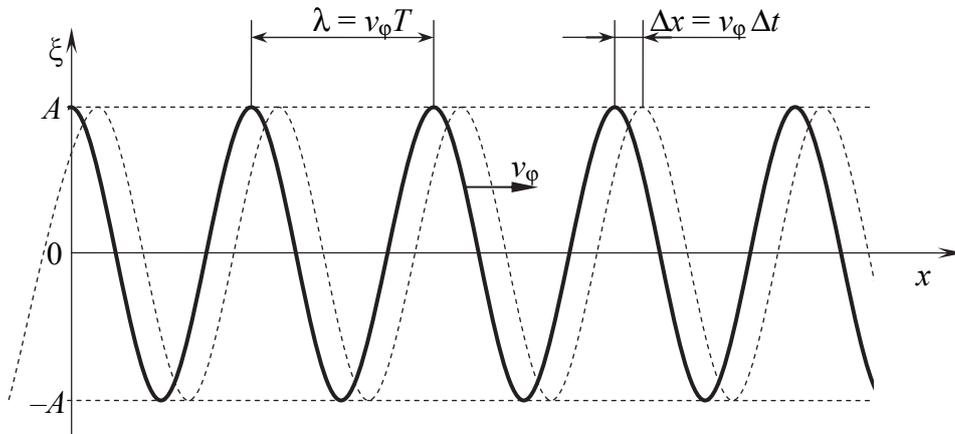


Рис. 10.1. График бегущей волны

Учитывая, что $\omega = 2\pi\nu$ и $\nu = v_{\varphi} / \lambda$, получим еще одно выражение для волнового числа k :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (10.6)$$

Уравнение волны, распространяющейся вдоль отрицательного направления оси x , отличается только знаком перед kx :

$$\xi = A \cos(\omega t + kx + \varphi_0). \quad (10.7)$$

Если волна распространяется не вдоль оси x , а в произвольном направлении, определяемом единичным вектором нормали к волновой поверхности \vec{n} , то уравнение волны можно записать в следующем виде:

$$\xi = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0), \quad (10.8)$$

где \vec{k} – **волновой вектор**, направленный по нормали к волновой поверхности, его модуль равен волновому числу k , т. е. $\vec{k} = k\vec{n}$; \vec{r} – радиус-вектор точки среды, для которой определяется смещение ξ .

Повторя ход рассуждений можно получить уравнение бегущей сферической волны, распространяющейся из точечного источника и имеющей концентрические сферические волновые поверхности:

$$\xi = A_0 \frac{r_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0), \quad (10.9)$$

где r – расстояние от источника колебаний до рассматриваемой точки среды; A_0 – амплитуда волны в точке, удаленной от источника колебаний на расстояние r_0 . Амплитуда волны $A_0 r_0 / r$ в уравнении (10.9) не остается постоянной, а убывает с расстоянием по закону $1 / r$.

10.2. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ. ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ ВОЛН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ, ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

Уравнения плоской (10.8) и сферической (10.9) волн являются решениями некоторого дифференциального уравнения, точно так же, как уравнение гармонических колебаний является решением дифференциального уравнения гармонического осциллятора. Чтобы получить это уравнение, рассмотрим движение элемента объема сплошной среды для случая плоской продольной волны в твердом теле.

При распространении гармонической волны элемент объема массой Δm совершает гармонические колебания относительно своего положения равновесия под действием некоторой возвращающей силы F . Смещение центра масс элемента объема от положения равновесия обозначим ξ . Тогда второй закон Ньютона для этого элемента будет иметь следующий вид:

$$\Delta m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F, \quad (10.10)$$

где ускорение элемента объема a представлено как вторая частная производная от смещения ξ по времени $a = \partial^2 \xi / \partial t^2$. Необходимость применения частной производной обусловлена зависимостью смещения ξ не только от времени t , но и от положения элемента объема в пространстве.

Будем считать, что волна распространяется в твердой среде вдоль оси x , а элемент объема имеет форму параллелепипеда длиной Δx и площадью поперечного сечения ΔS (рис. 10.2). Обозначим координату левой грани параллелепипеда x_1 , а координату правой грани – x_2 , тогда $\Delta x = x_2 - x_1$. Пусть при распространении волны левая грань параллелепипеда в некоторый момент времени сместилась из положения равновесия на расстояние ξ_1 , а правая – на расстояние ξ_2 . Из-за того, что эти смещения неодинаковы, элемент объема испытает деформацию растяжения-сжатия вдоль оси x , причем абсолютная деформация будет равна разности этих смещений, т. е. $\Delta \xi = \xi_2 - \xi_1$, а относительная – отношению абсолютной деформации $\Delta \xi$ к длине

недеформированного параллелепипеда Δx , т. е. $\epsilon_n = \Delta\xi / \Delta x$. Для бесконечно малого элемента объема относительная деформация сводится к частной производной:

$$\epsilon_n = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (10.11)$$

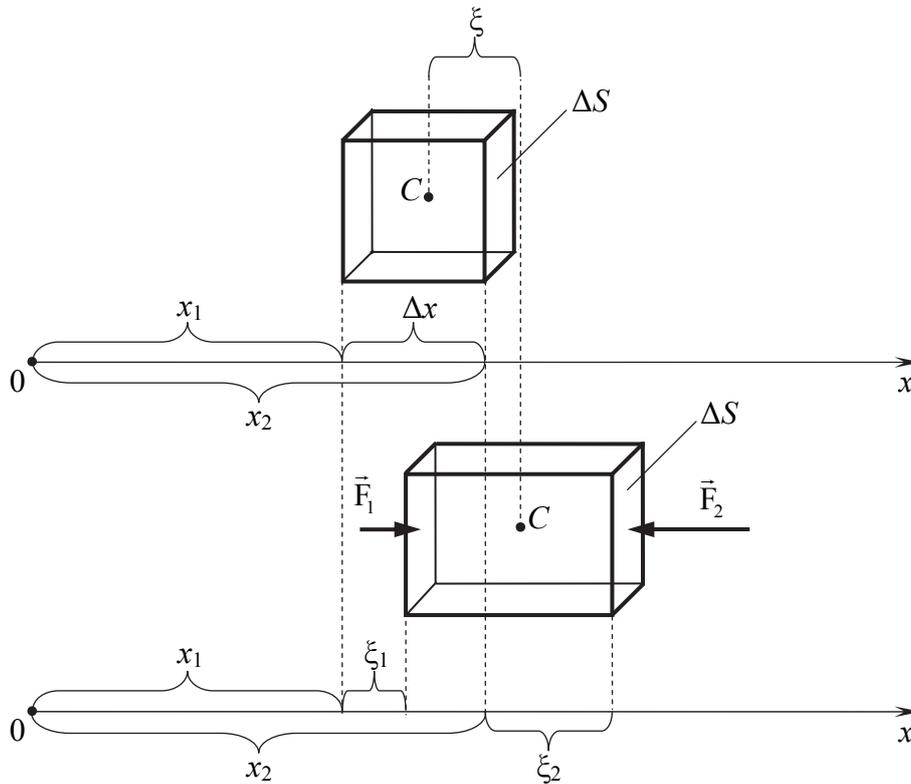


Рис. 10.2. Деформация элемента упругой среды

Деформация растяжения-сжатия элемента объема сплошной среды, а также действующая на этот элемент объема возвращающая сила F обусловлены силами упругости. Силы упругости, действующие на левую и правую грань выделенного элемента объема со стороны окружающей упругой среды, неодинаковы, так как неодинаковы смещения граней ξ_1 и ξ_2 от положения равновесия. Следовательно, на параллелепипед действует результирующая возвращающая сила F , величину которой найдем как разность сил упругости F_1 и F_2 , действующих на левую и правую грань элемента объема:

$$F = F_1 - F_2 = \sigma_{n1}\Delta S - \sigma_{n2}\Delta S = (\sigma_{n1} - \sigma_{n2})\Delta S = \Delta\sigma_n\Delta S, \quad (10.12)$$

где σ_{n1} и σ_{n2} – нормальные напряжения на левой и правой грани соответственно, $\Delta\sigma_n$ – приращение нормального напряжения при смещении вдоль оси x на расстояние, равное длине элемента объема Δx . Так как длина элемента Δx невелика, то с достаточной степенью точности можно записать следующее приближенное равенство:

$$\Delta\sigma_n \approx \frac{\partial\sigma_n}{\partial x} \Delta x.$$

Тогда выражение (10.12) для силы F примет следующий вид:

$$F = \frac{\partial\sigma_n}{\partial x} \Delta x \Delta S = \frac{\partial\sigma_n}{\partial x} \Delta V.$$

Согласно закону Гука $\sigma_n = E\varepsilon_n$, где E – модуль Юнга, а ε_n – относительная деформация растяжения-сжатия, определяемая выражением (10.11). В результате получим следующее выражение для возвращающей силы F :

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial\xi}{\partial x} \right) \Delta V = E \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \Delta V. \quad (10.13)$$

Подставим выражение (10.13) для возвращающей силы F во второй закон Ньютона (10.10):

$$\Delta m \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \Delta V.$$

Если массу Δm элемента объема представить в виде $\Delta m = \rho\Delta V$, где ρ – плотность среды, то полученное уравнение можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}. \quad (10.14)$$

Уравнение (10.14) описывает распространение плоской упругой продольной волны вдоль оси x . Решением этого дифференциального уравнения является уравнение плоской бегущей волны (10.7). Чтобы убедиться в этом, извлечем частные производные второго порядка по времени t и по координате x из величины ξ , определяемой выражением (10.7), а затем подставим результаты дифференцирования в уравнение (10.14):

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -Ak^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

$$-A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = \frac{E}{\rho} (-Ak^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)),$$

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho} k^2.$$

Таким образом, уравнение (10.7) действительно является решением дифференциального уравнения (10.14). Кроме того, учитывая выражение (10.5) для волнового числа k , получим выражение для фазовой скорости продольной упругой волны в твердом теле:

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (10.15)$$

Если в твердом теле распространяется не продольная, а поперечная волна, то выражение для фазовой скорости имеет следующий вид:

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (10.16)$$

где G – модуль сдвига упругой среды.

