

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О. Г. Бобрович  
В. В. Тульев



**В 3-х частях**

## **Часть 2. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ**

**Пособие для студентов заочной формы обучения  
специальностей: 1-36 07 01 «Машины и аппараты химических  
производств и предприятий строительных материалов»;  
1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств»;  
1-40 01 02-03 «Информационные системы и технологии»;  
1-46 01 01 «Лесоинженерное дело» (полный срок обучения);  
1-46 01 02 «Технология деревообрабатывающих производств»  
(полный и сокращенный срок обучения);  
1-36 05 01 «Машины и оборудование лесного комплекса»  
(полный и сокращенный срок обучения)**

Минск 2019

УДК [537.2+537.3](075.8)

ББК 22.33я73

Б72

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом Белорусского государственного технологического университета

**Р е ц е н з е н т ы :**

кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой физики УО «Белорусский государственный аграрно-технический университет» *В. К. Долгий*;  
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики и методики преподавания физики УО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка» *К. А. Саечников*

**Бобрович, О. Г.**

Б72 Физика. В 3 ч. Ч. 2. Электричество и магнетизм : пособие для студентов заочной формы обучения специальностей: 1-36 07 01 «Машины и аппараты химических производств и предприятий строительных материалов», 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств», 1-40 01 02-03 «Информационные системы и технологии», 1-46 01 01 «Лесоинженерное дело» (полный срок обучения), 1-46 01 02 «Технология деревообрабатывающих производств» (полный и сокращенный срок обучения), 1-36 05 01 «Машины и оборудование лесного комплекса» (полный и сокращенный срок обучения) / О. Г. Бобрович, В. В. Тульев. – Минск : БГТУ, 2019. – 152 с.

В пособии изложен материал по таким разделам физики, как «Электростатика и постоянный ток», «Магнитное поле. Электромагнитные волны». В каждом разделе приведен теоретический материал, контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для организации самостоятельной работы студентов заочной формы обучения, подготовки к практическим и лабораторным занятиям по физике, а также для подготовки к сдаче экзамена или зачета по дисциплине «Физика».

УДК [537.2+537.3](075.8)

ББК 22.33я73

© УО «Белорусский государственный технологический университет», 2019  
© Бобрович О. Г., Тульев В. В., 2019

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК</b>	<b>7</b>
1. Электрическое поле в вакууме .....	7
1.1. Электрический заряд. Свойства электрического заряда. Закон сохранения электрического заряда .....	7
1.2. Закон Кулона .....	9
1.3. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля. Силовые линии. Принцип суперпозиции электростатических полей .....	10
1.4. Поток вектора напряженности электростатического поля. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в интегральной форме .....	13
1.5. Примеры применения теоремы Гаусса. ....	16
1.6. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле .....	19
1.7. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в интегральной и дифференциальной формах .....	20
1.8. Потенциал. Разность потенциалов. Принцип суперпозиции для электростатических потенциалов. ....	21
1.9. Связь между напряженностью и потенциалом. Эквипотенциальные поверхности .....	23
<i>Контрольные вопросы</i> .....	25
<i>Задачи по теме «Электрическое поле в вакууме»</i> .....	26
2. Электрическое поле в веществе .....	31
2.1. Электрический диполь. Электрический момент диполя .....	31
2.2. Свободные и связанные заряды в веществе. Типы диэлектриков .....	32
2.3. Поляризация диэлектриков, виды поляризации .....	33
2.4. Диэлектрическая восприимчивость неполярных и полярных диэлектриков .....	34

2.5. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике. Вектор электрического смещения .....	36
2.6. Диэлектрическая проницаемость среды. ....	38
2.7. Сегнетоэлектрики. Диэлектрический гистерезис. Температура Кюри .....	40
2.8. Эффекты, наблюдаемые в сегнетоэлектриках и других диэлектриках. Применение сегнетоэлектриков в науке и технике .....	43
2.9. Поле внутри проводника и вблизи его поверхности	47
<i>Контрольные вопросы</i> .....	49
<i>Задачи по теме «Электрическое поле в диэлектрике»</i> .....	50
3. Емкость. Энергия электрического поля .....	52
3.1. Емкость уединенного проводника и конденсатора	52
3.2. Конденсаторы и их соединения. ....	53
3.3. Энергия системы зарядов, проводника и конденсатора. Объемная плотность энергии электрического поля. ....	58
<i>Контрольные вопросы</i> .....	60
<i>Задачи по теме «Конденсаторы»</i> .....	61
4. Постоянный электрический ток .....	63
4.1. Условия существования и характеристики постоянного электрического тока .....	63
4.2. Законы Ома в интегральной и дифференциальной формах .....	65
4.3. Правила Кирхгофа для расчета электрических цепей	71
4.4. Работа и мощность тока .....	73
4.5. Закон Джоуля – Ленца в интегральной и дифференциальной формах .....	74
<i>Контрольные вопросы</i> .....	75
<i>Задачи по теме «Постоянный электрический ток»</i> .....	76
<b>МАГНИТНОЕ ПОЛЕ .....</b>	<b>79</b>
1. Магнитное поле в вакууме .....	79
1.1. Магнитное поле. Взаимодействие токов. Вектор магнитной индукции .....	79
1.2. Закон Био – Савара – Лапласа .....	83
1.3. Расчет магнитных полей прямого проводника с током бесконечной и конечной длины .....	84
1.4. Магнитное поле движущегося заряда .....	85
1.5. Циркуляция вектора магнитной индукции .....	86

