Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. В. Чаевский

ФИЗИКА

В 5-ти частях
Часть 1. Механика

Тексты лекций по дисциплине «Физика»
для студентов специальностей
1-48 01 01 «Химическая технология неорганических
веществ, материалов и изделий»,
1-48 01 04 «Технология электрохимических производств»

Минск 2015

УДК 53(042.4)(0.034.2)
ББК 22.3я7
Ч-14

Рассмотрены и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом Белорусского государственного технологического университета

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики твердого тела БГУ *В. Г. Шепелевич*;
доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета БГПУ им. Максима Танка *В. Р. Соболь*

Чаевский, В. В.
Ч-14 Физика. В 5 ч. Ч. 1. Механика : тексты лекций по дисциплине «Физика» для студентов специальностей 1-48 01 01 «Химическая технология неорганических веществ, материалов и изделий», 1-48 01 04 «Технология электрохимических производств» / В. В. Чаевский. − Минск : БГТУ, 2015. – 144 с.

В издании изложен материал лекций по разделу «Механика классическая и релятивистская» курса физики для студентов технических вузов химико-технологических специальностей очной формы обучения.
Тексты лекций предназначены для организации самостоятельной работы студентов и проведения лекционных, практических и лабораторных занятий.

УДК 53(042.4)(0.034.2)
ББК 22.3я7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Поскольку развитие современных наукоемких химических технологий во многом связывается с использованием физических методов синтеза и анализа, представленный электронный конспект лекций по разделу «Механика» позволит студентам химико-технологических специальностей достаточно глубоко изучить основополагающий раздел дисциплины «Физика» и тем самым усвоить весь курс физики, а также курсы по многим актуальным вопросам современной техники и технологии.

Литература по разделу «Механика», с которого начинается изучение дисциплины, весьма обширна. Для понимания этого раздела требуются глубокие знания, полученные ранее. Поэтому изучение раздела «Механика» в ограниченное время затруднительно. Целью электронных лекций, предназначенных для студентов химико-технологических специальностей очной формы обучения 1-48 01 01 «Химическая технология неорганических веществ, материалов и изделий», 1-48 01 04 «Технология электрохимических производств», было изложение в соответствии с типовой программой практически в полном объеме вопросов раздела классической нерелятивистской механики и краткое изложение основных понятий и законов раздела классической релятивистской механики.

Тексты лекций состоят из семи тем: первая – «Кинематика материальной точки и абсолютно твердого тела», вторая – «Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела. Сложное движение», третья – «Динамика вращательного движения твердого тела», четвертая – «Работа и энергия». Силовые взаимодействия и поля», пятая – «Колебательное движение», шестая – «Механические волны», седьмая – «Элементы релятивистской механики».

Автор благодарен коллективу кафедры физики университета за оказанное содействие в создании данного конспекта лекций. Особенную признательность автор выражает доктору физико-математических наук, профессору И. И. Наркевичу за постоянную помощь в учебно-методической работе.

ЛЕКЦИЯ № 1

ВВЕДЕНИЕ. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. Предмет физики, структура и цель, ее связь с другими дисциплинами.
2. Предмет механики и кинематики. Классификация механических движений материальной точки и твердого тела.
3. Кинематическое описание движения материальной точки.
4. Векторы скорости и ускорения материальной точки.
5. Кинематика поступательного и вращательного движений твердого тела.

1. Предмет физики, структура и цель, ее связь с другими дисциплинами

Из стремления понять и описать окружающий нас мир, который необычайно сложен и интересен, найти истину или приблизиться к тому, что мы на данном этапе называем истиной, возникла физика – наука о природе и наиболее общих формах движения материи (механической, тепловой, электромагнитной, внутриатомной и внутриядерной).

Условно материя делится на поле и вещество и существует в формах пространства и времени.

Вещество – все окружающие нас тела, которые мы можем наблюдать с помощью наших органов чувств.

Физические поля – объекты, посредством которых происходят различные взаимодействия. Поля мы можем наблюдать опосредованно через движения вещества и с помощью физических приборов.

Пространство – система тел (полей), относительно которых определяется положение других тел (полей).

Время – показания часов, т. е. тела, в котором совершается периодический процесс.

Что же мы знаем о веществе? Самое важное, к чему мы пришли, – это то, что все окружающие нас тела состоят из атомов. Атомы являются кирпичиками мироздания, они находятся в беспрерывном движении, притягиваются на больших расстояниях, но отталкиваются, когда мы стремимся приблизить их друг к другу. Размер атома приблизительно равен 10^{-8} см ≈ 1 Å (если яблоко увеличить до размеров Земли, то атомы этого яблока сами станут размером с обычное яблоко). Например, молекула воды H_2O состоит из двух атомов водорода и одного атома кислорода (рис. 1.1).

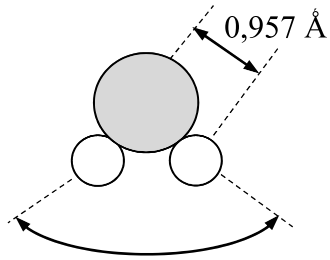


Рис. 1.1

Можно ли увидеть атом в настоящее время? Можно, с помощью современного туннельного микроскопа. Глядя в такой микроскоп, мы можем пересчитывать их поштучно, как яблоки.

Атом пуст. Если ядро атома увеличить до размеров яблока, то расстояние от ядра до других электронов будет порядка 1 км. Если бы электроны и ядра не имели зарядов, то атомы спокойно проходили бы друг через друга, нисколько не мешая соседу.

Какова связь физики с другими науками?

Все состоит из атомов, в том числе и мы с вами. Жизнь – это наиболее сложное явление во Вселенной. Человек, одно из наиболее сложно устроенных живых существ, состоит из $\approx 10^{16}$ клеток. Клетка представляет собой элементарную физиологическую ячейку, содержащую 10^{12}–10^{14} атомов. В любую клетку живого организма входит хотя бы одна длинная молекулярная нить ДНК (дезоксирибонуклеиновой кислоты). В молекуле ДНК 10^{8}–10^{10} атомов, точное расположение которых может изменяться от индивидуума к индивидууму. Можно сказать, что молекула ДНК является носителем генетической информации.

Таким образом, мы соприкоснулись с органической химией и биологией. Объяснение движения звезд и планет в астрономии стало началом физики.

Все изменения, происходящие с телами и полями с течением времени называются *физическим явлением*.

Физическое понятие – обобщенное представление о сущности физического явления.

Физическая величина – физическое понятие, соотнесенное с числовым значением.

Для установления количественных соотношений между физическими величинами их необходимо измерять, т. е. сравнивать их с соответствующими эталонами. Для этого вводится система единиц, которая постулирует основные единицы физических величин и на их базе определяет единицы остальных физических величин, которые называются производными единицами.

Международная Система единиц (СИ) (System International – SI).

Основные единицы:

Метр (м) – длина пути, проходимого светом в вакууме за $^1/_{299792458}$ с.

Килограмм (кг) – масса, равная массе международного прототипа килограмма (платиноиридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа).

Секунда (с) – время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

Ампер (А) – сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенных в вакууме на расстоянии 1 метр один от другого, создает между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Ньютона на каждый метр длины.

Кельвин (К) – $^1/_{273,16}$ часть термодинамической температуры тройной точки воды.

Моль (моль) – количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в 12 г изотопа углерода ^{12}C.

Кандела (кд) – сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Герц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет $^1/_{683}$ Вт/ср.

Дополнительные единицы системы СИ:

Радиан (рад) – угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

Стерадиан (ср) – телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

В своей основе физика – экспериментальная наука: ее законы базируются на фактах, установленных опытным путем. В результате обобщения экспериментальных фактов устанавливаются *физические законы* – устойчивые повторяющиеся объективные закономерности, существующие в природе, устанавливающие математическую связь между физическими величинами.

Цель опыта – измерение физических величин.

Физические законы объединяются в *физическую теорию*, которая с единой точки зрения объясняет круг физических явлений.

2. Предмет механики и кинематики. Классификация механических движений материальной точки и твердого тела

Механика – часть физики, изучающая закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механическое движение – это изменение взаимного расположения тел или их частей в пространстве с течением времени.

Виды механических движений: поступательное, вращательное, сложное.

Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обусловливают.

В физике существует принцип построения абстрактных моделей, когда для упрощения описания явления сохраняется его наиболее явная и характерная черта. В механике одними из важнейших абстракций являются понятия материальной точки и абсолютно твердого тела.

Материальной точкой называется тело, размерами которого можно пренебречь, считая, что вся масса тела сосредоточена в одной точке.

Абсолютно твердое тело – тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается неизменным.

Поступательным движением абсолютно твердого тела называется такое его движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной самой себе. Поэтому все его точки движутся одинаково и при изучении поступательного движения достаточно исследовать движение какой-то одной точки (обычно это центр тяжести или центр масс тела).

Вращательным движением абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки тела, расположенные на одной прямой, называемой осью вращения, остаются неподвижными, а остальные точки описывают концентрические окружности с центрами на оси вращения. Окружности расположены в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

3. Кинематическое описание движения материальной точки

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Поэтому для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находилась и в какие моменты времени она проходила то или иное положение – необходимо выбрать *систему отсчета*: совокупность тела отсчета, системы координат, синхронизированных и равномерно идущих часов.

Тело отсчета – произвольно выбранное реальное или воображаемое тело, относительно которого определяются положения остальных тел.

Наиболее употребительная *система координат* – декартовая (рис. 1.2). На теле отсчета выбирают точку *O* (начало отсчета), из которой проводят три взаимно перпендикулярные единичные по модулю вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, составляющие правую тройку векторов, образующих базис системы координат с осями *X*, *Y*, *Z*.

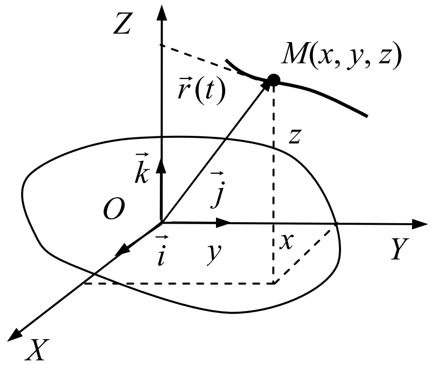


Рис. 1.2

Положение произвольной материальной[*] точки *M* характеризуется *радиус-вектором* $\vec{r}\,(t)$ – вектором, соединяющим начало координат *O* с точкой *M*.

Кривая, которую описывает конец вектора $\vec{r}\,(t)$ в пространстве, называется траекторией движения.

В зависимости от формы траектории движение точки может быть прямолинейным или криволинейным.

В общем виде радиус-вектор

$$\vec{r}\,(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}. \tag{1.1}$$

Движение материальной точки полностью определено, если известно векторное уравнение движения точки (1.1) – *векторный способ*:

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t). \tag{1.2}$$

Три кинематических уравнения движения точки – *координатный способ*:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t). \tag{1.3}$$

Если точка *M* движется по некоторой заданной траектории, то для описания движения выбирают на траектории начало отсчета (точку *O** на рис. 1.3), направление отсчета длины дуги *O***M*, которую обозначают буквой «*s*» и называют дуговой координатой.

---

[*] Далее слово *материальная* будем иногда опускать для краткости изложения.

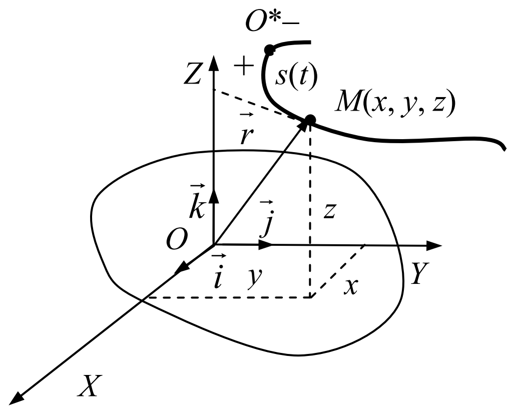


Рис. 1.3

Закон движения – зависимость

$$s = s(t). \tag{1.4}$$

Уравнение траектории

$$y = y(x);\ z = z(x). \tag{1.5}$$

Таким образом, естественный (или траекторный) способ задания движения материальной точки имеет вид

$$y = y(x);\ z = z(x);\ s = s(t). \tag{1.6}$$

Все три способа описания движения материальной точки совершенно равноправны, и они связаны соотношением (1.1) и (1.3):

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{1.7}$$

Отсюда следует

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}. \tag{1.8}$$

Связь между дуговой s и координатами x, y, z получается после интегрирования уравнения (1.8):

$$s = \pm\int_{x_0}^{x}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{1.9}$$

4. Векторы скорости и ускорения материальной точки

Основными величинами, характеризующими движение материальной точки, являются векторы перемещения, скорости и ускорения.

Вектор перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ – вектор, проведенный из начального положения движущейся точки в ее положение в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени) (рис. 1.4).

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j} + \Delta z \cdot \vec{k}. \qquad (1.10)$$

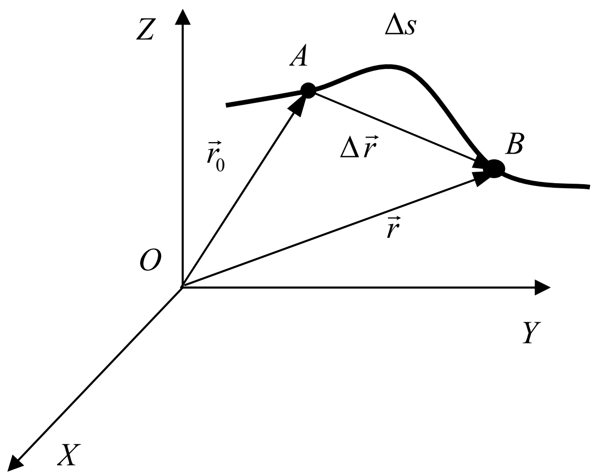


Рис. 1.4

Вектором средней скорости за интервал времени Δt называется отношение приращения $\Delta\vec{r}$ радиус-вектора точки к промежутку времени Δt:

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.11)$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $\Delta\vec{r}$.

Очевидно, что если мы будем уменьшать величину интервала Δt_{12} (приближая t_2 к t_1), то соответственно будет уменьшаться и длина вектора $\Delta\vec{r}_{12}$, т. е. величина перемещения (рис. 1.5). Предел отношения перемещения $\Delta\vec{r}_{12}$ к интервалу Δt_{12}, когда последний стремится к нулю, называют производной вектора $\vec{r}(t)$ по времени t:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t_{12}\to 0}\frac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t_{12}}. \qquad (1.12)$$

Этот вектор направлен по касательной к траектории материальной точки в точке M_1 (рис. 1.5).

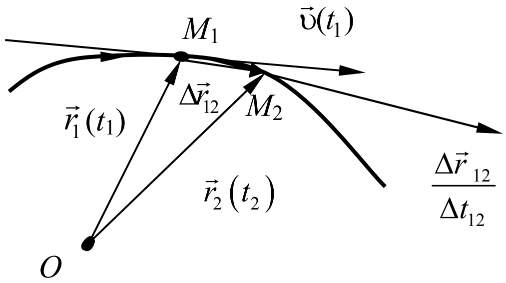


Рис. 1.5

Таким образом, по определению *скорость материальной точки*

$$\vec{\upsilon} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.13}$$

Она является вектором мгновенной скорости, характеризующим быстроту и направление движения материальной точки в каждый момент времени t.

При естественном способе задания движения используется проекция скорости на касательную ($\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной):

$$\upsilon_\tau = |\upsilon| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \tag{1.14}$$

Из формулы (1.14) следует

$$ds = \upsilon_\tau dt, \tag{1.15}$$

где s – дуговая координата движения точки.

Скорость изменения дуговой координаты $\frac{ds}{dt}$ может быть положительной, отрицательной и равной нулю.

Найдем путь при криволинейном движении.

Разобьем временной интервал t_2–t_1 на множество одинаковых интервалов очень малой продолжительности Δt, в каждом из которых движение прямолинейное (рис. 1.6):

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} |\Delta\vec{r}_i|; \; S \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{|\Delta\vec{r}_i|}{\Delta t} \Delta t. \tag{1.16}$$

Тогда точное равенство получается в пределе $\Delta t \to 0$:

$$S = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{|\Delta\vec{r}_i|}{\Delta t} \Delta t. \tag{1.17}$$

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \vec{\upsilon}_i \right| dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left| \vec{\upsilon}(t) \right| dt . \qquad (1.18)$$

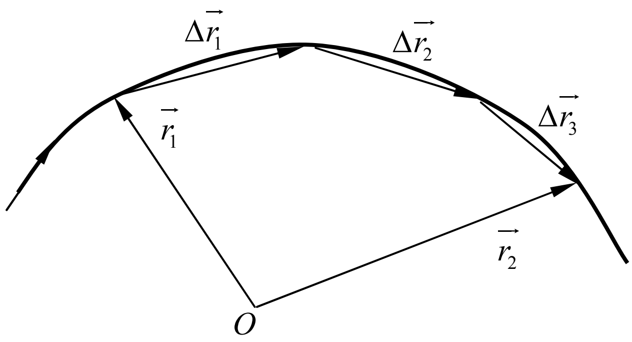


Рис. 1.6

Длиной пути S точки называется сумма элементарных длин всех участков траектории, пройденных этой точкой за рассматриваемый промежуток времени Δt. Длина пути – скалярная неубывающая функция времени.

Ускорение – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости по модулю и направлению.

Среднее ускорение в интервале времени Δt – векторная величина, равная отношению изменения вектора скорости $\Delta\vec{\upsilon}$ к интервалу времени Δt:

$$\left\langle \vec{a} \right\rangle = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} . \qquad (1.19)$$

Мгновенное ускорение материальной точки – векторная величина, равная первой производной по времени от скорости рассматриваемой точки (второй производной по времени от радиуса-вектора этой же точки):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dot{\vec{\upsilon}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} . \qquad (1.20)$$

В общем случае плоского криволинейного движения вектор ускорения удобно представить в виде суммы двух проекций (рис. 1.7):

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau . \qquad (1.21)$$

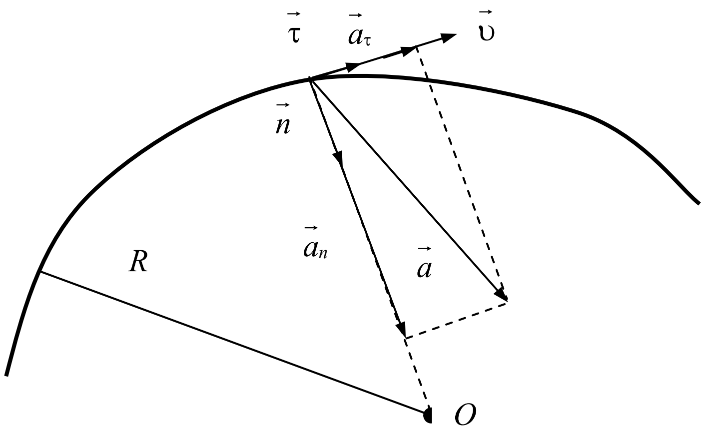


Рис. 1.7

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ характеризует быстроту изменения скорости по модулю (рис. 1.7). Его величина

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}, \qquad (1.22)$$

где $\vec{\tau}$ – единичный (по модулю) вектор касательной.

Нормальное (центростремительное) ускорение $\vec{a}_n$ направлено по нормали ($\vec{n}$ – единичный (по модулю) вектор нормали) к траектории к центру ее кривизны *O* (рис. 1.7) и характеризует быстроту изменения направления вектора скорости точки. Величина нормального ускорения $\vec{a}_n$ связана со скоростью υ движения и величиной кривизны радиуса *R* (рис. 1.8).

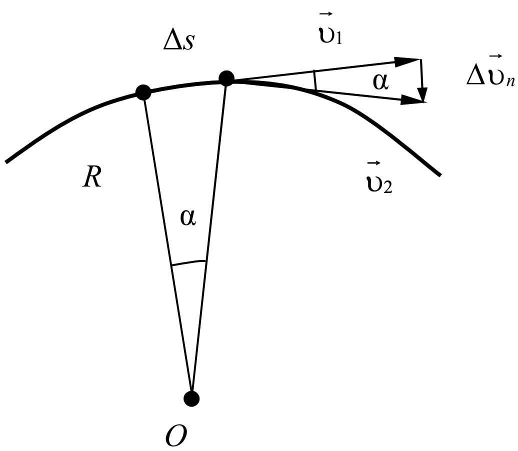


Рис. 1.8

Пусть $|\upsilon_1| = |\upsilon_2| = \upsilon$. Тогда для $\alpha \to 0$: $\Delta\upsilon_n = \upsilon \sin\alpha \approx \upsilon\alpha$, $\Delta s = \upsilon \cdot \Delta t \approx R\alpha \Rightarrow \alpha \approx (\upsilon \cdot \Delta t)/R$. В результате

$$\Delta\upsilon_n \approx \frac{\upsilon^2}{R}\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta\upsilon_n}{\Delta t} = \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow a_n = \frac{d\upsilon_n}{dt} = \frac{\upsilon^2}{R} \tag{1.23}$$

или

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}. \tag{1.24}$$

Величина полного ускорения (рис. 1.7):

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \tag{1.25}$$

или

$$a = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2}. \tag{1.26}$$

Виды движения точки классифицируются по форме траектории и по характеристикам движения:

1) $\vec{a}_\tau = 0$; $\vec{a}_n = 0$ – прямолинейное равномерное движение: $\vec{a} = 0$;

2) $\vec{a}_\tau = \vec{a} = \text{const}$; $\vec{a}_n = 0$ – прямолинейное равнопеременное (равноускоренное) движение. Если $t_0 = 0$, то

$$a = |a_\tau| = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t};\ \upsilon = \upsilon_0 \pm at;\ s = \int_0^t (\upsilon_0 \pm at)dt = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}; \tag{1.27}$$

3) $a_\tau = 0$; $a_n = \text{const} = \dfrac{\upsilon^2}{R}$ – равномерное движение по окружности;

4) $\vec{a}_\tau \neq 0$; $\vec{a}_n \neq 0$ – криволинейное переменное движение.

Соотношения для формул (1.27) перепишем в векторном виде

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t; \tag{1.28}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \tag{1.29}$$

где $\vec{\upsilon}(t)$ – скорость точки в момент времени t; $\vec{\upsilon}_0$ – скорость точки в момент времени $t = 0$ (начальная скорость); $\vec{r}(t)$ – положение точки в момент времени t; $\vec{r}_0$ – положение точки в момент времени $t = 0$ (начальное положение).

Выражения (1.28–1.29) называются *кинематическими уравнениями* равнопеременного прямолинейного поступательного движения $(a(t) = \text{const})$.

5. Кинематика поступательного и вращательного движений твердого тела

При поступательном движении абсолютно твердого тела все точки тела движутся одинаково, и его движение задается и изучается так же, как движение одной точки.

При вращательном движении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси все точки тела описывают окружности с центрами, лежащими на одной прямой, называемой *осью вращения*. Ось вращения перпендикулярна плоскостям, в которых лежат эти окружности.

Рассмотрим *кинематические характеристики вращательного движения* твердого тела.

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси Z (рис. 1.9). Некоторая точка M тела движется по окружности радиуса R. Ее положение через промежуток времени Δt зададим углом $\Delta\varphi$.

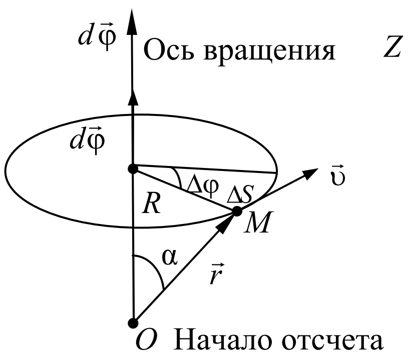


Рис. 1.9

Если время вращения бесконечно мало, то угол поворота представляет собой элементарный угол $d\varphi$, являющийся векторной величиной, так как его направление определяется правилом правого винта: если головку винта вращать в направлении вращении тела (вместе с точкой M (рис. 1.9)), то направление поступательного движения винта совпадает с направлением вектора $d\vec{\varphi}$.

Так как направление элементарного угла поворота $d\vec{\varphi}$ связывается с направлением вращения тела, то $d\vec{\varphi}$ является не истинным вектором, а псевдовектором.

Основные кинематические характеристики – *угловая скорость* ω и *угловое ускорение* ε тела.

Угловой скоростью называется вектор ω, численно равный первой производной от угла поворота тела по времени и направленный вдоль оси вращения так (см. правило правого винта), что из его конца вращение видно происходящим против часовой стрелки (рис. 1.9):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1.30}$$

Единица измерения угловой скорости [1 ω] = [1 рад/с].

Таким образом, вектор $\vec{\omega}$ определяет положение оси вращения, направление и быстроту вращения тела. Если ω = const, то вращение называется *равномерным*.

Угловая скорость может быть связана с линейной скоростью υ произвольной точки M тела (рис. 1.9). Пусть за время Δt точка проходит по дуге окружности длину пути ΔS. Тогда линейная скорость υ точки имеет вид

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega. \tag{1.31}$$

Формула (1.31) связывает модули линейной и угловой скоростей.

Найдем выражение, связывающее векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\omega}$.

В произвольном месте на оси Z поместим начало отсчета O (рис. 1.10). Изобразим радиус-вектор $\vec{r}$ точки M. В результате вращения тела точка M движется по окружности радиуса R со скоростью υ

$$\upsilon = \omega R = \omega r \sin\left(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}\right) = \omega r \sin\alpha. \tag{1.32}$$

Вектор скорости $\vec{\upsilon}$ направлен за рисунок («от нас»), т. е. перпендикулярен плоскости рисунка и, следовательно, вектор $\vec{\upsilon}$ перпендикулярен векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$. Это утверждение и формула (1.32) как раз и позволяют записать векторную формулу связи между $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\omega}$, т. е.

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{1.33}$$

Согласно выражению (1.33) направление вектора $\vec{\upsilon}$ можно определить по правилу правой руки: большой палец правой руки направлением по первому сомножителю формулы (1.33) (т. е. вдоль $\vec{\omega}$), указательный – по второму сомножителю (т. е. вдоль $\vec{r}$), тогда остальные три пальца (перпендикулярно двум первым) укажут направление вектора $\vec{\upsilon}$ (т. е. за чертеж, рис. 1.11).

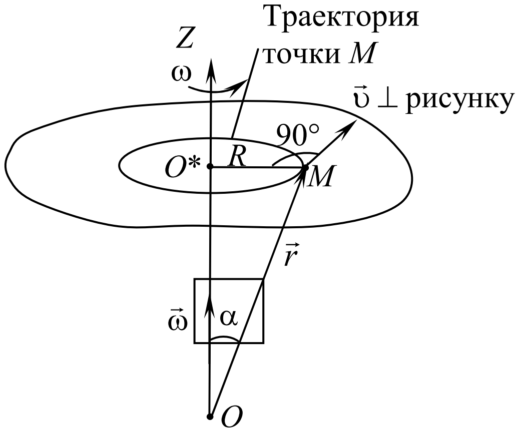


Рис. 1.10

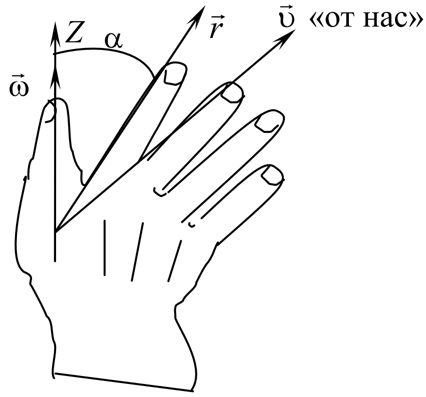


Рис. 1.11

Для характеристики неравномерного вращения тела вводится понятие *углового ускорения*. Угловым ускорением называется векторная величина $\vec{\varepsilon}$, равная первой производной по времени от угловой скорости:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.34}$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора угловой скорости (рис. 1.12). При *ускоренном вращении* вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$ ($d\omega / dt > 0$), и в противоположную сторону – при *замедленном вращении* ($d\omega / dt < 0$).

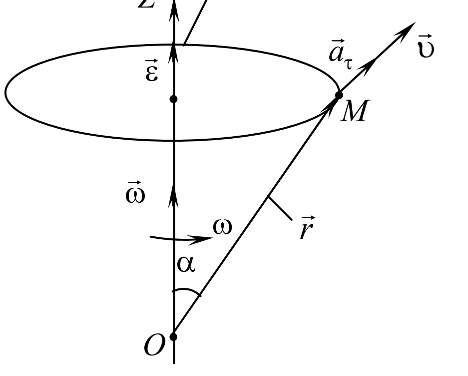


Рис. 1.12

Выразим тангенциальную a_τ и нормальную a_n составляющие ускорения точки *M* вращающегося тела вокруг неподвижной оси через угловую скорость и угловое ускорение:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{Rd\omega}{dt} = R\varepsilon; \tag{1.35}$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R. \tag{1.36}$$

Из рис. 1.12 и соотношения (1.35) следует, что вектор тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ равен векторному произведению вектора углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ на радиус-вектор $\vec{r}$, соединяющий произвольную точку на оси вращения с точкой *M*:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \tag{1.37}$$

Рассмотрим формулы для частных случаев вращения тела вокруг неподвижной оси. Они могут быть получены аналогично соответствующим формулам для движения материальной точки.

В случае *равномерного вращения*: $\varepsilon = 0$, $\omega = \text{const}$, $\varphi = \omega t$.

Введем понятие *периода вращения T* – время, в течение которого тело совершает один оборот, т. е. поворачивается на угол $\varphi = 2\pi$.

Тогда

$$2\pi = \omega T \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ или } T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.38}$$

Число оборотов в секунду:

$$\nu = \frac{1}{T}. \tag{1.39}$$

Рассмотрим случай *равнопеременного вращения* $(\varepsilon = \text{const})$.

Из формулы (1.34) следует $d\omega = \varepsilon dt$, тогда

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt;\ \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t. \tag{1.40}$$

Из формулы (1.30) следует

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_0 \pm \varepsilon t) dt;\ \varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{1.41}$$

Исключив из соотношений (1.40) и (1.41) t, получим

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi. \qquad (1.42)$$

В случае *переменного движения*:

$$\varepsilon = \varepsilon(t);\ \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon(t);\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega(t) \lim_{x\to\infty};\ \ \omega = \omega_0 \pm \int_0^t \varepsilon(t)dt;\ \varphi = \int_0^t \omega(t)dt. \qquad (1.43)$$

Поступательное и вращательное движения твердого тела являются лишь простейшими типами его движения. В общем случае движение твердого тела может быть весьма сложным. В теоретической механике доказывается, что любое *сложное движение твердого тела* можно представить как совокупность поступательного и вращательного движений.

ЛЕКЦИЯ № 2

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. Предмет динамики. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета.
2. Сила. Масса. Импульс тела (материальной точки).
3. Второй и третий законы Ньютона.
4. Механические системы. Закон сохранения импульса. Центр масс. Закон движения центра масс.
5. Центр тяжести тела.

1. Предмет динамики. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета

Динамика – раздел механики, в котором изучается движение тел в зависимости от причин (сил), вызывающих это движение.

Начиная с Аристотеля, на протяжении почти двух тысячелетий все были убеждены, что для поддержания движения тел с постоянной скоростью необходимо воздействие извне.

Ньютону, вслед за Галилеем, удалось развеять это одно из глубочайших заблуждений человечества. В действительности же тело, на которое не действуют другие тела, движется всегда с постоянной скоростью. Говорят, что тело движется по инерции. Только воздействие со стороны способно изменить его скорость. Прилагать усилия, чтобы поддерживать скорость постоянной, нужно только потому, что в обычных условиях всегда существует сопротивление движению тел со стороны поверхности других тел и окружающей среды (воды или воздуха).

На могиле Ньютона в английском национальном пантеоне в Кенсингтоне (Вестминстерское аббатство) высечено:

«*Здесь покоится*
Сэр Исаак Ньютон,
Который почти божественной силой своего ума
Впервые объяснил
С помощью своего математического метода
Движения и формы планет,
Пути комет, приливы и отливы океана.

Он первый исследовал разнообразие световых лучей
И проистекающие отсюда особенности цветов,
Каких до того времени никто даже не подозревал.
Прилежный, проницательный и верный истолкователь
Природы, древностей и священного писания,
Он прославил в своем учении Всемогущего Творца.
Требуемую Евангелием простоту он доказал своей жизнью.
Пусть смертные радуются, что в их среде
Жило такое украшение человеческого рода.
Родился 25 декабря 1642 г.
Умер 20 марта 1727 года».