Если упругая волна распространяется в жидкой или газообразной среде, то фазовая скорость волны определяется выражением

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (10.17)$$

где K – модуль всестороннего сжатия, определяемый выражением

$$K = -V \frac{\Delta P}{\Delta V}, \quad (10.18)$$

где V – объем газа или жидкости; ΔV – изменение объема газа или жидкости, при повышении давления на величину ΔP ; знак «минус» показывает, что при увеличении давления объем уменьшается. Единице измерения модуля всестороннего сжатия, также как и других упругих модулей, является *Паскаль* (обозначается Па).

С учетом выражения (10.15) для фазовой скорости волны, дифференциальное уравнение (10.14) запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v_\varphi^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (10.19)$$

Теперь оно описывает распространение вдоль оси x не только продольных упругих волн в твердых телах, но и других плоских

бегущих волн с произвольной природой (например, электромагнитных волн).

Еще более общий вид уравнению (10.19) можно придать, если в правой части уравнения заменить частную производную второго порядка по координате x суммой частных производных второго порядка по всем трем координатам x, y, z :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v_\phi^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right). \quad (10.20)$$

Если воспользоваться оператором Лапласа $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, запись волнового уравнения (10.20) упрощается:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v_\phi^2 \nabla^2 \xi. \quad (10.21)$$

Символическое умножение оператора Лапласа ∇^2 на функцию ξ означает, что при расчетах надо вычислить вторые частные производные от функции ξ по координатам x, y, z , и сложить их, как это записано в уравнении (10.20).

Дифференциальное уравнение (10.21) получило название **волнового уравнения**. Оно описывает распространение не только плоских, но и сферических волн в произвольном направлении. Также с его помощью можно проанализировать распространение волн в других частных случаях, определяемых особыми граничными условиями (например цилиндрических волн, источником которых является длинная прямая нить). При этом надо использовать оператор Лапласа для соответствующей системы координат (сферической, цилиндрической и др.).

10.3. ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ. ВЕКТОР УМОВА

При распространении волны частицы среды колеблются около своих положений равновесия, следовательно, обладают кинетической и потенциальной энергией.

Рассмотрим элемент среды в форме параллелепипеда, имеющий массу Δm и объем ΔV (рис. 10.2). Пусть центр масс этого элемента при распространении волны совершает гармонические колебания со скоростью u . Тогда кинетическая энергия элемента будет следующей:

$$\Delta K = \frac{\Delta m u^2}{2} = \frac{\rho u^2}{2} \Delta V, \quad (10.22)$$

где ρ – плотность упругой среды. Выражение $\rho u^2 / 2$ в выражении (10.22) имеет смысл объемной плотности кинетической энергии упругой волны, т. е. это кинетическая энергия упругой волны заключенная в единице объема среды.

Для нахождения скорости u используем уравнение бегущей плоской волны (10.4). Извлекая частную производную по переменной t из смещения частицы ξ , получаем следующее:

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)) = -A\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Тогда выражение (10.22) для кинетической энергии элемента среды примет следующий вид:

$$\Delta K = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (10.23)$$

Потенциальная энергия колеблющейся частицы среды – это потенциальная энергия упругой деформации соответствующего этой частице элемента среды. Как было показано ранее, абсолютная деформация элемента среды равна разности $\Delta \xi$ смещений правой и левой грани параллелепипеда (рис. 10.2). Тогда выражение для потенциальной энергии упруго деформированного элемента будет следующим:

$$\Delta \Pi = \frac{k_n (\Delta \xi)^2}{2}, \quad (10.24)$$

где k_n – жесткость элемента среды. Далее учтем, что длина Δx параллелепипеда невелика, поэтому для $\Delta \xi$ можно записать следующее приближенное равенство:

$$\Delta \xi \approx \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x, \quad (10.25)$$

в котором частная производная $\partial \xi / \partial x$, согласно (10.11), есть ни что иное, как относительная деформация элемента среды ϵ_n . В результате выражение (10.24) примет следующий вид:

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2} k_n (\epsilon_n \Delta x)^2.$$

Умножим и разделим правую часть этого выражения на площадь поперечного сечения параллелепипеда ΔS :

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2} \left(\frac{k_n \Delta x}{\Delta S} \right) \varepsilon_n^2 \Delta x \Delta S,$$

исходя из формулы (4.15), выражение, стоящее в круглых скобках, является модулем Юнга E упругой среды, а произведение $\Delta x \Delta S$ – это объем элемента среды ΔV . Таким образом, получим:

$$\Delta\Pi = \frac{E\varepsilon_n^2}{2} \Delta V, \quad (10.26)$$

где выражение $E\varepsilon_n^2/2$ имеет смысл объемной плотности потенциальной энергии упругой деформации, т. е. это потенциальная энергия упругой деформации, заключенная в единице объема среды.

Чтобы получить выражение для относительной деформации ε_n , необходимо, воспользовавшись уравнением (10.4), извлечь частную производную по переменной x из смещения частицы ξ :

$$\varepsilon_n = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)) = Ak \sin(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Далее, учитывая, что волновое число k определяется формулой (10.5), получим:

$$\varepsilon_n = A \frac{\omega}{v_\phi} \sin(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Тогда выражение (10.26) примет следующий вид:

$$\Delta\Pi = \frac{EA^2\omega^2\Delta V}{2v_\phi^2} \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Принимая во внимание формулу (10.15) для фазовой скорости продольной упругой волны, окончательно получаем следующее выражение для потенциальной энергии элемента среды:

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (10.27)$$

Сравнивая выражения для кинетической (10.23) и потенциальной (10.27) энергий элемента упругой среды, видим, что эти выражения абсолютно идентичны. Это означает, что кинетическая и потенциальная энергии элемента среды при распространении бегущей упругой волны изменяются синфазно, т. е. одновременно достигают максимума и одновременно обращаются в нуль. Отсюда следует, что и полная

энергия элемента среды не остается постоянной, а совершает периодические изменения согласно выражению

$$\begin{aligned}\Delta E &= \Delta K + \Delta \Pi = \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) = \\ &= \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 [1 - \cos(2\omega t - 2kx + 2\varphi_0)].\end{aligned}\quad (10.28)$$

Этот результат принципиально отличается от того, который был получен ранее для гармонического осциллятора. Действительно, при колебаниях гармонического осциллятора кинетическая и потенциальная энергии совершают колебания в противофазе друг к другу, а полная механическая энергия остается постоянной (рис. 8.1, з). Энергия гармонического осциллятора локализована на самом осцилляторе. В случае бегущей волны энергия колебаний не локализована, она передается от одних колеблющихся частиц среды другим, в результате чего происходит перенос энергии волной.

Объемной плотностью энергии w упругой волны называется энергия волны, заключенная в единице объема упругой среды:

$$\begin{aligned}w &= \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) = \\ &= \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 [1 - \cos(2\omega t - 2kx + 2\varphi_0)].\end{aligned}\quad (10.29)$$

Единицей измерения объемной плотности энергии в системе единиц СИ является *джоуль на метр кубический* (обозначается Дж / м³).

Величиной w неудобно пользоваться для описания волнового процесса, так как она изменяется с течением времени и не одинакова в различных точках среды. Поэтому определим среднее за период значение плотности энергии волны $\langle w \rangle$. Для этого усредним выражение (10.29). Как известно, среднее значение косинуса при изменении угла от 0 до 2π равно нулю, т. е. $\langle \cos(2\omega t - 2kx + 2\varphi_0) \rangle = 0$, тогда получим следующее выражение для средней объемной плотности энергии волны:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2.\quad (10.30)$$

В соответствии с уравнением (10.29) энергия бегущей волны распространяется с той же фазовой скоростью v_φ , что и упругая волна, однако поставить знак равенства между скоростью распространения энергии и фазовой скоростью волны нельзя. Как уже отмечалось

ранее, фазовая скорость не является вектором и зависит от направления нетривиальным образом (например, в направлении касательном к волновой поверхности эта скорость стремится к бесконечности). Скорость переноса энергии – это вектор, направленный по направлению переноса энергии, называемый **групповой скоростью волны** $\vec{v}_{\text{гр}}$. В частном случае для гармонической бегущей волны групповая скорость волны численно равна фазовой скорости по направлению нормали к волновой поверхности.

Так как распространение бегущей волны сопровождается переносом энергии, то можно ввести понятие **потока энергии** $\Delta\Phi$, который равен количеству энергии, которая проходит за единицу времени через некоторую площадку площадью ΔS , перпендикулярную направлению переноса энергии (рис. 10.3).

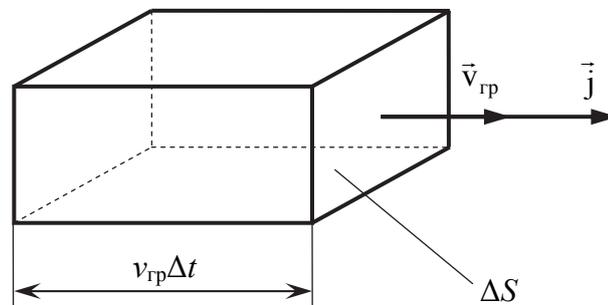


Рис. 10.3. Перенос энергии упругой волной

За время Δt через площадку ΔS пройдет энергия, заключенная в объеме ΔV , равном $\Delta S v_{\text{гр}} \Delta t$, т. е. эта энергия будет равна:

$$\langle \Delta W \rangle = \langle w \rangle \Delta V = \langle w \rangle \Delta S v_{\text{гр}} \Delta t.$$

Тогда, согласно определению потока энергии, получим следующее:

$$\Delta\Phi = \frac{\langle W \rangle}{\Delta t} = \langle w \rangle \Delta S v_{\text{гр}}. \quad (10.31)$$

Строго говоря, выражение (10.31) дает не просто поток энергии волны, а его среднее значение. Истинный поток энергии волны зависит от времени и определяется по формуле, которую можно получить, если заменить в выражении (10.31) среднюю объемную плотность энергии $\langle w \rangle$ на плотность энергии w , зависящую от времени и координат. Единицей измерения потока энергии в системе единиц СИ является ватт (обозначается Вт).

Интенсивностью волны I или средней плотностью потока энергии волны j называется отношение среднего потока энергии $\Delta\Phi$, проходящего через площадку площадью ΔS , перпендикулярную направлению переноса энергии, к площади этой площадки:

$$I = j = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S} = \langle w \rangle v_{\text{гр}} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v_{\text{гр}}. \quad (10.32)$$

Групповая скорость волны $v_{\text{гр}}$ является вектором, поэтому выражение (10.32) можно записать в векторном виде, для вектора \vec{j} , который называется **вектором средней плотности потока энергии или вектором Умова**¹:

$$\vec{j} = \langle w \rangle \vec{v}_{\text{гр}} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \vec{v}_{\text{гр}}. \quad (10.33)$$

Единицей измерения плотности потока энергии в системе единиц СИ является *ватт на метр квадратный* (обозначается Вт / м²).