1.6. Магнитное поле тороида и соленоида.....	89
1.7. Магнитный поток. Теорема Гаусса для магнитного поля	91
<i>Контрольные вопросы</i> .....	93
<i>Задачи по теме «Магнитное поле в вакууме»</i> .....	94
2. Действие магнитного поля на проводник с током и движущуюся заряженную частицу. ....	96
2.1. Сила Ампера.....	96
2.2. Контур с током в магнитном поле. Магнитный момент контура с током. Механический момент, действующий на контур с током в однородном магнитном поле.....	98
2.3. Работа перемещения проводника с током в магнитном поле. ....	100
2.4. Сила Лоренца. Масс-спектрометрия .....	102
2.5. Эффект Холла .....	105
<i>Контрольные вопросы</i> .....	107
<i>Задачи по теме «Действие магнитного поля на проводник с током и движущуюся заряженную частицу»</i> .....	108
3. Явление электромагнитной индукции.....	111
3.1. опыты Фарадея. Закон электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. ....	111
3.2. Токи Фуко.....	114
3.3. Явление самоиндукции. Индуктивность.....	115
3.4. Энергия и объемная плотность энергии магнитного поля .....	117
<i>Контрольные вопросы</i> .....	118
<i>Задачи по теме «Явление электромагнитной индукции»</i>	119
4. Магнитное поле в веществе .....	121
4.1. Атом в магнитном поле. Магнитные моменты электронов и атомов. Орбитальный и спиновый магнитные моменты .....	122
4.2. Намагниченность. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость среды .....	125
4.3. Типы магнетиков .....	127
4.4. Ферромагнетики. Магнитный гистерезис. Точка Кюри	129
4.5. Эффекты, наблюдаемые в ферромагнетиках, и их применение .....	133
<i>Контрольные вопросы</i> .....	135

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ 136

1. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля. Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме.....	136
2. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в дифференциальной форме. Материальные уравнения.....	141
3. Электромагнитные волны. Волновое уравнение.....	143
4. Основные свойства электромагнитной волны. Уравнение электромагнитной волны. ....	145
5. Энергия электромагнитной волны. Вектор Умова – Пойнтинга.....	146
6. Шкала электромагнитных волн.....	148
<i>Контрольные вопросы</i> .....	149

# ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

**Электростатика** – раздел учения об электричестве, изучающий взаимодействие и свойства систем электрических зарядов, неподвижных относительно выбранной для их исследования инерциальной системы отсчета.

## 1. Электрическое поле в вакууме

Взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через электрическое поле. Всякий заряд изменяет свойства окружающего его пространства – создает в нем электрическое поле. Это поле проявляет себя в том, что действует с некоторой силой на электрический заряд, помещенный в какую-либо его точку.

### 1.1. Электрический заряд. Свойства электрического заряда. Закон сохранения электрического заряда

**Электрический заряд** – это физическая величина, являющаяся количественной мерой электромагнитных взаимодействий.

Единица измерения электрического заряда в системе СИ  $[q] = 1 \text{ Кл}$  (Кулон).

Электрические заряды обладают следующими свойствами:

1. Существуют только два вида заряда: *отрицательные* и *положительные*.

Опыты, произведенные еще в самом начале XVIII в., показали, что электризация бывает двух и только двух родов: электризация, по качеству совпадающая с электризацией стекла, потертого о кожу (называется *положительной*), и электризация, совпадающая по качеству с электризацией кожи, потертой стеклом (называется *отрицательной*).

2. Одноименные заряды *отталкиваются*, разноименные заряды *притягиваются*.

3. Существует *элементарный* заряд  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ . Носителями элементарных зарядов являются электроны ( $-e$ ) и протоны ( $+e$ ). У любого заряженного тела заряд по величине не может быть меньше элементарного.



4. Электрический заряд *дискретен*, т. е. электрический заряд любого тела состоит из целого числа положительных и отрицательных элементарных зарядов

$$q = N_+e - N_-e, \quad (1.1)$$

где  $N_+$  и  $N_-$  – целые числа, равные соответственно числу положительных и отрицательных элементарных зарядов. Это свойство опытным путем доказал американский физик Милликен Р.

5. Электрический заряд *инвариантен*, т. е. значение электрического заряда не зависит от скорости его движения. Так как скорость движения зависит от выбора системы отсчета, то можно сказать: значение электрического заряда не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Из обобщения опытных данных был установлен фундаментальный закон природы – *закон сохранения заряда*: заряды не создаются и не пропадают, они могут быть лишь переданы от одного тела другому или перемещены внутри данного тела. Другая формулировка *закона сохранения заряда*: алгебраическая сумма зарядов тел и частиц, образующих электрически изолированную систему, не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе:

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = \sum_{i=1}^n q_i = \text{const.} \quad (1.2)$$

Под *электрически изолированной системой* понимают такую систему, из которой не забирают и в которую не вносят электрические заряды.

Под *точечными* зарядами подразумеваются такие заряженные тела, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Если заряженное тело нельзя назвать точечным, то вводят понятие *распределенного* заряда. Для характеристики распределенного заряда используют следующие величины:

– если заряд распределен по объему тела  $V$ , то для его характеристики используют *объемную плотность* заряда  $\rho$ :

$$\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho dV \Rightarrow q = \int_V \rho dV. \quad (1.3)$$

Единица измерения объемной плотности заряда в системе СИ  $[\rho] = 1 \text{ Кл/м}^3$ ;



– если заряд распределен по поверхности тела площадью  $S$ , то для его характеристики используют *поверхностную плотность* заряда  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \Rightarrow dq = \sigma dS \Rightarrow q = \int_S \sigma dS. \quad (1.4)$$

Единица измерения поверхностной плотности заряда в системе СИ  $[\sigma] = 1 \text{ Кл/м}^2$ ;

– если заряд распределен по длине тела  $l$ , то для его характеристики используют *линейную плотность* заряда  $\lambda^*$ :

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \lambda dl \Rightarrow q = \int_l \lambda dl. \quad (1.5)$$

Единица измерения линейной плотности заряда в системе СИ  $[\lambda] = 1 \text{ Кл/м}$ .