В основе динамики точки лежат три закона Ньютона.

В качестве первого закона Ньютон принял закон инерции, высказанный в частной форме Галилеем.

Первый закон Ньютона (закон инерции): существуют такие системы отсчета, относительно которых движущиеся тела (материальные точки) сохраняют состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока силовое воздействие со стороны других тел не изменит их состояние.

Такие системы отсчета называются *инерциальными*. В такой трактовке первый закон Ньютона определяет и постулирует существование инерциальных систем отсчета.

Инертность тела – это свойство тела (или материальной точки) сохранять неизменным состояние своего движения или покоя при отсутствии внешних воздействий.

Опытным путем установлено, что система отсчета, начало координат которой находится в центре Солнца, а оси направлены на соответствующим образом выбранные звезды, является инерциальной. Эта система называется *гелиоцентрической системой отсчета*. Любая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно гелиоцентрической системы, будет инерциальной.

2. Сила. Масса. Импульс тела (материальной точки)

Чтобы описывать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводят понятие силы. Для описания инерционных свойств тел вводится понятие массы.

Масса (m) тела – физическая величина, являющаяся мерой его инерционных и гравитационных свойств.

Основные свойства массы:

1) масса – величина инвариантная. *Инвариантом* называется величина, имеющая одинаковое значение в любой системе отсчета в классической механике;

2) масса – величина аддитивная (например, $m = m_1 + m_2$);

3) закон сохранения массы: полная масса m замкнутой системы является постоянной величиной (m = const).

Основная идея законов движения Ньютона такова: действие тел друг на друга вызывает изменение состояния их движения.

Главное в законах Ньютона – это их точная количественная форма. Мы можем не только говорить о взаимодействии тел, но можем это взаимодействие измерять. Количественная мера взаимодействия тел называется в механике силой. Сила обозначает результат взаимодействия тел и является мерой этого взаимодействия.

Сила $\vec{F}$ – векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение и (или) изменяет свою форму и размеры.

Механическое взаимодействие может осуществляться как между непосредственно контактирующими телами (например, при ударе, трении, давлении друг на друга и т. п.), так и между удаленными телами.

Взаимодействие между удаленными телами осуществляется посредством связанных с ними гравитационных и электромагнитных полей.

Свойства силы:

1) материальное происхождение (например, закон тяготения между телами);

2) инвариантность по отношению к переходу в другую систему отсчета;

3) силы характеризуются модулем, направлением, точкой приложения.

В механике существует *закон – принцип независимости действия сил*: результат действия одного тела на другое не зависит от того, взаимодействует ли данное тело с какими-либо другими телами.

Импульс $\vec{p}$ *точки* (*количество движения*) − физическая величина, равная произведению массы точки на ее скорость:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}. \qquad (2.1)$$

3. Второй и третий законы Ньютона

Если тело, принятое за материальную точку, неподвижно, то действующие на него силы уравновешивают друг друга. Если же силы не уравновешиваются, то только в этом случае скорость этого тела меняется. Под действием сил тело (материальная точка) получает ускорение, величина которого прямо пропорциональна векторной сумме сил, действующих на тело. Это утверждение и составляет суть второго закона Ньютона.

Второй закон Ньютона в наиболее общей форме: скорость изменения импульса $\vec{p}$ материальной точки равна равнодействующей силе $\vec{F}$, действующей на эту точку, т. е.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{или} \quad \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F}; \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i. \tag{2.2}$$

Если масса точки с течением времени не изменяется (m = const), то

$$\frac{md\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} \quad \text{или} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{2.3}$$

Понятие силы присутствует и в первом законе Ньютона, так как при $|\vec{a}| = 0$, равнодействующая всех сил равна нулю, т. е. $|\vec{F}| = 0$.

Третий закон Ньютона – всякое действие материальных точек (тел) друг на друга имеет характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, равны по величине, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, которая соединяет эти точки (рис. 2.1):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{2.4}$$

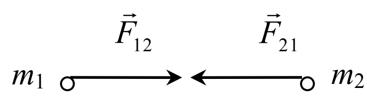


Рис. 2.1

4. Механические системы. Закон сохранения импульса. Центр масс. Закон движения центра масс

Механическая система – совокупность материальных точек (тел), взаимодействующих и обменивающихся энергией, как между собой, так и с другими телами (внешней средой).

Силы, которые действуют на материальные точки и тела системы, делятся на внутренние и внешние. *Внутренние силы* $\vec{F}^i$ (будем обозначать с верхним индексом i) – это силы взаимодействия между телами или точками рассматриваемой системы. *Внешними* называются силы $\vec{F}^e$, которые действуют на точки или тела системы со стороны тел, которые не входят в данную систему. Внутренние и внешние силы представлены на рис. 2.2. Обозначим внутреннюю силу, действующую на i-е тело со стороны k-го, через $\vec{F}_{ik}$ (например, на тело *2* со стороны тела *3* – через $\vec{F}_{23}$ (рис. 2.2)).

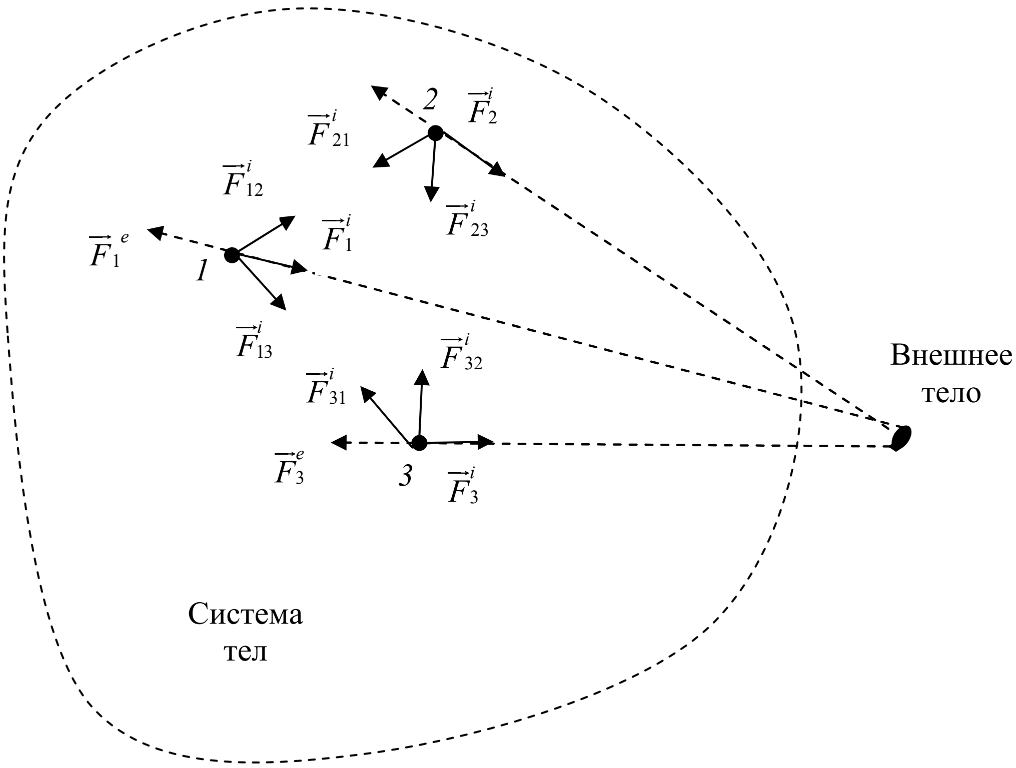


Рис. 2.2

Механическая система называется *замкнутой*, если внешних сил нет.

Из второго и третьего законов Ньютона вытекает закон сохранения импульса для замкнутой механической системы, являющийся одним из основных законов природы.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из N тел с массами $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Обозначим скорости этих тел соответственно через $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, ..., \vec{\upsilon}_N$, а внутренние силы – через $\vec{F}_{ik}$.

На основании второго закона Ньютона можно написать следующую систему уравнений движения всех тел системы:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{\upsilon}_1) = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + ... + \vec{F}_{1N};$$

$$\frac{d}{dt}(m_2\vec{\upsilon}_2) = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + ... + \vec{F}_{2N};$$

....

$$\frac{d}{dt}(m_N\vec{\upsilon}_N) = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + ... + \vec{F}_{N(N-1)}. \qquad (2.5)$$

Складываем почленно эти уравнения и группируем силы $\vec{F}_{ik}$ и $\vec{F}_{ki}$:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right)}{dt} = \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}\right) + \left(\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}\right) + \ldots + \left(\vec{F}_{(N-1)N} + \vec{F}_{N(N-1)}\right).$$

Согласно третьему закону Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, поэтому все скобки в правой части этого уравнения равны нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right)}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i = 0.$$

Векторная сумма $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i = \vec{P}$ представляет собой *вектор импульса всей системы*. Следовательно

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i = 0;$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i = \text{const}; \quad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad (2.6)$$

где i – номер точки (тела) механической системы.

Таким образом, согласно полученному соотношению (2.6), вектор импульса замкнутой системы тел с течением времени не изменяется – *закон сохранения импульса для замкнутой механической системы*.

Отметим, что импульс остается постоянным и для незамкнутой системы при условии, что внешние силы в сумме дают нуль.

С законом сохранения импульса связан *закон сохранения массы*.

Чтобы разъяснить содержание этого закона, рассмотрим для замкнутой системы частиц *центр масс* (или *центр инерции*) системы –

геометрическую точку C, положение которой характеризует распределение масс в механической системе (или теле) и задается радиус-вектором $\vec{R}_c$, определяемым следующим образом:

$$\vec{R}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{M}, \tag{2.7}$$

где m_i – масса i-й частицы; $\vec{r}_i$ – радиус-вектор, определяющий положение этой частицы; M – масса системы.

Декартовы координаты центра масс равны проекциям $\vec{R}_c$ на координатные оси:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M}. \tag{2.8}$$

Скорость центра масс получается путем дифференцирования радиус-вектора $\vec{R}_c$ (2.7) по времени:

$$\vec{V}_C = \frac{d\vec{R}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i}{M}, \tag{2.9}$$

где $\vec{\upsilon}_i$ – скорость i-й частицы.

Числитель этого выражения представляет собой вектор импульса всей системы, который мы обозначали через $\vec{P}$. Поэтому

$$\vec{V}_C = \frac{\vec{P}}{M} \Rightarrow \quad \vec{P} = M\vec{V}_C. \tag{2.10}$$

Так как импульс замкнутой системы сохраняется, то из выражения (2.10) следует, что скорость центра масс системы не изменяется со временем:

$$\vec{V}_C = \mathrm{const}. \tag{2.11}$$

Следовательно, центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным, в то время как отдельные частицы, входящие в состав замкнутой системы, могут двигаться со скоростями, изменяющимися с течением времени (см. формулу (2.9)).

Таким образом, мы можем рассматривать импульс системы как импульс одной материальной точки, находящейся в центре масс системы и имеющей массу, равную сумме масс всех частиц в системе центра масс (см. формулу (2.10)). Скорость центра масс можно рассматривать как скорость движения системы частиц как целого, сумма же масс отдельных частиц выступает как масса всей системы. В результате мы видим, что *масса сложного тела равна сумме масс его частей – физический закон*, являющийся следствием закона сохранения импульса.

Так как скорость центра масс замкнутой системы частиц не изменяется со временем, то связав с ее центром масс систему отсчета, мы получим инерциальную систему отсчета, называемую *системой центра масс (центра инерции).* Импульс системы материальных точек в такой системе отсчета равен нулю.

Если на систему действуют внешние силы, то в этом случае в правые части системы уравнений (2.5) войдут также и внешние силы. Обозначив через $\vec{F}_i^e$ равнодействующую всех внешних сил, приложенных к i-му телу системы, с учетом выражения для вектора импульса всей системы (2.10) получим *уравнение движения центра масс системы*:

$$M\frac{d\vec{V}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^e \qquad \text{или} \qquad M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^e, \qquad (2.12)$$

где $\vec{a}_C = \dfrac{d\vec{V}_C}{dt}$ – *ускорение центра масс.*

Следствием уравнения (2.12) является *закон (теорема) движения центра масс*: центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к системе.

Из уравнения (2.12) также следует, что если система замкнута, то $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^e = 0$ и $\vec{V}_C = \text{const}$.

5. Центр тяжести тела

Центр тяжести – геометрическая точка, неизменно связанная с твердым телом, через которую проходит равнодействующая всех сил тяжести, действующих на частицы тела при любом его положении в пространстве.

Разбивая тело на части (точки) с *весами* p_k, для которых координаты x_k, y_k, z_k их центров тяжести известны, можно найти координаты центра тяжести всего тела по формулам:

$$x = \frac{\sum_{k=1}^{N} p_k x_k}{\sum_{k=1}^{N} p_k}; \; y = \frac{\sum_{k=1}^{N} p_k y_k}{\sum_{k=1}^{N} p_k}; \; z = \frac{\sum_{k=1}^{N} p_k z_k}{\sum_{k=1}^{N} p_k}. \qquad (2.13)$$

Тогда радиус-вектор центра тяжести тела

$$\vec{r}_{\text{цт}} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{N} p_k \vec{r}_k \,, \qquad (2.14)$$

где p_k – численное значение веса k-й материальной точки; $P = \sum_{k=1}^{N} p_k$.

Поскольку $p_k = m_k g$, где g – численное значение ускорения свободного падения, то $P = Mg$ и положение центра тяжести твердого тела в однородном поле тяжести совпадает с положением его центра масс:

$$\vec{r}_{\text{цт}} = \frac{1}{Mg} \sum_{k=1}^{N} m_k g \vec{r}_k = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k \equiv \vec{R}_C \,. \qquad (2.15)$$

Центр тяжести однородного тела, имеющего центр симметрии (прямоугольная или круглая пластины, шар, цилиндр и др.), находится в этом центре.

ЛЕКЦИЯ № 3

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

6. Относительность движения. Принцип относительности в классической механике.
7. Преобразования Галилея. Закон сложения скоростей в классической механике.
8. Неинерциальные системы отсчета. Переносная сила инерции. Уравнение движения материальной точки в движущейся поступательно неинерциальной системе отсчета.
9. Центробежная сила, сила Кориолиса. Уравнение движения в неинерциальной системе отсчета с учетом ее вращения.

6. Относительность движения. Принцип относительности в классической механике

Второй закон Ньютона выполняется только в инерциальных системах отсчета.

Если существует хотя бы одна инерциальная система, то таких систем может быть бесконечное множество, так как любая система, движущаяся поступательно с постоянной скоростью относительно инерциальной, тоже является инерциальной.

Существует фундаментальный принцип физического равноправия всех инерциальных систем отсчета, который называется *принципом относительности Галилея*: основные законы механики одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета.

Отсюда следует, что никакими механическими опытами, проводящимися в какой-либо инерциальной системе отсчета, нельзя определить покоится данная система или движется равномерно и прямолинейно относительно другой инерциальной системы отсчета.

7. Преобразования Галилея. Закон сложения скоростей в классической механике

Рассмотрим две системы отсчета: инерциальную систему K (с осями x, y, z), которую будем считать неподвижной, и систему K' (с осями x', y', z'), движущуюся относительно K поступательно, прямолинейно и равномерно с постоянной скоростью $\vec{u}$ = const вдоль прямой OO' (рис. 3.1).

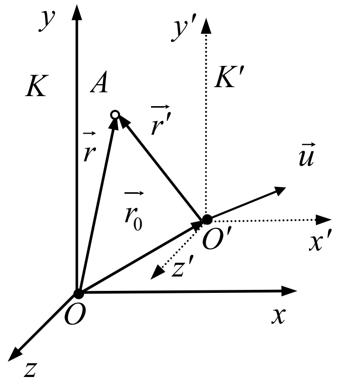


Рис. 3.1

Если в начальный момент времени начала координат O и O' этих систем совпали, то произвольный момент времени t: $\vec{r}_0 = \vec{u}t$.

Положение произвольной точки A в неподвижной и подвижной системах отсчета определяется радиус-векторами $\vec{r}$ и $\vec{r}'$, причем

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' = \vec{u}\,t + \vec{r}'. \tag{3.1}$$

В проекциях на оси координат это векторное равенство записывается в следующем виде:

$$x = x' + u_x t;\ \ y = y' + u_y t;\ \ z = z' + u_z t\,. \tag{3.2}$$

В классической механике предполагается, что ход времени не зависит от относительного движения систем отсчета: $t = t'$.

Совокупность четырех уравнений:

$$x = x' + u_x t;\ \ y = y' + u_y t;\ \ z = z' + u_z t\,;\ t = t' \tag{3.3}$$

называется *преобразованиями Галилея*.

Продифференцировав по времени уравнение (3.3), получим *закон сложения скоростей в классической механике*:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u}\,. \tag{3.4}$$

Ускорение какого-либо тела во всех системах отсчета, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, одинаково:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\left(\vec{\upsilon}' + \vec{u}\right)}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}'}{dt} = \vec{a}'. \tag{3.5}$$

Поэтому, если одна из этих систем инерциальна (это значит, что при отсутствии сил $\vec{a} = 0$), то и остальные системы будут инерциальными ($\vec{a}'$ также равно нулю).

С учетом соотношения (3.5) в классической механике силы (и массы) являются инвариантными величинами. Поэтому при преобразованиях Галилея уравнение движения материальной точки массой m (2-й закон Ньютона) не изменяется и является *математическим выражением принципа относительности Галилея*.

8. Неинерциальные системы отсчета. Переносная сила инерции. Уравнение движения материальной точки в движущейся поступательно неинерциальной системе отсчета

Рассмотрим движение материальной точки A относительно двух систем отсчета: инерциальной системы K (с осями x, y, z), которую будем считать неподвижной, и системы K' (с осями x', y', z'), движущейся поступательно относительно инерциальной с постоянным ускорением $\vec{a}_0$. Это означает, что штрихованные оси координат сохраняют свое направление в системе отсчета K' (рис. 3.2).

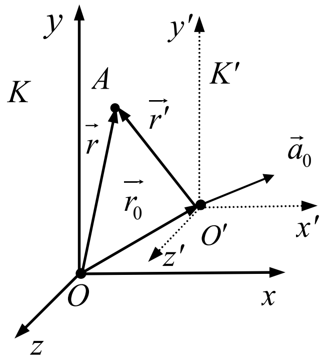


Рис. 3.2

Запишем связь линейных кинематических параметров точки A в обеих системах отсчета. По-прежнему будем полагать, что $t = t'$.

Движение точки (или тела) по отношению к подвижной системе отсчета, которая перемещается определенным образом относительно неподвижной системы отсчета, будем называть *относительным движением*. Движение всех точек подвижной системы относительно неподвижной называется *переносным движением*. Движение точки (или тела) относительно неподвижной системы отсчета будем называть *абсолютным* (или *сложным*) *движением*.

Из рис. 3.2 видно, что положение точки A относительно инерциальной системы отсчета (определяется радиус-вектором $\vec{r}$) связано с ее положением относительно подвижной системы отсчета (определяется радиус-вектором $\vec{r}'$) соотношением

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'.$$

Продифференцируем это выражение по времени. Получим

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}'. \tag{3.6}$$

В этом случае приняты следующие названия скоростей:

1) $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{абс}$ – скорость точки относительно неподвижной инерциальной системы отсчета будем называть ее *абсолютной скоростью*;

2) $\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon}_{отн}$ – скорость точки относительно подвижной системы отсчета называется *относительной скоростью*;

3) $\vec{\upsilon}_0 = \vec{\upsilon}_{пер}$ – скорость той точки подвижной системы, через которую в данный момент времени проходит рассматриваемая точка A, называется *переносной скоростью*.

Таким образом, имеем

$$\vec{\upsilon}_{абс} = \vec{\upsilon}_{пер} + \vec{\upsilon}_{отн}. \tag{3.7}$$

Дифференцируя выражение (3.7) по времени, получим связь между ускорениями точки A в обеих системах:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{отн}, \tag{3.8}$$

где $\vec{a}_{абс}$ – *абсолютное ускорение* точки A – ускорение точки относительно неподвижной инерциальной системы отсчета; $\vec{a}_{пер}$ – *переносное ускорение* точки A, равное ускорению той точки подвижной системы, через которую в данный момент времени проходит рассматриваемая точка A; $\vec{a}_{отн}$ – *относительное ускорение* точки A – ускорение точки относительно подвижной системы отсчета.

В динамике *относительным движением* называют движение по отношению к *неинерциальной системе отсчета*, для которой законы механики Ньютона несправедливы. Чтобы уравнения относительного движения материальной точки сохранили тот же вид, что и в инерциальной системе отсчета, необходимо к силе $\vec{F}$ взаимодействия точки с другими телами присоединить так называемую *переносную силу инерции* $\vec{F}_{пер}$.

Умножив формулу (3.8) на массу материальной точки A, получим

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = m\vec{a}_{\text{абс}} - m\vec{a}_{\text{пер}} . \tag{3.9}$$

Правая часть уравнения (3.9) формально представляет собой сумму сил, действующих на материальную точку в неинерциальной системе отсчета.

Поскольку $\vec{a}_{\text{абс}}$ – ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета, то в соответствии со вторым законом Ньютона слагаемое $m\vec{a}_{\text{абс}}$ в уравнении (3.9) равно сумме всех сил взаимодействия, действующих на материальную точку: $m\vec{a}_{\text{абс}} = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{вз}}$.

Величина $-m\vec{a}_{\text{пер}}$ (произведение массы m материальной точки на ее переносное ускорение $\vec{a}_{\text{пер}}$, взятое с обратным знаком) имеет размерность силы и называется *переносной силой инерции* $\vec{F}_{\text{пер}}$:

$$\vec{F}_{\text{пер}} = -m\vec{a}_{\text{пер}} . \tag{3.10}$$

Слагаемое $\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{вз}}$ является суммой физических сил в том смысле, что они есть результат взаимодействия тел.

Следует понимать, что силу инерции нельзя ставить в один ряд с такими силами, как упругие, гравитационные силы и силы трения, т. е. силами, обусловленными воздействием на тело со стороны других тел. В отличие от сил взаимодействия между телами для сил инерции нельзя указать, действие каких именно тел на рассматриваемую материальную точку они выражают. Следовательно, к силам инерции в принципе не применим третий закон Ньютона. Наличие силы инерции в уравнении (3.9) обусловлено только неинерциальностью системы отсчета. Иными словами, силы инерции по существу нельзя называть силами.

Таким образом

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{вз}} + \vec{F}_{\text{пер}} . \tag{3.11}$$

Уравнение (3.11) является *уравнением движения материальной точки в движущейся поступательно неинерциальной системе отсчета*.

9. Центробежная сила, сила Кориолиса. Уравнение движения в неинерциальной системе отсчета с учетом ее вращения

Рассмотрим случай, когда частица (материальная точка A) массой m равномерно движется относительно равномерно вращающейся с угловой скоростью ω системы отсчета в виде диска радиуса R вдоль его края (рис. 3.3). Диск находится в плоскости, перпендикулярной к оси вращения z, с центром C, находящимся на этой оси.

Скорость частицы (точки) $\vec{\upsilon}_{\text{абс}}$ относительно неподвижного наблюдателя (инерциальная система отсчета) будет равна сумме переносной $\vec{\upsilon}_{\text{пер}}$ (скорости точек края самого диска, $\upsilon_{\text{пер}} = \omega R$) и относительной $\vec{\upsilon}_{\text{отн}}$ (относительно диска) скоростей (см. формулу (3.7) и рис. 3.3).

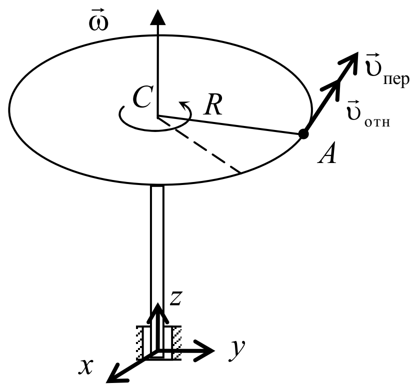


Рис. 3.3

Поэтому абсолютная скорость $\upsilon_{\text{абс}}$ частицы по величине имеет вид

$$\upsilon_{\text{абс}} = \omega R + \upsilon_{\text{отн}}. \tag{3.12}$$

Так как частица равномерно движется по окружности радиуса R со скоростью $\upsilon_{\text{абс}}$, то ускорение $a_{\text{абс}}$ частицы по отношению к инерциальной системе отсчета определяется как

$$a_{\text{абс}} = \frac{\upsilon_{\text{абс}}^2}{R} = \frac{\upsilon_{\text{отн}}^2}{R} + 2\omega\upsilon_{\text{отн}} + \omega^2 R. \tag{3.13}$$

Для наблюдателя, находящегося на диске и считающего его неподвижным, частица также равномерно движется по окружности радиуса R, но ее скорость равна $\upsilon_{\text{отн}}$. Поэтому ускорение частицы относительно диска будет направлено к центру диска и будет следующим:

$$a_{\text{отн}} = \frac{\upsilon_{\text{отн}}^2}{R} = a_{\text{абс}} - 2\omega\upsilon_{\text{отн}} - \omega^2 R. \tag{3.14}$$

При умножении ускорения $a_{отн}$ на массу m частицы для наблюдателя это произведение представляет собой силу $F_{отн}$, действующую на частицу:

$$F_{отн} = ma_{отн}. \qquad (3.15)$$

Учитывая, что $ma_{абс} = F$, и формулы (3.14–3.15), получим

$$F_{отн} = F - 2m\omega\upsilon_{отн} - m\omega^2 R. \qquad (3.16)$$

Таким образом, по отношению к вращающейся системе отсчета на частицу, помимо «истинной» физической силы F, являющейся результатом взаимодействия тел, будут действовать две добавочные силы инерции: *центробежная сила* $F_{цб} = -m\omega^2 R$ и *сила Кориолиса* $F_{к} = -2m\omega\upsilon_{отн}$. Знаки «минус» показывают, что в данном случае обе эти силы направлены от оси вращения диска.

Появление силы Кориолиса можно обнаружить на следующем примере. Возьмем горизонтально расположенный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Прочертим на диске радиальную прямую OA (рис. 3.4).

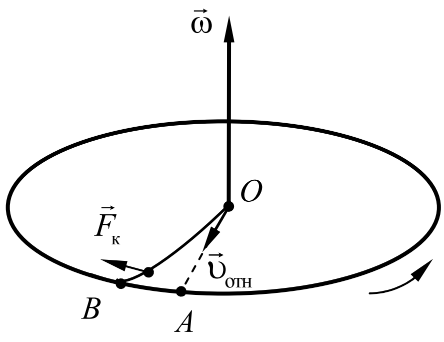


Рис. 3.4

Если диск неподвижен, то шарик будет двигаться по радиусу неподвижного диска с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}_{отн}$ от точки O в направлении точки A (рис. 3.4). Если же диск привести в равномерное вращение в направлении, указанном стрелкой, то относительно диска движение шарика будет криволинейным по траектории OB, причем его скорость относительно диска быстро изменяет свое направление. Следовательно, по отношению к вращающейся системе отсчета шарик массой m ведет себя так, как если бы на него действовала сила $\vec{F}_{к}$, перпендикулярная к его относительной скорости $\vec{\upsilon}_{отн}$, которая и вызывает изменение направления движения шарика (рис. 3.5).

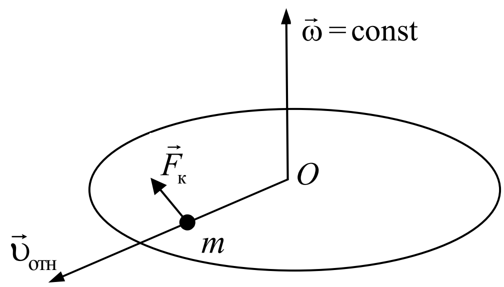


Рис. 3.5

Тот факт, что движение шарика во вращающейся системе отсчета оказывается криволинейным, свидетельствует о существовании силы инерции, так как обычные силы взаимодействия, направленные указанным образом, на тело не действуют. Возникающая в рассматриваемом случае сила инерции называется силой Кориолиса, которая равна произведению массы m точки на *кориолисово ускорение* и направлена противоположно этому ускорению.

В векторной форме сила Кориолиса имеет вид

$$\vec{F}_к = 2m\vec{\upsilon}_{отн} \times \vec{\omega}, \tag{3.17}$$

где $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращающейся системы отсчета.

Соответственно, сила Кориолиса перпендикулярна оси вращения и скорости частицы, а по величине

$$F_к = 2m\upsilon_{отн}\omega \sin\alpha, \tag{3.18}$$

где α – угол между $\vec{\upsilon}_{отн}$ и $\vec{\omega}$.

Рассмотрим вращение шарика массой m на веревке (рис. 3.6).

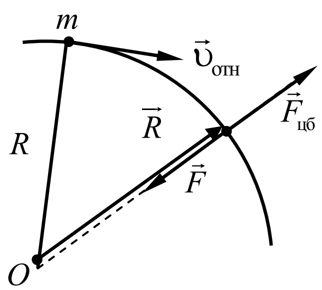


Рис. 3.6

Шарик связан с осью вращения веревкой. Веревка растягивается, появляется упругая сила натяжения веревки $\vec{F}$, действующая на шарик, направленная вдоль веревки к центру вращения. С точки зрения наблюдателя, связанного с неинерциальной системой отсчета, шарик покоится и не приближается к центру. Следовательно, с точки зрения наблюдателя в неинерциальной системе есть сила, уравновешивающая $\vec{F}$, равная ей по величине и противоположная по направлению. Эта сила называется центробежной силой инерции:

$$\vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\vec{R}, \tag{3.19}$$

где $\vec{R}$ – радиус-вектор, направленный от оси O вращения к шарику.

Таким образом, из формулы (3.19) следует, что центробежная сила инерции не зависит от относительной скорости, т. е. она существует и в том случае, когда точка неподвижна относительно, например, вращающегося диска, и направлена по радиусу от оси вращения.

Центробежные силы, например, вызывают перегрузки у летчиков, исполняющих фигуры высшего пилотажа. Они также используются в центробежных сушилках, сепараторах.

Если положение точки в пространстве описывать с помощью радиус-вектора $\vec{R}$, то необходимо прибегнуть к векторному произведению:

$$\vec{F}_{\text{цб}} = m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}. \tag{3.20}$$

Обратимся теперь к записи уравнения движения в неинерциальной системе отсчета с учетом ее вращения. Уравнение (3.11) с учетом выражения (3.16) и формул (3.17), (3.19) преобразуется в

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\text{вз}} \underbrace{-m\vec{a}_{\text{пер}} + m\omega^2\vec{R}}_{\text{Переносная сила инерции}} + \underbrace{2m\vec{\upsilon}_{\text{отн}}\times\vec{\omega}}_{\text{Сила Кориолиса}}. \tag{3.21}$$

Выражение (3.21) – *уравнение движения в неинерциальной системе отсчета с учетом ее вращения*.

Таким образом, для написания уравнения движения в неинерциальных системах отсчета необходимо к физическим (реальным) силам взаимодействия добавить две силы инерции: *переносную силу инерции*, состоящую из *поступательной переносной силы инерции*, связанной с ускоренным движением начала O' неинерциальной системы отсчета, *центробежной силы инерции*, которая возникает во вращающейся (по отношению к инерциальной) системе отсчета и *силы Кориолиса*.

ЛЕКЦИЯ № 4

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. Момент силы, момент пары сил, момент импульса, уравнение моментов.
2. Закон сохранения момента импульса.
3. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси.
4. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси вращения.
5. Гироскоп. Угловая скорость прецессии.
6. Главные моменты инерции. Расчет моментов инерции однородных тел.
7. Теорема Штейнера.

1. Момент силы, момент пары сил, момент импульса, уравнение моментов

В начале рассмотрения вращательного движения твердого тела, необходимо ввести понятия момента силы и момента импульса.