¹Умов Никола́й Алексе́евич (1846–1915) – русский физик и мыслитель. Впервые ввел в науку такие основополагающие понятия, как скорость и направление движения энергии, плотность энергии в данной точке среды, пространственная локализация потока энергии.

СВОЙСТВА УПРУГИХ ВОЛН. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

11.1. Принцип суперпозиции упругих волн. Волновой пакет. Групповая скорость. Формула Рэлея.

11.2. Интерференция упругих волн. Стоячие волны.

11.3. Эффект Доплера.

11.4. Звуковые волны. Характеристики звука.

11.1. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ УПРУГИХ ВОЛН. ВОЛНОВОЙ ПАКЕТ. ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ. ФОРМУЛА РЭЛЕЯ

Принцип суперпозиции упругих волн является отражением линейности волнового уравнения (10.21). Суть этого принципа заключается в следующем: если две волны $\xi_1 = A \cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_{01})$ и $\xi_2 = A \cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_{02})$ являются решением одного и того же волнового уравнения, то, как доказывается в математическом анализе, решением этого уравнения является и их линейная комбинация $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Этот принцип подтвержден на опыте и хорошо выполняется для упругих волн не очень большой интенсивности. Среды, в которых выполняется принцип суперпозиции, называются **линейными**. Свойства такой среды не изменяются под действием возмущений, создаваемых волной, поэтому при распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получает частица, участвуя в каждом из составляющих волновых процессов.

До настоящего времени мы рассматривали свойства монохроматических волн. **Монохроматическая волна** – это гармоническая волна с постоянными во времени частотой, амплитудой и начальной фазой. Чтобы удовлетворять этому условию волновой процесс должен быть бесконечно протяженным во времени и пространстве. Поэтому, строго говоря, монохроматическая волна в природе не встречается и является удобной математической абстракцией для описания реальных волновых процессов. Но если в каком-либо

опыте или эксперименте волна по своим характеристикам близка к свойствам монохроматической волны, ее могут называть монохроматической.

В соответствии с принципом суперпозиции немонахроматические волны, излучаемые реальными источниками колебаний, могут быть представлены в виде суммы сколь угодно большого числа монохроматических волн:

$$\xi = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i}). \quad (11.1)$$

Если в уравнении (11.1) циклические частоты ω_i принадлежат некоторому узкому интервалу частот $[\omega, \omega + \Delta\omega]$, а волновые числа k_i – некоторому узкому интервалу волновых чисел $[k, k + \Delta k]$, то уравнение (11.1) описывает волновое образование с пространственной локализацией, **называемое волновым пакетом**.

Рассмотрим простейший волновой пакет из двух распространяющихся вдоль положительного направления оси x гармонических волн с одинаковыми амплитудами A , близкими частотами ($\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1$) и волновыми числами ($k_2 - k_1 \ll k_1$). Тогда, используя тригонометрическую формулу

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

получим:

$$\begin{aligned} \xi &= A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x) = \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{k_2 - k_1}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t - \frac{k_2 + k_1}{2} x\right). \end{aligned}$$

Полученное выражение удобно представить в следующем виде:

$$\xi = A(t, x) \cos(\omega t - kx), \quad (11.2)$$

где $\omega = (\omega_2 + \omega_1) / 2$ – средняя циклическая частота и $k = (k_2 + k_1) / 2$ – среднее волновое число; величина $A(t, x)$, имеющая смысл амплитуды результирующей волны, определяется выражением

$$A(t, x) = 2A \cos(\Delta\omega t - \Delta kx), \quad (11.3)$$

в котором $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $\Delta k = k_2 - k_1$.

Волна, описываемая уравнением (11.2) отличается от монохроматической волны тем, что ее амплитуда (11.2) является медленно

изменяющейся функцией времени и координаты. График результирующей волны, представленный на рис. 11.1, показывает, что при распространении волны имеют место периодические изменения амплитуды волны. Это похоже на явление биений, которые наблюдаются при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, но только в данном случае «биения» происходят не только во времени, но и в пространстве. Изменения амплитуды волны, называемые модуляцией волны, характеризуются периодом модуляции ($T_M = 2\pi / \Delta\omega$) и длиной волны модуляции ($\lambda_M = 2\pi / \Delta k$).

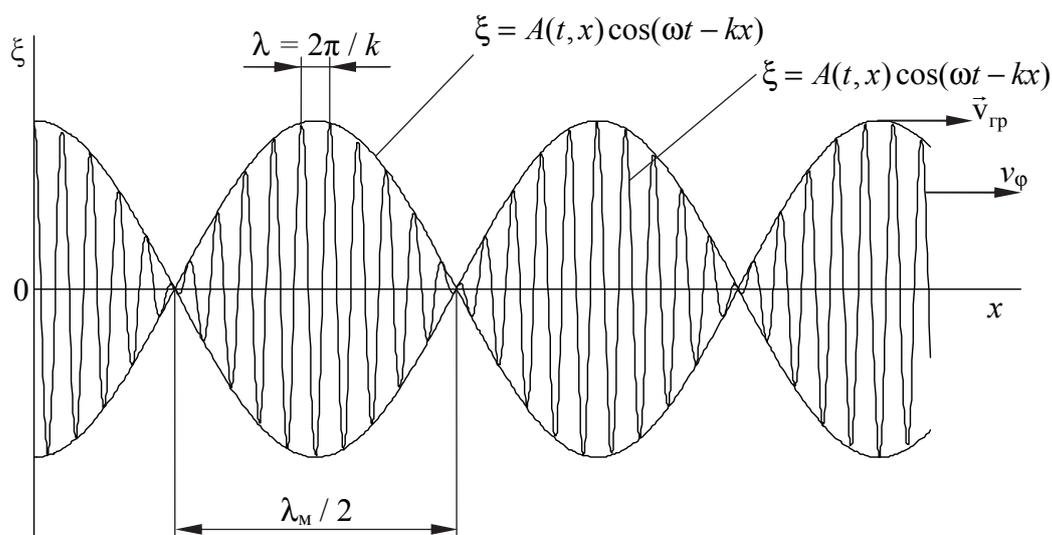


Рис. 11.1. Волновой пакет, образованный двумя монохроматическими волнами с близкими частотами и волновыми числами

Амплитудные максимумы на рис. 11.1 перемещаются в положительном направлении оси x и представляют собой простейшие волновые пакеты, составленные всего из двух волн. Если увеличить число монохроматических волн, образующих волновой пакет, то, подобрав соответствующим образом их амплитуды, можно добиться того, чтобы результирующая волна представляла собой локализованное волновое образование, имеющее только один максимум, распространяющееся вдоль оси x . Поскольку средняя объемная плотность энергии волны пропорциональна квадрату амплитуды (формула (10.29)), то скорость перемещения максимума равна скорости переноса энергии волной и называется групповой скоростью волнового пакета.

Определим групповую скорость волнового пакета (11.2), принимая во внимание, что перемещение максимумов амплитуды описывается уравнением (11.3). Тогда по аналогии с уже известной нам формулой для фазовой скорости бегущей монохроматической волны ($v_\varphi = \omega / k$) получим следующее выражение:

$$v_{\text{гр}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}.$$

В предельном случае, когда рассматривается бесконечно малый интервал волновых чисел, групповая скорость будет следующей:

$$v_{\text{гр}} = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (11.4)$$

Для сплошных однородных сред фазовые скорости распространения упругих волн, определяемые выражениями (10.15), (10.16) и (10.17), зависят от упругих модулей и плотности среды, т. е. являются для данной среды величиной постоянной, не зависящей от циклической частоты колебаний. Для многих сред это утверждение выполняется, но в ряде сред из-за высокой вязкости, теплопроводности и других факторов фазовая скорость зависит от циклической частоты. Зависимость фазовой скорости волны от длины волны или частоты получило название **дисперсии волн**. Если с увеличением длины волны (уменьшением частоты) фазовая скорость возрастает, то дисперсия называется нормальной; если наоборот – аномальной.

Установим взаимосвязь между фазовой и групповой скоростями волны. Для этого воспользуемся определением групповой скорости (11.4), а также учтем формулу $\omega = kv_\varphi$:

$$v_{\text{гр}} = \frac{d(kv_\varphi)}{dk} = v_\varphi + k \frac{dv_\varphi}{dk}. \quad (11.5)$$

При наличии дисперсии фазовая скорость является функцией длины волны $v_\varphi = f(\lambda)$, тогда выражение (11.5) примет следующий вид:

$$v_{\text{гр}} = v_\varphi + k \frac{dv_\varphi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}. \quad (11.6)$$

Используя формулу $\lambda = 2\pi / k$, получаем выражение для производной $d\lambda / dk = -2\pi / k^2$. Тогда групповая скорость волны (11.6) будет

$$v_{\text{гр}} = v_\varphi - \lambda \frac{dv_\varphi}{d\lambda}. \quad (11.7)$$

Эта формула получила название формулы Рэлея¹. При нормальной дисперсии ($dv_\phi / d\lambda > 0$) групповая скорость меньше фазовой, при аномальной ($dv_\phi / d\lambda < 0$) – больше фазовой, а при отсутствии дисперсии эти скорости равны.

11.2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов связывают с **понятием когерентности**. Волны называются когерентными, если разность их фаз остается постоянной во времени. Очевидно, что когерентными могут быть лишь волны, имеющие одинаковую частоту. При наложении в пространстве двух (или нескольких) когерентных волн в разных его точках получается усиление или ослабление результирующей волны в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Это явление называется **интерференцией волн**.

Рассмотрим наложение двух когерентных сферических волн, возбуждаемых точечными источниками S_1 и S_2 (рис. 11.2), колеблющимися с одинаковыми амплитудой A_0 и частотой ω и постоянной разностью фаз.