## 1.2. Закон Кулона

Опыты показали, что взаимодействие заряженных тел зависит от их формы и размеров. Поэтому для установления закона взаимодействия между заряженными телами сначала рассматривают точечные заряды.

Закон взаимодействия двух точечных зарядов был экспериментально установлен французским физиком Шарлем Огюстеном Кулоном в 1785 г. на основании измерений, произведенных с помощью крутильных весов.

Проводя опыты, Кулон пришел к выводу, что сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

Направление силы совпадает с прямой, соединяющей взаимодействующие заряды (рис. 1.1).

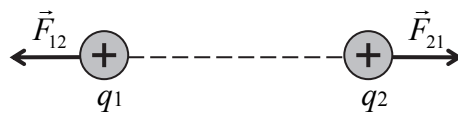


Рис. 1.1

Закон Кулона определяется формулой

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \quad (1.6)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – электрическая постоянная;  $|q_1|$ ,  $|q_2|$  – модули точечных зарядов;  $r$  – расстояние между ними.

В векторном виде закон Кулона определяется формулой

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{12} \quad \text{или} \quad \vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{21}, \quad (1.7)$$

где  $\vec{r}_{12}$  и  $\vec{r}_{21}$  – радиус-векторы, соединяющие 2-й и 1-й или 1-й и 2-й заряды (рис. 1.2).

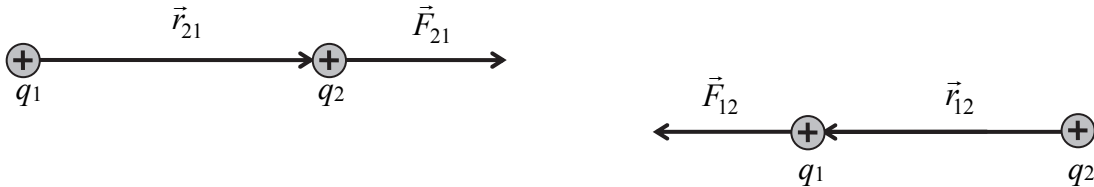


Рис. 1.2

Закон Кулона справедлив также для заряженных тел сферической формы, заряды которых распределены равномерно по объему или по поверхности этих тел.

### 1.3. Электростатическое поле.

#### Напряженность электростатического поля.

#### Силовые линии. Принцип суперпозиции электростатических полей

Согласно теории близкодействия, взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через материальный носитель – электрическое поле. Всякий заряд изменяет свойства окружающего его пространства – создает в нем *электрическое поле*. Это поле проявляет себя в том, что помещенный в какую-либо его точку электрический заряд оказывается под действием силы. По величине силы, действующей на данный заряд, можно судить об интенсивности поля. Для обнаружения и исследования электрического поля используют *пробный заряд*  $q_{\text{пр}}$ . Он должен быть малым по величине, чтобы собственным полем не исказить исследуемое поле, и принадлежать телу малых размеров, чтобы можно было исследовать поле в малых областях пространства. Для удобства пробный заряд условились считать *положительным*.

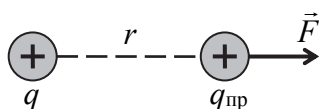


Рис. 1.3

Если поместить пробный заряд в некоторую точку поля (рис. 1.3), создаваемого зарядом  $q$ , то мы обнаружим, что на пробный заряд  $q_{\text{пр}}$  действует сила  $F$ , которая, согласно закону Кулона (1.6), будет равна

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\text{пр}} |q|}{r^2}. \quad (1.8)$$

Из выражения (1.8) видно, что отношение

$$\frac{F}{q_{\text{пр}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2} \quad (1.9)$$

для всех пробных зарядов одинаково и зависит лишь от величины заряда  $q$ , создающего поле, и расстояния  $r$  между зарядом и точкой в исследуемом поле. Поэтому отношение  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}}$  принято в качестве ве-

личины, характеризующей электрическое поле, и называется *напряженностью* электрического поля в данной точке.

**Напряженность электрического поля в данной точке** есть физическая величина, определяемая силой, действующей на единичный пробный заряд, помещенный в эту точку поля и имеющий направление этой силы. Напряженность электрического поля является *силовой характеристикой* поля.

Единица измерения напряженности электрического поля  $[E] = 1 \text{ Н/Кл} = 1 \text{ В/м}$ .

Напряженность поля точечного заряда можно представить в виде

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2} \quad \text{и} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad (1.10)$$

где  $\vec{r}$  – вектор, соединяющий заряд  $q$  и данную точку.

Направлен вектор напряженности поля точечного заряда вдоль прямой, проходящей через заряд и данную точку поля, от заряда, если он положителен, и к заряду – если отрицателен (рис. 1.4).