Моментом силы $\vec{M}_O$ относительно центра O называется векторное произведение вектора $\vec{r}$ на вектор силы $\vec{F}$ (рис 4.1):

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4.1)$$

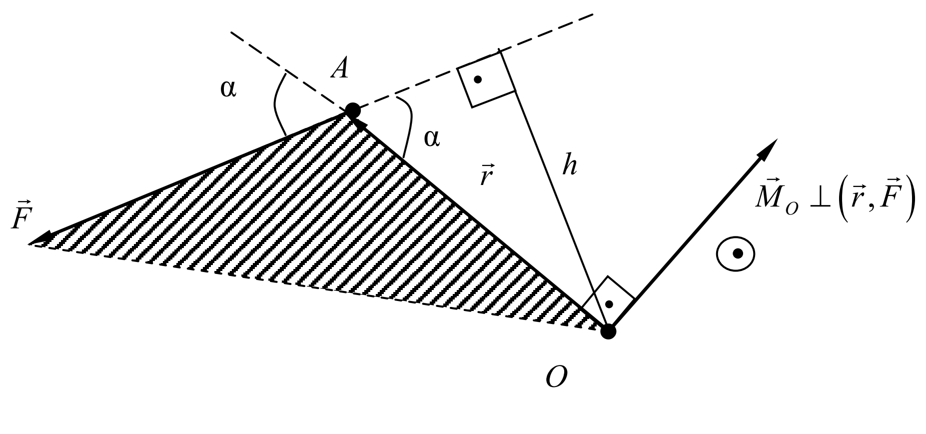


Рис. 4.1

Модуль момента силы $\vec{F}$, действующей на материальную точку A, относительно центра O определяется формулой

$$M_O = Fr\sin(\widehat{\vec{r},\vec{F}}) = Fh, \tag{4.2}$$

где $\vec{r}$ − радиус-вектор, соединяющий центр O с материальной точкой A, к которой приложена сила $\vec{F}$; h − *плечо силы* $\vec{F}$: кратчайшее расстояние (длина проведенного перпендикуляра) от центра O до линии действия силы $\vec{F}$ (рис. 4.1).

Момент силы – векторная величина, направление которой определяется по правилу «буравчика», или правилу «правой руки» (рис. 4.1).

Разложим силу $\vec{F}$, действующую на материальную точку A, на две составляющие: $\vec{F}_z$ – параллельную оси z и $\vec{F}_{xy}$ – перпендикулярную оси z (рис. 4.2).

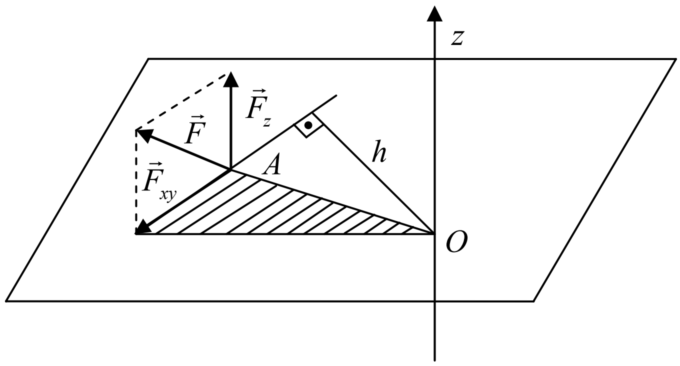


Рис. 4.2

Согласно теореме Вариньона момент силы $\vec{F}$ относительно оси $\left(M_z\left(\vec{F}\right)\right)$ равен сумме моментов сил $M_z\left(\vec{F}_z\right)$ и $M_z\left(\vec{F}_{xy}\right)$ относительно этой же оси, потому что сила $\vec{F}$ – равнодействующая сил $\vec{F}_z$ и $\vec{F}_{xy}$:

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_z\left(\vec{F}_z\right) + M_z\left(\vec{F}_{xy}\right). \tag{4.3}$$

Однако сила $\vec{F}_z$ не может вызвать вращение тела и, следовательно, $M_z\left(\vec{F}_z\right) = 0$.

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_z\left(\vec{F}_{xy}\right) = F_{xy}\,h = M_o\left(\vec{F}_{xy}\right). \tag{4.4}$$

Таким образом, моментом силы $\vec{F}$ относительно оси z является момент проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси z, относительно точки пересечения оси z с этой плоскостью.

Установим связь между моментом силы относительно центра O $\vec{M}_O$ и относительно оси z, проходящей через этот центр O.

Согласно вышеизложенному момент силы $\vec{M}_O$ относительно центра O как вектор направлен перпендикулярно плоскости OAB (рис. 4.3).

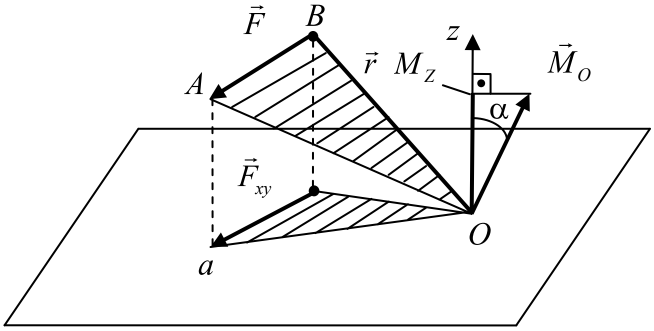


Рис. 4.3

Численное значение момента $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)$ равно удвоенной площади треугольника ΔOAB. Проекцией силы $\vec{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси Oz, является вектор $\vec{F}_{xy}$. Его момент относительно центра O численно равен удвоенной площади треугольника Oab. Одновременно это будет момент силы $\vec{F}_{xy}$ относительно оси Oz. Из геометрии известно, что ΔOab является проекцией ΔOAB на горизонтальную плоскость

$$S_{\Delta Oab} = S_{\Delta OAB}\cos\alpha,$$

где S – площадь соответствующего треугольника; α – угол между плоскостями треугольников.

Можно записать

$$2S_{\Delta Oab} = 2S_{\Delta OAB}\cos\alpha \Rightarrow M_z\left(\vec{F}\right) = M_O\left(\vec{F}\right)\cos\alpha = M_{oz}\left(\vec{F}\right). \qquad (4.5)$$

Таким образом, проекция вектора момента силы $\vec{F}$ относительно центра O на ось z, проходящей через этот центр O, равна моменту силы $\vec{F}$ относительно этой оси.

Парой сил называются две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, равные по модулю, направленные вдоль параллельных прямых в противоположные стороны (рис. 4.4).

Вычислим суммарный момент пары сил относительно произвольной точки $O\vec{M}_O$, используя обозначения, указанные на рис. 4.4.

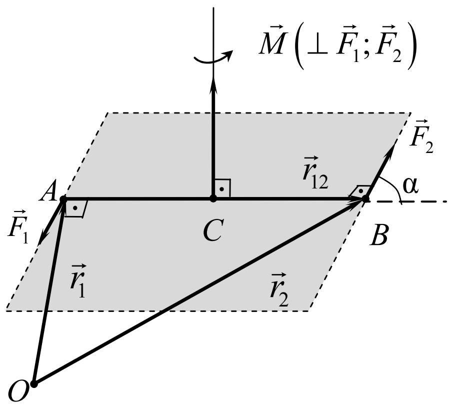


Рис. 4.4

Момент пары $\vec{M}_O$ представляет собой вектор, перпендикулярный плоскости пары, равный по модулю произведению модуля одной из сил пары на *плечо пары* (кратчайшее расстояние между линиями действия сил, составляющих пару) и направленный в ту сторону, откуда «вращение» пары видно происходящим против хода часовой стрелки.

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = -\vec{r}_1 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2. \qquad (4.6)$$

Здесь учитывается, что $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.

Обозначим через $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ вектор, проведенный из точки приложения силы $\vec{F}_1$ в точку приложения силы $\vec{F}_2$. Тогда

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_2 = \vec{M}. \qquad (4.7)$$

Из формулы (4.7) видно, что суммарный момент пары сил не зависит от выбора точки O, относительно которой мы его рассчитываем, а его модуль определяется произведением модуля одной из сил на плечо пары:

$$\left|\vec{M}\right| = Fr\sin\left(\underbrace{\vec{r}_{12}\hat{,}\vec{F}_2}_{\alpha}\right) = Fl, \qquad (4.8)$$

где $l = r_{12}\sin\alpha$ – плечо пары сил ($|AB|$ на рис. 4.4).

Введем *момент импульса* $\vec{l}_O$ материальной точки относительно центра O:

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times m\vec{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad l_O = rm\upsilon\sin(\underbrace{\vec{r}\hat{,} m\vec{\upsilon}}_{\alpha}) = m\upsilon h, \qquad (4.9)$$

где h – *плечо импульса* $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ материальной точки A (рис. 4.5).

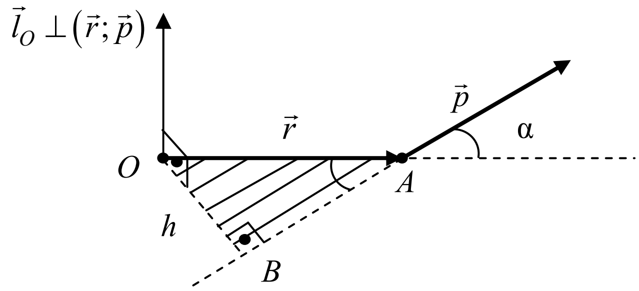


Рис. 4.5

Векторную сумму моментов импульсов всех материальных точек, составляющих твердое тело, называют *моментом импульса системы материальных точек*:

$$\vec{L}_O = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times m_j \vec{\upsilon}_j. \tag{4.10}$$

Продифференцируем по времени момент импульса в формуле (4.10):

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\left(\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times m_j \vec{\upsilon}_j\right)}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{r}_j}{dt} \times m_j \vec{\upsilon}_j + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_j \times m_j \frac{d\vec{\upsilon}_j}{dt}. \tag{4.11}$$

Первое слагаемое в этом выражении равно нулю, так как $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}$ и $\vec{\upsilon}_j \times m_j \vec{\upsilon}_j = 0$, как векторное произведение сонаправленных векторов.

Величина $m_j \dfrac{d\vec{\upsilon}_j}{dt}$ равна по второму закону Ньютона сумме всех действующих на материальную точку m_j сил, которые мы разделим на внешние и внутренние:

$$m_j \frac{d\vec{\upsilon}_j}{dt} = \vec{F}_j^e + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \vec{F}_{jk}^i, \tag{4.12}$$

где $\vec{F}_j^e$ – внешняя сила, действующая на точку m_j; $\vec{F}_{jk}^i$ – внутренняя сила, действующая на точку m_j со стороны точки m_k.

Таким образом

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times (\vec{F}_j^e + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} \vec{F}_{jk}^i) = \sum_{j=1}^{N} \left(\vec{M}_{Oj}^e + \vec{r}_j \times \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} \vec{F}_{jk}^i \right). \tag{4.13}$$

Векторная сумма моментов $\sum_{j=1}^{N}\left(\vec{r}_j \times \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N}\vec{F}_{jk}^{i}\right)$ всех внутренних сил равна нулю, так как силы $\vec{F}_{jk}$ и $\vec{F}_{kj}$ образуют пару сил с нулевым плечом.

Итак, уравнение (4.11) примет вид

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{j=1}^{N}\vec{M}_{Oj}^{e}. \qquad (4.14)$$

Таким образом, скорость изменения момента импульса системы материальных точек относительно точки O равна векторной сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно этой же точки O.

Уравнение (4.14) называется *уравнением моментов*.

Выражение (4.14) справедливо во всех инерциальных системах отсчета. В неинерциальных системах отсчета помимо моментов сил взаимодействия необходимо учитывать и моменты сил инерции.

2. Закон сохранения момента импульса

Если сумма моментов внешних сил, действующих на систему материальных точек, относительно точки O, равна нулю, то, как следует из уравнения (4.14), для такой системы $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$. Это означает, что в случае, если $\sum_{j=1}^{N}\vec{M}_{Oj}^{e}$, то момент импульса системы материальных точек остается постоянным:

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{\text{const}}. \qquad (4.15)$$

Соотношение (4.15) называется *законом сохранения момента импульса*.

Если в инерциальной системе отсчета рассматривать движение замкнутой системы тел, то относительно любой неподвижной точки момент импульса такой системы не изменяется с течением времени.

Закон сохранения момента импульса относительно некоторой точки можно применять и к незамкнутой системе тел, если сумма моментов внешних сил относительно этой же точки будет равна нулю.

3. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси

Моментом импульса материальной точки *относительно неподвижной оси z* l_z называют проекцию l_{Oz} на эту ось вектора $\vec{l}_O$, определенного относительно произвольной точки O данной оси (рис. 4.6).

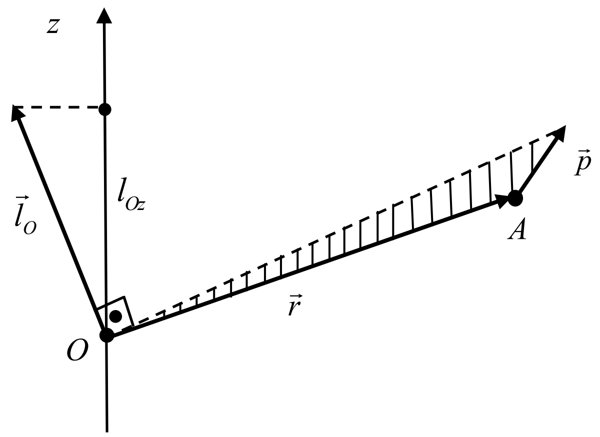


Рис. 4.6

Пусть тело может вращаться только вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω. Найдем выражение для момента L_z импульса тела относительно оси z вращения.

Проекция результирующего вектора на некоторую ось равна алгебраической сумме проекций на эту ось всех составляющих векторов. Следовательно

$$\left(\vec{L}_O\right)_z = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{l}_{Oi}\right)_z. \tag{4.16}$$

По определению векторного произведения вектор $\vec{l}_{Oi}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}_i$ и $m_{ip}\vec{\upsilon}_i$. Проекция $\left(\vec{l}_{Oi}\right)_z$ равна площади S_i – проекции параллелограмма на плоскость, перпендикулярную к оси Oz вращения тела и проходящую через точку O (рис. 4.7):

$$l_{Oiz} = l_{Oi}\cos\gamma_i, \tag{4.17}$$

где γ_i – угол между вектором $\vec{l}_{Oi}$ и осью Oz.

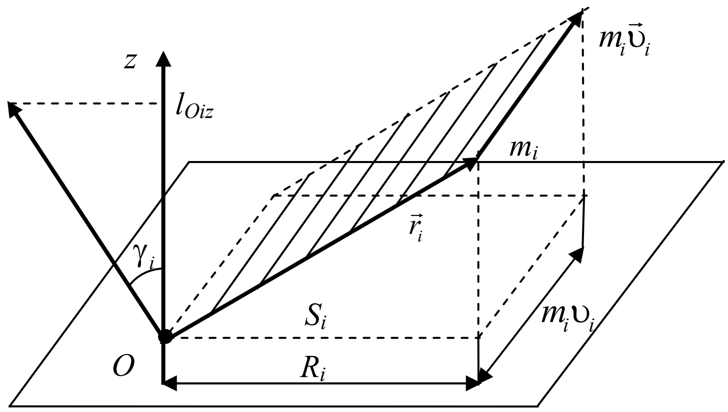


Рис. 4.7

Вектор скорости $\vec{\upsilon}_i$ i-й материальной точки тела параллелен рассматриваемой плоскости, так что его проекция на эту плоскость равна υ_i. Проекция вектора $\vec{r}_i$ на ту же плоскость равна расстоянию R_i от i-й точки тела до оси Oz. Следовательно, искомая проекция параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}_i$ и $m_i\vec{\upsilon}_i$, представляет собой прямоугольник со сторонами R_i и $m_i\upsilon_i$. Таким образом

$$l_{Oiz} = R_i m_i \upsilon_i = \omega m_i R_i^2,$$

так как скорость i-й точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω, равна ωR_i.

Момент импульса всего тела относительно оси Oz имеет вид

$$L_{Oz} = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2. \tag{4.18}$$

Сумму произведений масс m_i всех материальных точек тела на квадраты их расстояний R_i до оси вращения Oz называют *моментом инерции* I_z тела относительно оси вращения Oz:

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2. \tag{4.19}$$

Обратите внимание, что момент импульса материальной точки относительно оси z не зависит от выбора точки O на этой оси. В результате

$$L_z = I_z\,\omega. \tag{4.20}$$

При вычислении момента инерции I_z *однородного тела* (имеющего во всех частях одинаковые физические свойства, в том числе плотность ρ = const) его разделяют на отдельные элементарные объемы с массами dm. Поэтому в формуле (4.19) сумму $\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$ заменяют интегралом:

$$I_z = \iiint_V R^2 dm, \qquad (4.21)$$

где R – расстояние от элементарного объема с массой dm до оси Oz.

Выразим элементарную массу m_i через плотность вещества ρ и объем V_i, занимаемый этой массой: $m_i = \rho\Delta V_i$. Выражение для момента инерции будет тем точнее, чем меньше будут массы m_i и, соответственно, меньший объем ΔV_i будут они занимать:

$$I_z = \lim_{\Delta V \to 0} \sum_{i=1}^{N} \rho \Delta V_i R_i^2 = \iiint_V \rho R^2 dV. \qquad (4.22)$$

Выражение (4.22) служит основным расчетным соотношением для вычисления моментов инерции тел.

4. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси вращения

Подставив выражение (4.20) для проекции момента импульса тела L_z в уравнение моментов (4.14) и учитывая, что $I_z = \text{const}$, получим

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{N} M_z\left(\vec{F}_k^e\right) \Rightarrow I_z \frac{d\omega_z}{dt} = \sum_{k=1}^{N} M_z\left(\vec{F}_k^e\right); \; k = 1, 2, \ldots, N. \qquad (4.23)$$

Таким образом, *основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси вращения z*:

$$I_z \varepsilon = \sum_{k=1}^{N} M_z\left(\vec{F}_k^e\right); \;\; k = 1, 2, \ldots, N, \qquad (4.24)$$

где ε − угловое ускорение; $\vec{F}_k^e$ − внешние силы; k − номер внешней силы.

По внешнему виду оно похоже на второй закон Ньютона для поступательного движения тела: роль сил F при вращательном движении играют моменты сил M_z, роль ускорения a – угловое ускорение ε. Мерой инертности тела при вращательном движении относительно оси служит его момент инерции I_z относительно этой оси.

Сравните приведенные далее соотношения.

Поступательное движение:

$$\overbrace{\text{Ускорение}}^{\text{Следствие}} = \frac{\overbrace{\text{Сила}}^{\text{Причина}}}{\underbrace{\text{Масса}}_{\text{Инерция}}} \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Вращательное движение вокруг неподвижной оси:

$$\overbrace{\text{Угловое ускорение}}^{\text{Следствие}} = \frac{\overbrace{\text{Момент силы}}^{\text{Причина}}}{\underbrace{\text{Момент инерции}}_{\text{Инерция}}} \qquad \varepsilon_z = \frac{M_z}{I_z}.$$

Если проекция $M_z^e = 0$ (например, для замкнутой системы), то

$$L_z = I_z\omega = \text{const}. \qquad (4.25)$$

Соотношение (3.25) – *закон сохранения проекции вектора момента импульса* $\vec{L}$ *тела*.

Из закона сохранения проекции вектора момента импульса $\vec{L}$ тела следуют выводы:

1) так как при вращении абсолютно твердого тела $I_z = \text{const}$, то угловая скорость ω – величина постоянная: $\omega = \text{const}$.

2) если изменяется значение величины I_z, то изменяется и ω:

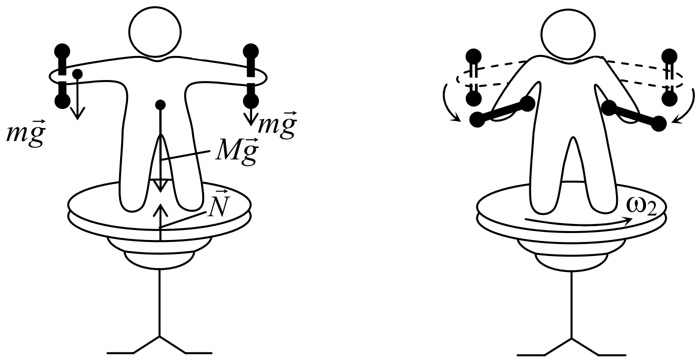
$$I_z^{(1)}\omega_1 = I_z^{(2)}\omega_2 = \text{const}. \qquad (4.26)$$

В качестве наглядных примеров, подтверждающих соотношение (4.25), рассматриваются: 1) скамья Жуковского; 2) эффект пируэта у фигуристов.

Если человек с гантелями, находящийся на скамье Жуковского в исходном состоянии (рис. 4.8, *а*), вращается с угловой скоростью ω_1, то $L_z^{(1)} = I_1\omega_1$. Пусть человек за счет внутренних сил изменяет положение рук с гантелями и оказывается в конечном состоянии (рис. 4.8, *б*) с моментом импульса $L_z^{(2)} = I_2\omega_2$.

Проекция момента импульса системы сохраняется, поэтому

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \;\Rightarrow\; \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1. \qquad (4.27)$$



а *б*

Рис. 4.8

В положении *2* руки и гантели находятся ближе к оси z, поэтому $I_2 < I_1$ и, следовательно, человек на скамье станет вращаться с большей скоростью ($\omega_2 > \omega_1$).

Этим эффектом с успехом пользуются фигуристы, выполняя пируэт во время катаний на льду.

5. Гироскоп. Угловая скорость прецессии

Если ось вращения тела не закреплена, то необходимо рассматривать весь вектор момента импульса $\vec{L}$ тела в его зависимости от вектора угловой скорости $\vec{\omega}$. Эта зависимость в отличие от выражения для момента L_z импульса тела относительно неподвижной оси z вращения (формула (4.20)) имеет более сложный характер: компоненты вектора $\vec{L}$ являются линейными функциями компонент $\vec{\omega}$, но направления этих векторов, вообще говоря, различны. Это обстоятельство существенно усложняет в общем случае характер движения тела.

Рассмотрим один пример движения тела со свободно ориентирующейся осью вращения – так называемый *гироскоп*, т. е. быстро вращающееся симметричное твердое тело, ось вращения которого (ось симметрии) может изменять свое направление в пространстве.

Свойства гироскопа проявляются при выполнении двух условий: 1) ось вращения гироскопа должна иметь возможность изменять свое направление в пространстве; 2) угловая скорость вращения гироскопа вокруг своей оси должна быть очень велика по сравнению с той угловой скоростью, которую будет иметь сама ось при изменении своего направления. При таком вращении вокруг своей геометрической оси вектор $\vec{L}$ (как и вектор $\vec{\omega}$) будет направлен вдоль оси тела.

Если суммарный момент внешних сил, действующих на гироскоп, равен нулю, то его ось будет сохранять свое направление в пространстве ($L_z = \text{const}$). Если к вращающемуся гироскопу приложить момент сил, который стремится повернуть его вокруг оси, перпендикулярной оси вращения гироскопа, то он станет поворачиваться вокруг третьей оси, перпендикулярной первым двум. Точное решение задачи о вращении гироскопа относительно произвольных осей связано с математическими трудностями. Рассмотрим решение этой задачи для простого случая.

Примером гироскопа является *волчок*, опертый в одной своей нижней точке (рис. 4.9).

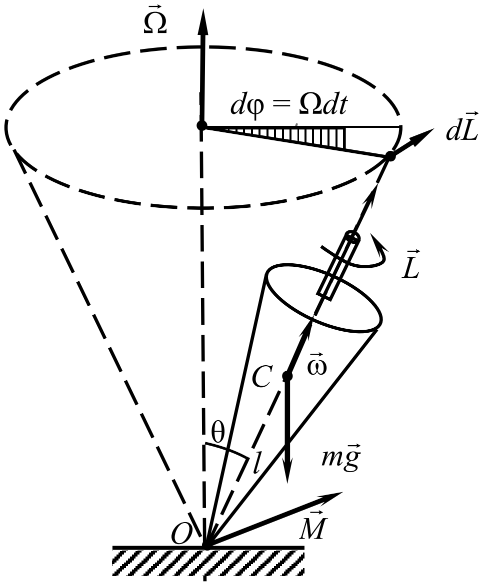


Рис. 4.9

Опыт показывает, что если ось вращающегося волчка отклонена от вертикали, то волчок не падает, а совершает *прецессионное движение*: его ось описывает конус вокруг вертикали с некоторой угловой скоростью **Ω**. И чем больше угловая скорость ω вращения волчка вокруг своей оси, тем меньше угловая скорость прецессии **Ω**.

Волчок находится под действием силы тяжести, имеющей постоянное направление – вертикально вниз. Эта сила равна весу волчка $P = mg$ и приложена к его центру тяжести (точка C на рис. 4.9). Ее момент относительно точки опоры O по величине

$$M = Pl\sin\theta,$$

где l – расстояние OC; θ – угол между осью волчка и вертикалью, и направлен всегда перпендикулярно плоскости, проходящей через ось волчка и вертикальное направление.

Согласно закону динамики вращательного движения момент импульса гироскопа $\vec{L}$ относительно точки O получает за время dt приращение $d\vec{L} = \vec{M}dt$, которое совпадает по направлению с вектором момента $\vec{M}$ внешней силы тяжести $m\vec{g}$. Из рис. 4.9 видно, что $d\vec{L} \perp \vec{L}$. В результате вектор $\vec{L}$ (а значит, и ось волчка) будет поворачиваться вместе с вектором $\vec{M}$ вокруг вертикальной оси, описывая круговой конус.

Найдем угловую скорость прецессии Ω наклоненного волчка массой m, который вращается с большой угловой скоростью ω вокруг своей оси симметрии:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{4.28}$$

Бесконечно малое приращение угла $d\varphi = \dfrac{dL}{L}$.

Подставляя это значение в равенство (4.28) и учитывая, что $\dfrac{dL}{dt} = M$, получаем

$$\Omega = \frac{M}{L} = \frac{M}{I\omega\sin\theta} = \frac{mgl}{I\omega}. \tag{4.29}$$

Анализируя выражение (4.29), можно заметить, что величина угловой скорости прецессии Ω не зависит от угла θ.

Рассмотрим теперь эффект, связанный с вращением оси гироскопа.

На рисунке 4.10 схематично изображен гироскоп, угловая скорость вращения которого и, соответственно, собственный момент импульса $\vec{L}$ направлен горизонтально. Допустим, что ось гироскопа по каким-либо внешним причинам начинает вращаться вокруг вертикальной оси со скоростью Ω. Это приведет к тому, что собственный момент импульса гироскопа $\vec{L}$ тоже начинает вращаться со скоростью $\vec{\Omega}$ в горизонтальной плоскости.

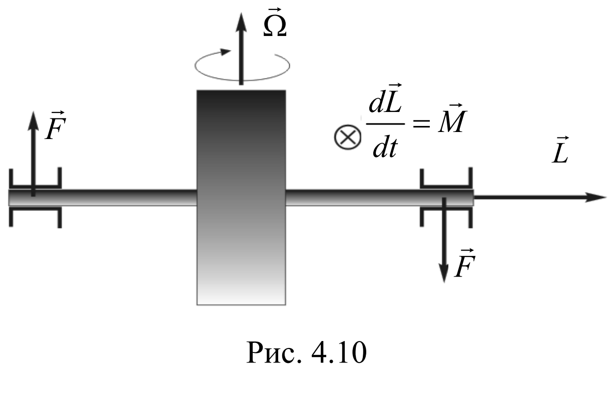


Рис. 4.10

Следовательно

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}.$$

Для обеспечения такого изменения момента импульса требуется момент сил $\vec{M}$, который создается в результате действия сил $\vec{F}$, со стороны подшипников на ось гироскопа.

Эти силы называются *гироскопическими*, а их появление называют *гироскопическим эффектом*.

Величина этих сил вычисляется с учетом третьего закона Ньютона

$$F = \frac{\Omega L}{l}, \tag{4.30}$$

где l – расстояние между подшипниками на оси вала гироскопа.

С подобным гироскопическим эффектом приходиться считаться при конструировании высокооборотных роторных двигателей самолетов, локомотивов, кораблей.

6. Главные моменты инерции. Расчет моментов инерции однородных тел

В динамике твердого тела различают моменты инерции *осевые* (см. равенства ((4.19), (4.22)) и *центробежные*.

В некотором теле выберем систему осей координат с началом в точке O (рис. 4.11). Мысленно разделим все тело на множество материальных точек M_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), которые имеют координаты x_i, y_i, z_i и массы m_i.

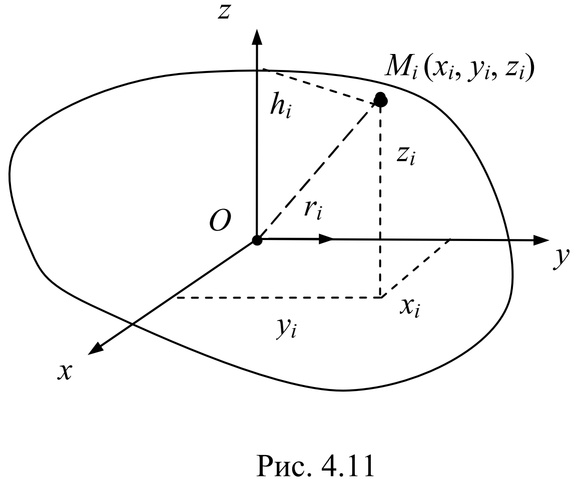


Рис. 4.11

Центробежными моментами инерции относительно системы прямоугольных осей x, y, z, проведенных в точке O, называются величины, определяемыми равенствами:

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i \,; I_{yz} = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i \,; I_{zx} = \sum_{i=1}^{N} m_i z_i x_i \tag{4.31}$$

или же соответствующими объемными интегралами.

Эти величины являются характеристиками динамической неуравновешенности тел. Например, при вращении тела вокруг оси z от значений I_{xz} и I_{yz} зависят силы давления на подшипники, в которых закреплена ось.

Через каждую точку тела можно провести три такие взаимно перпендикулярные оси, называемые *главными осями инерции*, для которых $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$.

Зная главные оси инерции и моменты инерции относительно этих осей, можно определить моменты инерции тела относительно любой оси.

Моменты инерции тела относительно трех главных осей инерции, проведенных в произвольной точке O тела, называются *главными моментами инерции данного тела*.

Главные оси инерции, проходящие через центр масс тела, называются *главными центральными осями инерции тела*, а моменты инерции относительно этих осей – его *главными центральными моментами инерции*. Ось симметрии однородного тела всегда является одной из его главных центральных осей инерции.

Согласно равенству (4.19) моменты инерции твердого тела относительно осей x, y, z, проведенных в точке O (рис. 4.11), рассчитываются следующим образом:

$$I_x = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right);$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(z_i^2 + x_i^2 \right);$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i h_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right). \tag{4.32}$$

Следовательно

$$I_x + I_y + I_z = 2\sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right). \tag{4.33}$$

Вычислим *момент инерции цилиндра* массой m, радиусом R и высотой h, относительно оси z, проходящей через его ось (рис. 4.12).

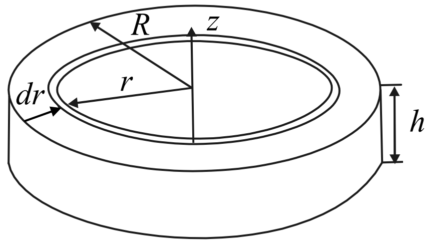


Рис. 4.12

Мысленно разобьем цилиндр на тонкие цилиндрические слои толщиной dr и высотой h, равной высоте цилиндра. Тогда объем dV такого слоя будет равен $2\pi rhdr$. Все участки цилиндрического слоя отстоят от оси цилиндра на одинаковое расстояние r. Момент инерции такого слоя равен ρdVr^2.

Тогда, используя выражение (4.22), момент инерции всего цилиндра I_z запишем

$$I_z = \int\limits_V \rho \cdot dV \cdot r^2 = \int\limits_0^R \rho \cdot r^2 \cdot 2\pi rh \cdot dr = 2\pi\rho h \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \frac{\rho\pi R^4 h}{2}.$$

Поскольку масса цилиндра m равна плотности материала ρ цилиндра, умноженной на его объем $(m = V\rho = \rho Sh = \rho\pi R^2 h)$, получим

$$I_z = \frac{mR^2}{2}. \qquad (4.34)$$

Из формулы (4.34) следует, что момент инерции цилиндра не зависит от его высоты (высота входит в формулу через массу), и, следовательно, соотношение (4.34) применимо для вычисления *моментов инерции тонких дисков*.

Иногда свойства симметрии позволяют упростить вычисление моментов инерции относительно оси, применив следующий прием. Сложим все уравнения для главных моментов инерции, используя выражение (4.33). Получим

$$I_x + I_y + I_z = 2\sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right) = 2\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2. \qquad (4.35)$$

где r_i – расстояние массы m_i до начала отсчета.

В случае, если ось z является осью симметрии, то главные моменты инерции I_x и I_y равны друг другу, а в случае точечной симметрии $I_x = I_y = I_z$, что позволяет упростить вычисления моментов инерции.