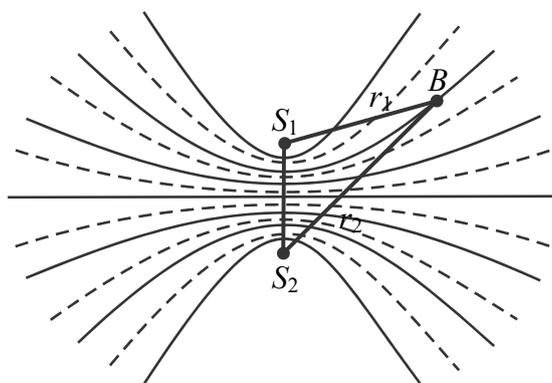


Рис. 11.2. Явление интерференции волн, испускаемых двумя точечными источниками S_1 и S_2

¹Джон Уильям Стретт, третий барон Рэлей, Лорд Рэлей (Рэйли) (1842–1919) – британский физик и механик, открывший (с Уильямом Рамзаем) газ аргон и получивший за это Нобелевскую премию по физике в 1904 году. Открыл также явление, ныне называемое рэлеевским рассеянием, и предсказал существование поверхностных волн, которые также называются волнами Рэлея. Объяснил различие между групповой и фазовой скоростями и установил соотношение между ними. Член Лондонского королевского общества (1873), его президент в 1905–1908 гг.

Согласно (10.9),

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{A_0}{r_1} \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_{01}), \\ \xi_2 &= \frac{A_0}{r_2} \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_{02}),\end{aligned}\tag{11.8}$$

где r_1 и r_2 – расстояния от источников волн до рассматриваемой точки B ; k – волновое число; φ_{01} и φ_{02} – начальные фазы обеих накладывающихся сферических волн. Амплитуда A результирующей волны в точке B может быть найдена методом векторных диаграмм. На рис. 11.3 показана векторная диаграмма сложения колебаний двух волн для некоторого момента времени t .

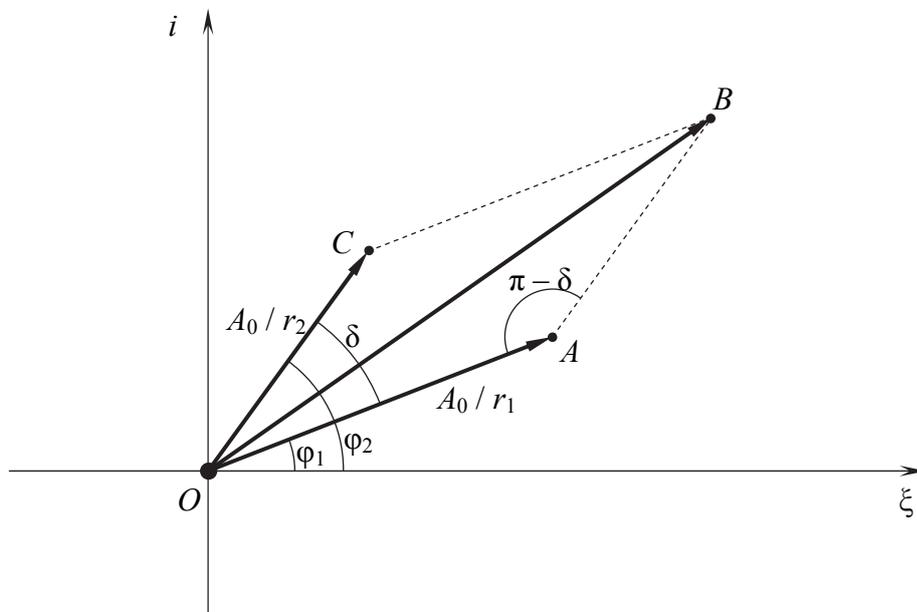


Рис. 11.3. Векторная диаграмма сложения двух когерентных волн

Длины векторов на диаграмме равны амплитудам волн, т. е. A_0 / r_1 и A_0 / r_2 , а угол между векторами – это разность фаз этих волн $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = k(r_1 - r_2) + (\varphi_{02} - \varphi_{01})$. Тогда по теореме косинусов из треугольника OAB получим следующее:

$$A^2 = A_0^2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos[k(r_1 - r_2) + (\varphi_{02} - \varphi_{01})] \right).\tag{11.9}$$

Так как для когерентных источников разность начальных фаз $(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = const$, то результат наложения двух волн в различных точках зависит от величины $\Delta = r_1 - r_2$, называемой **разностью хода волн**.

В точках, где

$$k(r_1 - r_2) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \pm 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (11.10)$$

наблюдается **интерференционный максимум**, т. е. усиление результирующего колебания. Его амплитуда в этом случае следующая:

$$A = A_0 / r_1 + A_0 / r_2.$$

В точках, где

$$k(r_1 - r_2) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \pm(2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (11.11)$$

наблюдается **интерференционный минимум**, т. е. ослабление результирующего колебания. В этом случае амплитуда следующая:

$$A = A_0 / r_1 - 3A_0 / r_2.$$

Целое число m называется **порядком интерференционного максимума** или **минимума**.

Условия (11.10) и (11.11) сводятся к тому, что

$$r_1 - r_2 = const. \quad (11.12)$$

Выражение (11.12) представляет собой уравнение гиперболы с фокусами в точках S_1 и S_2 . Следовательно, геометрическое место точек, в которых наблюдается усиление или ослабление результирующего колебания, представляет собой на рис. 11.2 семейство гипербол, отвечающих условию $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$. Между двумя интерференционными максимумами (на рис. 11.2 – сплошные линии) находятся интерференционные минимумы (на рис. 11.2 – штриховые линии).

Особым случаем интерференции являются **стоячие волны**. Это волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами. Для вывода уравнения стоячей волны предположим, что две плоские волны распространяются навстречу друг другу вдоль оси x в среде без затухания, причем обе волны характеризуются одинаковыми амплитудами и частотами. Кроме того, начало координат выберем в точке, где обе волны имеют одинаковую фазу, а отсчет времени начнем с момента, когда фазы обеих волн равны нулю. Тогда соответственно уравнения волны, распространяющейся в положительном направлении оси x , и волны, распространяющейся ей навстречу, будут иметь следующий вид:

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx), \quad \xi_2 = A \cos(\omega t + kx). \quad (11.13)$$

Сложив эти уравнения, получим уравнение стоячей волны:

$$\xi = 2A \cos(kx) \cos(\omega t), \quad (11.14)$$

учитывая, что $k = 2\pi / \lambda$, это уравнение примет следующий вид:

$$\xi = 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos(\omega t). \quad (11.15)$$

Из уравнения стоячей волны (11.15) вытекает, что в каждой точке этой волны происходят колебания той же частоты ω с амплитудой $A_{\text{ст}} = |2A \cos(2\pi x / \lambda)|$, зависящей от координаты x рассматриваемой точки.

В точках среды, где

$$2\pi x / \lambda = \pm m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (11.16)$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения, равного $2A$.

В точках среды, где

$$2\pi x / \lambda = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (11.17)$$

амплитуда колебаний обращается в нуль. Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна ($A_{\text{ст}} = 2A$), называются **пучностями стоячей волны**, а точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю ($A_{\text{ст}} = 0$), называются **узлами стоячей волны**. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают (рис. 11.4).

Из выражений (11.16) и (11.17) получим соответственно координаты пучностей и узлов:

$$x_0 = \pm m\lambda / 2 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (11.18)$$

$$x_{\text{узн}} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (11.19)$$

Из формул (11.18) и (11.19) следует, что расстояния между двумя соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаковы и равны $\lambda / 2$. Расстояние между соседними пучностью и узлом стоячей волны равно $\lambda / 4$.

В отличие от бегущей волны, все точки которой совершают колебания с одинаковой амплитудой, но с запаздыванием по фазе, все точки стоячей волны между двумя узлами колеблются с разными амплитудами, но с одинаковыми фазами. При переходе через узел множитель $2A \cos(2\pi x / \lambda)$ меняет свой знак, поэтому фаза колебаний

по разные стороны от узла отличается на π , т. е. точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе.

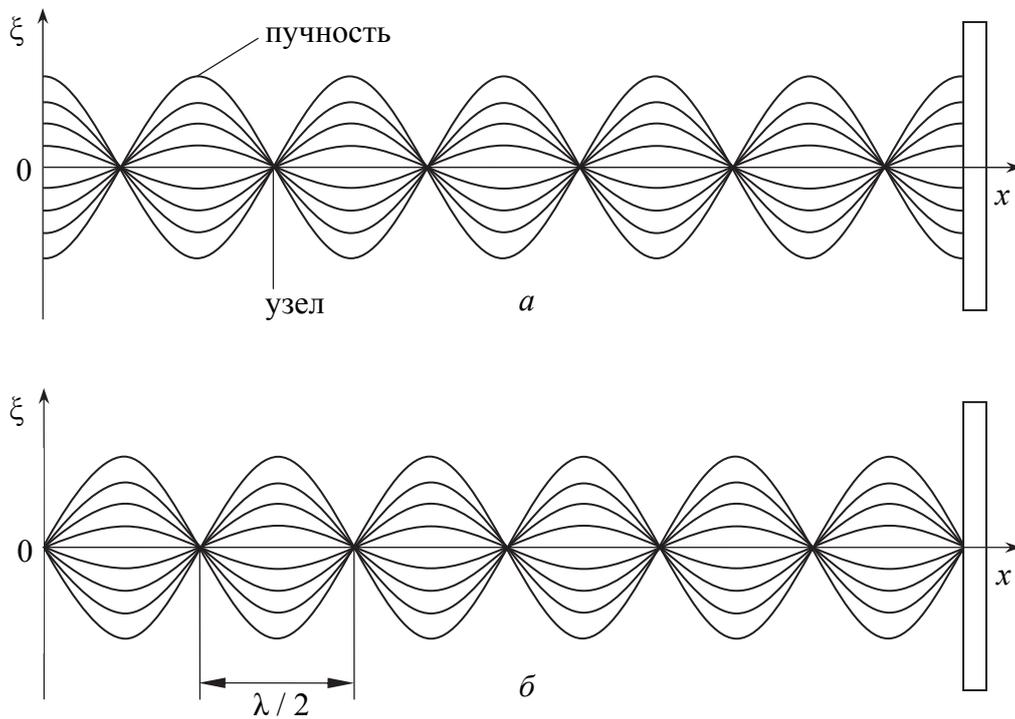


Рис. 11.4. Стоячие волны при отражении:
a – от менее плотной среды; *б* – от более плотной среды

Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отраженной волн. Например, если конец веревки закрепить неподвижно, то отраженная в месте закрепления веревки волна будет интерферировать с бегущей волной и образует стоячую волну. На границе, где происходит отражение волны, в данном случае получается узел. Будет ли на границе отражения узел или пучность, зависит от соотношения плотностей сред. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то в месте отражения получается пучность (рис. 11.4, *a*), если более плотная – узел (рис. 11.4, *б*). Образование узла связано с тем, что волна, отражаясь от более плотной среды, меняет фазу на противоположную и у границы происходит сложение колебаний противоположных направлений, в результате чего получается узел. Если же волна отражается от менее плотной среды, то изменения фазы не происходит, и у границы колебания складываются с одинаковыми фазами – получается пучность.