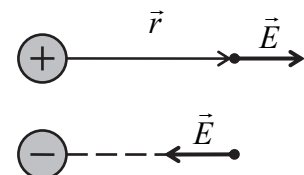


Рис. 1.4

Графически электрическое поле можно описать с помощью **линий напряженности**, которые называются **силовыми линиями**. Под линиями напряженности подразумевают такую линию, в каждой точке которой вектор напряженности направлен по касательной (рис. 1.5). Этим линиям приписывается направление, совпадающее с направлением вектора напряженности в каждой точке линии. Линия напряженности определяет направление

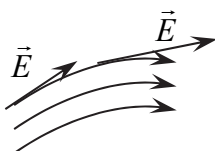


Рис. 1.5

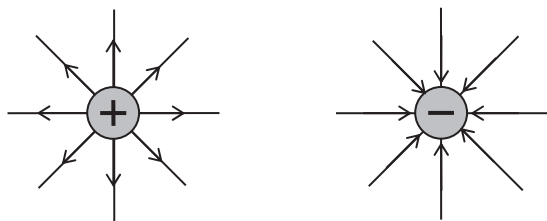


Рис. 1.6

напряженности электростатического поля в каждой точке, через которую она проходит. Поэтому линии напряженности не пересекаются, так как в каждой точке поля напряженность имеет свое определенное направление. Густота линий выбирается таким образом,

чтобы количество линий, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной к линиям площадки, было равно числовому значению вектора напряженности (рис. 1.5).

Линии напряженности начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Линии напряженности поля точечного заряда – это прямые линии, выходящие из заряда, если он положительный, и входящие в заряд, если он отрицательный (рис. 1.6).

Примеры графического изображения электростатических полей:  
– поле электрического диполя (рис. 1.7)

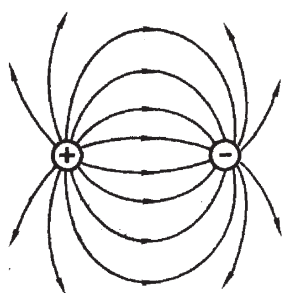


Рис. 1.7

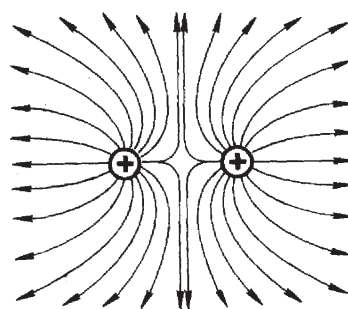


Рис. 1.8

– поле системы двух одинаковых положительных зарядов (рис. 1.8)

– поле плоского заряженного конденсатора (рис. 1.9)

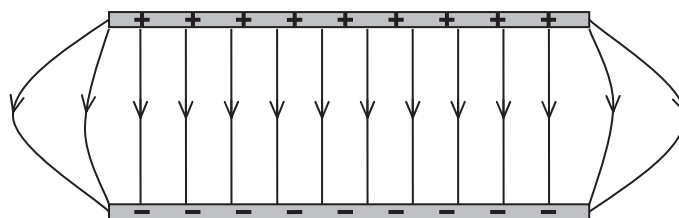


Рис. 1.9

Если электростатическое поле создается системой зарядов, то для нахождения напряженности поля используют *принцип суперпозиции электрических полей*: напряженность электростатического поля системы зарядов в данной точке равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов системы в отдельности в данной точке:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (1.11)$$

Если электростатическое поле создается заряженным телом с распределенным зарядом, то его разбивают на элементарные заряды  $dq$ . Такие заряды уже можно считать точечными, и для них применимы формулы (1.10):

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \quad \text{или} \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^3} \vec{r}. \quad (1.12)$$

Применяя принцип суперпозиции электрических полей для расчета напряженности поля распределенного заряда, необходимо суммирование заменить интегрированием:

$$\vec{E} = \int_q d\vec{E}. \quad (1.13)$$

#### 1.4. Поток вектора напряженности электростатического поля. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в интегральной форме

Для того чтобы с помощью линий напряженности можно было характеризовать не только направление, но и значение напряженности электростатического поля, условились, что число линий напряженности  $dN$ , пересекаемых единичную площадку  $dS_0$ , расположенную перпендикулярно линиям напряженности, равно модулю напряженности  $E$  поля в этой точке (рис. 1.10), т. е. выполняется условие

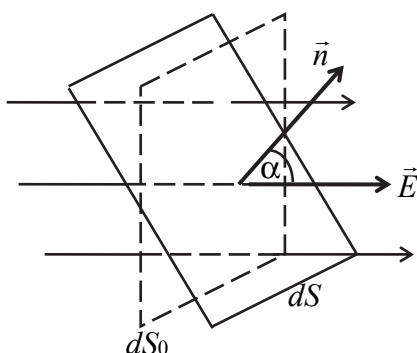


Рис. 1.10

сти электростатического поля, условились, что число линий напряженности  $dN$ , пересекаемых единичную площадку  $dS_0$ , расположенную перпендикулярно линиям напряженности, равно модулю напряженности  $E$  поля в этой точке (рис. 1.10), т. е. выполняется условие

$$E = \frac{dN}{dS_0}. \quad (1.14)$$

Тогда число линий, пересекаемых некоторую произвольную площадку  $dS$ , равно

$$dN = E dS_0 = E \cos \alpha dS = E_n dS = \vec{E} d\vec{S}, \quad (1.15)$$

где  $E \cos \alpha = E_n$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на направление нормали  $\vec{n}$ ;  $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$  – вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление совпадает с направлением единичной нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$ .

Величину  $dN$  назвали **поток вектора напряженности** через площадку  $dS$  и обозначили

$$d\Phi_E = E_n dS = \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.16)$$

Для произвольной поверхности  $S$  поток вектора напряженности через эту поверхность равен

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \int_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.17)$$

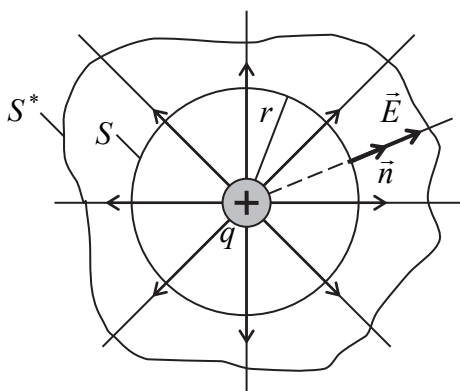


Рис. 1.11

Поток вектора напряженности является алгебраической величиной и зависит не только от конфигурации поля, но и от выбора направления нормали.