Например, вычислим с помощью формулы (4.35) *момент инерции сферической оболочки* радиусом R и массой M. В силу симметрии все три момента инерции, относительно осей x, y и z, проходящих через центр инерции, равны.

Следовательно, $3I_z = 2MR^2$ и

$$I_z = \frac{2}{3}MR^2. \tag{4.36}$$

Рассчитаем *момент инерции тонкого кольца* массой M и радиусом R относительно оси y, совпадающей с диаметром (рис. 4.13).

В силу симметрии имеем: $I_x = I_y$; $I_z = MR^2$. Тогда

$$I_y = \frac{MR^2}{2}. \tag{4.37}$$

Аналогичным образом можно вычислить моменты инерции всех геометрически правильных тел относительно осей симметрии. Приведем некоторые практически важные результаты для использования при решении задач.

1. *Момент инерции тонкого диска* (толщина $b \ll R$ радиуса диска) относительно оси z, совпадающей с его диаметром (рис. 4.14).

$$I_z = \frac{MR^2}{4}, \tag{4.38}$$

где M – масса диска; R – радиус диска.

2. *Момент инерции шара* относительно оси z, проходящей через центр шара (рис. 4.15).

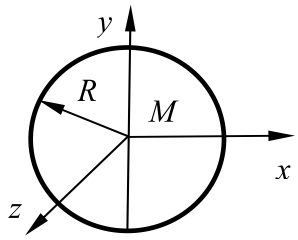


Рис. 4.13

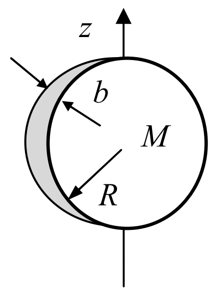


Рис. 4.14

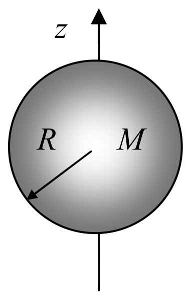


Рис. 4.15

$$I_z = \frac{2}{5}MR^2, \tag{4.39}$$

где M – масса шара; R – радиус шара.

3. *Момент инерции параллелепипеда* массой M относительно оси z, проходящей через его центр перпендикулярно одной из его граней (рис. 4.16):

$$I_z = \frac{M}{12}(a^2 + b^2). \tag{4.40}$$

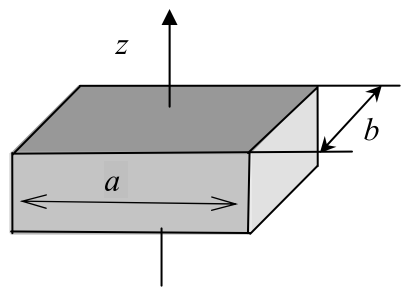


Рис. 4.16

7. Теорема Штейнера

Если ось z^* вращения тела не проходит через его центр масс C, то для вычисления момента инерции тела относительно этой оси z^* применяют *теорему Штейнера*:

$$I_{z^*} = I_{Cz} + md^2, \tag{4.41}$$

где I_{z^*} – момент инерции относительно заданной (произвольной) оси z^*; I_{Cz} – момент инерции относительно оси Z, параллельной заданной оси z^* и проходящей через центр масс тела C; m – масса тела; d – расстояние между осями z и z^* (рис. 4.17).

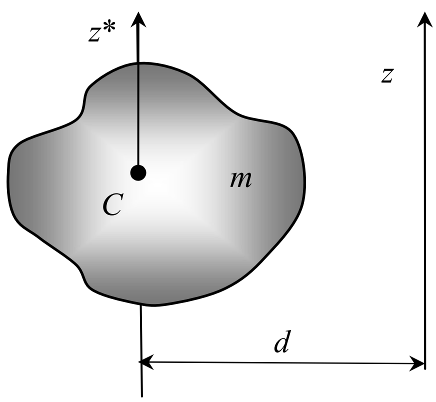


Рис. 4.17

Таким образом, момент инерции тела зависит от распределения массы рассматриваемого тела относительно заданной оси.

ЛЕКЦИЯ № 5

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ. СИЛОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ПОЛЯ

1. Работа силы. Мощность. Механическая энергия.
2. Силовые поля. Консервативные силы. Потенциальные силовые поля. Центральные силовые поля.
3. Связь между силой и энергией, энергией и работой.
4. Закон сохранения механической энергии. Общефизический закон сохранения энергии.

1. Работа силы. Мощность. Механическая энергия

Изменение параметров механического движения (например, импульса или ускорения) происходит в процессе силового взаимодействия этого тела с другими телами. Одной из количественных характеристик этого процесса в механике является понятие работы, совершаемой силой.

Пусть материальная точка под действием переменной силы $\vec{F}$ совершает перемещение по некоторой траектории B–C (рис. 5.1). В общем случае сила $\vec{F}$ в процессе движения точки может изменяться как по модулю, так и по направлению. Рассмотрим элементарное перемещение $d\vec{r}$, в пределах которого силу $\vec{F}$ можно считать постоянной.

Действие силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ характеризуют величиной, равной скалярному произведению $\vec{F}\cdot d\vec{r}$, которую называют элементарной работой δA силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r}\ . \tag{5.1}$$

Элементарную работу также можно представить в виде

$$\delta A = F\cos\alpha ds = F_\tau ds, \tag{5.2}$$

где α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$; $ds = |\,d\vec{r}\,|$ − элементарный путь; F_τ − проекция вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$ (рис. 5.1).

Величина δA − скалярная. В зависимости от угла α (или от знака проекции F_τ вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$) δA может быть положительной, отрицательной и равной нулю (если направление вектора $\vec{F}$ перпендикулярно вектору $d\vec{r}$ ($\alpha = 90^\circ$), то $F_\tau = 0$).

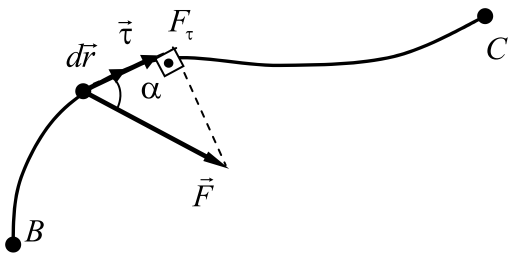


Рис. 5.1

Суммируя (интегрируя) выражение (5.2) по всем элементарным участкам пути от точки B до точки C, найдем работу переменной силы $\vec{F}$ на данном пути:

$$A = \int_{BC} F_\tau ds, \tag{5.3}$$

где интегрирование выполняется вдоль траектории.

Если на частицу в процессе движения действует несколько сил, результирующая которых $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N$, то можно показать, что работа результирующей силы $\vec{F}$ на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из сил в отдельности на том же перемещении:

$$A = \int_{BC} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{BC} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N) \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{BC} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{BC} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + ... + \int_{BC} \vec{F}_N \cdot d\vec{r} = A_1 + A_2 + ... + A_N. \tag{5.4}$$

За единицу работы в системе СИ принимается Джоуль = Н · м.

Для характеристики скорости, с которой совершается работа, вводят величину, называемую мощностью. *Мощность* – это работа, совершаемая силой за единицу времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{F dr \cos\alpha}{dt} = F\upsilon\cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}. \tag{5.5}$$

Таким образом, мощность, развиваемая силой $\vec{F}$, равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения данной силы.

Мощность, как и работа, является скалярной величиной.

Зная мощность силы, можно найти работу силы, совершаемую за промежуток времени t:

$$A = \int_0^t N dt. \tag{5.6}$$

Единицей мощности в системе СИ является ватт = Дж/с.

Перепишем выражение для элементарной работы согласно формуле (5.1) с учетом 2-го закона Ньютона и формулы $d\vec{r} = \vec{\upsilon} dt$:

$$m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \vec{\upsilon} dt = m\vec{\upsilon} d\vec{\upsilon} = \delta A. \tag{5.7}$$

Получив соотношение $d\upsilon^2 = d(\vec{\upsilon} \cdot \vec{\upsilon}) = \vec{\upsilon} d\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon} d\vec{\upsilon} = 2\vec{\upsilon} d\vec{\upsilon}$ и подставив его в формулу (5.7), получим

$$m\vec{\upsilon} d\vec{\upsilon} = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \delta A. \tag{5.8}$$

Кинетической энергией материальной точки называется величина

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{5.9}$$

Тогда можно окончательно записать

$$dK \equiv d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \delta A. \tag{5.10}$$

Выражение (5.10) называется *законом (теоремой) изменения кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме*: дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе силы, которая действует на точку.

Вычислив интеграл от обеих частей равенства (5.10) в пределах конечного участка B–C пути перемещения материальной точки, получим *закон (теорему) изменения кинетической энергии материальной точки на конечном участке пути в интегральной форме*:

$$K_2 - K_1 = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = A_{BC}. \tag{5.11}$$

Закон (теорема) (5.11) читается следующим образом: изменение кинетической энергии точки на некотором участке пути равно работе, совершаемой силой $\vec{F}$, действующей на точку на этом участке пути.

Если рассматривать систему материальных точек, которая движется под действием внешних и внутренних сил, то для j-й материальной точки системы с начальной скоростью υ_{0j} и с конечной скоростью υ_j, изменение ее кинетической энергии имеет вид

$$\frac{m\upsilon_j^2}{2} - \frac{m\upsilon_{0j}^2}{2} = A_j^e + A_j^i. \tag{5.12}$$

Выполнив суммирование для системы точек, получим *закон (теорему) изменения кинетической энергии системы*:

$$K - K_0 = \sum_{j=1}^{N} A_j^e + \sum_{j=1}^{N} A_j^i\,. \tag{5.13}$$

Таким образом, изменение кинетической энергии механической системы равно работе всех внешних и внутренних сил системы.

Рассмотрим вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси z. Согласно вышеизложенному скорости точек тела зависят от угловой скорости ω и расстоянию R_i от i-й точки тела до оси Oz вращения $\upsilon_i = \omega \cdot R_i$.

Тогда с учетом формул (5.9) и (4.19) кинетическая энергия вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси z:

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \omega^2 R_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = \frac{I_z \omega^2}{2}. \tag{5.14}$$

Допустим, что тело вращается относительно его главных центральных осей инерции. Тогда *кинетическая энергия вращения тела*:

$$K = \frac{1}{2}\{I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2\}\,. \tag{5.15}$$

При плоскопараллельном движении твердого тела с учетом его центра масс скорость каждой точки тела определятся как

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{V}_C + \vec{\upsilon}_{iC}, \tag{5.16}$$

где $\vec{V}_C$ – скорость центра масс C; $\vec{\upsilon}_{iC}$ – скорость поворота i-й точки тела относительно центра масс.

Кинетическая энергия твердого тела при плоскопараллельном движении с учетом (5.16) имеет вид

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} = \frac{V_C^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \upsilon_{iC}^2}{2} + \vec{V}_C \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_{iC}. \tag{5.17}$$

Из формулы (2.9) следует, что

$$\frac{V_C^2}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i = \frac{MV_C^2}{2}, \qquad (5.18)$$

где m_i – масса i-й частицы; M – масса системы.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i \upsilon_{iC}^2}{2} = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} I_{Cz}, \qquad (5.19)$$

где I_{Cz} – момент инерции относительно оси Cz, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения.

$$\vec{V}_C \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_{iC} = \vec{V}_C \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right) = 0, \qquad (5.20)$$

потому что в движущейся системе отсчета, связанной с центром масс, всегда

$$\vec{R}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M} = 0.$$

С учетом формул (5.18), (5.19), (5.20), окончательно запишем формулу (5.17), для расчета *кинетической энергии твердого тела при плоскопараллельном движении*:

$$K = \frac{1}{2} MV_C^2 + \frac{I_{Cz}\omega^2}{2}. \qquad (5.21)$$

Энергия существует в различных формах, а два основных механических вида энергии – это кинетическая и потенциальная энергии.

Наряду с кинетической энергией, или энергией движения, в физике важную роль играет понятие потенциальной энергии, или энергии взаимодействия тел.

Потенциальная энергия – часть общей механической энергии системы, зависящей от взаимного расположения материальных точек (тел) системы и их положений (координат) во внешнем силовом поле.

Полная механическая энергия системы – энергия механического движения и взаимодействия:

$$E = K + \Pi. \qquad (5.22)$$

Таким образом, полная механическая энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

2. Силовые поля. Консервативные силы. Потенциальные силовые поля. Центральные силовые поля

Если в каждой точке пространства на помещенную туда частицу действует сила, то говорят, что *частица находится в поле сил*. Так, например, частица может находиться в поле сил тяжести, в поле упругих сил, в поле сил сопротивления (в потоке жидкости, газа) и т. д.

Поле, остающееся постоянным во времени, называют *стационарным.* Стационарное поле обладает следующим свойством: если в таком поле материальная точка движется по замкнутому пути, так что в результате движения точка возвращается в исходное положение, то работа, совершаемая при этом силами поля, будет равна нулю.

Из этого свойства следует и другое утверждение: работа, которую совершают силы поля при перемещении частицы из одного положения в другое не зависит от вида траектории, по которому происходит перемещение, а определятся только положением начальной и конечной точек траектории.

Рассмотрим две точки пространства *1* и *2* и соединим их двумя кривыми *a* и *b* (рис. 5.2).

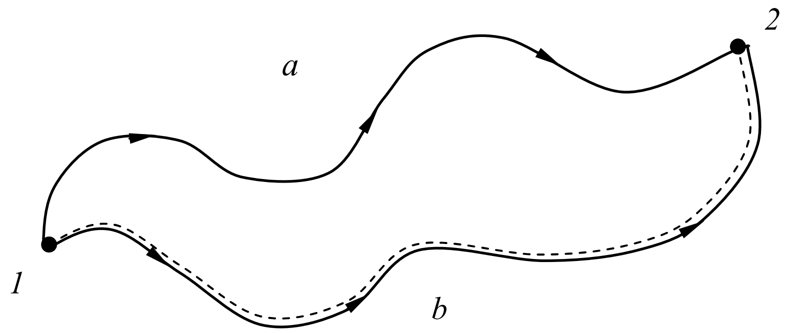


Рис. 5.2

Предположим, что частица переводится из точки *1* в точку *2* вдоль кривой *a* и затем из точки *2* назад в точку *1* по кривой *b*. Общая работа, которая производится при этом силами поля, равна нулю:

$$A_{1a2} + A_{2b1} = 0.$$

При изменении направления перемещения частицы работа меняет знак, поэтому из написанного равенства следует

$$A_{1a2} = -A_{2b1} = A_{1b2},$$

т. е. работа не зависит от вида кривой, соединяющей начальную и конечную точки перемещения *1* и *2*.

Силы, работа которых не зависит от траектории движения тела и определяется только начальным и конечным положением, называются *консервативными*. Работа консервативных сил на замкнутой траектории равна нулю.

Запишем аналитически определение консервативной силы:

$$A = \oint_L F ds = 0, \tag{5.23}$$

где $\oint_L$ − обозначение интеграла по замкнутому контуру.

Рассмотрим примеры. *Однородное поле сил*. Если на каждую точку в пространстве действует $\vec{F} = \overrightarrow{\text{const}}$, то говорят, что задано однородное поле сил (рис. 5.3).

Так как $dA = \vec{F} \cdot d\vec{s}$, и консервативные силы определяются только положением тел в пространстве, то значит они зависят только от координат, поэтому в системе *Z–Y* нарисуем траекторию между точками *1* и *2* и выделим элементарный участок *ds*.

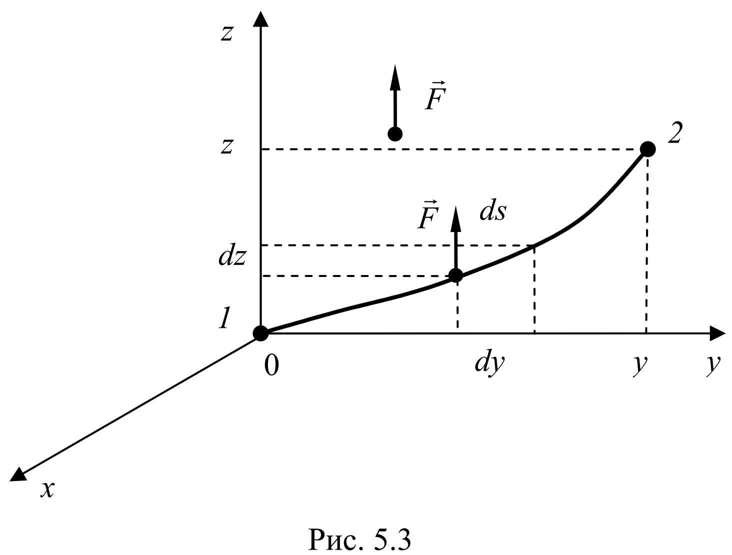


Рис. 5.3

$$d\vec{s} = dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

Рассматривая силу, направленную вертикально вверх, $\vec{F} = F\vec{k}$ и

$$dA = Fdy(\vec{j} \cdot \vec{k}) + Fdz(\vec{k} \cdot \vec{k}) = Fdz$$

получим

$$A_{12} = \int_{z_0}^{z} Fdz = F\left(z - z_0\right), \tag{5.24}$$

где z_0 – начальная координата точки *1* относительно оси z.

Таким образом, работа силы определяется только координатой z, т. е. не зависит от пути перехода, значит, однородное поле сил консервативно.

Примером консервативных сил являются также так называемые *центральные силы* – силы, всегда направленные по радиус-вектору, соединяющему материальную точку с некоторой неподвижной точкой в пространстве (центром силы, или силовым центром), и зависящие только от расстояния до этой точки (точка O на рис. 5.4). Примером таких сил могут служить силы гравитационного притяжения Земли к Солнцу (или Луны к Земле). Для того, чтобы рис. 5.4 соответствовал этому случаю, надо только изменить направления силы на рисунке на противоположные, так как они там изображены как силы отталкивания.

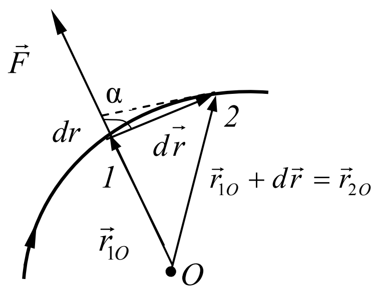


Рис. 5.4

Сила $\vec{F}(r)$ зависит только от расстояния до силового центра.

Покажем, что работа центральных сил также не зависит от формы пути и определяется только начальным и конечным положениями материальной точки. Для этого произведем бесконечно малое перемещение dr от точки *1* к точке *2*. При этом $|\,d\vec{r}\,|\cos\alpha = dr$, где dr – приращение расстояния до центра (рис. 5.4).

$$A = \int_{1}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr\,. \tag{5.25}$$

Значение определенного интеграла зависит только от нижнего и верхнего пределов r_1 и r_2, и, таким образом, не зависит от формы пути.

3. Связь между силой и энергией, энергией и работой

Так как работа консервативных сил поля не зависит от траектории движения тела и определяется только начальным и конечным положением тела, следовательно, работа является физической величиной, с помощью которой можно определить важную характеристику силового поля. Примем для этого какую-либо точку пространства, которую обозначим через O, за начало отсчета и будем рассматривать работу, совершаемую силами поля при переходе частицы (материальной точки) из какой-либо произвольной точки в точку O. Обозначим эту работу через U.

Тогда, работа, совершаемая консервативными силами при переходе частицы из какой-либо точки пространства в точку O, называется *потенциальной энергией* U *частицы* в какой-либо точке (рис. 5.5).

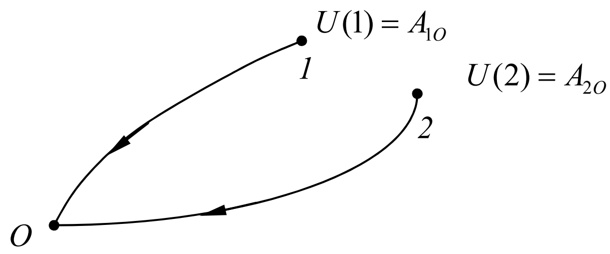


Рис. 5.5

$$U(1) = A_{1O};\ U(2) = A_{2O}. \tag{5.26}$$

Примем равным нулю значение потенциальной энергии частицы в точке O начала отсчета. Так как работа консервативных сил не зависит от пути перехода, то потенциальная энергия частицы при фиксированном нулевом положении зависит только от координат частицы в рассматриваемой какой-либо точке – потенциальная энергия U частицы является функцией только ее координат:

$$U = U(x, y, z). \tag{5.27}$$

Пусть частица перешла из точки *1* в точку *2* по какому-либо пути *1–2* (рис. 5.6).

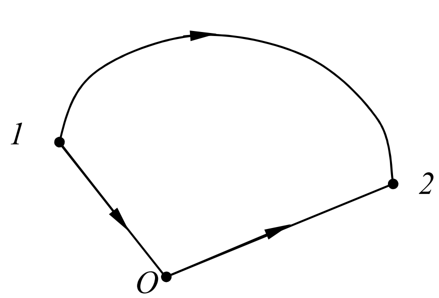


Рис. 5.6

Тогда, как следует из рис. 5.6,

$$A_{12} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O} = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1)\,. \qquad (5.28)$$

Следовательно, работа консервативных сил равна разности потенциальных энергий частицы при переходе ее из одной точки в другую.

Если рассматривать нулевое положение, то разностью потенциальных энергий в рассматриваемом и нулевом положениях называется работа, совершаемая консервативными силами при переходе частицы из рассматриваемого положения в нулевое.

Данное определение запишем математически:

$$U(1) = U(x,y,z) - U(0) = A_{1O} = -A_{O1} = -\int_{O}^{1} \vec{F}\cdot d\vec{r}\,. \qquad (5.29)$$

(знак минус перед интегралом обусловлен тем, что при интегрировании в этой формуле мы движемся от точки *O* к точке *1*, т. е. в направлении, противоположном тому, что изображено на рис. 5.6).

Пусть у нас есть две бесконечно близкие точки $r + dr$ и r. Тогда

$$U(r+dr) - U(r) = dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r}\,. \qquad (5.30)$$

Расписывая скалярное произведение, получаем

$$dU = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)\,. \qquad (5.31)$$

Следовательно

$$F_x = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{y,x=\mathrm{const}} \equiv -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad (5.32)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial x}$ – частная производная.

Аналогично выводятся формулы для F_y и F_z:

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y};\; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}\,. \qquad (5.33)$$

Если ввести единичные орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вдоль осей координат *x*, *y*, *z*, соответственно, то формулу для силы можно будет записать в виде

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) \equiv -\overrightarrow{\mathrm{grad}}U \equiv -\vec{\nabla}U. \qquad (5.34)$$

В формуле (5.34) введено обозначение *градиента*:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} \equiv \vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\,. \tag{5.35}$$

Таким образом, в формуле (5.34) используется величина, называемая градиентом скалярной функции U ($U(x, y, z)$ − скаляр). Эта величина является вектором, поскольку определяет действующую на материальную точку силу. Наряду с обозначением градиента как $\mathrm{grad}\, U$ применяется обозначение ∇U, где ∇ – *оператор набла*.

Для выяснения геометрического смысла градиента введем понятие *эквипотенциальных поверхностей*, то есть таких поверхностей, на которых скалярная функция U остается постоянной:

$$U(x, y, z) = \mathrm{const}.$$

Пусть U − одна из таких поверхностей, и пусть она проходит через точку пространства *O*, в которой ищется градиент (рис. 5.7).

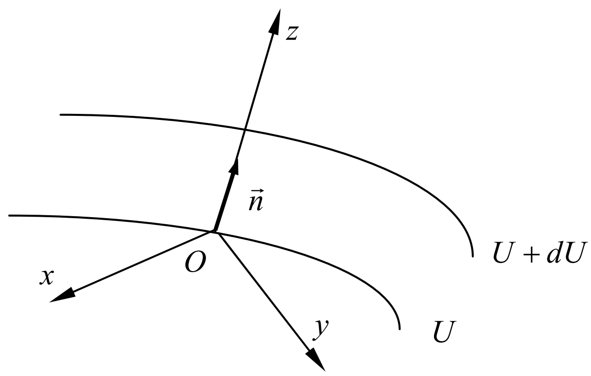


Рис. 5.7

Поместим в этой точке начало координат. Ось z направим по нормали к поверхности ($\vec{n}$ − единичный орт нормали), а оси x и y лежат в плоскости, касательной к поверхности в точке *O*. Поэтому в первом приближении вдоль осей x и y функция U не изменяется, так как в нашем случае $\vec{k} = \vec{n}$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0;\ \overrightarrow{\mathrm{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial z}\vec{n}\,. \tag{5.36}$$

Если U возрастает в направлении оси z (рис. 5.7), то $\partial U / \partial z > 0$, и, следовательно, градиент направлен по нормали $\vec{n}$ к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциальной энергии.

Очевидно, что в этом направлении потенциальная энергия изменяется наиболее быстро:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,U = \frac{\partial U}{\partial n}\vec{n}. \tag{5.37}$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что градиент скалярной функции U есть вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности U в сторону возрастания функции U. Его длина численно равна производной от U по нормали n к эквипотенциальной поверхности.

4. Закон сохранения механической энергии. Общефизический закон сохранения энергии

Итак, у нас имеются 2 утверждения:

1) изменение кинетической энергии механической системы равно работе сил системы $K_2 - K_1 = A$;

2) работа консервативных сил равна разности потенциальных энергий $A = U_1 - U_2$.

Следовательно, если действуют только консервативные силы, то

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 \;\Rightarrow\; U_1 + K_1 = U_2 + K_2 = \text{const} \Rightarrow U + K = \text{const}. \tag{5.38}$$

Так как $E = U + K$ называют *полной механической энергией системы*, то $E = \text{const}$ – *закон сохранения механической энергии*: полная механическая энергия замкнутой системы тел, в которой действуют только консервативные силы, сохраняется:

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N) = \text{const}. \tag{5.39}$$

При существовании внешних консервативных сил закон сохранения механической энергии будет все равно выполняться:

$$E = K + U + U_{\text{внешн}} = \text{const}. \tag{5.40}$$

Это фундаментальный закон природы. Он является следствием однородности времени – инвариантности физических законов относительно выбора начала отсчета времени.

В консервативных системах полная механическая энергия остается постоянной. Могут лишь происходить превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах, так что полная энергия остается неизменной.

Все силы, не являющиеся консервативными, называются *неконсервативными силами*. К ним относятся, прежде всего, так называемые диссипативные силы, (например, силы трения, возникающие при скольжении одного тела относительно другого; сила трения в этом случае всегда направлена против скорости движения, то есть против перемещения тела) – это неконсервативные силы, работа которых всегда отрицательна. *Диссипативные системы* – системы, в которых механическая энергия постепенно уменьшается из-за преобразования в другие (немеханические) формы энергии за счет действия неконсервативных сил.

В системе, в которой действуют неконсервативные силы, полная механическая энергия системы не сохраняется. Однако, при исчезновении механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида.

Таким образом, энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой. В этом заключается физическая сущность закона сохранения и превращения энергии – сущность неуничтожимости материи и ее движения – *общефизический закон сохранения энергии*.

ЛЕКЦИЯ № 6

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ. СИЛОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ПОЛЯ

5. Силы упругости. Закон Гука. Модуль Юнга.
6. Работа сил упругости. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.
7. Гравитационное поле. Закон всемирного тяготения.
8. Напряженность и потенциал гравитационного поля.
9. Центральное гравитационное поле и его характеристики.

5. Силы упругости. Закон Гука. Модуль Юнга

Сила упругости – сила, возникающая в теле в результате его деформации и стремящаяся вернуть тело в начальное положение.

Сила упругости имеет электромагнитную природу, являясь макроскопическим проявлением межмолекулярного взаимодействия.

При деформации твердого тела под действием внешних сил его атомы и молекулы смещаются из первоначальных положений равновесия в новые. Этому перемещению частиц препятствуют силы их взаимодействия с окружающими соседними атомами и молекулами. Если смещение всех частиц было не слишком большим, то после прекращения действия внешних сил атомы и молекулы возвращаются в исходные равновесные положения. В результате форма и размеры тела самопроизвольно восстанавливаются под действием внутренних сил. Такая *деформация называется упругой*.

Если смещения атомов и молекул так велики, что происходит их взаимная перестройка, которая не способствует их возвращению в исходные положения после снятия нагрузки, то такая *деформация называется пластической.*

Простейшими видами деформации являются:

1) деформация растяжения – сжатия (рис. 6.1). Величина $\Delta l = l - l_0$ называется абсолютной деформацией.

2) деформация сдвига (рис. 6.2), когда под действием касательной силы F слои площадью S тела сдвигаются на угол сдвига γ.

При малых *деформациях растяжения – сжатия* ($|\Delta l| << l_0$) сила упругости пропорциональна деформации тела и направлена в сторону, противоположную направлению перемещения частиц тела при деформации (*закон Гука*):

$$F_n^{\text{упр}} = k\Delta l, \tag{6.1}$$

где k – коэффициент жесткости тела; Δl – абсолютная деформация.

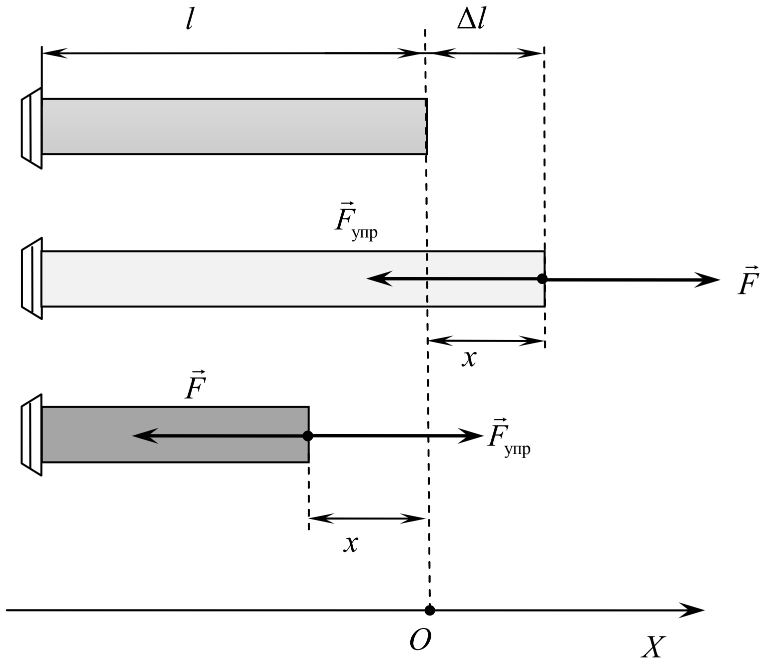


Рис. 6.1

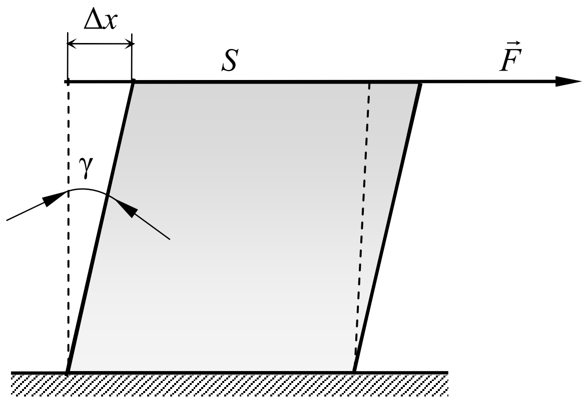


Рис. 6.2

В системе СИ коэффициент жесткости измеряется в ньютонах на метр (Н/м). Коэффициент жесткости зависит от формы и размеров тела, а также от материала.

Отношение $\varepsilon = \Delta l / l_0$ называется *относительной деформацией*.

С учетом площади поперечного сечения S деформированного тела (например, стержня) отношение

$$\sigma = \frac{F}{S} \qquad (6.2)$$

называется *нормальным напряжением*: во всех точках поперечного сечения стержня напряжения одинаковы и направлены по нормали к сечению. В системе СИ напряжение (механическое) σ измеряется в паскалях $[\sigma] = \text{Н/м}^2 = \text{Па}$.

С учетом определений относительной деформации и напряжения *закон Гука для деформации растяжения – сжатия* можно сформулировать следующим образом: нормальное напряжение σ пропорционально относительной деформации ε:

$$\sigma = E\varepsilon, \qquad (6.3)$$

где коэффициент E называется модулем Юнга для деформации растяжения – сжатия.