Если рассматривать бегущую волну, то в направлении ее распространения переносится энергия колебательного движения. В случае же стоячей волны переноса энергии нет, так как падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях. Поэтому полная энергия результирующей стоячей волны, заключенной между узловыми точками, остается постоянной. В каждой точке волны за исключением узловых точек происходят взаимные превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно.

11.3. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

Эффектом Доплера¹ называется изменение частоты колебаний, воспринимаемой приемником, при движении источника этих колебаний и приемника друг относительно друга. Например, из опыта известно, что тон гудка поезда повышается по мере его приближения к платформе и понижается при удалении, т. е. движение источника колебаний (гудка) относительно приемника (уха) изменяет частоту принимаемых колебаний.

Для рассмотрения эффекта Доплера предположим, что источник и приемник звука движутся вдоль соединяющей их прямой; $v_{ист}$ и $v_{пр}$ — соответственно скорости движения источника и приемника, причем они положительны, если источник (приемник) приближается к приемнику (источнику), и отрицательны, если удаляется. Частота колебаний источника равна ν_0 .

1. Приемник приближается к источнику, а источник покоится, т. е. $v_{пр} > 0$, $v_{ист} = 0$. В данном случае скорость распространения волны относительно приемника станет равной $v + v_{пр}$. Так как длина волны при этом не меняется, то

$$\nu = \frac{v + v_{пр}}{\lambda} = \frac{v + v_{пр}}{vT} = \frac{(v + v_{пр})}{v} \nu_0, \quad (11.20)$$

т. е. частота колебаний, воспринимаемых приемником, в $(v + v_{пр}) / v$ раз больше частоты колебаний источника.

¹Кристиан Доплер (1803–1853) – австрийский физик, внесший значительный вклад в развитие оптики и акустики. В 1842 Доплер теоретически обосновал зависимость частоты колебаний, воспринимаемых наблюдателем, от скорости и направления движения источника волн и наблюдателя относительно друг друга. Это явление впоследствии было названо его именем.

2. Источник приближается к приемнику, а приемник покоится, т. е. $v_{ист} > 0$, $v_{пр} = 0$. Скорость распространения колебаний зависит лишь от свойств среды, поэтому за время, равное периоду колебаний источника, излученная им волна пройдет в направлении к приемнику расстояние vT (равное длине волны λ) независимо от того, движется ли источник или покоится. За это же время источник пройдет в направлении волны расстояние $v_{ист}T$ (рис. 11.5), т. е. длина волны в направлении движения сократится и станет равной $\lambda' = \lambda - v_{ист}T = (v - v_{ист})T$, тогда

$$\nu = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_{ист})T} = \frac{v}{v - v_{ист}} \nu_0, \quad (11.21)$$

т. е. частота ν колебаний, воспринимаемых приемником, увеличится в $v / (v - v_{ист})$ раз. В случаях 1 и 2, если $v_{ист} < 0$ и $v_{пр} < 0$, знак будет обратным.

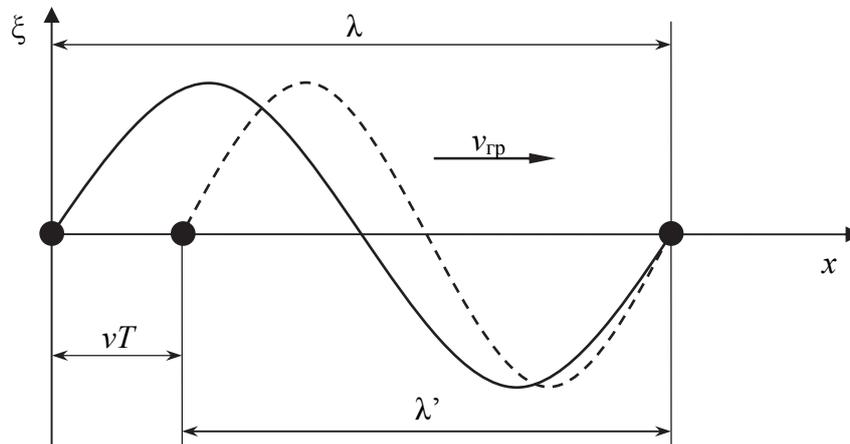


Рис. 11.5. Эффект Доплера. Уменьшение длины волны при движении источника колебаний по направлению к приемнику

3. Источник и приемник движутся относительно друг друга. Используя результаты, полученные для случаев 1 и 2, можно записать выражение для частоты колебаний, воспринимаемых источником:

$$\nu = \frac{(v \pm v_{пр})}{v \mp v_{ист}} \nu_0, \quad (11.22)$$

причем верхний знак берется, если при движении источника или приемника происходит их сближение, нижний знак – в случае их взаимного удаления.

Из приведенных формул следует, что эффект Доплера различен в зависимости от того, движется ли источник или приемник. Если направления скоростей $v_{\text{пр}}$ и $v_{\text{ист}}$ не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, то вместо этих скоростей в формуле (11.22) надо брать их проекции на направление этой прямой.

11.4. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВУКА

Звуковыми (или **акустическими волнами**) называются распространяющиеся в среде упругие волны, обладающие частотами ν в пределах 16 – 20 000 Гц. Волны указанных частот, действуя на слуховой аппарат человека, вызывают ощущение звука. Волны с $\nu < 16$ Гц (**инфразвуковые**) и $\nu > 20$ кГц (**ультразвуковые**) органами слуха человека не воспринимаются.

Интенсивностью звука (или **силой звука**) называется величина, определяемая средней по времени энергией, переносимой звуковой волной в единицу времени сквозь единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны (формула (10.32)). Единица интенсивности звука в СИ – Вт/м².

Чувствительность человеческого уха различна для разных частот. Чтобы вызвать звуковое ощущение, волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью, но если эта интенсивность превышает определенный предел, то звук не слышен и вызывает только болевое ощущение. Таким образом, для каждой частоты колебаний существует наименьшая (**порог слышимости**) и наибольшая (**порог болевого ощущения**) интенсивность звука, которая способна вызвать звуковое восприятие. На рис. 11.6 представлена зависимость порогов слышимости и болевого ощущения от частоты звука. Область, расположенная между этими двумя кривыми, является **областью слышимости**.

Если интенсивность звука является величиной, объективно характеризующей волновой процесс, то субъективной характеристикой звука, связанной с его интенсивностью, является громкость звука, зависящая от частоты. По физиологическому закону Вебера – Фехнера, с ростом интенсивности звука громкость возрастает по логарифмическому закону. На этом основании вводят объективную оценку громкости звука по измеренному значению его интенсивности:

$$L = \lg(I / I_0), \quad (10.23)$$

где I_0 – интенсивность звука на пороге слышимости, принимаемая для всех звуков равной 10^{-12} Вт/м². Величина L называется **уровнем**

интенсивности звука и выражается в белах (в честь А. Белла¹). Обычно пользуются единицами, в 10 раз меньшими, – децибелами (дБ). Например, если $I = 10^{-5}$ Вт/м², то $L = 7 \text{ Б} = 10 \text{ дБ}$.

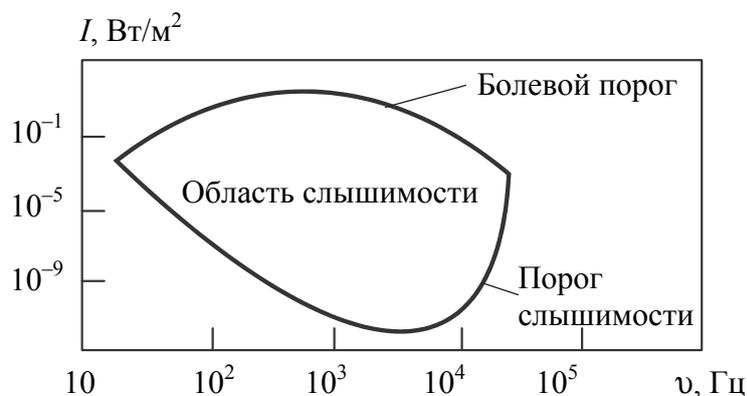


Рис. 11.6. Диаграмма слышимости среднего нормального человеческого уха

Монохроматические звуковые волны **называются чистыми тонами**. Их звучание бесцветно и монотонно. Реальный звук является наложением гармонических колебаний с большим набором частот, т. е. звук обладает **акустическим спектром** (рис. 11.7), который может быть сплошным (в некотором интервале присутствуют колебания всех частот) и линейчатым (присутствуют отделенные друг от друга определенные частоты). Звуки, акустический спектр которых состоит из отдельных линий, называются **тональными** или **музыкальными**, а звуки с непрерывным акустическим спектром называются **шумами**. В спектре музыкального звука выделяются колебания с наименьшей частотой ν_1 , называемые основным тоном, и колебания с частотами кратными частоте основного тона, называемые **обертонами**. Именно наличие в акустическом спектре обертонов придает музыкальным звукам насыщенность и мягкость звучания.

Звуковое ощущение характеризуется помимо громкости еще высотой и тембром. **Высота звука** – качество звука, определяемое человеком субъективно на слух и зависящее от частоты звука. С ростом частоты высота звука увеличивается, т. е. звук становится «выше».

¹Алекса́ндр Грэйам Белл (1847–1922) – американский учёный, изобретатель и бизнесмен шотландского происхождения, один из основоположников телефонии, основатель компании Bell Labs, заложившей основы телекоммуникационной отрасли США. Александр Белл наиболее широко известен якобы изобретением телефона (который, на самом деле, изобрел Антонио Меуччи, итальянец, подавший заявку на патент своего изобретения в 1871 году).