Рассмотрим поле точечного заряда  $q$  ( $q > 0$ ) и вычислим поток вектора напряженности через сферу радиуса  $r$ , в центре которой находится заряд  $q$  (рис. 1.11). В этом случае вектор  $E$  в любой точке выбранной сферической поверхности будет перпендикулярным поверхности и одинаковым по модулю:  $E_n = E = \text{const}$ .

Полное число линий, пересекающих сферическую поверхность, будет равно

$$\Phi_E = N = \int_S dN = \int_S E_n dS = \int_S E dS = E \int_S dS = E \cdot S. \quad (1.18)$$

Так как для точечного заряда напряженность  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ , то

$$\Phi_E = N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.19)$$

Из формулы (1.19) следует, что число линий, пересекающих сферическую поверхность на любом расстоянии от заряда, будет одним и тем же. Полученный результат также справедлив и для замкнутой поверхности произвольной формы, охватывающей заряд  $q$ , поскольку каждая линия напряженности, пронизывающая сферу  $S$ , пройдет и сквозь поверхность  $S^*$ .

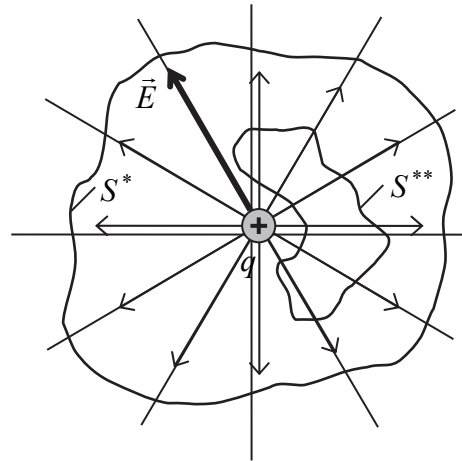


Рис. 1.12

Если замкнутая поверхность  $S^{**}$  не охватывает заряд (рис. 1.12), создающий поле, то общее количество линий напряженности, входящих внутрь поверхности  $S^{**}$ , будет равно количеству выходящих из нее. Поэтому поток вектора напряженности в этом случае будет равен нулю. Для поля точечного заряда справедлива *теорема, предложенная К. Гауссом*: поток вектора напряженности поля точечного заряда  $q$  сквозь любую замкнутую поверхность  $S$  равен заряду  $q/\epsilon_0$ , если эта поверхность охватывает заряд, и равен нулю, если поверхность не охватывает заряд.

С учетом принципа суперпозиции теорему Гаусса можно распространить на произвольную систему  $q_1, q_2, \dots, q_n$  точечных зарядов. Допустим, что внутри замкнутой поверхности находится  $k$  точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_k$ . В силу принципа суперпозиции напряженность поля, создаваемого всеми зарядами, равна  $\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$ . Поэтому поток вектора напряженности

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \left( \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \oint_S \vec{E}_i d\vec{S}. \quad (1.20)$$

Интеграл, стоящий под знаком суммы, равен  $q/\epsilon_0$  (если заряд находится внутри замкнутой поверхности) или 0 (если находится вне замкнутой поверхности). Следовательно,

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^k q_i \quad \text{или} \quad \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^k q_i.$$

Получили *теорему Гаусса в интегральной форме*: поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на  $\epsilon_0$ .



Если электростатическое поле создается распределенным зарядом, то теорема Гаусса будет иметь вид

$$\oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (1.21)$$

где  $q$  – заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности  $S$ . Величину заряда  $q$  можно найти, используя формулы (1.3–1.5).

### 1.5. Примеры применения теоремы Гаусса

В ряде случаев, используя теорему Гаусса, можно более просто рассчитать характеристики электростатического поля, чем, например, используя принцип суперпозиции. Теорему Гаусса удобно применять для расчета характеристик симметричных электростатических полей (т. е. полей, создаваемых симметричными заряженными телами). Рассмотрим несколько примеров.

1. *Электростатическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости.* Бесконечная плоскость заряжена с постоянной поверхностной плотностью  $+\sigma$  (рис. 1.13). Из соображений симметрии следует, что вектор  $\vec{E}$  направлен перпендикулярно плоскости. Так как заряженная плоскость бесконечная, то числовое значение напряженности  $E$  ее поля будет одинаковым во всех точках пространства, расположенных на одинаковых расстояниях слева и справа от плоскости. В качестве замкнутой поверхности выберем цилиндрическую поверхность, основания которой параллельны плоскости, а ось перпендикулярна ей. Тогда в точках левого и правого оснований проекция  $E_n = E = \text{const}$ , а в точках боковой поверхности  $E_n = 0$ , т. к. вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен нормали  $\vec{n}$  к боковой поверхности. Поток вектора  $E$  через замкнутую цилиндрическую поверхность будет равен

$$\begin{aligned} \oint_S E_n dS &= \int_{S_1} E_n dS + \int_{S_2} E_n dS + \int_{S_{\text{бок}}} E_n dS = \int_{S_1} E_n dS + \int_{S_2} E_n dS = \\ &= \int_S E dS + \int_S E dS = 2E \int_S dS = 2ES. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Заряд, заключенный внутри построенной цилиндрической поверхности, равен  $q = \sigma S$ . Согласно теореме Гаусса, получаем

$$\oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow 2ES = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.23)$$