Модуль Юнга зависит только от свойств материала и не зависит от размеров и формы тела. Модуль Юнга равен напряжению, которое необходимо приложить к телу, чтобы удлинить его в 2 раза. Модуль Юнга различных материалов меняется в широких пределах. Для стали, например, $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, а для резины $E \approx 2 \cdot 10^6$ Н/м^2.

Деформация сдвига – вид деформации тела, возникающей в том случае, если сила прикладывается касательно его поверхности, при этом нижняя часть тела закреплена неподвижно (рис. 6.2). При деформации сдвига одна плоскость тела смещается относительно другой.

Относительная деформация сдвига определяется по формуле

$$tg\gamma = \frac{\Delta x}{l}, \qquad (6.4)$$

где Δx – абсолютная деформация сдвига параллельных слоев тела относительно друг друга; l – расстояние между слоями (для малых углов $\operatorname{tg} \gamma \sim \gamma$).

Опыт показывает, что в области упругости равнодействующая сил упругости пропорциональна углу γ.

Тогда по аналогии с формулой (6.3) *закон Гука для деформации сдвига*:

$$\tau = G\gamma, \qquad (6.5)$$

где τ – *касательное напряжение*; G – модуль сдвига.

Деформация изгиба – вид деформации, при которой нарушается прямолинейность главной оси тела (рис. 6.3, где λ – стрела прогиба (максимальный изгиб балки)).

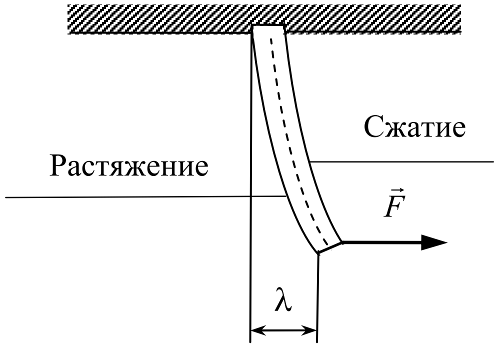


Рис. 6.3

Деформация кручения – вид деформации, при которой к телу приложен крутящий момент, вызванный парой сил, действующих в перпендикулярной плоскости оси тела (например, стержня) – рис. 6.4, где M – момент пары сил F. В результате деформации кручения возникает перекос образующих цилиндрической поверхности стержня (рис. 6.4), причем

$$r\varphi = \gamma l,$$

где φ – угол кручения; γ – угол сдвига; r, l – соответственно радиус и длина стержня.

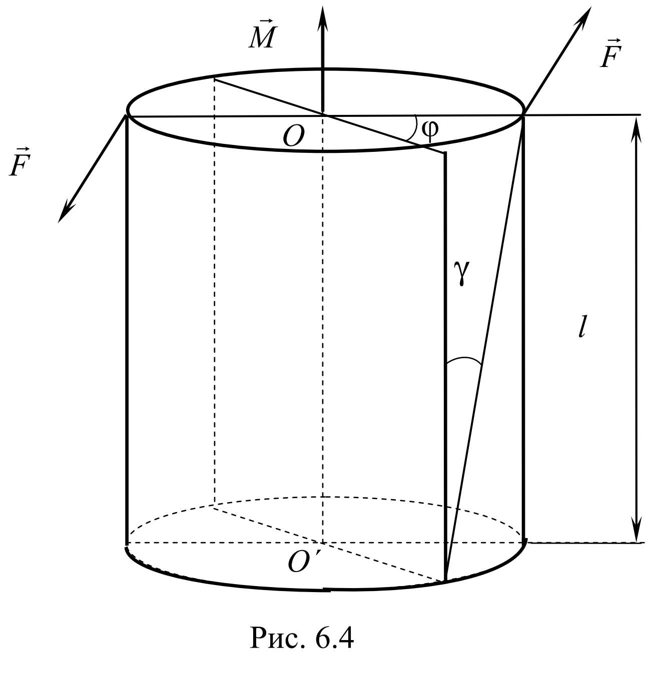


Рис. 6.4

6. Работа сил упругости. Потенциальная энергия упруго деформированного тела

Найдем работу, совершаемую при деформации упругой пружины.

Сила упругости $F_{упр} = -kx$, где k – коэффициент упругости. Сила непостоянна, поэтому элементарная работа:

$$dA = Fdx = -kxdx. \tag{6.6}$$

Знак минус говорит о том, что работа совершена над пружиной.

Тогда

$$A = \int dA = -\int_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \tag{6.7}$$

Согласно формуле (5.24) работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы при переходе ее из одной точки в другую $A = -(U_2 - U_1)$. Примем $U_2 = 0$; $U = U_1$. Тогда

$$U = \frac{kx^2}{2} + C, \tag{6.8}$$

где C – постоянная интегрирования.

Таким образом, *потенциальная энергия упруго деформированного тела* равна работе, которую совершает сила упругости при переходе тела в состояние, в котором деформация равна нулю.

На рис. 6.5 показана диаграмма потенциальной энергии пружины, где $E = K + U$ – полная механическая энергия системы, K – кинетическая энергия в точке x_1.

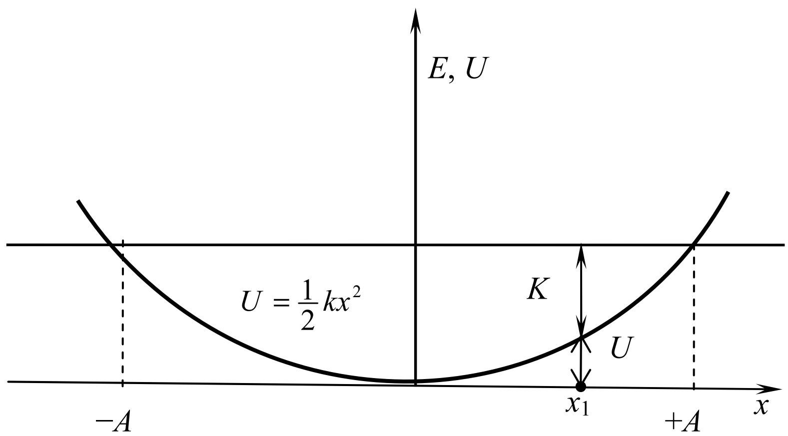


Рис. 6.5

7. Гравитационное поле. Закон всемирного тяготения

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется посредством создаваемого ими *гравитационного поля*, которое называется также полем тяготения. Гравитационное поле – один из видов физического поля, посредством которого осуществляется гравитационное притяжение тел, например Солнца и планет Солнечной системы, планет и их спутников, Земли и находящихся на ней или вблизи нее тел.

Физическое поле представляет собой особую форму существования материи, посредством которой осуществляются гравитационное, электромагнитное, ядерное и другие взаимодействия. Понятие поля было введено в физику в 30-х гг. XIX в. английским физиком М. Фарадеем. Согласно представлениям теории поля частицы, участвующие во взаимодействии, создают в каждой точке пространства такое состояние материи (физическое поле), которое проявляется в силовом воздействии на другие частицы, помещенные в любую точку этого поля. Таким образом, согласно полевой концепции, взаимодействие между материальными частицами передается через посредника, роль которого играет физическое поле.

Концепция передачи взаимодействия посредством поля получила название близкодействия.

Гравитационное взаимодействие обладает следующими основными свойствами:

1) действует на все материальные объекты. Все, что имеет массу, а масса присуща любому виду материи, испытывает гравитационное взаимодействие;

2) обладает бесконечным радиусом действия. Гравитационное взаимодействие простирается практически на неограниченное расстояние;

3) обладает универсальностью действия, которое заключается в том, что гравитационные силы сообщают всем телам одинаковое ускорение независимо от их состава и строения;

4) гравитационное взаимодействие невозможно экранировать. Это взаимодействие свободно передается через любые тела и преграды и является всепроникающим;

5) является самым слабым взаимодействием из всех известных взаимодействий в природе. Среди других типов взаимодействий – сильного, слабого и электромагнитного – гравитационное взаимодействие не играет практически никакой роли применительно к микрообъектам, таким как элементарные частицы. Например, электрическая

сила взаимного отталкивания двух электронов превосходит силу их тяготения более чем в 10^{42} раз;

6) обладает свойством притяжения.

Гравитационное поле называется стационарным, если создающие его тела неподвижны относительно системы отсчета, выбранной для описания поля.

Если в гравитационное поле поместить материальное тело, то на него будет действовать сила, пропорциональная массе этого тела.

Мерой гравитационного взаимодействия является *сила тяготения или гравитационная сила*, величина которой определяется законом всемирного тяготения – сила притяжения двух тел прямо пропорциональна массам этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{6.9}$$

где $\gamma = 6{,}6745 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ – гравитационная постоянная; m_1, m_2 – массы взаимодействующих тел; r – расстояние между центрами масс тел.

Физический смысл гравитационной постоянной γ заключается в следующем: *гравитационная постоянная* – это физическая величина, численно равная силе взаимного тяготения двух тел единичной массы, находящихся на единичном расстоянии друг от друга.

Закон всемирного тяготения в векторной форме имеет вид

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}. \tag{6.10}$$

Закон всемирного тяготения выполняется для материальных точек и шарообразных тел.

8. Напряженность и потенциал гравитационного поля

Особый класс физических стационарных полей представляет потенциальное поле, которое описывает, в частности, гравитационное взаимодействие.

Силовое взаимодействие двух масс осуществляется посредством гравитационных полей, которые создают эти материальные тела.

Гравитационное поле, как и любое другое потенциальное поле, можно определить двумя величинами – напряженностью и потенциалом. Напряженность является силовой характеристикой поля, потенциал – его энергетической характеристикой.

Рассмотрим тело массой M, которое в окружающей среде создает вокруг себя гравитационное поле. В некоторую точку этого поля будем вносить поочередно разные точечные массы m_1, m_2, …, m_n. Силы гравитационного притяжения этих точечных масс разные. В то же время отношения

$$\frac{\vec{F}_1}{m_1} = \frac{\vec{F}_2}{m_2} = \ldots = \frac{\vec{F}_n}{m_n} \qquad (6.11)$$

одинаковы для данной точки поля.

Величина силы притяжения, действующая в данной точке гравитационного поля на тело единичной массы, называется *напряженностью гравитационного поля*:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}. \qquad (6.12)$$

Если точка массой m движется только под действием сил поля тяготения, то с учетом эквивалентности инертной и гравитационной масс ($m_{\text{ин}} = m_{\text{гр}} = m$) можно записать

$$ma = mG. \qquad (6.13)$$

У поверхности Земли $a = g$, поэтому вектор напряженности совпадает с ускорением свободного падения (если не учитывать влияния вращения Земли):

$$G = g. \qquad (6.14)$$

Напряженность стационарного гравитационного поля не зависит от времени и является функцией только координат.

Если в каждой точке поля напряженность остается постоянной (G = const), поле называется однородным. Гравитационное поле около поверхности Земли приближенно можно считать однородным.

Для графического изображения силовых полей используется понятие силовых линий (линий напряженности). Силовые линии определяются как линии, касательные к которым в каждой точке поля совпадают с вектором напряженности.

На рис. 6.6 изображены силовые линии однородного поля.

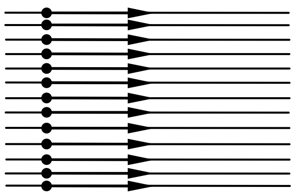


Рис. 6.6

Принцип суперпозиции заключается в том, что при наличии нескольких гравитационных полей, созданных отдельными материальными точками, напряженность суммарного поля равна векторной сумме напряженностей отдельных полей:

$$\vec{g} = \sum_i \vec{g}_i \, . \qquad (6.15)$$

По определению, *потенциал гравитационного поля* в некоторой его точке равен отношению потенциальной энергии сил тяготения к массе пробной частицы m, помещенной в данную точку поля:

$$\varphi = \frac{\Pi}{m}. \qquad (6.16)$$

Согласно принципу суперпозиции для потенциала поля, созданного несколькими источниками, получаем соотношение

$$\varphi = \sum_i^N \varphi_i \, , \qquad (6.17)$$

где φ_i – потенциал поля i-го источника.

9. Центральное гравитационное поле и его характеристики

Поле называется *центральным*, если в каждой его точке вектор напряженности направлен по радиус-вектору, проведенному из центра поля.

С учетом формул (6.10) и (6.12) вектор напряженности центрального поля точечной массы m_1 имеет вид

$$\vec{G} = -\gamma \frac{m_1}{r^3} \vec{r} \, . \qquad (6.18)$$

Центральное гравитационное поле имеет центр симметрии (точка O_1 на рис. 6.7), силовые линии напряженности направлены к центру O_1.

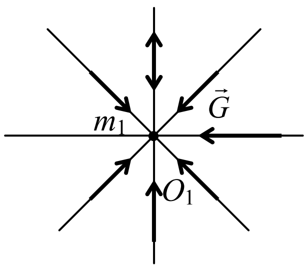


Рис. 6.7

Материальная точка массой m_1, находящаяся в начале координат (рис. 6.7), создает гравитационное поле с потенциалом

$$\varphi_1 = -\frac{\gamma m_1}{r} < 0. \tag{6.19}$$

Изобразим эквипотенциальные поверхности поля, т. е. поверхности, на которых потенциал $\varphi = \text{const}$:

$$\varphi_1 = -\frac{\gamma m_1}{r} = -\text{const} \Rightarrow r = \frac{\gamma m_1}{\text{const}} = \text{const}^*. \tag{6.20}$$

Следовательно, эквипотенциальные поверхности являются сферами определенного радиуса (рис. 6.8).

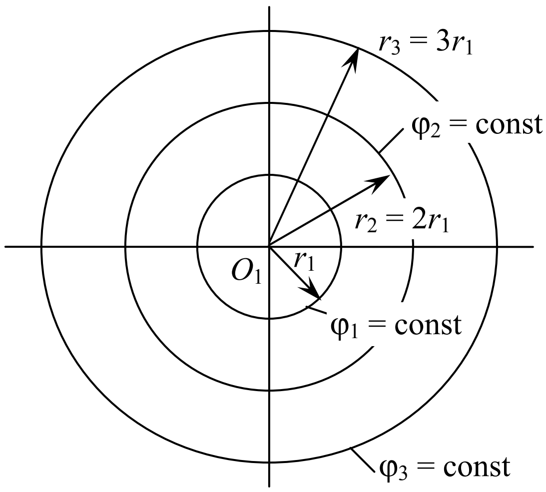


Рис. 6.8

При перемещении точечного тела по эквипотенциальной поверхности силы тяготения, согласно формулам (6.16) и (5.28), работы не совершают. Это означает, что силы тяготения всегда ориентированы перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям.

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ. СИЛОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ПОЛЯ

10. Работа силы центрального гравитационного поля.
11. Потенциальная энергия тела в центральном гравитационном поле.
12. Гравитационное поле Земли.
13. Движение тел в гравитационном поле Земли.
14. Сила земного тяготения и сила тяжести. Зависимость ускорения свободного падения от географической широты.
15. Вес тела. Невесомость.

10. Работа силы центрального гравитационного поля

Поместим тело единичной массы m в выделенную точку в гравитационном поле, создаваемом неподвижной материальной точкой массой M. Потенциал в данной точке поля равен работе, которую выполняет сила гравитационного притяжения при удалении тела единичной массы из этой точки в бесконечность. Подсчитаем работу, которую выполняют гравитационные силы при перемещении материальной точки массой m в гравитационном поле, создаваемом неподвижной материальной точкой массой M. Поместим материальную точку в начало отсчета (рис. 7.1). Гравитационное поле, создаваемое материальной точкой массой M, является центральным. Это означает, что если из начала отсчета описать сферу радиуса R, то в любой ее точке сила притяжения будет постоянная по модулю и направлена вдоль радиуса сферы.

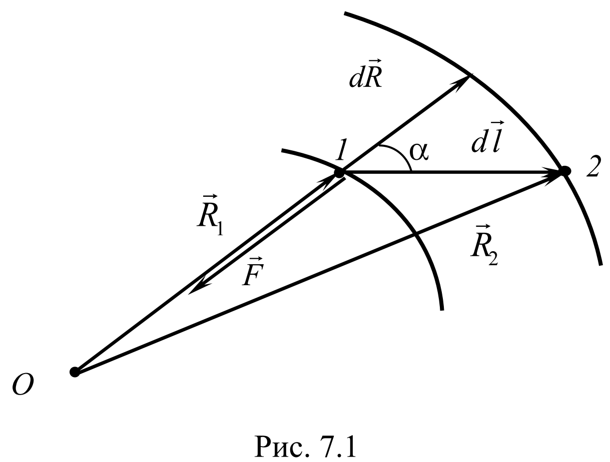


Рис. 7.1

Пусть материальная точка массой m перемещается из положения *1* в положение *2* без изменения кинетической энергии. В соответствии с определением, работа гравитационных сил при элементарном перемещении $d\vec{l}$ имеет вид

$$dA = Fdl\cos(\vec{F}\hat{,}d\vec{l}). \tag{7.1}$$

Поскольку, как видно из рис. 7.1, $\cos(\vec{F}\hat{,}d\vec{l}) = -\cos\alpha$ и $dl\cos\alpha = dR$, то

$$dA = -FdR. \tag{7.2}$$

Работа силы тяготения при перемещении материальной точки из положения *1* в положение *2* определяется формулой

$$A_{12} = -\int_{R_1}^{R_2} G\frac{mM}{R^2}dR = GmM\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right). \tag{7.3}$$

11. Потенциальная энергия тела в центральном гравитационном поле

Гравитационные силы являются консервативными, следовательно, их работа равна уменьшению потенциальной энергии гравитационного поля:

$$A_{12} = -(\Pi_2 - \Pi_1) = \Pi_1 - \Pi_2. \tag{7.4}$$

Приравнивая соотношения (7.3) и (7.4), получим

$$\Pi_1 - \Pi_2 = GmM\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right). \tag{7.5}$$

Если за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии принять ее значение в бесконечности $R_2 \to \infty$ и $\Pi_2 \to 0$, то при таком выборе нулевого уровня потенциальная энергия гравитационного поля всегда будет отрицательной:

$$\Pi = -G\frac{mM}{R}. \tag{7.6}$$

Справедливо утверждение, что соотношение (7.6) определяет потенциальную энергию гравитационного взаимодействия между телами массами M и m, находящимися на расстоянии R друг от друга, и потенциальную энергию точечного тела у поверхности Земли ($h = 0$).

На рис. 7.2 изображена зависимость потенциальной энергии гравитационного поля от расстояния.

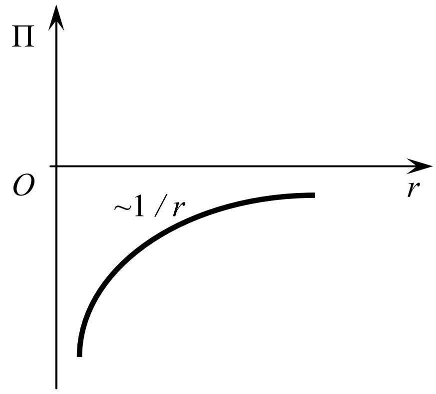


Рис. 7.2

Используя понятие потенциала гравитационного поля, подсчитаем работу, которая выполняется гравитационными силами при движении материальной точки массой m из точки *1* с потенциалом φ_1 в точку *2* с потенциалом φ_2. В соответствии с определением (6.16), в точке *1* потенциальная энергия $\Pi_1 = \varphi_1 / m$, а в точке *2* она имеет вид $\Pi_2 = \varphi_2 / m$. Подставляя эти значения в (7.4), получим

$$A_{12} = m\varphi_1 - m\varphi_2 = m(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (7.7)$$

Таким образом, работа гравитационных сил при движении материальной точки в гравитационном поле равна произведению его массы и разности потенциалов точек поля, между которыми происходит перемещение.

Найдем разность потенциальных энергий точки массой m на высоте h и у поверхности Земли:

$$\Delta\Pi = \Pi(h) - \Pi(0) = -\gamma\frac{Mm}{R+h} + \gamma\frac{Mm}{R} = \frac{\gamma Mmh}{R^2 + hR}, \qquad (7.8)$$

где R – радиус Земли.

Если высота $h << R$, то величиной hR в знаменателе формулы (7.8) можно пренебречь по сравнению с R^2. Учитывая, что вблизи поверхности Земли $F_{\text{гр}} \simeq mg$ ($\gamma Mm / R^2 \simeq mg$), можно для ускорения свободного падения использовать выражение $g \simeq \gamma M / R^2$ и записать формулу для потенциальной энергии в поле сил тяжести (с нулевым уровнем на поверхности Земли):

$$\Pi_{\text{тяж}} = \Delta\Pi(h) = mgh. \qquad (7.9)$$

12. Гравитационное поле Земли

В п. 7 лекции № 6 было показано, что гравитационное поле представляет собой разновидность силового поля: на частицы, помещенные в каждой точке такого поля, действуют силы, прямо пропорциональные определенному физическому свойству этих частиц – массе.

В *гравитационном поле Земли* (*поле тяготения*) на тела действуют силы, пропорциональные их массам. Для характеристики величины и направления силового поля тяготения в конкретной точке поля вводят векторную величину, называемую *напряженностью* и определяемую отношением силы, испытываемой массой, помещенной в данную точку поля, к этой массе (формула (6.12)).

В каждой точке поля Земли можно определить отношение силы, действующей на точечное тело, к массе этого тела; это отношение не зависит от вещества тела и равно ускорению, сообщаемому силой тяготения в данной точке поля:

$$\frac{F}{m} = g; \tag{7.10}$$

$$|g| = G\frac{M}{r^2}, \tag{7.11}$$

где G – гравитационная постоянная; M – масса Земли; r – расстояние до массы m.

Следовательно, векторное отношение силы, действующей на точечное тело, к массе этого тела можно рассматривать как напряженность поля земного тяготения $\vec{G}$.

В любом силовом поле можно провести линию, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором напряженности в данной точке, – линию напряженности. По определению направление линий напряженности считается совпадающим с направлением вектора напряженности. Например, линии напряженности поля тяготения, связанного с материальной точкой, начинаются в бесконечности и кончаются в этой точке (рис. 6.7).

13. Движение тел в гравитационном поле Земли

Траектория, по которой движется тело в центральном гравитационном поле называется *орбитой*, зависит от его начальной скорости и может быть окружностью, эллипсом, параболой или гиперболой. При движении спутника со скоростью υ по орбите вокруг Земли, силы гравитационного притяжения направлены нормально к орбите, и спутник движется с центростремительным ускорением $a = \dfrac{\upsilon^2}{\rho}$ (ρ – радиус кривизны орбиты).

Если не учитывать силы сопротивления, то при движении спутника в любой точке орбиты выполняется закон сохранения энергии:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - G\frac{mM}{r} = \text{const}, \tag{7.12}$$

где m – масса спутника; M – масса Земли; r – расстояние между спутником и Землей.

Выражение (7.12) можно преобразовать для скорости υ спутника:

$$\upsilon^2 = \frac{2GM}{r}. \tag{7.13}$$

Умножив левую и правую части формулы (7.13) на $m/2$, получим

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = G\frac{mM}{r}. \tag{7.14}$$

Левая часть полученного равенства представляет кинетическую энергию спутника, а правая – абсолютное значение потенциальной энергии (нулевой уровень отсчета потенциальной энергии принят в бесконечности). С учетом равенства (7.14) сумма кинетической и потенциальной энергий:

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} - G\frac{mM}{r} = 0. \tag{7.15}$$

Если полная механическая энергия $E = 0$, орбита спутника является параболической. При $E < 0$ – орбита замкнутая (*1*, *2* на рис. 7.3), при $E > 0$ – орбита незамкнутая: парабола (*3*) или гипербола (*4*) (рис. 7.3).

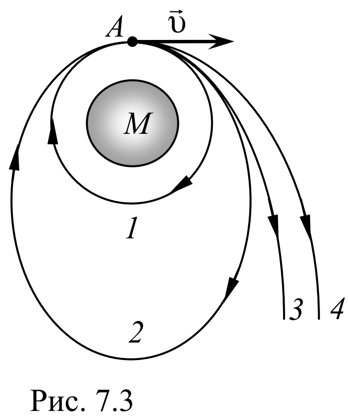


Рис. 7.3

Скорости υ, определяемой из формулы (7.13), соответствует предельная параболическая орбита. При скорости спутника большей, чем скорость, рассчитанная по формуле (7.13), орбиты спутника становятся гиперболическими.

Рассмотрим движение спутника массой m по круговой орбите вокруг Земли. Высота орбиты спутника над поверхностью Земли h. Движение спутника с линейной скоростью υ происходит только под действием силы гравитационного притяжения со стороны Земли. Тогда с учетом формулы (7.11)

$$\frac{\upsilon^2}{R_3 + h} = G\frac{M}{(R_3 + h)^2} = g\frac{R_3^2}{(R_3 + h)^2}, \tag{7.16}$$

где R_3 – радиус Земли.

Из последнего равенства найдем скорость спутника:

$$\upsilon = \sqrt{G\frac{M}{R_3 + h}}. \tag{7.17}$$

Учитывая, что $h << R_3$ и ускорение свободного падения на поверхности Земли g_0:

$$g_0 = G\frac{M}{R_3^2},$$

выполнив преобразования в формуле (7.17), получим следующее выражение для скорости спутника или так называемой *первой космической скорости*:

$$\upsilon_1 = \sqrt{G\frac{M}{R_3 + h}} \approx \sqrt{G\frac{M}{R_3{}^2}R_3} = \sqrt{g_0 R_3}. \tag{7.18}$$

Скорость υ_1 является минимальной скоростью, которую должен иметь спутник, чтобы он мог двигаться по круговой орбите на минимальной высоте около поверхности Земли. Принимая $g_0 = 9{,}81$ м/с^2, $R_3 = 6{,}37 \cdot 10^6$ м, получим $\upsilon_1 \approx 8$ км/с.

Следует отметить, что при запуске спутника на круговую орбиту, должны быть строго выдержаны величина и направление скорости ракеты-носителя в момент выключения двигателей.

Рассмотрим движение тела, посланного вертикально вверх, при отсутствии сил сопротивления среды. Найдем скорость υ_2, которую необходимо сообщить телу для преодоления сил притяжения Земли. При движении тела запас его кинетической энергии расходуется для выполнения работы против гравитационных сил. Изменение кинетической энергии тела равно работе силы гравитационного притяжения:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_2^2}{2} = -\int_{R_З}^{\infty} G\frac{mM}{R^2}dR\,, \tag{7.19}$$

где R – расстояние от центра Земли до тела.

На бесконечном расстоянии от поверхности Земли конечная скорость тела равна нулю. В этом случае соотношение (7.19) имеет вид

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} = \int_{R_З}^{\infty} G\frac{mM}{R^2}dR\,.$$

После интегрирования правой части равенства получим

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} = G\frac{mM}{R_З}\,. \tag{7.20}$$

Из последнего равенства выразим начальную скорость тела:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R_З}}\,. \tag{7.21}$$

С учетом формулы (7.18) получим

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g_0R_З} = \sqrt{2}\upsilon_1\,. \tag{7.22}$$

Данная скорость получила название *второй космической скорости*, она равна 11,2 км/с. Это наименьшая начальная скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно никогда не вернулось на Землю или по-другому: чтобы вывести его из сферы гравитационного притяжения Земли. Если телу сообщается вторая космическая скорость, то оно движется по параболической траектории. Расчеты показывают, что при движении ракеты-носителя в атмосфере для выхода за пределы сферы гравитационного притяжения Земли она должна иметь скорость 12–14 км/с.

Третьей космической скоростью называется минимальная начальная скорость, при которой тело, начиная движение вблизи поверхности Земли, преодолевает земное притяжение, затем притяжение Солнца и покидает Солнечную систему.

Значение третьей космической скорости зависит от того, в каком направлении корабль выходит из зоны земного тяготения. Минимальное значение υ_3 приближенно равно 16,7 км/с.

14. Сила земного тяготения и сила тяжести. Зависимость ускорения свободного падения от географической широты

Обычно считается, что система отсчета x_i, y_i, z_i, связанная с Землей, является инерциальной. Однако в действительности геоцентрическая система неинерциальна, в первую очередь за счет суточного вращения Земли (рис. 7.4). Всякая материальная точка или тело, находящиеся вблизи поверхности Земли, испытывают действие гравитационного притяжения и влияние поля центробежных сил инерции.

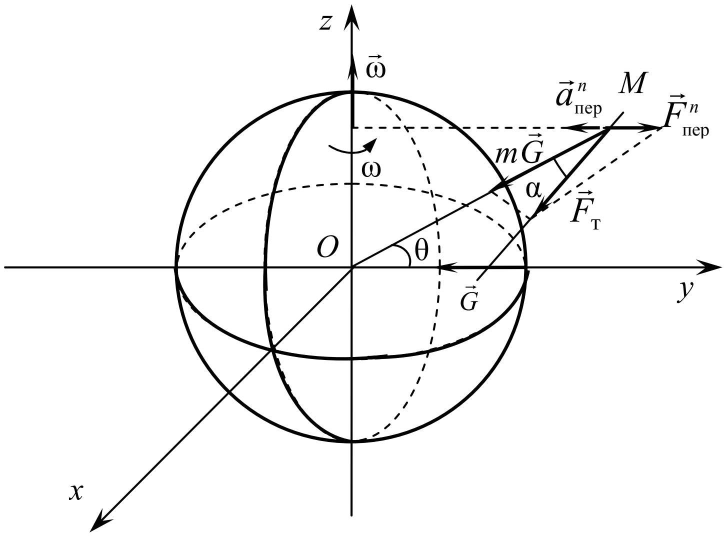


Рис. 7.4

Вблизи поверхности Земли $h \ll R$, поэтому сила тяготения $\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{G}$ практически не зависит от высоты h, поскольку модуль напряженности гравитационного поля:

$$G = \gamma \frac{M}{r^2} = \gamma \frac{M}{(R+h)^2} \approx \gamma \frac{M}{R^2} = \text{const}\ (h \ll R). \qquad (7.23)$$

Поле центробежных сил обусловлено суточным вращением Земли и определяется переносной силой инерции:

$$\vec{F}_{\text{пер}} = -m\vec{a}^{\,n}_{\text{пер}}, \qquad (7.24)$$

которую у поверхности Земли ($h \ll R$) можно определить по формуле

$$F_{\text{пер}} = m\omega^2 R\cos\theta, \tag{7.25}$$

где ω – угловая скорость суточного вращения Земли; θ – широта местности.

Переносная сила инерции направлена противоположно нормальному переносному ускорению (рис. 7.4), т. е перпендикулярно оси вращения Земли. Результирующую сил $m\vec{G}$ и $\vec{F}_{\text{пер}}$ называют *силой тяжести*:

$$\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{G} + \vec{F}_{\text{пер}}. \tag{7.26}$$

Сила тяжести определяет направление вертикали (направление отвеса) в данной местности с географической широтой θ и ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_{\text{т}}}{m} = \vec{G} + \frac{\vec{F}_{\text{пер}}}{m}. \tag{7.27}$$

Таким образом, ускорение $\vec{g} = \vec{G} + \dfrac{\vec{F}_{\text{пер}}}{m}$ учитывает суммарный эффект от действия реальной силы тяготения и наличия фиктивной центробежной силы, связанной с вращением Земли.

Величину g можно экспериментально определить по свободному падению. Проведем расчеты для определения относительного вклада гравитационных и инерционных сил в значение силы тяжести, а, следовательно, и в ускорение g. Поскольку Земля сплюснута в направлении земной оси незначительно, то можно рассматривать ее в виде шара средним радиусом R = 6370 км со сферическим симметричным распределением массы. В этом случае вектор напряженности $\vec{G}$ направлен к центру шара (рис. 7.4), а его модуль вблизи поверхности Земли практически не изменяется и определяется по формуле (7.23) (масса Земли $M = 5{,}96 \cdot 10^{24}$ кг):

$$G = \gamma\frac{M}{R^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5{,}96\cdot10^{24}}{(6{,}37\cdot10^6)^2} = 9{,}8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Из соотношения (7.27) видно, что вклад в ускорение g от центробежных сил будет наибольшим на экваторе, где $\cos\theta = 1$. Тогда

$$a^n_{\text{пер}} = \omega^2 R = \frac{4\cdot 3{,}14^2}{(24\cdot3600)^2}\cdot 6{,}37\cdot10^6 = 0{,}034 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Таким образом, согласно формуле (7.27), на экваторе ускорение $g = 9{,}80 - 0{,}034 = 9{,}77$ м · с$^{-2}$, что незначительно отличается от ускорения на полюсе, где $g = 9{,}80$ м · с$^{-2}$.