Характер акустического спектра и распределения энергии между основным тоном и обертонами определяет своеобразие звукового ощущения, называемое **тембром звука**. Различные певцы, берущие одну и ту же ноту, имеют различный акустический спектр, т. е. они имеют различный тембр. Чем сложнее спектр звука, чем больше в нем обертонов и чем ближе их амплитуда к амплитуде основного тона, тем богаче и красивее тембр звука в музыкальном отношении.

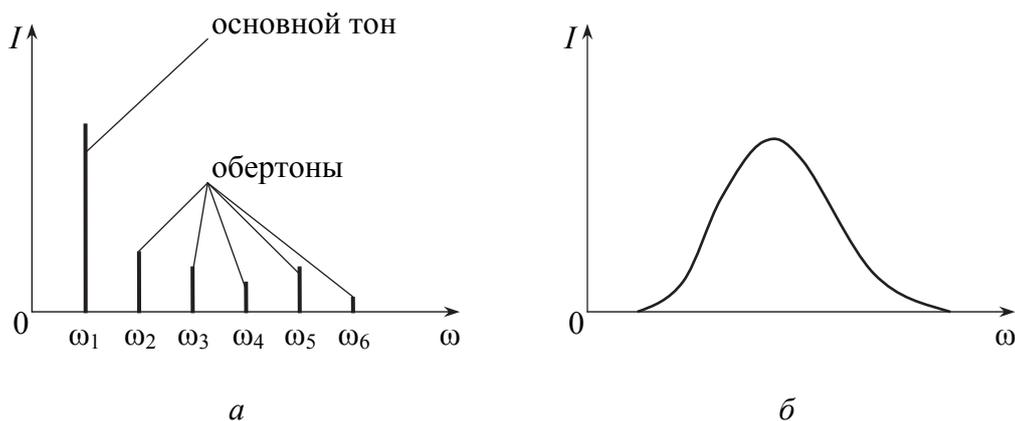


Рис. 11.7. Акустический спектр:
а – музыкального звука; *б* – шума

Источником звука может быть всякое тело, колеблющееся в упругой среде со звуковой частотой (например, в струнных инструментах источником звука является струна, соединенная с корпусом инструмента). Совершая колебания, тело вызывает колебания прилегающих к нему частиц среды с такой же частотой. Состояние колебательного движения последовательно передается к все более удаленным от тела частицам среды, т. е. в среде распространяется волна с частотой колебаний, равной частоте ее источника, и с определенной скоростью, зависящей от плотности и упругих свойств среды.

Для акустики помещений большое значение имеет **реверберация звука** – процесс постепенного затухания звука в закрытых помещениях после выключения его источника. Если помещения пустые, то происходит медленное затухание звука и создается «гулкость» помещения. Если звуки затухают быстро (при применении звукопоглощающих материалов), то они воспринимаются приглушенными. **Время реверберации** – это время, в течение которого интенсивность звука в помещении ослабляется в миллион раз, а его уровень – на 60 дБ. Помещение обладает хорошей акустикой, если время реверберации составляет 0,5–1,5 с.

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

12.1. Постулаты специальной теории относительности. Преобразования Лоренца. Принцип соответствия.

12.2. Относительность одновременности. Замедление времени. Сокращение длины. Инвариантность интервала.

12.3. Релятивистский закон сложения скоростей.

12.4. Релятивистский импульс. Релятивистская масса. Релятивистское уравнение динамики.

12.5. Релятивистское выражение для кинетической энергии. Полная энергия релятивистской частицы. Энергия покоя.

12.1. ПОСТУЛАТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА. ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ

Ньютоновская механика достигла в течение двух столетий таких огромных успехов, что многие физики XIX столетия были убеждены в ее всемогуществе. Считалось, что объяснить любое физическое, да и не только физическое, явление означает свести его к механическому процессу, подчиняющемуся законам Ньютона. В философии возникали новые философские течения, в основе которых лежало механистическое понимание мира: весь окружающий мир представлялся как набор механических явлений, которые можно описать на основе законов Ньютона. Однако с развитием науки обнаружили новые факты, которые не укладывались в рамки классической механики.

Одним из таких фактов стало экспериментально обнаруженное постоянство скорости света. Точные измерения скорости света, выполненные на рубеже XIX–XX вв., показали, что независимо от скорости движения источников и приемников света скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и равна величине $c = 2,9979 \cdot 10^8$ м/с. Это наблюдение не могло быть объяснено в рамках классической механики, так как в соответствии с законом сложения скоростей Галилея (2.16) скорость света в различных системах отсчета должна быть разной.

Одновременно было показано противоречие между классической теорией и уравнениями Дж. К. Максвелла¹, описывающими законы электромагнетизма и лежащими в основе понимания света как электромагнитной волны. Скорость света входит в эти уравнения как константа, следовательно, чтобы уравнения Максвелла были инвариантны относительно выбора инерциальной системы отсчета, скорость света во всех этих системах отсчета должна быть одинаковой.

В 1905 г., обобщив все имевшиеся к тому времени опытные данные и их теоретические обоснования, А. Эйнштейн² в своей работе «К электродинамике движущихся тел» изложил основные положения **специальной теории относительности**, которую также называют **релятивистской механикой**.

В основу специальной теории относительности А. Эйнштейн положил два постулата. Первый постулат обобщает механический принцип относительности Галилея на любые физические процессы. Этот постулат, называемый **релятивистским принципом относительности**, или просто **принципом относительности**, гласит: никакие опыты (механические, электрические, оптические и т. д.), проведенные

¹Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879) – британский физик, математик и механик. Шотландец по происхождению. Член Лондонского королевского общества (1861). Максвелл заложил основы современной классической электродинамики (уравнения Максвелла). Один из основателей кинетической теории газов (установил распределение молекул газа по скоростям). Одним из первых ввел в физику статистические представления, показал статистическую природу второго начала термодинамики. Пионер количественной теории цветов; автор принципа цветной фотографии. Среди других работ Максвелла – исследования по механике, оптике, математике. Подготовил к публикации рукописи работ Генри Кавендиша. Много внимания уделял популяризации науки, сконструировал ряд научных приборов.

²Альберт Эйнштейн (1879–1955) – физик-теоретик, один из основателей современной теоретической физики, лауреат Нобелевской премии по физике 1921 года, общественный деятель-гуманист. Почетный доктор около 20 ведущих университетов мира, член многих Академий наук. Он разработал несколько значительных физических теорий: специальная теория относительности, общая теория относительности, квантовая теория фотоэффекта, квантовая теория теплоемкости, квантовая статистика Бозе – Эйнштейна, теория индуцированного излучения и др. Эйнштейну принадлежит решающая роль в популяризации и введении в научный оборот новых физических концепций и теорий. В первую очередь это относится к пересмотру понимания физической сущности пространства и времени и к построению новой теории гравитации взамен ньютоновской. Эйнштейн вместе с Планком заложил основы квантовой теории. Эти концепции, многократно подтвержденные экспериментами, образуют фундамент современной физики.

в данной инерциальной системе отсчета, не дают возможности обнаружить, покоится ли эта система отсчета или движется прямолинейно и равномерно; в любых инерциальных системах отсчета все физические явления при одних и тех же условиях протекают одинаково; все физические законы инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, т. е. уравнения, выражающие эти законы, имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.

Второй постулат выражает **принцип инвариантности скорости света**: скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Считается, что скорость света в вакууме (c) – это предельная скорость в природе, т. е. скорость движения частиц, тел, скорость распространения любых сигналов и взаимодействий не может превосходить c .

Еще в 1904 г. голландский физик Х. А. Лоренц¹, пытаясь преодолеть возникшие в классической физике трудности, показал, что скорость света будет иметь одинаковое значение во всех инерциальных системах отсчета, если вместо преобразований координат Галилея (2.12) и постулата классической механики об одинаковом течении времени в различных системах отсчета ($t = t'$) использовать новые преобразования координат и времени, впоследствии названные в его честь преобразованиями Лоренца. На рис. 2.2 показаны две инерциальные системы отсчета K и K' . В начальный момент времени начала координат и координатные оси этих систем отсчета совпадают. Си-

¹Хендрик Антон Лоренц (1853–1928) — нидерландский физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии по физике (1902), член Нидерландской королевской академии наук (1881), ряда иностранных академий наук и научных обществ. Известен прежде всего своими работами в области электродинамики и оптики. Создал классическую электронную теорию и применил ее для решения множества частных задач: получил выражение для силы, действующей на движущийся заряд со стороны электромагнитного поля (сила Лоренца), вывел формулу, связывающую показатель преломления вещества с его плотностью (формула Лоренца – Лоренца), разработал теорию дисперсии света, объяснил эффект Зеемана. На основе электронной теории ученый развил электродинамику движущихся сред, получил релятивистское выражение для зависимости массы от скорости, вывел соотношения между координатами и временем в движущихся относительно друг друга инерциальных системах отсчета (преобразования Лоренца). Работы Лоренца способствовали становлению и развитию идей специальной теории относительности и квантовой физики. Кроме того, им был получен ряд существенных результатов в термодинамике и кинетической теории газов, общей теории относительности, теории теплового излучения.

стема K' движется равномерно и прямолинейно со скоростью v в направлении оси x . Прямые и обратные преобразования Лоренца для этих систем отсчета имеют следующий вид:

$$\begin{array}{cc}
 K \rightarrow K' & K' \rightarrow K \\
 \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{array} \right. \quad (12.1)
 \end{array}$$

Получив эти преобразования, Лоренц не смог обосновать их физический смысл. Это удалось сделать А. Эйнштейну, который показал, что преобразования Лоренца вытекают из двух постулатов специальной теории относительности.

При скоростях, которые гораздо меньше скорости света, т. е. $v \ll c$, преобразования Лоренца переходят в классические преобразования Галилея:

$$\begin{array}{cc}
 K \rightarrow K' & K' \rightarrow K \\
 \left\{ \begin{array}{l} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{array} \right. \quad (12.2)
 \end{array}$$

В этом заключается суть **принципа соответствия**, согласно которому любая новая научная теория при наличии старой, хорошо проверенной теории находится с ней не в полном противоречии, а дает те же следствия в некотором предельном приближении (частном случае). Таким образом, релятивистская механика не отменяет законы механики классической, а является более полной теорией, которая имеет более широкие границы применимости (применима при высоких скоростях движения, близких к скорости света) и содержит в себе классическую теорию Ньютона в качестве своего предельного случая, служа малых по сравнению со скоростью света скоростей движения тел.