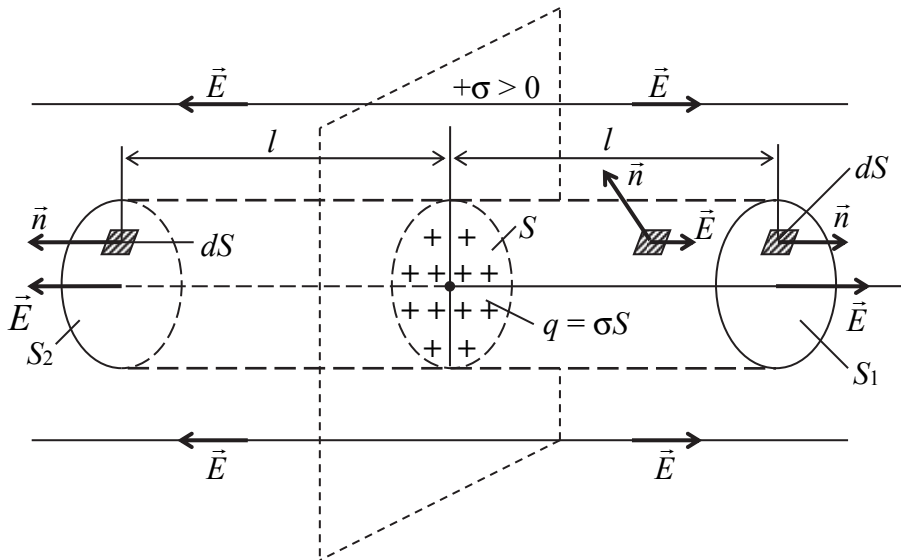


Рис. 1.13

Напряженность электростатического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости определяется выражением

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.24)$$

Из формулы (1.24) следует, что напряженность не зависит от расстояния до плоскости, а следовательно, она одинакова по модулю во всех точках поля. Это означает, что поле равномерно заряженной плоскости *однородно*.

2. *Электростатическое поле бесконечной равномерно заряженной нити.* Найдем поле бесконечной равномерно заряженной нити с линейной плотностью заряда  $\tau$  (рис. 1.14). Из соображений симметрии следует, что вектор напряженности  $\vec{E}$  электрического поля направлен радиально, т. е. перпендикулярно к оси заряженной нити. Причем во всех точках, равноудаленных от оси нити, численные значения напряженности  $E$  поля одинаковы. Поэтому в качестве замкнутой выберем цилиндрическую поверхность, основания которой перпендикулярны нити, а ось цилиндра совпадет с ней. Тогда во всех точках верхнего и нижнего

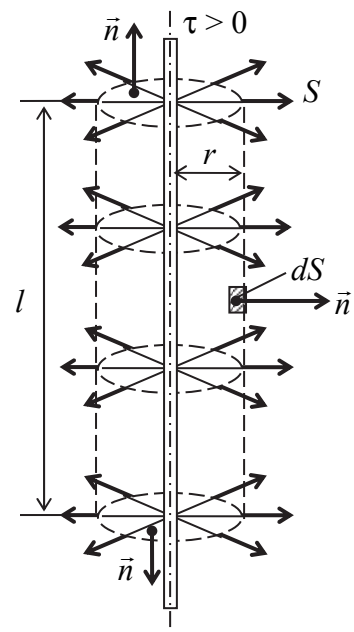


Рис. 1.14

оснований проекция вектора напряженности на нормаль  $E_n = 0$ , а в точках на боковой поверхности  $E_n = E = \text{const}$ , так как вектор  $\vec{E}$  совпадает с нормалью  $\vec{n}$  к боковой поверхности. Поток вектора  $E$  через замкнутую цилиндрическую поверхность будет равен

$$\begin{aligned} \oint_S E_n dS &= \int_{S_1} E_n dS + \int_{S_{\text{бок}}} E_n dS + \int_{S_2} E_n dS = \int_{S_{\text{бок}}} E_n dS = \\ &= E \int_{S_{\text{бок}}} dS = ES_{\text{бок}} = E2\pi rl. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Заряд, заключенный внутри построенной цилиндрической поверхности, равен  $q = \tau l$ . Согласно теореме Гаусса, получаем

$$\oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 2\pi rl = \frac{1}{\epsilon_0} \tau l \Rightarrow E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (1.26)$$

т. е. напряженность электрического поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной нитью, равна

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.27)$$

3. *Электростатическое поле равномерно заряженной сферы.* Сферическая поверхность радиуса  $R$  с общим зарядом  $q$  заряжена равномерно с поверхностной плотностью  $+\sigma$  (рис. 1.15). Благодаря равномерному распределению заряда по поверхности поле, создаваемое им, обладает сферической симметрией. Линии напряженности будут направлены радиально. Поэтому выберем замкнутую поверхность в виде сферы  $S$  радиуса  $r$ , имеющей общий центр с заряженной сферой. В этом случае вектор  $\vec{E}$ , направленный по радиальным линиям, в любой точке выбранной сферической поверхности будет перпендикулярным поверхности и одинаковым по модулю:  $E_n = E = \text{const}$ .