На опыте получаются значения: на полюсе $g = 9{,}83$ м · с$^{-2}$, на экваторе $g = 9{,}78$ м · с$^{-2}$. Поскольку $a^n_{\text{пер}} = 0{,}034$ м · с$^{-2}$ намного меньше, чем G, то угол $\alpha \approx 0^0$ (рис. 7.4), следовательно, направление вертикали практически совпадает с направлением вектора $\vec{G}$ гравитационного поля Земли.

Понятие силы тяжести определяется для тела, покоящегося относительно Земли. В случае движения тела в поле сил тяжести следует дополнительно учитывать вклад от кориолисовых сил инерции.

15. Вес тела. Невесомость

Вес тела – сила, с которой тело действует на горизонтальную подставку или на вертикальный подвес вследствие гравитационного притяжения к Земле. При этом предполагается, что тело неподвижно относительно опоры или подвеса. Это определение относится к системе отсчета, связанной с подставкой или подвесом. Оно соответствует практике определения веса в земных условиях на пружинных весах.

Пусть тело лежит на неподвижном относительно Земли горизонтальном столе (рис. 7.5). На тело действуют сила тяжести $\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила $\vec{F}_Y = \vec{N}$, с которой опора действует на тело.

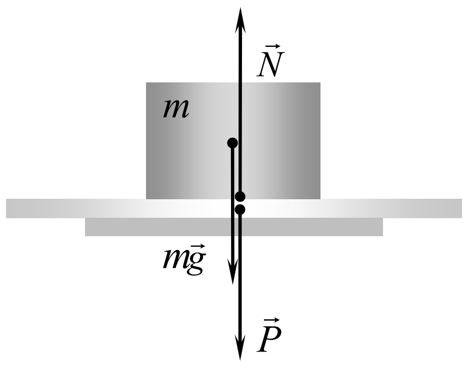


Рис. 7.5

Силу $\vec{N}$ называют *силой нормального давления* или *силой реакции опоры*. Силы, действующие на тело, уравновешивают друг друга:

$\vec{F} = -\vec{N}$. В соответствии с третьим законом Ньютона тело действует на опору с некоторой силой $\vec{P}$, равной по модулю силе реакции опоры и направленной в противоположную сторону: $\vec{P} = -\vec{N}$. Силу $\vec{P}$ называют *весом тела*.

По третьему закону Ньютона вес в отсутствии выталкивающей силы равен по величине и противоположен по направлению силе нормальной реакции горизонтальной подставки (или силе натяжения вертикального подвеса).

В свою очередь, согласно второму закону Ньютона, эта сила равна по величине и противоположна по направлению силе тяжести, так как под действием этих сил тело покоится или движется прямолинейно и равномерно.

Если тело неподвижно висит на пружинных весах, то роль силы реакции опоры (подвеса) играет упругая сила пружины. По растяжению пружины можно определить вес тела и равную ему силу притяжения тела Землей.

Таким образом, вес тела по величине совпадает с силой тяжести.

Однако эти две силы нельзя отождествлять, так как вес тела – это сила, приложенная к подставке или подвесу со стороны тела, тогда как сила тяжести приложена к телу со стороны Земли.

Вес тела появляется только в том случае, если оно вынуждено двигаться с ускорением, отличным от ускорения свободного падения. Это возможно, если на тело, кроме силы тяготения, действуют и другие силы.

Вес тела есть та сила, с которой данное тело действует на другие тела, препятствующие его свободному движению в поле тяготения.

Для того чтобы в поле тяготения Земли данное тело двигалось с ускорением $\vec{a}$, отличным от $\vec{g}$, к нему должна быть приложена со стороны других тел дополнительная сила $\vec{N}$, удовлетворяющая условию

$$\vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}. \tag{7.28}$$

Тогда вес тела, т. е. сила, с которой данное тело действует на другие тела:

$$\vec{P} = -\vec{N} = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a}). \tag{7.29}$$

Если тело покоится или движется прямолинейно и равномерно, то $|\vec{a}| = 0$ и $\vec{P} = m\vec{g}$. Если тело свободно движется в поле тяготения по любой траектории (прямолинейной, параболической, эллиптической или круговой) и в любом направлении, то $\vec{a} = \vec{g}$, $|\vec{P}| = 0$ и тело будет *невесомым*.

При любом движении тела в гравитационном поле другого тела всегда действует сила тяготения. Вес же появляется только в том случае, когда на данное тело, кроме силы тяготения, действуют еще и другие силы, вследствие чего тело вынуждено покоиться или двигаться с ускорением, отличным от $\vec{g}$.

Из формулы (7.29) видно, что если $a < g$, то вес тела P в ускоренно движущемся вниз лифте (рис. 7.6, *а*) меньше силы тяжести.

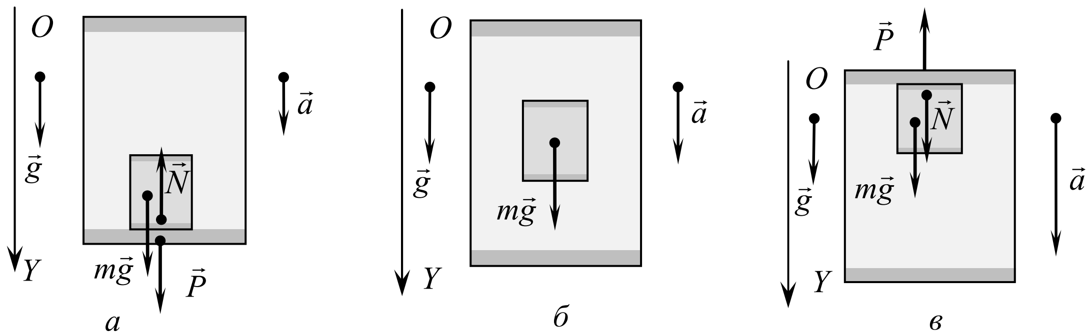


Рис. 7.6

Если $a > g$, то вес тела изменяет знак. Это означает, что тело прижимается не к полу, а к потолку кабины лифта («отрицательный» вес) (рис. 7.6, *в*). Наконец, если $a = g$, то $P = 0$. Тело свободно падает на Землю вместе с кабиной (рис. 7.6, *б*). Такое состояние называют невесомостью.

Невесомость – состояние тела, когда его вес равен нулю, т. е. такое состояние механической системы, при котором действующее на систему гравитационное поле не вызывает давлений частиц системы друг на друга.

Всякое свободно падающее тело, движущееся только под действием силы тяжести, находится в состоянии невесомости.

При движении космического корабля вокруг Земли его ускорение равно ускорению силы тяжести (ускорению свободного падения), т. е. спутник находится в состоянии свободного падения. Поэтому сила давления космонавта на опору равна нулю.

ЛЕКЦИЯ № 8

СВОБОДНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1. Свободные гармонические колебания и их характеристики. Гармонический осциллятор.
2. Уравнение гармонических колебаний.
3. Энергия гармонических колебаний.
4. Маятники.
5. Сложение гармонических колебаний.

1. Свободные гармонические колебания и их характеристики. Гармонический осциллятор

Колебательное движение (*колебание*) − движение материального объекта, обладающее той или иной степенью повторяемости во времени.

Свободные колебания (или *собственные*) − колебания, совершающиеся в замкнутой системе за счет первоначально сообщенной энергии и без внешних воздействий.

Гармонические колебания − колебания, при которых физические величины, их описывающие, изменяются по закону синуса или косинуса.

Различные периодические процессы (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) могут быть представлены в виде суммы (суперпозиции) гармонических колебаний.

Физическая природа колебаний может быть разной – различают механические, электромагнитные и другие колебания.

Гармоническое колебание величины s описывается уравнением типа

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{8.1}$$

где A – *амплитуда колебания* – максимальное значение колеблющейся величины; ω_0 – круговая (циклическая) частота; φ_0 – начальная *фаза колебания* в момент времени $t = 0$; $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебания в момент времени t.

В случае прямолинейных свободных незатухающих гармонических колебаний материальной точки ее координата x изменяется по закону

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{8.2}$$

где x − линейное отклонение материального объекта от положения равновесия; $\omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi / T_0$ − собственная циклическая частота; T_0 − период колебаний.

На рис. 8.1 показано, как гармонические колебания можно изобразить графически *методом векторных диаграмм* (*методом вращающейся амплитуды*).

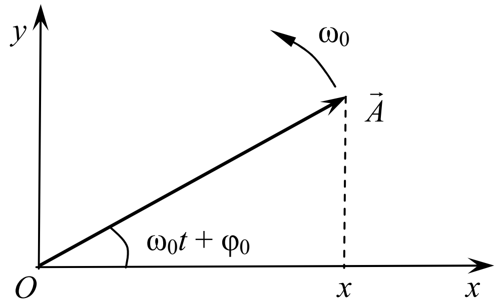


Рис. 8.1

Из произвольной точки O, выбранной на оси x, под углом φ_0, равным начальной фазе колебания, откладывается вектор $\vec{A}$, модуль которого равен амплитуде A рассматриваемого колебания. Если этот вектор будет вращаться вокруг точки O против хода часовой стрелки с циклической частотой, равной ω_0, то его проекция на ось x будет совершать колебания по закону (8.2).

Периодом колебаний T_0 называется наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются состояния колеблющейся системы (совершается одно полное колебание), и фаза колебания получает приращение 2π:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{8.3}$$

Частотой колебаний называется величина, обратная периоду колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T_0}. \tag{8.4}$$

Частота колебаний измеряется в герцах: 1 Гц = 1 $с^{-1}$.

2. Уравнение гармонических колебаний

Пусть материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси x около положения равновесия, принятого за начало координат (рис. 8.2). Поскольку частица движется, совершая колебания, то она обладает скоростью и ускорением.

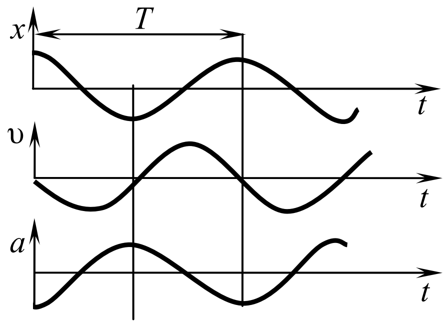


Рис. 8.2

Первая (скорость) и вторая (ускорение) производные по времени от гармонически колеблющейся величины x также совершают гармонические колебания с той же циклической частотой:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}). \tag{8.5}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi). \tag{8.6}$$

Тогда для колеблющейся точки согласно формулам (8.5), (8.6) фаза скорости отличается от фазы смещения на $\pi / 2$, а фаза ускорения на π (рис. 8.2).

Уравнение гармонических колебаний (8.1) можно записать в комплексной экспоненциальной форме:

$$\tilde{s} = Ae^{i(\omega t + \varphi)}. \tag{8.7}$$

Физический смысл имеет только вещественная часть комплексной функции $\tilde{s}$, которая и представляет собой уравнение гармонических колебаний:

$$s = \mathrm{Re}(\tilde{s}) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{8.8}$$

что следует из формулы Эйлера для комплексных чисел:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{8.9}$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Из формул (8.2) и (8.6) следует, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \tag{8.10}$$

Уравнение (8.10) называется *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*. Его решение – формула (8.2).

Проекция силы, действующей на колеблющуюся материальную точку массой m, может быть найдена с помощью второго закона Ньютона:

$$F_x = ma_x = -kx \;\Rightarrow\; k = m\omega_0^2, \tag{8.11}$$

где k – коэффициент пропорциональности, выражение для которого получено из соотношения

$$F_x = ma_x = mA\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) =$$
$$= -m\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -m\omega_0^2 x. \tag{8.12}$$

Поэтому сила, действующая на частицу, совершающую гармонические колебания, является *квазиупругой* и называется *возвращающей силой*, так как пропорциональна смещению материальной точки и направлена в сторону, противоположную смещению (к положению равновесия (при $x = 0$, $F_x = 0$ – это положение равновесия точки)).

Гармоническим (линейным) осциллятором называется система, совершающая колебания под действием возвращающей силы и описываемым дифференциальным уравнением (8.10).

Собственная циклическая частота осциллятора:

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}. \tag{8.13}$$

3. Энергия гармонических колебаний

Колебания сопровождаются попеременным превращением энергии одного вида в энергию другого вида.

Кинетическая энергия линейного осциллятора:

$$K = m\frac{\upsilon^2}{2} = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$
$$= \frac{m}{4}A^2\omega_0^2[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]. \tag{8.14}$$

Потенциальную энергию осциллятора наиболее удобно отсчитывать от положения равновесия (координата $x = 0$ соответствует нулевому уровню для потенциальной энергии). Тогда для произвольного положения точки с координатой x по определению получим

$$\Pi = \int_x^0 F_x dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{m}{4}A^2\omega_0^2[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]. \qquad (8.15)$$

Полная механическая энергия осциллятора сохраняется:

$$E = K + \Pi = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 = \text{const}. \qquad (8.16)$$

Согласно выражениям (8.14), (8.15) средние значения кинетической и потенциальной энергий определяются соответственно средними значениями квадратов синуса φ и косинуса φ при изменении фазы $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ на 2π. Поскольку $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$, а среднее значение квадрата косинуса φ

$$\left\langle \cos^2\varphi \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}, \qquad (8.17)$$

тогда для средних значений кинетической и потенциальной энергии:

$$\langle K \rangle = \langle \Pi \rangle = \frac{1}{4}mA^2\omega_0^2 = \frac{E}{2}. \qquad (8.18)$$

Таким образом, из проведенного анализа следует, что кинетическая и потенциальная энергии изменяются относительно своих средних значений по гармоническому закону с частотой $2\omega_0$ и амплитудой, равной $mA^2\omega_0^2 / 4$.

Зависимости x, K, Π, E от времени t представлены на рис. 8.3 (начальная фаза $\varphi_0 = 0$).

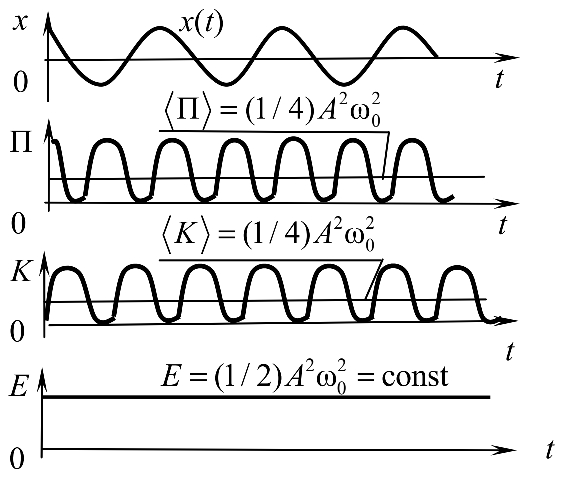


Рис. 8.3

4. Маятники

Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, математический и физический маятники.

Рассмотрим движение груза, прикрепленного к пружине, второй конец A которой неподвижный (рис. 8.4). Естественная (без деформации) длина пружины равна l_0. Когда груз висит на пружине и не двигается, то он находится в состоянии равновесия. При этом пружина имеет *статическую деформацию* $\lambda_{\text{ст}}$.

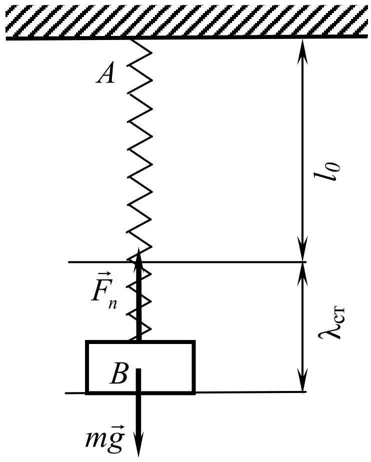


Рис. 8.4

В этом случае активная сила тяжести $m\vec{g}$ груза уравновешивается силой упругости (натяжения) $\vec{F}_{\text{п}}$ пружины.

Пружинный маятник – это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием силы упругости $\vec{F}_{\text{п}}$ (рис. 8.4):

$$F_{\text{п}} = -k\lambda, \tag{8.19}$$

где k – коэффициент жесткости пружины; λ – деформация пружины.

Коэффициент жесткости пружины численно равен силе, с которой нужно воздействовать на конец B пружины, чтобы деформировать ее (растянуть или сжать) на единицу длины.

В положении равновесия груза

$$mg = k\lambda_{\text{ст}},$$

где $\lambda_{\text{ст}}$ – статическая деформация.

Следовательно

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{mg}{k}. \tag{8.20}$$

Если грузу придать движение по вертикали, то будем наблюдать свободные гармонические колебания.

Для описания движения груза необходимо выбрать систему отсчета. Если начало координат выбрать на уровне конца недеформированной пружины (рис. 8.5, *а*) и ось x направить вниз, то в любой момент времени деформация пружины при движении груза равна значению координаты груза:

$$\lambda = x \Rightarrow F_{\text{п}x} = -kx.$$

При этом $\lambda > 0$ соответствует деформации растяжения, $\lambda < 0$ – деформации сжатия.

В случае, когда начало координат выбрано на уровне места, в котором груз находился в положении равновесия (рис. 8.5, *б*), тогда, если груз имеет координату $x = 0$, то деформация пружины равна статической деформации $\lambda_{\text{ст}}$. В произвольный момент движения груза деформация пружины

$$\lambda = \lambda_{\text{ст}} + x.$$

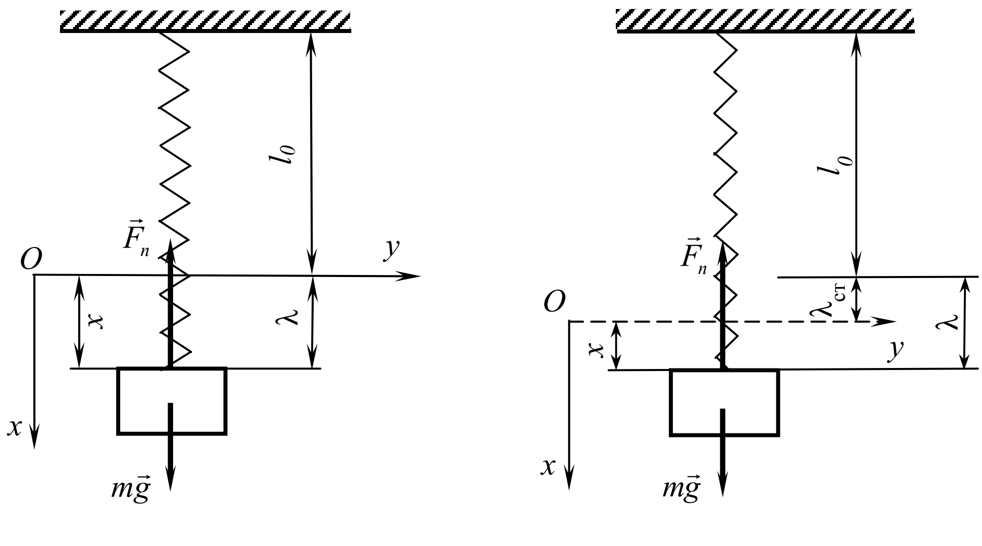


Рис. 8.5

Сила упругости пружины

$$F_n = k\lambda = k\lambda_{\text{ст}} + kx.$$

Дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = mg - F_п \Rightarrow m\ddot{x} = mg - k\lambda_{ст} - kx;$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g - \frac{k}{m}\lambda_{ст}.$$

После подстановки выражения (8.20) получим

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (8.21)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением колебания гармонического осциллятора (8.10), видно, что пружинный маятник совершает колебания по закону $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ с частотой $\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$.

Потенциальная энергия пружинного маятника

$$U = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{kx^2}{2}. \qquad (8.22)$$

Математическим маятником называется идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длиной l, и колеблющейся под действием силы тяжести без трения (рис. 8.6).

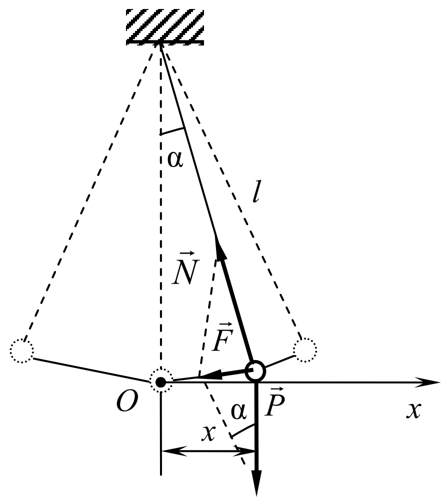


Рис. 8.6

При малых углах отклонения α можно считать: $x \approx l\alpha$.

Возвращающая сила

$$F_x \cong -P\sin\alpha \approx -mg\alpha = -mg\frac{x}{l}. \qquad (8.23)$$

Уравнение движения

$$m\ddot{x} = F_x = -mg\frac{x}{l} \text{ или } \ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0. \qquad (8.24)$$

Следовательно, движение математического маятника описывается дифференциальным уравнением гармонических колебаний, т. е. происходит по закону $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ с частотой и периодом соответственно

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (8.25)$$

Физическим маятником называется твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс тела (рис. 8.7).

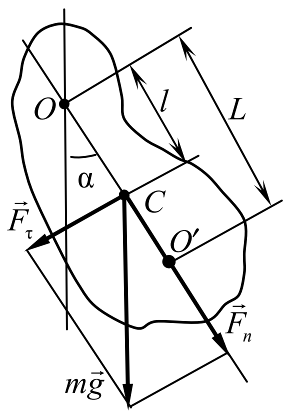


Рис. 8.7

Если физический маятник отклонен из положения равновесия на некоторый малый угол α, то момент возвращающей силы

$$M_O = -F_\tau l = -mgl\sin\alpha \approx -mgl\alpha, \qquad (8.26)$$

где l − расстояние между точкой подвеса и центром масс C маятника; $F_\tau = -mg\sin\alpha$ – возвращающая сила (со знаком минус, поскольку она всегда направлена противоположно направлению увеличения α).

Так как рассматривается вращательное движение твердого тела, то с учетом основного уравнения динамики вращательного движения относительно горизонтальной оси вращения x, проходящей через точку O подвеса перпендикулярно плоскости (рис. 8.7), и формулы для углового ускорения $\varepsilon = \ddot{\alpha}$ получим уравнение

$$I_{Ox}\varepsilon = -mgl\alpha. \qquad (8.27)$$

Следовательно

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I_{Ox}}\alpha = 0. \tag{8.28}$$

Решение уравнения (8.28):

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0);\ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I_{Ox}}}. \tag{8.29}$$

Из полученного решения следует, что при малых отклонениях от равновесия физический маятник совершает свободные гармонические колебания с циклической частотой ω_0 и периодом

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{Ox}}{mgl}}\ . \tag{8.30}$$

Введем понятие *приведенной длины физического маятника* L:

$$L = \frac{I_{Ox}}{ml}. \tag{8.31}$$

Приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, который имеет такой же период колебаний, что и данный физический маятник.

Тогда

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\ . \tag{8.32}$$

Точка O' на продолжении прямой OC, отстоящая от оси подвеса на расстояние приведенной длины L, называется *центром качаний физического маятника*. Точка подвеса O и центр качания O' обладают свойством взаимности. Можно показать, используя теорему Штейнера, что при переносе точки подвеса в центр качания период колебаний не изменится, поскольку прежняя точка подвеса становится новым центром качания O'.

Математический маятник можно представить как частный (предельный) случай физического маятника, вся масса которого сосредоточена в его центре масс. При этом $I = ml^2$, следовательно

$$T_0 = 2\pi\sqrt{(\frac{l}{g})}\ .$$

5. Сложение гармонических колебаний

Если система одновременно участвует в нескольких колебательных процессах, то под сложением колебаний понимают нахождение закона, описывающего результирующий колебательный процесс.

Для сложения двух прямолинейных одинаково направленных колебаний одинаковой частоты $x_1 = A_1\cos\varphi_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_{01})$ и $x_2 = A_2\cos\varphi_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_{02})$ используем метод вращающегося вектора амплитуды – метод векторных диаграмм (рис. 8.8).

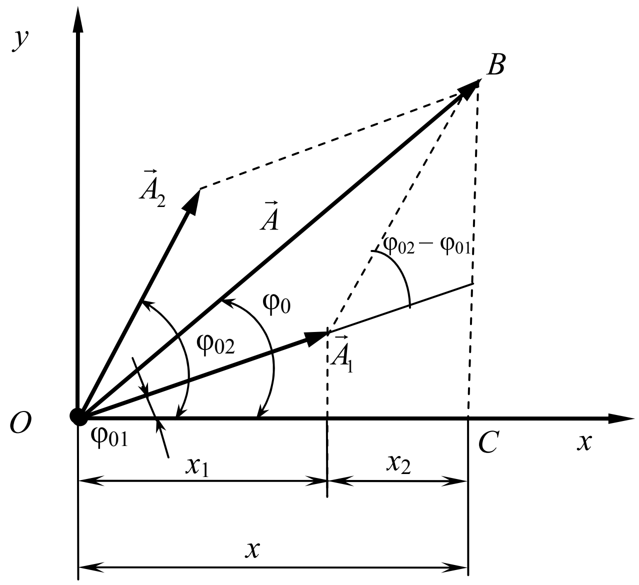


Рис. 8.8

Так как колебания совершаются вдоль одной прямой, то и результирующие колебания будут происходить вдоль этой же прямой. Отложим из точки O под углом φ_{01} вектор амплитуды $\vec{A}_1$ и под углом φ_{02} вектор амплитуды $\vec{A}_2$ (рис. 8.8). Оба вектора вращаются против часовой стрелки с одинаковой угловой скоростью ω_0, поэтому угол между ними $\varphi_{02} - \varphi_{01}$ (разность фаз) остается постоянным.

По правилу векторного сложения (правило параллелограмма) результирующее колебание описывается проекцией вектора $\vec{A}$ на ось Ox. Уравнение результирующего колебания будет

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где A – амплитуда результирующего колебания; φ_0 – начальная фаза колебания.

Из рис. 8.8 видно, что квадрат амплитуды результирующего колебания определяется по теореме косинусов:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{8.33}$$

Начальная фаза φ_0 определяется из соотношения

$$\mathrm{tg}\,\varphi_0 = \frac{BC}{OC}$$

или

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}}. \tag{8.34}$$

Сумма двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты есть гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания. Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз складываемых колебаний:

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \pm 2m\pi; \left(m = 0, 1, 2, ...\right), \text{ то } A = A_1 + A_2, \\ \text{если } \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \pm(2m+1)\pi; \left(m = 0, 1, 2, ...\right), \text{то } A = |\,A_1 - A_2\,|. \end{array}\right\} \tag{8.35}$$

Пусть два гармонических колебания одинаковой частоты ω происходят во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей x и y. Для простоты выберем начало отсчета по времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю:

$$x = A\cos\omega_0 t\,;\ \ y = B\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где φ_0 – разность фаз колебаний, а A и B – их амплитуды.

Уравнение траектории результирующего колебания можно найти, исключив из этих уравнений время t:

$$\frac{x}{A} = \cos\omega_0 t;\ \ \frac{y}{B} = \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \cos\omega_0 t\cos\varphi_0 - \sin\omega_0 t\sin\varphi_0.$$

Подставляя первое уравнение во второе, и учитывая, что $\sin\omega_0 t = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{A^2}}$, получим

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi_0 + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi_0. \tag{8.36}$$

Это *уравнение эллипса*, ориентация осей которого зависит от разности фаз φ_0 и в общем случае не совпадает с координатными осями x и y (рис. 8.9).

Ввиду полученного результата колебания называются *эллиптически поляризованными.*

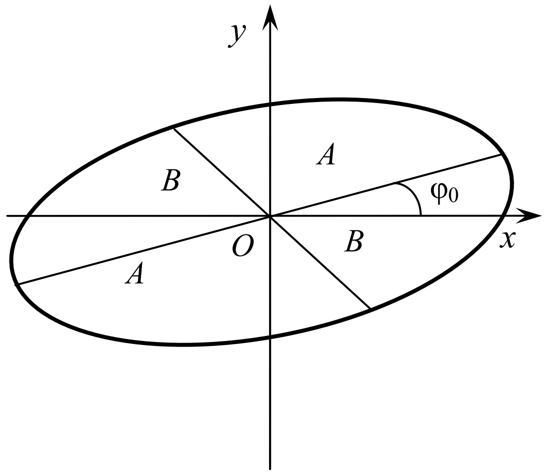


Рис. 8.9

Если разность фаз $\varphi_0 = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$), то $\cos\varphi_0 = \pm 1$, и эллипс вырождается в отрезок прямой:

$$\left(\frac{x}{A} \pm \frac{y}{B}\right)^2 = 0.$$

Отсюда следует

$$y = \pm \frac{B}{A} x = \pm(\operatorname{tg}\alpha)x, \qquad (8.37)$$

где знак плюс соответствует четным значениям m, а знак минус – нечетным значениям m.

Результирующее колебание является гармоническим колебанием с частотой ω_0 и амплитудой $\sqrt{(A^2 + B^2)}$ и совершается вдоль прямой, составляющей с осью x угол $\alpha = \operatorname{arctg}\left[\left(\frac{B}{A}\right)\cos m\pi\right]$ и являющейся диагональю прямоугольника со сторонами 2A (по оси x) и 2B (по оси y) (рис. 8.10).

Такие колебания называются *линейно поляризованными колебаниями.*

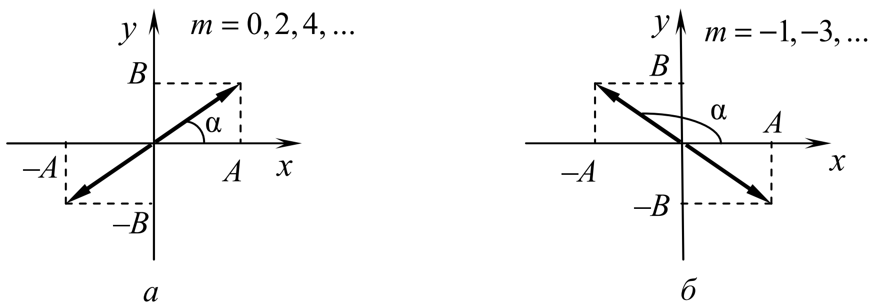


Рис. 8.10

Если разность фаз $\varphi_0 = (2m+1)\pi/2$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$), то уравнение траектории принимает вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1\,. \qquad (8.38)$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам A и B.

Если $A = B$, то эллипс вырождается в окружность, и такие колебания называются *циркулярно-поляризованными* или колебаниями, поляризованными по кругу (рис. 8.11).

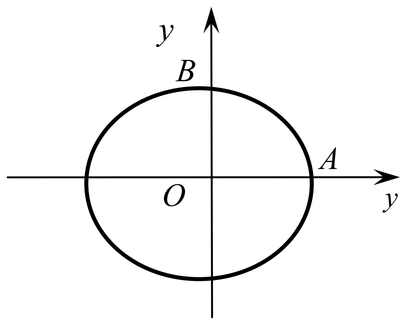


Рис. 8.11

Если взаимно перпендикулярные колебания происходят с циклическими частотами $p\omega_0$ и $q\omega_0$, где q и p – целые числа, то

$$x = A\cos(p\omega_0 t + \varphi_{01});\; y = B\cos(q\omega_0 t + \varphi_{02})\,. \qquad (8.39)$$

Тогда значения координат x и y колеблющейся точки одновременно повторяются через одинаковые промежутки времени T_0, равные наименьшему общему кратному периодов $T_1 = \dfrac{2\pi}{p\omega_0}$ и $T_2 = \dfrac{2\pi}{q\omega_0}$ колебаний вдоль осей Ox и Oy, если оно существует.

Траектории замкнутых кривых, которые получаются в этих случаях, называются *фигурами Лиссажу*.

Вид этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. На рис. 8.12 показан вид фигур Лиссажу при трех различных значениях отношения q / p (2:1, 3:2, 4:3) и разности начальных фаз $\varphi_0 = \pi / 2$.