В преобразованиях Лоренца преобразования координат и времени взаимосвязаны: в закон преобразования координат входит время, а в закон преобразования времени – пространственные координаты.

Пространство и время в релятивистской механике уже нельзя рассматривать отдельно друг от друга, как это было в механике классической. Движение тел в специальной теории относительности необходимо рассматривать в едином **четырёхмерном пространстве-времени**, представления о котором были впервые введены в физику немецким математиком и физиком, уроженцем Литвы, Г. Минковским.

12.2. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ОДНОВРЕМЕННОСТИ. ЗАМЕДЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ. СОКРАЩЕНИЕ ДЛИНЫ. ИНВАРИАНТНОСТЬ ИНТЕРВАЛА

Из преобразований Лоренца следует ряд следствий, которые являются необычными для наших обыденных представлений о пространстве и времени. В частности, понятие **одновременности событий** в релятивистской механике является относительным, т. е. события, одновременные в одной инерциальной системе отсчета, вовсе не всегда одновременны в других инерциальных системах отсчета, движущихся относительно первой. Например, если в системе отсчета K события пространственно разобщены ($x_1 \neq x_2$), но одновременны ($t_1 = t_2$), то в системе K' согласно преобразованиям Лоренца получим следующее:

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$t'_1 = \frac{t_1 - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - vx_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Отсюда следует, что $x'_1 \neq x'_2$ и $t'_1 \neq t'_2$, т. е. в системе отсчета K' эти события не только пространственно разобщены, но и не одновременны. При этом в одних системах отсчета первое событие может предшествовать второму, а в других системах отсчета – второе событие предшествует первому. Указанная особенность не проявляется в случае событий, связанных причинно-следственной связью, такие события следуют всегда в правильном порядке: причина – следствие.

Еще одним необычным следствием специальной теории относительности и преобразований Лоренца является **релятивистское замедление времени**. Пусть в системе отсчета K в некоторой точке с координатой x происходит событие, длительность которого $\tau_0 = t_2 - t_1$.

Символ «ноль» возле длительности события τ_0 означает, что это **собственная длительность события**, т. е. длительность события измеренная часами в системе отсчета, относительно которой точка в которой происходит событие, неподвижна. Тогда длительность этого же события в системе отсчета K' будет следующей:

$$\tau' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{t_1 - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

или

$$\tau' = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.3)$$

Таким образом, $\tau' > \tau_0$, т. е. длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна. Другими словами, часы, движущиеся вместе с системой отсчета K' , покажут меньшую длительность события происходящего в этой системе отсчета, чем часы в неподвижной системе отсчета K , что означает, что часы в движущейся системе отсчета замедляют свой ход.

Впервые с этим эффектом исследователи столкнулись при изучении мюонов, рождавшихся в верхних слоях атмосферы Земли в результате взаимодействия частиц космического излучения с ядрами атомов в атмосфере. Мюоны рождаются на высоте порядка 100 км над поверхностью Земли. Собственное время жизни мюона $t = 2 \cdot 10^{-6}$ с. Поток мюонов, рожденных в верхних слоях атмосферы, доходит до поверхности Земли. Но это кажется невозможным. Ведь даже если бы мюоны двигались со скоростью, равной скорости света, они все равно могли бы за время своей жизни пролететь расстояние, равное всего $ct = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 600$ м. Таким образом, тот факт, что мюоны (не распавшись) пролетают 100 км, т. е. расстояние, в 200 раз большее, может быть объяснен только одним: с точки зрения земного наблюдателя, время жизни мюона возросло. Расчеты полностью подтверждают релятивистскую формулу (12.3).

Из преобразований Лоренца следует, что линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения. Изменение продольного размера тела при его движении называется **релятивистским сокращением длины**. Рассмотрим стержень, покоящийся в системе отсчета K' и вытянутый вдоль оси x' . Длина стержня в системе отсчета K' будет $l'_0 = x'_2 - x'_1$.

Значок «ноль» возле длины l'_0 означает, что это **собственная длина стержня**, т. е. длина стержня, измеренная в собственной системе отсчета стержня, относительно которой он покоится. Чтобы определить длину этого стержня в системе отсчета K , относительно которой он движется со скоростью v , необходимо найти разность координат x_2 и x_1 в один и тот же момент времени t . Используя преобразования Лоренца, получим следующее:

$$l'_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

или

$$l = l'_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (12.4)$$

Таким образом, $l < l'_0$, т. е. длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой он движется, будет меньше длины стержня в его собственной системе отсчета, относительно которой он неподвижен. Собственная длина стержня максимальна.

В повседневной жизни релятивистского замедления времени, равно как и релятивистского сокращения длины, не наблюдается. Но объясняется это не отсутствием этих эффектов, а их малостью при скоростях движения много меньших скорости света. Если пренебречь в формулах (12.3) и (12.4) отношением v/c , то мы приходим к классическому результату $\tau' \approx \tau_0$, $l \approx l'_0$, который подсказывает нам повседневный опыт.

Интервалом (пространственно-временным интервалом) между двумя событиями называется величина

$$s_{12} = \sqrt{c^2 \tau_{12}^2 - l_{12}^2}, \quad (12.4)$$

где $\tau_{12} = t_2 - t_1$ – промежуток времени между двумя событиями; l_{12} – расстояние между точками, где произошли события

$$l_{12} = \sqrt{(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) + (z_2^2 - z_1^2)}.$$

Из преобразований Лоренца следует, что интервал инвариантен по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, т. е. интервал между двумя событиями, определенный в разных инерциальных системах отсчета, одинаков. В зависимости от знака s_{12}^2 различают:

- 1) времениподобный интервал $s_{12}^2 > 0$;
- 2) пространственноподобный интервал $s_{12}^2 < 0$;

3) нулевой интервал $s_{12}^2 = 0$.

Если интервал между двумя событиями времениподобный, то эти события могут быть связаны причинно-следственной связью. В случае пространственноподобного интервала события не могут быть связаны причинно-следственной связью, так как сигнал от первого события не успеет дойти до точки, где произошло второе событие, даже если он будет распространяться со скоростью света. Если между двумя событиями нулевой интервал, то эти события могут быть связаны взаимодействием, распространяющимся со скоростью света.

12.3. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

В системе отсчета K' проекции скорости \vec{u}' на координатные оси x', y', z' определяются как производные по времени от соответствующих координат:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (12.5)$$

Используя преобразования Лоренца (12.1), получим выражения для дифференциалов dx', dy', dz' и dt' :

$$dx' = d\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz,$$

$$dt' = d\left(\frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \frac{dt - vdx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (12.5) получим следующее:

$$\begin{aligned} u'_x = \frac{dx'}{dt'} &= \frac{\frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}{\frac{dt - vdx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{vdx}{c^2}} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \\ &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \end{aligned}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\frac{dt - vdx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} = \frac{dy\sqrt{1-v^2/c^2}}{dt - \frac{vdx}{c^2}} = \frac{\frac{dy}{dt}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}},$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\frac{dt - vdx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} = \frac{dz\sqrt{1-v^2/c^2}}{dt - \frac{vdx}{c^2}} = \frac{\frac{dz}{dt}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}.$$

В итоге можем записать следующие выражения, связывающие проекции скорости \vec{u}' в системе отсчета K' с проекциями скорости \vec{u} в системе отсчета K :

$$\begin{array}{cc} K \rightarrow K' & K' \rightarrow K \\ \left\{ \begin{array}{l} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \\ u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \\ u_z = \frac{u'_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \end{array} \right. \end{array} \quad (12.6)$$

Уравнения (12.6) представляют собой **преобразования скоростей в релятивистской механике** или **релятивистский закон сложения скоростей**.

Легко убедиться, что если скорости u , u' и v малы по сравнению со скоростью света c , то формулы (12.6) преобразуются в закон сложения скоростей в классической механике (2.15), что согласуется с принципом соответствия.

Релятивистский закон сложения скоростей подчиняется второму постулату Эйнштейна. Действительно, если $u'_x = c$, то

$$u_x = \frac{c+v}{1 + \frac{vc}{c^2}} = c.$$

Аналогичным образом можно показать, что если $u_x = c$, то $u'_x = c$. Таким образом, скорость света одинакова в системах отсчета K и K' .

12.4. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ИМПУЛЬС. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МАССА. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

В механике Ньютона вектор импульса \vec{p} как динамическая характеристика движущейся частицы пропорционален соответствующей кинематической характеристике движения, т. е. вектору скорости \vec{v} , а постоянный для данной частицы коэффициент пропорциональности – это ее инертная масса m . В классической физике масса m частицы – постоянная величина, не зависящая от состояния ее движения. Иными словами, импульс определяется как произведение массы частицы на ее скорость: $\vec{p} = m \vec{v}$.

В релятивистской механике импульс частицы также определяется ее скоростью, но зависимость импульса от скорости оказывается сложнее, чем в классической механике, и уже не сводится к простой пропорциональности. Чтобы получить релятивистское выражение для импульса частицы, нужно исходить из принципа соответствия, согласно которому в классической области медленных движений ($v \ll c$) релятивистское выражение должно сводиться к ньютоновскому. При обращении скорости в нуль импульс частицы также должен обращаться в нуль.

В силу изотропности свободного пространства все направления в нем эквивалентны, поэтому импульс частицы должен быть направлен вдоль единственного физически выделенного направления, т. е. направления ее скорости.

Таким образом, релятивистское выражение для импульса должно иметь следующий вид:

$$\vec{p} = m_v \vec{v}, \quad (12.7)$$

где величина m_v может зависеть только от абсолютной величины скорости частицы v , а при $v \ll c$ в силу принципа соответствия величина m_v должна совпадать с массой m частицы, имеющей тот смысл, который придается инертной массе в классической механике. Величину m_v , связывающую в соотношении (12.7) релятивистский импульс частицы с ее скоростью, называют **релятивистской массой** частицы, а ее значение m_0 при $v \rightarrow 0$ – **массой покоя**.