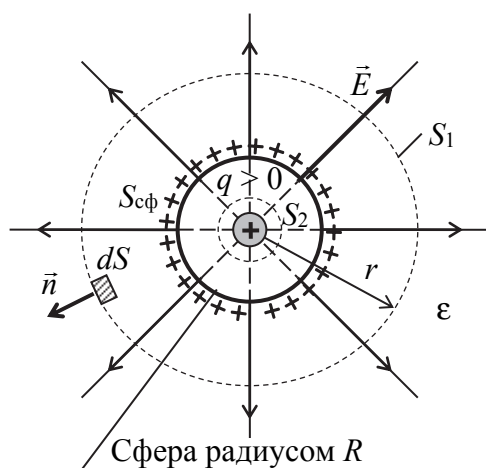


Рис. 1.15

1) рассмотрим поле вне сферы ( $r > R$ ). Внутри выбранной поверхности  $S_1$  попадает весь заряд  $q$  сферы:

$$q = \sigma S_{\text{сф}} = \sigma \cdot 4\pi R^2. \quad (1.28)$$

Применим теорему Гаусса:

$$E \oint_{S_1} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (1.29)$$

С учетом формулы (1.28) получаем

$$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}; \quad (1.30)$$

2) рассмотрим поле внутри сферы ( $r < R$ ). Замкнутая сферическая поверхность  $S_2$  не содержит внутри зарядов, поэтому

$$\oint_{S_2} E_n dS = 0 \Rightarrow \oint_{S_2} E dS = 0 \Rightarrow E \oint_{S_2} dS = 0 \Rightarrow E = 0, \quad (1.31)$$

т. е. внутри равномерно заряженной сферической поверхности электростатическое поле отсутствует ( $E = 0$ ).

## 1.6. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле

На помещенный в электростатическое поле напряженностью  $\vec{E}$  пробный заряд  $q_{пр}$  действует сила  $\vec{F} = q_{пр} \vec{E}$ . Если заряд перемещается в поле из точки 1 в точку 2, сила  $\vec{F}$  будет совершать работу. Поскольку любое заряженное тело, создающее поле, можно рассматривать как совокупность точечных зарядов, то для вычисления работы в любом электростатическом поле определим вначале работу по перемещению пробного заряда  $q_{пр}$  в поле точечного неподвижного заряда  $q$  (рис. 1.16).

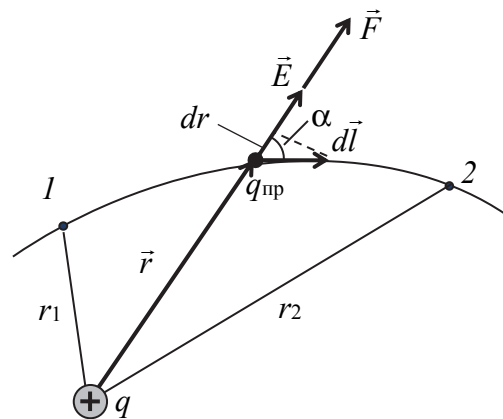


Рис. 1.16

Элементарная работа, которая совершается силами поля над зарядом  $q_{пр}$  при перемещении, будет равна

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = q_{пр} \vec{E} d\vec{l} = q_{пр} E \cos \alpha dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{пр} q}{r^2} dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{пр} q}{r^2} dr, \quad (1.32)$$

где  $dl \cos \alpha = dr$ .

Теперь найдем работу по перемещению заряда  $q_{\text{пр}}$  между точками 1 и 2:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_{\text{пр}}}{r^2} dr = \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.33)$$

Из формулы (1.33) видно, что работа электростатического поля по перемещению заряда не зависит от траектории, по которой перемещается заряд, а определяется только его начальным и конечным положениями. Следовательно, электростатическое поле является *потенциальным*, а электростатические силы – *консервативными*.

### 1.7. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в интегральной и дифференциальной формах

Из формулы (1.33) видно, что работа, которая совершается при перемещении заряда во внешнем электростатическом поле по любой замкнутой траектории, будет равна нулю:

$$A = \oint_L dA = 0. \quad (1.34)$$

Так как  $dA = \vec{F}d\vec{l} = q_{\text{пр}}\vec{E}d\vec{l}$ ,

то

$$\oint_L dA = \oint_L q_{\text{пр}}\vec{E}d\vec{l} = q_{\text{пр}} \oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0. \quad (1.35)$$

Интеграл  $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L E \cos \alpha dl = \oint_L E_{\parallel} dl$  называется *циркуляцией*

*вектора напряженности электростатического поля*. Из формулы (1.35) следует *теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в интегральной форме*: циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру всегда равна нулю. Выражение (1.35) является *условием консервативности электростатического поля*.

Получим *теорему о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в дифференциальной форме*. Для этого к левой части первого уравнения (1.35) применим *теорему Стокса*, которая гласит, что циркуляция вектора  $\vec{A}$  по произвольному контуру  $L$  равна потоку ротора этого вектора сквозь любую поверхность, натянутую на этот контур:

$$\oint_L \vec{A}d\vec{l} = \int_S (\text{rot}\vec{A})_n dS, \quad (1.36)$$

где  $\text{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$  – ротор вектора  $\vec{A}$ .

Получим

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S (\text{rot}\vec{E})_n dS = 0 \Rightarrow \text{rot}\vec{E} = 0. \quad (1.37)$$

Выражение (1.37) показывает: из потенциального характера электростатического поля следует, что оно является *безвихревым*.