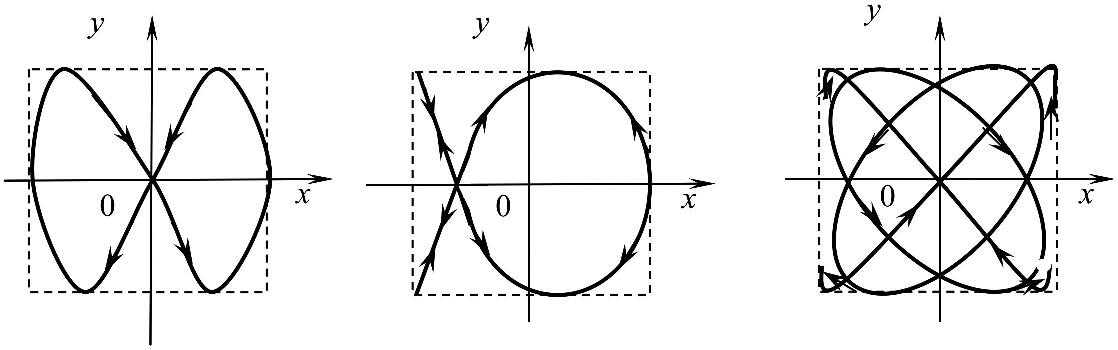


Рис. 8.12

В простейшем случае равенства обоих периодов $T_1 = T_2$ фигуры Лиссажу представляют собой эллипсы, которые при разности начальных фаз $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi$ вырождаются в отрезки прямых, а при $\varphi_0 = \pi / 2$ и равенстве амплитуд превращаются в окружность.

ЛЕКЦИЯ № 9

ЗАТУХАЮЩИЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

6. Затухающие колебания.
7. Уравнение затухающих колебаний. Амплитуда и фаза затухающих колебаний.
8. Логарифмический декремент колебаний.
9. Апериодическое движение.
10. Вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.
11. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс.

6. Затухающие колебания

До сих пор мы рассматривали идеализированную ситуацию – модель, в которой движение тела происходит в пустоте, или ситуацию, в которой влиянием среды на движение можно пренебречь. На самом деле, при движении тела в среде всегда существует сопротивление со стороны среды, стремящееся замедлить движение тела. При этом энергия движущегося тела в конце концов переходит в тепло. В таких случаях говорят, что имеет место диссипация энергии.

Затуханием колебаний называется постепенное ослабление колебаний с течением времени, обусловленное потерей энергии колебательной системой.

Примеры свободных затухающих колебаний (рассмотрим затухающие колебания различной физической природы):

1) механические колебания − колебания, совершающиеся в системе при наличии сил вязкого сопротивления или трения: пружинный маятник с массой m, который совершает малые колебания под действием упругой силы $F_x = -kx$ и силы трения $F_{\text{тр}x} = -\mu\upsilon_x$ (μ – коэффициент сопротивления);

2) электромагнитные колебания – колебания в колебательном контуре, состоящем из сопротивления R, индуктивности L и емкости C. Затухание в электрических колебательных системах вызывается тепловыми потерями и потерями на излучение электромагнитных волн, а также тепловыми потерями в диэлектриках и ферромагнетиках вследствие электрического и магнитного гистерезиса.

7. Уравнение затухающих колебаний. Амплитуда и фаза затухающих колебаний

Дифференциальное уравнение прямолинейных свободных затухающих гармонических колебаний с учетом квазиупругих сил можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0 \Rightarrow \quad \ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0, \qquad (9.1)$$

где $\beta=\mu/2m$ – *коэффициент затухания* (μ − коэффициент сопротивления среды в формуле для силы сопротивления Стокса: $\vec{F}_C=-\mu\vec{\upsilon}$); ω_0 – собственная частота колебаний (когда сила сопротивления Стокса $F_C=0$).

В отличие от собственных колебаний, энергия колебаний будет уменьшаться, расходуясь на преодоление трения. Следовательно, амплитуда колебаний должна зависеть от времени, постоянно уменьшаясь. Кроме того, силы трения тормозят движение, что должно приводить к уменьшению частоты колебаний. Действительно, решение уравнения (9.1) имеет вид

$$x=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi);\ A(t)=A_0e^{-\beta t}, \qquad (9.2)$$

где A_0 − начальная амплитуда колебаний; ω – циклическая частота затухающих колебаний; $(\omega t+\varphi)$ – фаза затухающих колебаний в момент времени t; $A(t)$ − амплитуда затухающих колебаний.

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}. \qquad (9.3)$$

Период затухающих колебаний

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}. \qquad (9.4)$$

Затухающие колебания, описываемые формулой (9.2), можно представить как гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой (рис. 9.1). Скорость затухания колебаний определяется коэффициентом затухания β.

8. Логарифмический декремент колебаний

Отношение двух последовательных максимальных отклонений от положения равновесия, отстоящих друг от друга на один период колебаний, не зависит от времени и остается постоянным.

Это отношение называется *декрементом колебаний* Δ:

$$\Delta = \frac{A(t+T)}{A(t)} = \frac{A_0 e^{-\beta(t+T)}}{A_0 e^{-\beta t}} = e^{-\beta T}. \qquad (9.5)$$

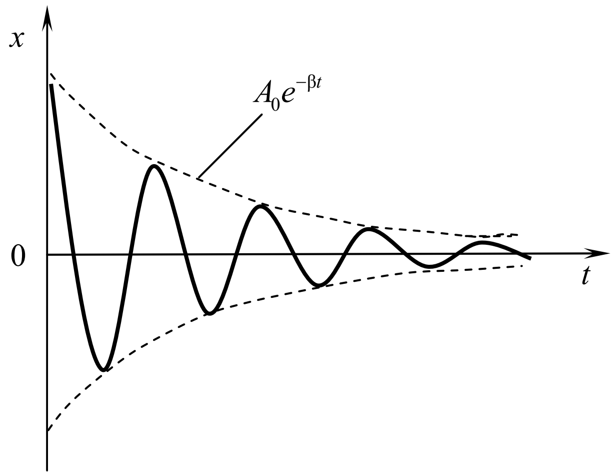


Рис. 9.1

Натуральный логарифм отношения амплитуд (9.5) называется *логарифмическим декрементом колебаний* δ:

$$\delta = -\ln\frac{A(t+T)}{A(t)} = \beta T. \qquad (9.6)$$

Как видно из формулы (9.6), коэффициент затухания β имеет размерность $с^{-1}$, т. е. его можно записать в виде

$$\beta = \frac{1}{\tau}$$

или

$$\tau = \frac{1}{\beta}, \qquad (9.7)$$

где τ – *время релаксации* – промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз:

$$\frac{A}{A_0} = e^{-\beta t} \Rightarrow \text{если } t = \frac{1}{\beta}, \text{ то } \frac{A}{A_0} = e^{-1}.$$

Тогда логарифмический декремент равен: $\delta = \frac{T}{\tau}$. Величина, обратная логарифмическому декременту колебаний $N \cong \frac{1}{\delta} = \frac{\tau}{T}$, показывает, какое число полных колебаний совершит тело, пока амплитуда его колебаний уменьшится в e раз. Действительно, через N периодов после начала колебаний, т. е. к моменту времени NT амплитуда уменьшится в $A(0)/A(NT)$ раз:

$$\frac{A(0)}{A(NT)} = \frac{A_0}{A_0 e^{-\beta NT}} = e^{N\delta}. \qquad (9.8)$$

При $N = 1 / \delta$ амплитуда уменьшается в e раз.

Для характеристики осциллирующей системы часто применяется величина Q, называемая *добротностью*. Она представляет собой умноженное на 2π отношение запасенной в системе энергии к величине энергии, теряемой за один период колебаний $T = 2\pi / \omega$:

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}. \qquad (9.9)$$

Энергия $W(t)$ пропорциональна квадрату амплитуды $A(t)$, поэтому

$$Q = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}}. \qquad (9.10)$$

При малых значениях логарифмического декремента колебаний ($\delta << 1$) $1 - e^{-2\delta} \approx 2\delta\sqrt{a^2 + b^2}$ и соотношение (9.10) преобразовывается как

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega_0}{2\beta}. \qquad (9.11)$$

На основании формулы (9.11) можно сделать вывод, что добротность характеризует степень затухания колебаний в системе при наличии сил сопротивления, а значит и диссипацию энергии осциллятора во времени.

9. Апериодическое движение

В случае сильного затухания колебательное движение отсутствует. Период затухающих колебаний T в очень вязкой среде при $\omega_0 = \beta$ согласно формуле (9.4) $T = \infty$ или принимает мнимое значение ($\mu^2 / 4m^2 > k / m$). Тело, выведенное из положения равновесия, постепенно возвращается в это положение при его движении. Такое движение называют *апериодическим*. На рис. 9.2 показаны два возможных способа возвращения в положение равновесия при апериодическом движении.

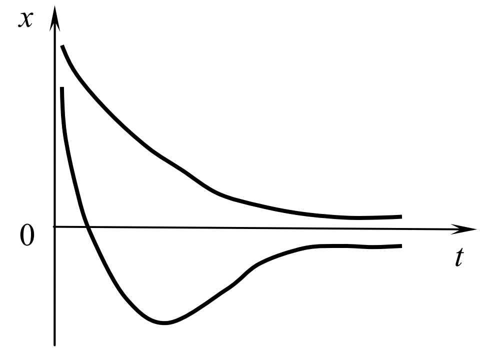


Рис. 9.2

10. Вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Вынужденными называют колебания в реальной колебательной системе, на которую действует переменная во времени внешняя сила с целью компенсации потерь энергии и получения незатухающих колебаний.

Рассмотрим вынужденные колебания пружинного маятника (рис. 9.3).

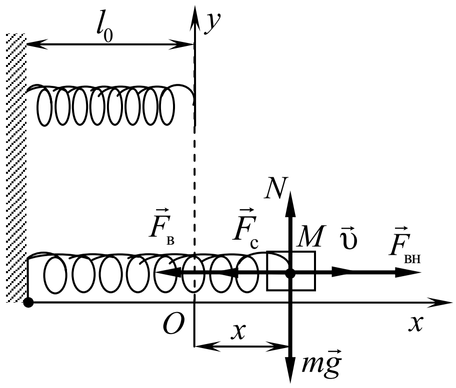


Рис. 9.3

Маятник колеблется вдоль оси X. Пусть на материальную точку M маятника действуют возвращающая сила $F_в = -kx$, сила сопротивления среды $\vec{F}_с = -\mu\vec{\upsilon}$, вынуждающая внешняя сила $F_{вн} = F_0 \cos pt$ (рис. 9.3).

Дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на ось x:

$$ma_x = -kx - \mu\upsilon_x + F_0 \cos pt, \qquad (9.12)$$

где p – частота вынуждающей внешней силы.

Дифференциальное уравнение движения (9.12) можно записать как

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos pt, \tag{9.13}$$

где $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; $\beta = \dfrac{\mu}{2m}$.

Уравнение (9.13) является линейным неоднородным уравнением (или уравнением с правой частью). Как это следует из теории дифференциальных уравнений, решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы двух решений:

1) общего решения однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному, т. е. уравнения затухающих колебаний $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$;

2) частного решения неоднородного уравнения.

Решением однородного уравнения, как было показано выше, является затухающая со временем функция. Поэтому через достаточно большой промежуток времени первой частью решения по сравнению со второй можно пренебречь и рассматривать только вторую часть решения. Это так называемые установившиеся колебания.

Для линейных систем характерно, что если на систему действует внешняя периодическая сила, изменяющаяся с частотой p, то в системе возникают колебания той же частоты. Тогда общее решение дифференциального уравнения (9.13):

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) + A\cos(pt - \alpha), \tag{9.14}$$

где α – начальная фаза вынужденных колебаний; A – амплитуда установившихся вынужденных колебаний.

При времени большем в несколько раз (в 3–4 раза) времени релаксации вклад в решение неоднородного дифференциального уравнения дает только частное решение:

$$x = A\cos(pt - \alpha). \tag{9.15}$$

Таким образом, установившиеся колебания представляют собой гармонические колебания с частотой вынуждающей силы.

11. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс

Вычисления показывают, что амплитуда A и начальная фаза α установившихся вынужденных колебаний определяются формулами:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}; \tag{9.16}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2\beta p}{\omega_0^2 - p^2}. \tag{9.17}$$

Как видно из формул (9.16)–(9.17), амплитуда и начальная фаза установившихся колебаний зависят от амплитуды и частоты внешней вынуждающей силы, от коэффициента затухания, от упругих свойств системы и массы колеблющегося тела.

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы p к собственной частоте системы ω_0 называют *резонансом* (рис. 9.4).

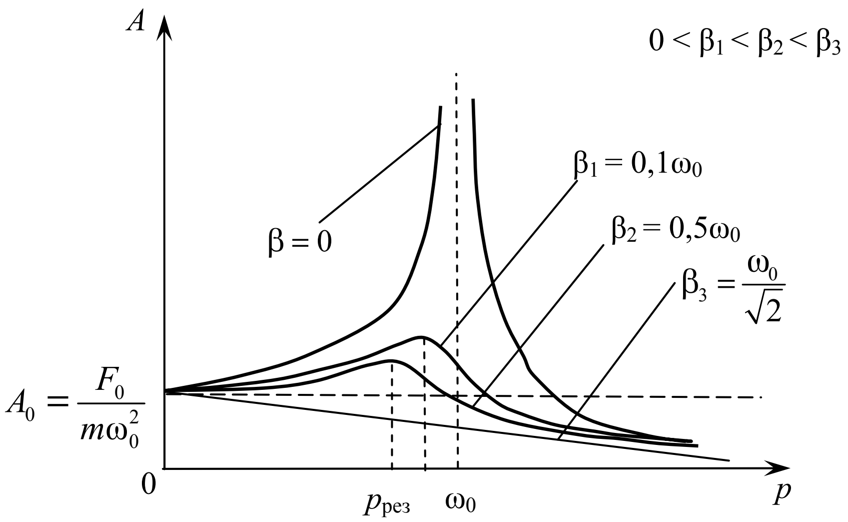


Рис. 9.4

Частота, при которой наступает резонанс, называется *резонансной*, и определяется соотношением

$$p_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \tag{9.18}$$

Таким образом, для данной колебательной системы, имеющей собственную частоту колебаний ω_0, резонансная частота внешней силы зависит от коэффициента затухания.

На рис. 9.4 показан характер изменения амплитуды вынужденных колебаний в зависимости от p и β при заданной собственной частоте колебаний ω_0. При $p \to 0$ амплитуда колебаний равна *статическому отклонению*

$$A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0 / m}{c / m} = \frac{F_0}{c} = \Delta_{ст},$$

т. е. соответствует тому отклонению, которое может вызвать в системе статическая сила F_0.

Максимальное значение амплитуды (*резонансную амплитуду*) для какого-нибудь заданного значения β можно найти, подставив в формулу (9.16) $p = p_{\text{рез}}$ из соотношения (9.18):

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^4 + 4\beta^2 p_{\text{рез}}^2}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\beta^2 + p_{\text{рез}}^2}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{9.19}$$

По мере уменьшения коэффициента затухания β резонансная частота внешней силы увеличивается, а при $\beta = 0$ $p_{\text{рез}} = \omega_0$ и $A \to \infty$.

Из формулы (9.16) следует, что при $p \to \infty$ амплитуда колебаний обращается в нуль.

При малом сопротивлении ($\beta \ll \omega_0$) $p = p_{\text{рез}} \approx \omega_0$ и значение α при этом можно считать равным $\pi/2$. При $\beta \to 0$ сдвиг фазы α стремится к нулю для частот $p < \omega_0$ и к π для $p > \omega_0$. Частоте ω_0 соответствует $\alpha = \pi/2$ (рис. 9.5).

В случае $\beta \ll \omega_0$ резонансная амплитуда

$$A_{\text{рез}} \approx \frac{F_0/m}{2\beta\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\beta}\frac{F_0/m}{\omega_0^2} = QA_0, \tag{9.20}$$

где $Q = \dfrac{\omega_0}{2\beta}$ – добротность колебательной системы.

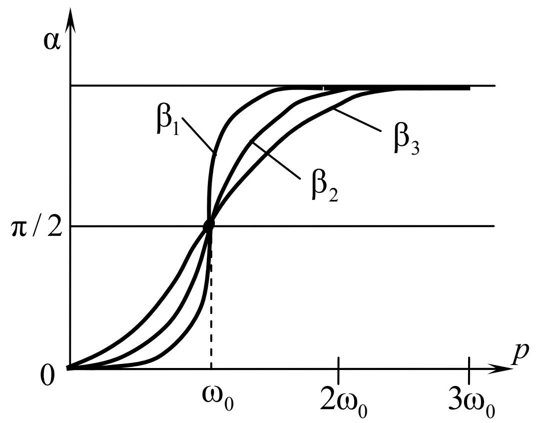


Рис. 9.5

Таким образом, добротность характеризует резонансные свойства колебательной системы: чем больше добротность, тем больше резонансная амплитуда колебаний.

ЛЕКЦИЯ № 10

МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

1. Распространение колебаний в упругой среде.
2. Уравнение и основные характеристики волны.
3. Продольные и поперечные волны. Фронт волны.
4. Фазовая скорость волны. Волновой вектор.
5. Волновое уравнение.
6. Энергия механической волны. Плотность энергии. Вектор Умова.

1. Распространение колебаний в упругой среде

Процесс распространения колебаний в среде называется *волновым процессом* (или *волной*).

Упругими (*механическими*) *волнами* называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде.

При распространении волны частицы среды не перемещаются вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице передается энергия колебаний.

Волны, которые переносят энергию в пространстве, называются *бегущими*.

Источники волны – тела, которые, воздействуя на среду, вызывают механические возмущения (деформации). Если тело колеблется в упругой среде, то соседние с ним частицы также будут колебаться. Колебания частиц через силы упругости передаются соседним частицам и т. д. Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и новые части пространства. Через некоторое время колебания распространятся по всей среде.

2. Уравнение и основные характеристики волны

Уравнением упругой волны называют функцию

$$\vec{s} = \vec{s}(\vec{r}, t), \tag{10.1}$$

где $\vec{s}$ – смещение колеблющейся частицы от положения равновесия с радиусом-вектором $\vec{r}$ в момент времени t.

Упругая волна будет незатухающей, если энергия волны не поглощается средой. Тогда колебания частиц среды можно описать гармоническим законом.

Пусть гармоническая волна распространяется со скоростью υ вдоль оси *OX*. Обозначим смещения частиц среды через $s = s(x, t)$. *Уравнение колебаний частиц*, лежащих в плоскости с координатой x, имеет вид

$$s(x,\, t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha_0), \tag{10.2}$$

где A − амплитуда волны; ω − циклическая частота волны; x − абсцисса равновесного положения колеблющейся точки; α_0 − начальная фаза волны; k − *волновое число*:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\upsilon}, \tag{10.3}$$

где λ – длина волны; υ − скорость распространения волны или фазовая скорость.

Расстояние λ, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды, называется *длиной волны*:

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu}, \tag{10.4}$$

где $\nu = 1/T$ − частота колебаний.

3. Продольные и поперечные волны. Фронт волны

Упругие волны бывают продольные и поперечные. В *продольных волнах* частицы среды колеблются в направлении распространения волны, а в *поперечных* – перпендикулярно направлению распространения волны. Продольные волны возникают в твердых, жидких и газообразных телах. Поперечные – только в твердых телах.

Фронт волны (*волновой фронт*) – геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени *t*.

Волновая поверхность – геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

Волновых поверхностей существует бесконечное множество (они неподвижны), а волновой фронт в каждый момент времени один (он все время перемещается).

Волны бывают плоские, сферические, цилиндрические (в зависимости от формы волновой поверхности).

Волна, возбуждаемая в однородной, изотропной среде точечным источником, будет *сферической*.

Однородная среда − среда, физические свойства которой не изменяются от точки к точке.

Изотропная среда − среда, физические свойства которой одинаковы во всех направлениях.

4. Фазовая скорость волны. Волновой вектор

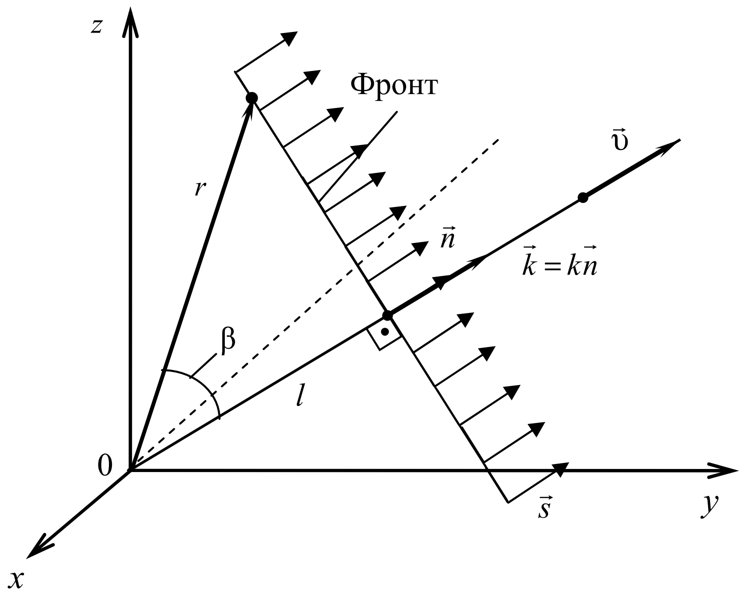
Пусть начальная фаза α_0 в уравнении гармонической плоской волны (10.2) равна нулю. Тогда фаза φ волны в уравнении (10.2) будет равна $\varphi = \omega t - kx$.

Определим скорость перемещения волновой поверхности с $\varphi = \omega t - kx = \text{const}$. Тогда скорость перемещения плоскости имеет вид $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\omega t - \text{const}}{k}\right\} = \frac{\omega}{k}$ или $\upsilon = \frac{\omega}{k}$ (что совпадает с формулой (10.3)).

Таким образом, $\upsilon = \frac{\omega}{k}$ является скоростью волновой поверхности с заданной фазой и поэтому называется *фазовой скоростью*.

Волновой вектор – вектор $\vec{k}$, модуль которого равен волновому числу. Направлен он по нормали к волновой поверхности.

Пусть плоская волна распространяется не вдоль оси x, а в направлении, задаваемом вектором $\vec{n}$ – единичным вектором нормали к плоскому фронту (рисунок).



Тогда уравнение волны будет иметь вид

$$s(\vec{r}, t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha_0)\,, \qquad (10.5)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения; α_0 – начальная фаза колебаний; $\vec{k} = k\vec{n}$ – волновой вектор; $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z = kl$ – скалярное произведение векторов $\vec{k}$ и $\vec{r}$.

Уравнение сферической гармонической волны

$$s(\vec{r}, t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha_0), \qquad (10.6)$$

где A – постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице; α_0 – начальная фаза колебаний в центре волны.

Это уравнение справедливо лишь для r, превышающих размеры источника. Тогда источник можно считать точечным, а возбуждаемые им волны – сферическими.

Фазовая скорость волны зависит от свойств среды, в которой она распространяется.

Вспомним, что при деформации растяжения – сжатия тела (например, стержня) закон Гука имеет следующий вид (см. формулу (6.3)):

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где ε – относительная (или продольная) деформация стержня.

При деформации стержня происходит также относительное изменение диаметра стержня $\varepsilon_\perp$, которое пропорционально его продольной деформации ε:

$$\varepsilon_\perp = -\mu\varepsilon\,, \qquad (10.7)$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Скорости распространения упругих продольных и поперечных волн в твердых телах, имеющих форму стержня и являющихся однородной средой, определяются, соответственно:

$$\upsilon_\parallel = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,;\ \upsilon_\perp = \sqrt{\frac{G}{\rho}}\,, \qquad (10.8)$$

где E – модуль Юнга и G – модуль сдвига для твердых тел (стержней); ρ – плотность среды.

Скорость распространения упругих продольных волн в неограниченной среде определяется

$$\upsilon_{\parallel} = \sqrt{\frac{E'_{эф}}{\rho}}\ ;\ E'_{эф} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \qquad (10.9)$$

где $E'_{эф}$ − эффективный модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона.

Скорость распространения упругих поперечных волн в неограниченной среде имеет вид

$$\upsilon_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}\ ;\ G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \qquad (10.10)$$

Скорость продольных волн в жидкостях или газах вычисляется как

$$\upsilon_{\parallel} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}, \qquad (10.11)$$

где p − давление жидкости (газа); ρ – плотность невозмущенной среды.

Частота волнового процесса различна, если ее оценивать с помощью аппаратов, неподвижных относительно источника или движущихся по отношению к нему.

Если источник волн и наблюдатель неподвижны относительно среды, то наблюдатель регистрирует частоту волн, равную частоте колебаний источника. В случае, когда источник либо наблюдатель движутся, частота волн, регистрируемая наблюдателем, отличается от частоты колебаний источника. Этот эффект впервые описал Доплер (1842 г.).

Эффектом Доплера называют изменение частоты ν волн, регистрируемой приемником, которое происходит вследствие движения источника этих волн и их приемника.

При сближении источника и приемного прибора воспринимаемая частота становится больше и при их удалении друг от друга меньше:

$$\nu = \nu_0 \frac{1 \pm \upsilon_{пр}/\upsilon}{1 \mp \upsilon_{ист}/\upsilon}, \qquad (10.12)$$

где ν_0 – частота колеблющегося источника волны; $\upsilon_{пр}$ и $\upsilon_{ист}$ – модули скоростей движения приемника и источника соответственно (относительно среды); υ – фазовая скорость монохроматической волны, верхние знаки перед скоростями $\upsilon_{пр}$ и $\upsilon_{ист}$ берутся в том случае, если соответствующая скорость направлена в сторону сближения источника и приемника, в противном случае используется нижний знак.

5. Волновое уравнение

Волновое уравнение – дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, описывающее распространение волн в однородной изотропной среде:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2};\;\; \Delta s=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \qquad (10.13)$$

где s – физическая величина, характеризующая возмущение, распространяющееся в среде со скоростью υ; Δ – оператор Лапласа ($\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$).

В частности, для плоской волны волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \qquad (10.14)$$

где x – направление распространения плоской волны; υ – скорость распространения волны.

Решение волнового уравнения

$$s(\vec{r},t)=A\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\alpha_0), \qquad (10.15)$$

где A – амплитуда волны; $\vec{k}$ – волновой вектор; α_0 – начальная фаза колебаний.

С помощью волнового уравнения обосновывается *принцип суперпозиции упругих волн*: результирующее смещение частиц в каждый момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы среды, участвуя в распространении каждой из слагаемых волн.

Значит, в том случае, когда две волны

$$s_1=A\cos(\omega_1 t-k_1 x+\alpha_1),$$

а также

$$s_2=A\cos(\omega_2 t-k_2 x+\alpha_2)$$

являются решением волнового уравнения (это имеет место при $\omega_1/k_1=\omega_2/k_2=\upsilon$), то $s=s_1+s_2$ также является решением этого уравнения. Поэтому при возбуждении в среде нескольких таких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют.

6. Энергия механической волны. Плотность энергии. Вектор Умова

Энергия упругой волны состоит из кинетической энергии совершающих колебания частиц и потенциальной энергии упругой деформации. *Кинетическая энергия*, заключенная в малом объеме ΔV среды, имеет вид

$$K = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 \Delta V, \tag{10.16}$$

где $\rho\Delta V$ – масса элементарного объема, $\dfrac{\partial s}{\partial t}$ – скорость его движения.

Потенциальная энергия этого объема ΔV следующая:

$$\Pi = \frac{\rho\upsilon^2}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)\Delta V, \tag{10.17}$$

где $\dfrac{\partial s}{\partial t}$ – деформация; υ – фазовая скорость волны.

Полная энергия объема ΔV определяется как

$$\Delta W = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2\right]\Delta V. \tag{10.18}$$

Объемная плотность энергии упругой волны

$$w = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{10.19}$$

Так как $\dfrac{\partial s}{\partial t} = -A\omega\sin(\omega t - kx + \alpha)$, $\dfrac{\partial s}{\partial x} = -Ak\sin(\omega t - kx + \alpha)$, а $k^2\upsilon^2 = \omega^2$, то плотность энергии, возникающей в упругой среде при распространении в ней плоской волны, имеет вид

$$w = \rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kx + \alpha). \tag{10.20}$$

Среднее по времени значение плотности энергии в данной точке среды

$$\langle w\rangle = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2, \tag{10.21}$$

где ρ – плотность среды; A – амплитуда волны; ω – циклическая частота.

Среда, в которой распространяется упругая волна, обладает дополнительной механической энергией, доставляемой от источника колебаний в различные точки среды этой волной.

Волна переносит энергию.

Плотность потока энергии характеризуется *вектором Умова* $\vec{j}$ − вектором плотности потока энергии, численно равного потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке, перпендикулярно направлению, в котором переносится энергия.

Направление вектора Умова $\vec{j}$ совпадает с направлением переноса энергии:

$$\vec{j} = w\vec{\upsilon}, \tag{10.22}$$

где $\vec{j}$ − плотность потока энергии (вектор Умова); w − плотность энергии; $\vec{\upsilon}$ − вектор, модуль которого равен фазовой скорости.

$[j]$ = Вт / м^2.

Среднее значение вектора плотности потока энергии

$$\langle \vec{j} \rangle = \langle w \rangle \vec{\upsilon} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\vec{\upsilon}. \tag{10.23}$$

Интенсивность волны в данной точке j − среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой волной.

Интенсивность плоской и сферической волн имеет вид

$$J = \left|\langle \vec{j} \rangle\right| = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\upsilon. \tag{10.24}$$

ЛЕКЦИЯ № 11

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

1. Ограниченность принципа относительности классической механики.
2. Постулаты специальной теории относительности.
3. Преобразования Лоренца.
4. Следствия специальной теории относительности.
5. Пространственно-временной интервал и его инвариантность.

1. Ограниченность принципа относительности классической механики

Классическая механика Ньютона прекрасно описывает движение макротел, движущихся с малыми скоростями ($\upsilon << c$, где c – скорость света в вакууме).

В нерелятивистской физике принималось как очевидный факт существование единого мирового времени t, одинакового во всех системах отсчета (*однородность времени*). *Пространство однородно и изотропно* (физические законы не меняются − при смещении системы отсчета и изменении начала отсчета времени, при повороте осей системы отсчета).

В основе классической механики лежит механический принцип относительности (или принцип относительности Галилея): законы динамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Из преобразований Галилея следует классический закон преобразования скоростей при переходе от одной системы отсчета к другой: $u_x = u'_x + \upsilon$; $u_y = u'_y$; $u_z = u'_z$. Ускорения тела во всех инерциальных системах оказываются одинаковыми.

Принималось: взаимодействие между любыми физическими объектами, находящимися на произвольном расстоянии друг от друга, осуществляется мгновенно; масса не зависит от скорости движения; все кинематические и динамические переменные можно измерить абсолютно точно.

Исключительную роль в развитии представлений о пространстве и времени сыграла теория Максвелла. К началу XX в. она стала общепризнанной. Предсказанные теорией Максвелла электромагнитные волны, распространяющиеся с конечной скоростью, нашли практическое применение – в 1895 г. было изобретено радио (А. С. Попов). Но из теории Максвелла следовало, что скорость распространения электромагнитных волн в любой инерциальной системе отсчета имеет одно и то же значение, равное скорости света в вакууме. Отсюда следует, что уравнения, описывающие распространение электромагнитных волн, не инвариантны относительно преобразований Галилея. Если электромагнитная волна (в частности, свет) распространяется в системе отсчета K' в положительном направлении оси x', то в системе K свет должен, согласно галилеевской кинематике, распространяться со скоростью $c + \upsilon$, а не c.

В середине XIX в. обсуждалась проблема так называемой тепловой смерти Вселенной. Рассматривая Вселенную как замкнутую систему, Р. Клаузиус, опираясь на второе начало термодинамики, утверждал, что рано или поздно энтропия Вселенной должна достигнуть своего максимума. Переход теплоты от более нагретых тел к менее нагретым приведет к тому, что температура всех тел Вселенной будет одинаковой, наступит полное тепловое равновесие, и все процессы во Вселенной прекратятся – наступит тепловая смерть Вселенной.

Ошибочность вывода о тепловой смерти Вселенной заключается в том, что нельзя применять второе начало термодинамики к системе, которая является не замкнутой, а бесконечно развивающейся системой. Вселенная расширяется, галактики разбегаются со скоростями, которые нарастают. Вселенная нестационарна.

Кроме того, согласно разработанной Резерфордом планетарной модели атома электрон должен был излучать энергию и упасть на ядро. Были открыты и другие явления, которые невозможно было объяснить с точки зрения классической физики.

Разрешить возникшие противоречия можно только ценой отказа от казавшихся незыблемыми классических представлений о пространстве и времени, сложившихся на основе многолетнего опыта наблюдений за сравнительно медленными движениями.

Отказ от преобразований Галилея и введение вместо них новых преобразований – преобразований Лоренца, оставляющих неизменными при переходе от одной системы отсчета к другой уравнения электродинамики, а не уравнения механики, потребовал пересмотра и уточнения законов классической механики, а главное – потребовал коренной ломки сложившихся представлений о свойствах пространства и времени.