Релятивистское выражение для импульса частицы наряду с принципом соответствия должно удовлетворять еще одному важному условию: закон сохранения импульса должен выполняться во всех инерциальных системах отсчета. Рассмотрим две системы отсчета K' и K'' , движущиеся относительно системы отсчета K параллельно оси x в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями $+v_x$ и $-v_x$. Координатные оси всех систем отсчета взаимно параллельны. Пусть в системах отсчета K' и K'' произведены выстрелы одинаковыми снарядами с одинаковыми по модулю скоростями ($u'_{1y} = u''_{2y}$) в направлении параллельном оси y , т. е. перпендикулярно направлению движения систем отсчета. Один снаряд движется по направлению оси y , а другой – против. В итоге происходит неупругое столкновение снарядов, вследствие чего они соединяются. Из соображений симметрии следует, что в неподвижной системе отсчета K скорость, а следовательно, и импульс образованного при столкновении тела равны нулю. В соответствии с законом сохранения импульса суммарный импульс снарядов в системе отсчета K до столкновения также равен нулю. Закон сохранения импульса должен выполняться и в системах отсчета K' и K'' . Рассмотрим систему отсчета K' и запишем закон сохранения импульса в проекции на ось y . Прежде всего отметим, что в системе отсчета K проекция скорости образованного при столкновении тела на ось y равна нулю (тело неподвижно в системе отсчета K), тогда в соответствии с преобразованиями скоростей (12.6) проекция скорости этого тела на ось y' системы отсчета K' тоже будет равна нулю. В соответствии с (12.7) нулю будет равна тогда и проекция импульса на ось y' . Следовательно, суммарный импульс снарядов в системе отсчета K' до столкновения также равен нулю. Запишем закон сохранения импульса в системе отсчета K' , предполагая, что скорости снарядов вдоль оси y нерелятивистские, т. е. $u_y \ll c$:

$$m_0 u'_{1y} - m_v u'_{2y} = 0, \quad (12.8)$$

где $m_0 u'_{1y}$ – проекция на ось y' импульса первого снаряда, выпущенного из системы отсчета K' ; $m_v u'_{2y}$ – проекция на ось y' импульса второго снаряда, выпущенного из системы отсчета K'' . Скорость первого снаряда относительно системы отсчета K' нерелятивистская ($u'_{1y} \ll c$), поэтому на основании принципа соответствия используется масса покоя m_0 . Скорость второго снаряда относительно системы отсчета K' уже не является малой величиной, так как на скорость v относительного движения систем отсчета K' и K'' никаких ограничений не накладываемся. Выражение для проекции скорости u'_{2y} запишем на

основании релятивистского закона сложения скоростей, учитывая при этом, что проекция скорости снаряда на ось x'' равна нулю ($u''_{2x} = 0$):

$$u'_{2y} = \frac{u''_{2y} \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{vu''_{2x}}{c^2}} = u''_{2y} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Подставляем полученное для u'_{2x} выражение в уравнение (12.8):

$$m_0 u'_{1y} - m_v u''_{2y} \sqrt{1 - v^2/c^2} = 0.$$

Сокращая одинаковые по модулю скорости ($u'_{1y} = u''_{2y}$), получаем выражения для релятивистской массы

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.9)$$

и для релятивистского импульса

$$\vec{p} = m_v \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.10)$$

Таким образом, масса в релятивистской механике не является постоянной величиной. Она зависит от скорости движения тела относительно выбранной системы отсчета. В собственной системе отсчета, т. е. в системе, где тело покоится, релятивистская масса минимальна и равна массе покоя m_0 . При скоростях, которые гораздо меньше скорости света, что всегда выполняется в классической механике, релятивистская масса приближенно равна массе покоя.

Первый закон Ньютона, являющийся выражением принципа относительности, в релятивистской механике сохраняет свою классическую форму.

Выражение второго закона Ньютона в релятивистской механике также сохраняет свою классическую форму, но только импульс уже определяется формулой (12.10):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \vec{F}. \quad (12.11)$$

Это **релятивистское уравнение динамики** инвариантно относительно преобразований Лоренца. При этом для компонентов вектора силы \vec{F} надо использовать специальные преобразования силы. При

скоростях намного меньших скорости света оно переходит в классический второй закон Ньютона.

Третий закон Ньютона в релятивистской механике в общем случае не выполняется, так как он предполагает мгновенную скорость передачи взаимодействия между удаленными телами. Однако это не совместимо с релятивистским положением о том, что максимальная скорость передачи взаимодействия не может быть выше скорости света.

12.5. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ. ПОЛНАЯ ЭНЕРГИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ. ЭНЕРГИЯ ПОКОЯ

Приращение кинетической энергии dK материальной точки при элементарном перемещении $d\vec{r}$, совершаемом точкой под действием силы \vec{F} , равно работе силы: $dK = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Силу \vec{F} определим из релятивистского уравнения динамики (12.11):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m_v \vec{v})}{dt} = \frac{dm_v}{dt} \vec{v} + m_v \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (12.12)$$

где m_v – релятивистская масса, определяемая выражением (12.9); ее дифференциал dm_v равен следующему:

$$dm_v = \frac{m_0 v}{c^2 (1 - v^2/c^2)^{3/2}} dv. \quad (12.13)$$

В результате выражение (12.12) примет следующий вид:

$$\vec{F} = \frac{m_0 v}{c^2 (1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \vec{v} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (12.14)$$

Тогда для приращения кинетической энергии материальной точки получим следующее:

$$\begin{aligned} dK &= \frac{m_0 v}{c^2 (1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \vec{v} \cdot d\vec{r} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} + = \\ &= \frac{m_0 v dv}{c^2 (1 - v^2/c^2)^{3/2}} \vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \vec{v} \cdot d\vec{v}. \end{aligned}$$

Если учесть, что $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$, а $\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2}\right) = v dv$, то

$$dK = \frac{m_0 v dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{v^2}{c^2} + \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} =$$

$$= \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[\frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} + 1 \right] = \frac{m_0 v dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}.$$

Далее умножим и разделим полученное выражение на c^2 :

$$dK = c^2 \frac{m_0 v dv}{c^2 (1 - v^2/c^2)^{3/2}}. \quad (12.15)$$

Сравнивая выражение (12.15) с выражением (12.13), получаем следующую простую формулу для элементарного приращения кинетической энергии материальной точки:

$$dK = c^2 dm. \quad (12.16)$$

Решим это дифференциальное уравнение, учитывая, что в состоянии покоя кинетическая энергия материальной точки равна нулю, а ее масса равна массе покоя m_0 :

$$\int_0^K dK = \int_{m_0}^{m_v} c^2 dm.$$

В итоге получаем следующее релятивистское выражение для кинетической энергии материальной точки:

$$K = m_v c^2 - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2. \quad (12.17)$$

Первый член в формуле (12.17) называется **полной энергией** релятивистской частицы E , а второй член – ее **энергией покоя** E_0 , т. е.

$$E = m_v c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (12.18)$$

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (12.19)$$

Таким образом, кинетическая энергия релятивистской частицы равна разности ее полной энергии и энергии покоя: $K = E - E_0$.

Согласно принципу соответствия, полученное релятивистское выражение для кинетической энергии является верным, если при скоростях v на много меньше скорости света оно переходит в классическую формулу $K = mv^2 / 2$. Проверим это. Разложим выражение (12.17) в ряд Тейлора по степеням малого параметра $\beta = (v / c)^2$, ограничившись при этом линейным членом разложения:

$$K(\beta) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta}} - m_0 c^2 \approx K(0) + K'(0)\beta = 0 + \frac{m_0 c^2}{2} \beta = \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Итак, мы доказали, что выражение для релятивистской кинетической энергии удовлетворяет принципу соответствия.

Установим взаимосвязь между релятивистским импульсом и полной энергией материальной точки. Для этого возведем в квадрат правую и левую часть формулы (12.18):

$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1-v^2/c^2} \Rightarrow m_0^2 c^4 = E^2 - E^2 \frac{v^2}{c^2}.$$

Заменим в последнем члене полную энергию E в соответствии с выражением $E = m_v c^2$:

$$m_0^2 c^4 = E^2 - \frac{m_v^2 c^4 v^2}{c^2}.$$

Учитывая, что релятивистский импульс определяется выражением $p = m_v v$, получим следующее:

$$m_0^2 c^4 = E^2 - c^2 p^2. \quad (12.20)$$

Левая часть уравнения (12.20) является постоянной для данной материальной точки величиной, следовательно выражение $E^2 - c^2 p^2$, стоящее в правой части этого уравнения, является инвариантом, т. е. не зависит от выбора инерциальной системы отсчета.

Из уравнения (12.20) легко получить выражение, связывающее релятивистский импульс и полную энергию материальной точки:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}. \quad (12.21)$$

В природе существуют частицы, не имеющие массы покоя (фотон, нейтрино и антинейтрино). Из уравнения (12.21) следует выражение для импульса таких частиц:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{mc^2}{c} = mc. \quad (12.22)$$

Отсюда видно, что частицы не имеющие массы покоя, всегда движутся со скоростью света. Наличие импульса у безмассовой частицы фотона (переносчик электромагнитного взаимодействия) подтверждается такими явлениями как давление света, фотоэффект, эффект Комптона.

Подводя итог и возвращаясь к вопросу о границах применимости законов ньютоновской механики, мы можем теперь сказать, что эти законы применимы во всех инерциальных системах отсчета при скоростях движения, которые намного меньше скорости света. Расширение границ применимости законов механики на область высоких скоростей движения, близких к скорости света, приводит к пересмотру классической теории и рождению специальной теории относительности.

В 1915 г. А. Эйнштейн выдвинул еще одну теорию, называемую общей теорией относительности, которая обобщила основные результаты специальной теории относительности на случай неинерциальных систем отсчета и систем отсчета, которые находятся в поле сил тяготения. А в 20-х годах двадцатого столетия в результате развития физики атома возникла квантовая механика – механика микромира. Уравнения квантовой механики, подобно уравнениям теории относительности, также дают в пределе (для масс, больших по сравнению с массами атомов) уравнения классической механики. То есть классическая механика вошла и в квантовую механику в качестве ее предельного случая.

Таким образом, развитие науки не перечеркнуло классическую механику, а лишь показало ее ограниченную применимость. Классическая механика, основывающаяся на законах Ньютона, является механикой тел больших (по сравнению с массой атомов) масс, движущихся с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями.

Учебное издание

Мисевич Алексей Васильевич

ФИЗИКА

В 7-ми частях

**Часть 1
МЕХАНИКА**

Тексты лекций

Редактор *А. С. Аристова*
Компьютерная верстка *В. В. Терахович*
Корректор *А. С. Аристова*

Издатель:
УО «Белорусский государственный технологический университет».
Свидетельство государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/277 от 20.03.2014.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.