2. Постулаты специальной теории относительности

Была создана *специальная (частная) теория относительности* (СТО), в основе которой лежат два принципа или постулата, сформулированные Эйнштейном в 1905 г.:

1. *Обобщенный принцип относительности Эйнштейна*: в физической системе, приведенной в состояние равномерного и прямолинейного движения относительно системы, условно называемой «покоящейся», для наблюдателя, движущегося вместе с системой, все процессы происходят точно так же, как и в покоящейся системе.

Эквивалентная формулировка принципа относительности: во всех инерциальных системах все физические законы имеют одинаковую форму. Это означает, что все законы природы инвариантны по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

2. *Принцип постоянства скорости света*: скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Скорость света в СТО занимает особое положение – это предельная скорость передачи взаимодействий и сигналов из одной точки пространства в другую.

При выполнении любых физических измерений исключительную роль играют пространственно-временные соотношения между событиями. В СТО *событие* определяется как физическое явление, происходящее в какой-либо точке пространства в некоторый момент времени в избранной системе отсчета.

Таким образом, чтобы полностью охарактеризовать событие, требуется не только выяснить его физическое содержание, но и определить его место и время. Для этого необходимо использовать процедуры измерения расстояний и промежутков времени. Эйнштейн показал, что эти процедуры нуждаются в строгом определении.

Для того чтобы в выбранной системе отсчета выполнять измерения промежутка времени между двумя событиями (например, началом и концом какого-либо процесса), происходящими в одной и той же точке пространства, достаточно иметь эталонные часы (наибольшей точностью в настоящее время обладают часы, основанные на использовании собственных колебаний молекул аммиака (молекулярные часы) или атомов цезия (атомные часы).

Измерение промежутка времени опирается на понятие *одновременности*: длительность какого-либо процесса определяется путем сравнения с промежутком времени, отделяющим показание часов, одновременное с концом процесса, от показания тех же часов, одновременного с началом процесса. Если же оба события происходят в разных точках системы отсчета, то для измерения промежутков времени между ними в этих точках необходимо иметь *синхронизованные часы*.

Эйнштейновское определение процедуры синхронизации часов основано на независимости скорости света в вакууме от направления распространения.

Пусть из точки A в момент времени t_1 по часам A отправляется короткий световой импульс (рис. 11.1). Пусть время прихода импульса в B и отражения его назад на часах B есть t'. Наконец, пусть отраженный сигнал возвращается в A в момент t_2 по часам A. Тогда по определению часы в A и B идут синхронно, если $t' = (t_1 + t_2)/2$.

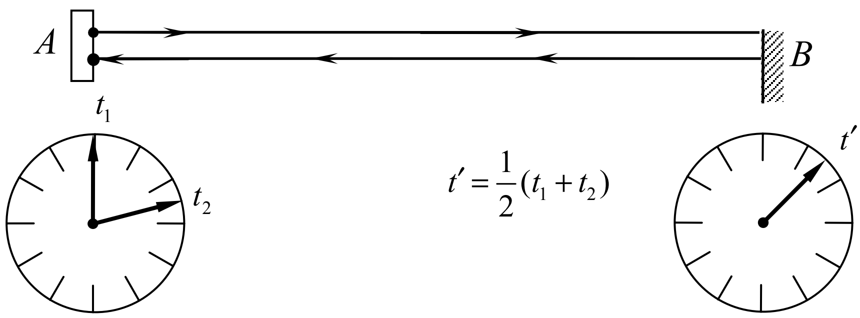


Рис. 11.1

Итак, в разных точках выбранной системы отсчета можно расположить синхронизованные часы. Теперь можно дать определение понятия одновременности событий, происходящих в пространственно-разобщенных точках: эти *события одновременны*, если синхронизованные часы показывают одинаковое время.

3. Преобразования Лоренца

Классические преобразования Галилея несовместимы с постулатами СТО и, следовательно, должны быть заменены другими преобразованиями. Эти новые преобразования должны установить связь между координатами (x, y, z) и моментом времени t события, наблюдаемого в системе отсчета K, и координатами (x', y', z') и моментом времени t' этого же события, наблюдаемого в системе отсчета K'.

Кинематические формулы преобразования координат и времени в СТО называются преобразованиями Лоренца.

Для случая, когда система K' движется относительно K со скоростью υ вдоль оси x, преобразования Лоренца имеют вид:

$$K \to K' \qquad\qquad K' \to K$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \dfrac{t' + \upsilon x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - \upsilon x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{cases} \qquad (11.1)$$

где $\beta = \upsilon / c$.

Из преобразований Лоренца вытекает целый ряд следствий. В частности, из них следует релятивистский эффект замедления времени и лоренцево сокращение длины.

4. Следствия специальной теории относительности

Пусть, например, в одной и той же точке x' системы K', которая движется с некоторой скоростью υ в положительном направлении оси x системы K, происходят события, промежуток времени между которыми равен τ_0 по часам системы K'. Этот промежуток времени $\tau_0 = t_2' - t_1'$ называется собственным временем, где t_1' и t_2' – показания часов в системе K' для двух событий, соответственно (в начале и конце процесса).

Длительность τ этого процесса в системе K с учетом преобразований Лоренца (11.1) будет иметь вид

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \upsilon x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1' + \upsilon x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (11.2)$$

Таким образом, собственное время τ_0 всегда меньше, чем промежуток времени между этими же событиями, измеренный в любой другой системе отсчета. Этот эффект называют *релятивистским замедлением времени*.

Для определения относительности промежутков времени между двумя событиями в инерциальных системах, движущихся относительно друг друга с некоторой скоростью υ в положительном направлении оси x (или x') рассмотрим также следующий мысленный эксперимент (рис. 11.2).

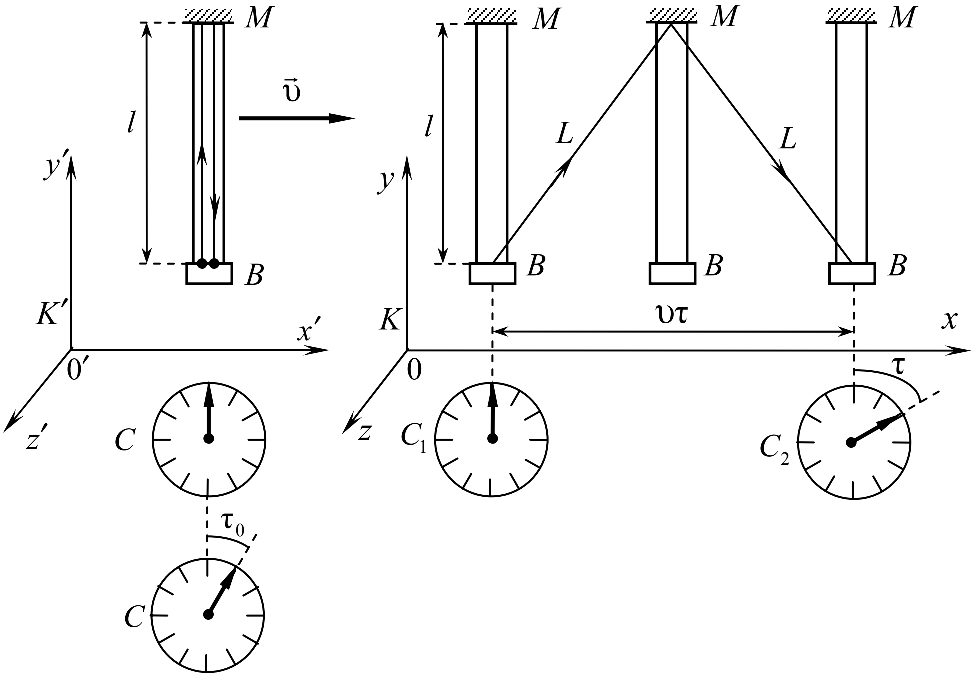


Рис. 11.2

Рассмотрим инерциальную систему, K' которая движется с некоторой скоростью υ в положительном направлении оси x системы K. В разных точках этой новой системы отсчета также можно расположить часы и синхронизировать их между собой, используя описанную выше процедуру. Теперь интервал времени между двумя событиями можно измерять как по часам в системе K, так и по часам в системе K'. Будут ли эти интервалы одинаковы? Ответ на этот вопрос должен находиться в согласии с постулатами СТО.

На одном конце твердого стержня некоторой длины l расположим импульсную лампу B, а на другом конце – отражающее зеркало M. Стержень расположен неподвижно в системе K' и ориентирован параллельно оси y' (рис. 11.2). Событие 1 – вспышка лампы, событие 2 – возвращение короткого светового импульса к лампе. Моменты наступлений событий в системе K' фиксируются по одним и тем же часам C, а в системе K – по двум синхронизованным пространственно-разнесенным часам C_1 и C_2.

В системе K' оба рассматриваемых события происходят в одной и той же точке. Промежуток времени между ними (собственное время) равен $\tau = 2l/c$.

С точки зрения наблюдателя, находящегося в системе K, световой импульс движется между зеркалами зигзагообразно и проходит путь $2L$:

$$2L = 2\sqrt{l^2 + (\frac{\upsilon\tau}{2})^2}\,, \tag{11.3}$$

где τ – промежуток времени между отправлением светового импульса и его возвращением, измеренный по синхронизованным часам C_1 и C_2, расположенным в разных точках системы K.

Но согласно второму постулату СТО, световой импульс двигался в системе K с той же скоростью c, что и в системе K'. Следовательно

$$\tau = \frac{2L}{c}. \tag{11.4}$$

Из соотношений (11.3) и (11.4) можно найти связь между τ и τ_0:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{11.5}$$

Таким образом, промежуток времени между двумя событиями зависит от системы отсчета, т. е. является относительным.

Замедление времени – следствие инвариантности скорости света.

Аналогично (11.2), можно показать, что из преобразований Лоренца вытекает *релятивистское сокращение длины*.

Рассмотрим твердый стержень, который покоится в системе отсчета K', движущейся со скоростью υ относительно системы отсчета K (рис. 11.3). Стержень ориентирован параллельно оси x'. Его длина, измеренная с помощью эталонной линейки в системе K', равна l_0. Ее называют собственной длиной. Какой будет длина этого стержня, измеренная наблюдателем в системе K? Для ответа на этот вопрос необходимо дать определения процедуры измерения длины движущегося стержня.

Под длиной l стержня в системе K, относительно которой стержень движется, понимают расстояние между координатами концов стержня, зафиксированными одновременно по часам этой системы. Если известна скорость системы K' относительно K, то измерение длины движущегося стержня можно свести к измерению времени: длина l движущегося со скоростью υ стержня равна произведению

$\upsilon\tau_0$, где τ_0 – интервал времени по часам в системе K между прохождением начала стержня и его конца мимо какой-нибудь неподвижной точки (например, точки A) в системе K (рис. 11.3).

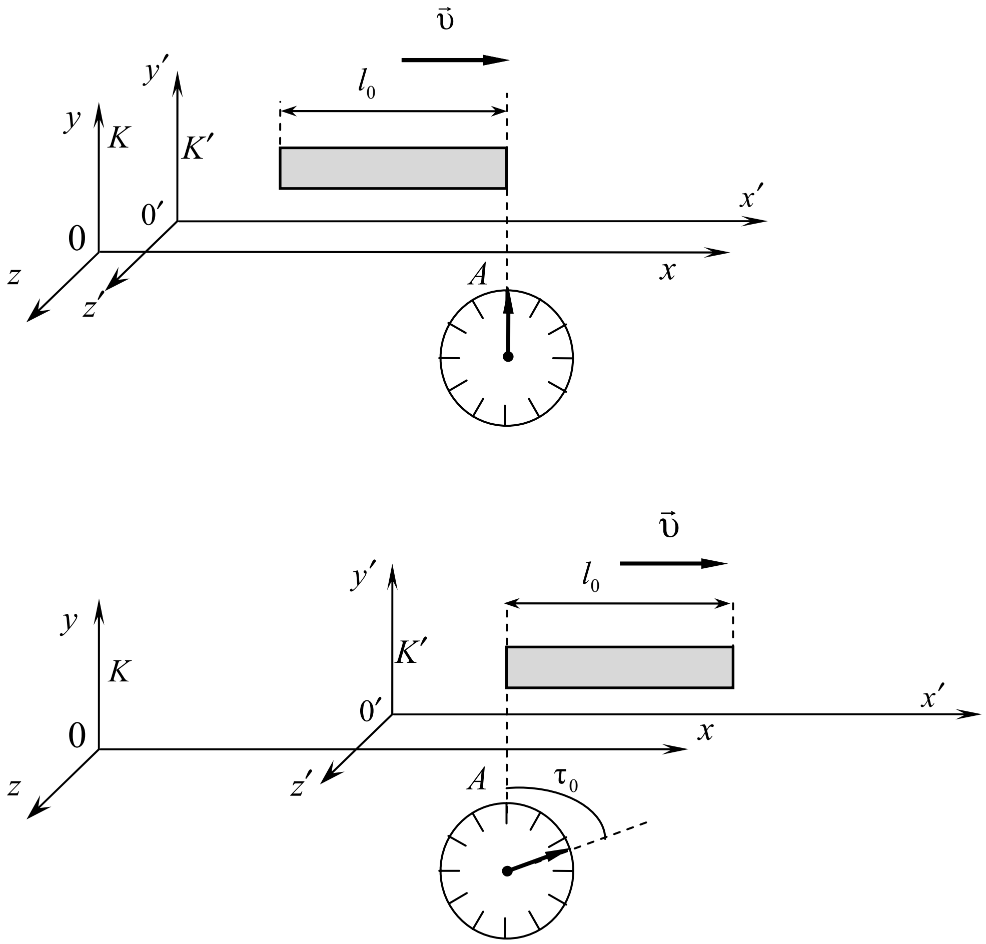


Рис. 11.3

Поскольку в системе K оба события (прохождение начала и конца стержня мимо фиксированной точки A) происходят в одной точке, то промежуток времени τ_0 в системе K является собственным временем. Итак, длина l движущегося стержня $l = \upsilon\tau_0$.

Найдем теперь связь между l и l_0. С точки зрения наблюдателя в системе K' точка A, принадлежащая системе K, движется вдоль неподвижного стержня налево со скоростью υ поэтому можно записать

$$l_0 = \upsilon\tau, \qquad (11.6)$$

где τ – промежуток времени между моментами прохождения точки A мимо концов стержня, измеренный по синхронизованным часам в K'.

Используя связь между промежутками времени τ и τ_0 (11.5), найдем

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = l_0\sqrt{1-\beta^2}\,. \qquad (11.7)$$

Таким образом, длина стержня зависит от системы отсчета, в которой она измеряется, т. е. является относительной величиной. Длина стержня оказывается наибольшей в той системе отсчета, в которой стержень покоится.

Движущиеся относительно наблюдателя тела сокращаются в направлении своего движения. Этот релятивистский эффект носит название *лоренцева сокращения длины*.

Сокращение длины не связано с какими-либо процессами, происходящими в самих телах. Лоренцево сокращение характеризует изменение размера движущегося тела в направлении его движения. Если стержень на рис. 11.3 расположить перпендикулярно оси x, вдоль которой движется система K', то длина стержня оказывается одинаковой для наблюдателей в обеих системах K и K'. Это утверждение находится в соответствии с постулатом о равноправии всех инерциальных систем (неизменность длины движущегося стержня, ориентированного перпендикулярно направлению движения, была использована выше при анализе релятивистского замедления времени).

Следует обратить внимание, что при малых скоростях движения ($\upsilon \ll c$) формулы СТО переходят в классические соотношения: $l \approx l_0$ и $\tau \approx \tau_0$.

Таким образом, классические представления, лежащие в основе механики Ньютона, в специальной теории относительности соответствуют предельному переходу при $\beta = \upsilon / c \to 0$. В этом проявляется принцип соответствия – взаимосвязь между старой и новой, более общей теорией, включающей старую теорию как предельный случай.

Одним из важнейших следствий из преобразований Лоренца является вывод об *относительности одновременности*.

Пусть, например, в двух разных точках системы отсчета K' ($x_1' \neq x_2'$) одновременно с точки зрения наблюдателя в K' ($t_1' = t_2' = t'$) происходят два события. Согласно преобразованиям Лоренца, для наблюдателя в системе K

$$x_1 = \frac{x'_1 + \upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \;\; x_2 = \frac{x'_2 + \upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \;\; \Rightarrow \;\; x_1 \neq x_2; \qquad (11.8)$$

$$t_1 = \frac{t' + \upsilon x'_1 / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \;\; t_2 = \frac{t' + \upsilon x'_2 / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \;\; \Rightarrow \;\; t_1 \neq t_2. \qquad (11.9)$$

Следовательно, в системе K эти события, оставаясь пространственно разобщенными (см. формулу (11.8)), оказываются неодновременными (см. формулу (11.9)). Более того, знак разности $t_2 - t_1$ определяется знаком выражения $\upsilon(x'_2 - x'_1)$, поэтому в одних системах отсчета первое событие может предшествовать второму, в то время как в других системах отсчета, наоборот, второе событие предшествует первому.

Этот вывод СТО не относится к событиям, связанным причинно-следственными связями, когда одно из событий является физическим следствием другого. Можно показать, что в СТО не нарушается принцип причинности, и порядок следования причинно-следственных событий одинаков во всех инерциальных системах отсчета.

Относительность одновременности пространственно-разобщенных событий можно проиллюстрировать на следующем примере (рис. 11.4). Пусть в системе отсчета K' вдоль оси x' неподвижно расположен длинный жесткий стержень. В центре стержня находится импульсная лампа *B*, а на его концах установлены двое синхронизованных часов (рис. 11.4, *а*), система K' движется вдоль оси x системы K со скоростью υ.

В некоторый момент времени лампа посылает короткие световые импульсы в направлении концов стержня. В силу равноправия обоих направлений свет в системе K' дойдет до концов стержня одновременно, и часы, закрепленные на концах стержня, покажут одно и то же время t'. Относительно системы K концы стержня движутся со скоростью υ так, что один конец движется навстречу световому импульсу, а другой конец свету приходится догонять. Так как скорости распространения световых импульсов в обоих направлениях одинаковы и равны c, то, с точки зрения наблюдателя в системе K, свет раньше дойдет до левого конца стержня, чем до правого (рис. 11.4, *б*).

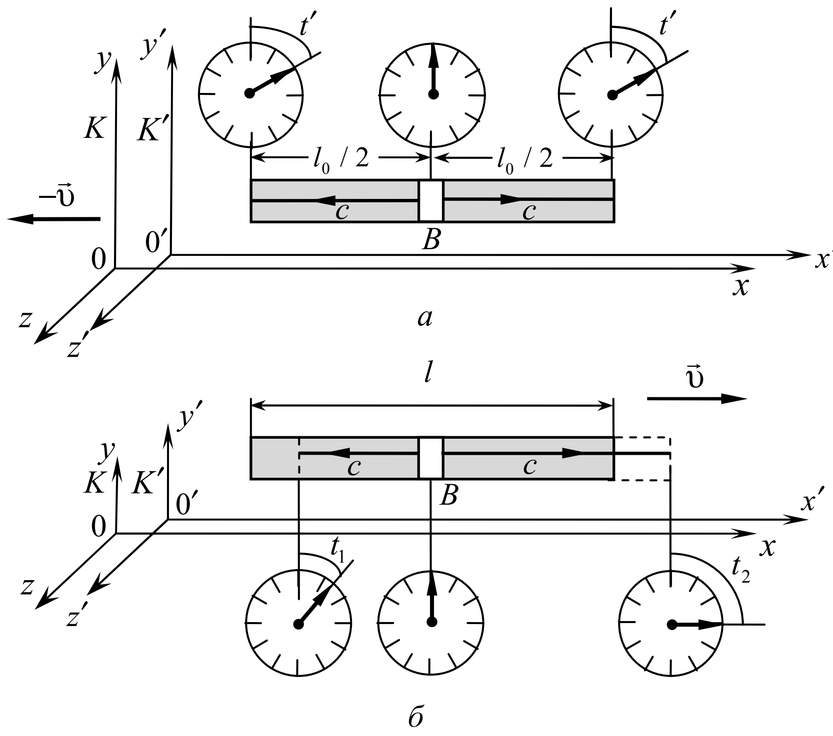


Рис. 11.4

5. Пространственно-временной интервал и его инвариантность

В СТО наряду с утверждением относительного характера пространства и времени важную роль играет установление инвариантных физических величин, которые не изменяются при переходе от одной системы отсчета к другой.

Одной из таких величин является скорость света c в вакууме, которая в СТО приобретает абсолютный характер.

Другой важной инвариантной величиной, отражающей абсолютный характер пространственно-временных связей, является интервал между событиями.

Пространственно-временной интервал определяется в СТО следующим соотношением:

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}, \qquad (11.10)$$

где t_{12} – промежуток времени между событиями в некоторой системе отсчета, а l_{12} – расстояние между точками, в которых происходят рассматриваемые события, в той же системе отсчета.

В частном случае, когда одно из событий происходит в начале координат ($x_1 = y_1 = z_1 = 0$) системы отсчета в момент времени $t_1 = 0$, а второе – в точке с координатами x, y, z в момент времени *t*, пространственно-временной интервал между этими событиями записывается в виде

$$s = \sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2}\,. \tag{11.11}$$

С помощью преобразований Лоренца можно доказать, что пространственно-временной интервал между двумя событиями не изменяется при переходе из одной инерциальной системы в другую. Инвариантность интервала означает, что, несмотря на относительность расстояний и промежутков времени, протекание физических процессов носит объективный характер и не зависит от системы отсчета.

Например, если одно из событий представляет собой вспышку света в начале координат системы отсчета при $t = 0$, а второе – приход светового фронта в точку с координатами x, y, z в момент времени *t*, то $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$, и, следовательно, интервал для этой пары событий $s = 0$. В другой системе отсчета координаты и время второго события будут другими, но и в этой системе пространственно-временной интервал s' окажется равным нулю, так как

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2\,. \tag{11.12}$$

Таким образом, для любых двух событий, связанных между собой световым сигналом, интервал равен нулю.

ЛЕКЦИЯ № 12

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

6. Сложение скоростей в релятивистской механике.
7. Релятивистское выражение для импульса. Релятивистская масса. Связь между массой и энергией. Энергия покоя.
8. Уравнение движения релятивистской частицы.
9. Релятивистское выражение для кинетической энергии.
10. Законы сохранения в релятивистской механике. Движение частицы с нулевой массой покоя.

6. Сложение скоростей в релятивистской механике

Из преобразований Лоренца для координат и времени можно получить релятивистский закон сложения скоростей.

Пусть, например, в системе отсчета K' вдоль оси x' движется частица со скоростью

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}. \tag{12.1}$$

Составляющие скорости частицы u'_y и u'_z равны нулю.

Скорость этой частицы в системе K будет

$$u_x = \frac{dx}{dt}. \tag{12.2}$$

С помощью операции дифференцирования из формул преобразований Лоренца можно найти:

$$u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u'_x}; \quad u_y = 0; \quad u_z = 0. \tag{12.3}$$

Эти соотношения выражают *релятивистский закон сложения скоростей* для случая, когда частица движется параллельно относительной скорости υ систем отсчета K и K'.

При $\upsilon \ll c$ релятивистские формулы (12.3) переходят в формулы классической механики:

$$u_x = u'_x + \upsilon; \quad u_y = 0; \quad u_z = 0.$$

Если в системе K' вдоль оси x' световой импульс распространяется со скоростью $u'_x = c$, то для скорости u_x импульса в системе K получим:

$$u_x = \frac{c + \upsilon}{1 + \upsilon / c} = c; \ \ u_y = 0; \ \ u_z = 0. \qquad (12.4)$$

Таким образом, в системе отсчета K световой импульс также распространяется вдоль оси x со скоростью света c, что согласуется с постулатом об инвариантности скорости света.

7. Релятивистское выражение для импульса. Релятивистская масса. Связь между массой и энергией. Энергия покоя

Масса m есть фундаментальная характеристика тела (или частицы), не зависящая от выбора инерциальной системы отсчета. Масса частицы в системе отсчета, в которой она покоится, называется *массой покоя* m_0 частицы.

Масса покоя не является сохраняющейся величиной. В частности, в процессах распадов и превращений элементарных частиц сумма энергий и импульсов частиц сохраняется, а сумма масс покоя меняется.

В релятивистской механике связь между импульсом и скоростью тела (частицы) дается соотношением

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}, \qquad (12.5)$$

где m_0 – масса (покоя) частицы; υ – скорость частицы.

Массу движущейся частицы определяют как зависящий от скорости коэффициент пропорциональности между импульсом $\vec{p}$ и скоростью $\vec{\upsilon}$ и называют *релятивистской массой* m:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}. \qquad (12.6)$$

В релятивистской механике определения массы из уравнений $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ и $\vec{F} = m\vec{a}$ не эквивалентны, так как ускорение перестает быть параллельным вызвавшей его силе, и масса получается зависящей от направления скорости частицы.

Согласно теории относительности, масса частицы связана с ее энергией E соотношением

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}. \qquad (12.7)$$

Масса покоя определяет *энергию покоя* E_0, или *массовую энергию покоя тела* (частицы), – энергию, когда она находится в состоянии покоя относительно данной инерционной системы отсчета:

$$E_0 = m_0 c^2. \qquad (12.8)$$

Формула Эйнштейна (12.7) выражает фундаментальный закон природы, который принято называть *законом взаимосвязи массы и энергии*.

Энергия покоя может немедленно перейти в потенциальную (пассивную) и в кинетическую (активную) энергию. Такой результат необычен для классической механики. В самом деле, полная энергия тела, согласно Ньютону, складывается из двух: потенциальной, связанной с полем, и кинетической, которая связана с движением тела. Следовательно, при отсутствии поля (т. е. сил, действующих на тело), полная энергия тела равна кинетической. Если связать систему отсчета с телом, скорость которого равна нулю, то полная энергия будет равна нулю.

Совершенно иной результат получается из СТО (см. формулы (12.7)–(12.8)), так как с массой всегда связана энергия (и наоборот). Поэтому в релятивистской механике не существуют по отдельности законы сохранения массы и энергии – существует единый закон сохранения полной (т. е. включающей энергию покоя частиц) энергии. При соединении частиц друг с другом с образованием устойчивого связанного состояния выделяется избыток энергии ΔE, которому соответствует масса

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}, \qquad (12.9)$$

где ΔE – энергия связи.

Величина E_0 определяет максимальную величину энергии, которая может быть «извлечена» из данного тела в системе отсчета, в которой оно покоится.

Следовательно, если масса частицы или системы частиц уменьшилась на Δm, то при этом должна выделиться энергия $\Delta E = \Delta mc^2$.

Таким образом, находящиеся в покое тела (частицы) массой m содержат огромный запас энергии. Это утверждение получило разнообразные практические применения, включая использование ядерной энергии.

Закон пропорциональности массы и энергии является одним из самых важных выводов СТО. Масса и энергия являются различными свойствами материи. Масса тела характеризует его инертность, а также способность тела вступать в гравитационное взаимодействие с другими телами. Важнейшим свойством энергии является ее способность превращаться из одной формы в другую в эквивалентных количествах при различных физических процессах – в этом заключается содержание закона сохранения энергии. Пропорциональность массы и энергии является выражением внутренней сущности материи.

8. Уравнение движения релятивистской частицы

Основной закон релятивистской динамики материальной точки записывается так же, как и второй закон Ньютона:

$$\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F}. \qquad (12.10)$$

Но только в СТО под импульсом понимается релятивистский импульс частицы.

Следовательно, основное уравнение движения релятивистской частицы имеет следующий вид:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right). \qquad (12.11)$$

Так как релятивистский импульс не пропорционален скорости частицы, скорость его изменения не будет прямо пропорциональна ускорению. Поэтому постоянная по модулю и направлению сила не вызывает равноускоренного движения. Например, в случае одномерного движения вдоль оси x ускорение частицы $a = d\upsilon/dt$ под действием постоянной силы имеет вид

$$a = \frac{F}{m}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (12.12)$$

Если скорость классической частицы беспредельно растет под действием постоянной силы, то скорость релятивистской частицы не может превысить скорость света в вакууме.

9. Релятивистское выражение для кинетической энергии

Кинетическая энергия K тела определяется через работу внешней силы, необходимую для сообщения телу заданной скорости. Чтобы разогнать частицу массы m из состояния покоя до скорости υ_0 под действием постоянной силы F, эта сила должна совершить работу

$$A = \int F dx = \int F\upsilon dt = \int \frac{ma\upsilon dt}{(1-\upsilon^2/c^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (12.13)$$

Поскольку $adt = d\upsilon$, можно записать

$$E_k = A\int_0^{\upsilon_0} \frac{m\upsilon d\upsilon}{(1-\upsilon^2/c^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (12.14)$$

Вычисление этого интеграла приводит к следующему выражению для *кинетической энергии* (индекс «ноль» при скорости υ опущен) *в релятивистской механике*:

$$K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1\right). \qquad (12.15)$$

Первый член в правой части выражения (12.15) представляет формулу (12.7), которую Эйнштейн интерпретировал как *полную энергию E движущейся частицы*. Второй член в правой части выражения (12.15) представляет собой энергию покоя E_0

Таким образом, кинетическая энергия K тела в релятивистской динамике есть разность между полной энергией E тела и его энергией покоя E_0:

$$K = E - E_0. \qquad (12.16)$$

Из определения кинетической энергии в релятивистской механике следует, что для любого процесса в изолированной системе выполняется равенство

$$\Delta(\sum K) = -c^2\Delta(\sum m_0). \qquad (12.17)$$

Согласно соотношению (12.17) увеличение кинетической энергии пропорционально уменьшению суммы масс покоя. Это соотношение широко используется в ядерной физике, оно позволяет предсказывать энерговыделение в ядерных реакциях, если известны массы покоя участвующих в них частиц.

10. Законы сохранения в релятивистской механике. Движение частицы с нулевой массой покоя

В релятивистской механике, так же, как и в классической механике, для замкнутой физической системы сохраняется импульс $\vec{p}$ и энергия E.

Компоненты *вектора релятивистского импульса частицы* можно рассматривать как пространственные компоненты некоторого четырехмерного вектора энергии-импульса, временной компонентой которого является энергия E частицы, деленная на скорость света c.

Напомним релятивистские выражения для энергии и импульса частицы:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}; \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}. \qquad (12.18)$$

Сравнивая эти выражения, выводится формула, выражающая импульс частицы через ее скорость и энергию:

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{\upsilon}. \qquad (12.19)$$

Возведем обе части первой из формул (12.18) в квадрат, разделим на c^2 и запишем в следующем виде:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \left(\frac{E}{c^2}\right)^2 \upsilon^2 = m_0^2 c^2. \qquad (12.20)$$

Здесь второе слагаемое в левой части в соответствии с формулой (12.19) представляет собой квадрат вектора релятивистского импульса. Поэтому соотношение (12.20) выражает *связь между энергией и импульсом частицы*:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2. \qquad (12.21)$$

Это одна из важнейших формул релятивистской физики.

В правой части формулы (12.21) стоит величина, не зависящая от выбора системы отсчета. Поэтому, хотя каждое из слагаемых в левой части имеет разные значения в различных системах отсчета, вся левая часть (12.21) не зависит от выбора системы отсчета, т. е. представляет собой релятивистский инвариант. Можно предположить, что это квадрат четырехмерного вектора (четырехвектора энергии-импульса), пространственные компоненты которого представлены трехмерным вектором релятивистского импульса, а временная компонента – релятивистской энергией E, деленной на скорость света c:

$$\left(\frac{E}{c},\ p_x,\ p_y,\ p_z\right).$$

Из соотношения (12.21) еще раз следует, что для покоящихся частиц $(p=0)$ $E=E_0=m_0c^2$.

Полученное соотношение (12.21) показывает, что частица может иметь энергию и импульс, но не иметь массы $(m_0=0)$ – такие частицы называются *безмассовыми*. Безмассовые частицы не могут существовать в состоянии покоя, во всех инерциальных системах отсчета они движутся с предельной скоростью $\upsilon=c$. Для безмассовых частиц связь между энергией и импульсом выражается соотношением:

$$E=pc. \tag{12.22}$$

К безмассовым частицам относятся фотоны – кванты электромагнитного излучения и, возможно, нейтрино.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Чаевский Вадим Витальевич

ФИЗИКА

В 5-ти частях

Часть 1. Механика

Тексты лекций

Редактор *К. В. Лактысева*
Компьютерная верстка *Ю. А. Юрчик*
Корректор *Ю. А. Юрчик*

Издатель:
УО «Белорусский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/227 от 20.03.2014.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.