## 1.8. Потенциал. Разность потенциалов. Принцип суперпозиции для электростатических потенциалов

Работа сил консервативного поля может быть представлена как изменение потенциальной энергии, взятой с обратным знаком:

$$A_{12} = -(\Pi_2 - \Pi_1) = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (1.38)$$

Сопоставление формул (1.33) и (1.38) приводит к выражению для потенциальной энергии заряда  $q_{\text{пр}}$  в поле точечного заряда  $q$ :

$$\Pi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_{\text{пр}}}{r} + \text{const}. \quad (1.39)$$

Значение константы (const) выбирается таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность потенциальная энергия обращалась в нуль, поэтому получаем, что  $\text{const} = 0$ , а

$$\Pi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_{\text{пр}}}{r}. \quad (1.40)$$

Потенциальная энергия, которой обладает пробный заряд, зависит не только от его значения, но и от величин, характеризующих электростатическое поле. Поэтому различные пробные заряды в одной и той же точке поля будут обладать различной энергией. Но отношение  $\Pi / q_{\text{пр}}$  для всех зарядов будет одним и тем же. Это отношение называется *потенциалом поля в данной точке*:

$$\varphi = \frac{\Pi}{q_{\text{пр}}}. \quad (1.41)$$

**Потенциал** есть скалярная физическая величина, численно равная потенциальной энергии, которой обладал бы в данной точке

единичный пробный заряд. Потенциал является *энергетической* характеристикой электрического поля.

Потенциал поля, создаваемого точечным зарядом, равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (1.42)$$

Если  $q > 0$ , то  $\varphi > 0$ , если  $q < 0$ , то  $\varphi < 0$ .

Любой заряд  $q$ , находящийся в точке поля с потенциалом  $\varphi$ , обладает потенциальной энергией  $\Pi = q\varphi$ , а работа сил поля, совершаемая при перемещении заряда из точки 1 в точку 2, может быть выражена следующим образом:

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\Delta\varphi. \quad (1.43)$$

Величину  $(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta\varphi$  называют *разностью потенциалов* между точками 1 и 2.

Если заряд из точки 1 с потенциалом  $\varphi$  удаляется на бесконечность (где потенциал равен нулю), то работа сил поля равна  $A_{1\infty} = q\varphi$ . Отсюда следует, что *потенциал электростатического поля численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при его удалении из данной точки на бесконечность*.

В системе СИ за единицу измерения потенциала  $\varphi$  и разности потенциалов  $\Delta\varphi$  принимают 1 В (вольт).

Рассмотрим поле, создаваемое системой точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Расстояния от каждого из зарядов до данной точки поля обозначим  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Работа, совершаемая силами этого поля по перемещению пробного заряда  $q_{\text{пр}}$ , будет равна алгебраической сумме работ сил электростатического поля, создаваемого каждым из зарядов в отдельности:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (1.44)$$

Каждая из работ  $A_i$  равна

$$A_i = \frac{q_{\text{пр}}q_i}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right). \quad (1.45)$$

Следовательно,

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_{\text{пр}}q_i \left( \frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_{\text{пр}}}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_{\text{пр}}}{r_{i2}}. \quad (1.46)$$



Так как  $A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2$ , то

$$\Pi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_{\text{пр}}}{r_i} = q_{\text{пр}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}. \quad (1.47)$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{\Pi}{q_{\text{пр}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i} = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (1.48)$$

Из выражения (1.48) следует **принцип суперпозиции потенциалов**: потенциал поля, создаваемого системой зарядов, в данной точке равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых в этой точке каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (1.49)$$

Если электростатическое поле создается заряженным телом с распределенным зарядом, то его разбивают на элементарные заряды  $dq$ . Такие заряды можно считать точечными, и для них можно применить формулу (1.42):

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}. \quad (1.50)$$

Применяя принцип суперпозиции (1.49) для расчета потенциала поля, создаваемого распределенным зарядом, суммирование необходимо заменить интегрированием:

$$\varphi = \int d\varphi. \quad (1.51)$$

## 1.9. Связь между напряженностью и потенциалом. Эквипотенциальные поверхности

Для потенциального поля между консервативной (потенциальной) силой и потенциальной энергией существует взаимосвязь:

$$\vec{F} = -\text{grad}\Pi = -\nabla\Pi, \quad (1.52)$$

где  $\text{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$  – оператор Гамильтона.

Поскольку  $\vec{F} = q\vec{E}$ , а  $\Pi = q\varphi$ , то из формулы (1.52) следует:

$$\begin{aligned} q\vec{E} &= -\text{grad}(q\varphi) \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad}\varphi \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{E} &= -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Напряженность электростатического поля равна градиенту потенциала со знаком минус. Знак минус показывает, что вектор напряженности направлен в сторону убывания потенциала.

Для радиально-симметричного поля выражение (1.53) можно записать в виде

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Для проекции вектора  $\vec{E}$  на произвольное направление  $l$  справедливо соотношение

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}. \quad (1.54)$$

Для графического изображения распределения потенциала используются **эквипотенциальные поверхности** – поверхности, во всех точках которых потенциал имеет одно и то же значение, т. е.

$$\varphi = \text{const}. \quad (1.55)$$

При перемещении по эквипотенциальной поверхности на отрезок  $dl$  потенциал не изменяется ( $d\varphi = 0$ ). Согласно формуле (1.54), составляющая вектора  $\vec{E}$ , касательная к поверхности, будет равна нулю. Отсюда следует, что вектор  $\vec{E}$  в каждой точке направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности, проходящей через данную точку. Так как вектор  $\vec{E}$  направлен по касательной к линии напряженности, то линии напряженности в каждой точке перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям. Эквипотенциальную поверхность можно провести через любую точку поля, следовательно, таких поверхностей может быть построено бесконечное множество. Условились проводить поверхности таким образом, чтобы разность потенциалов для двух соседних поверхностей была всюду одна и та же. Тогда по густоте эквипотенциальных поверхностей можно судить о величине напряженности поля. Чем гуще располагаются эквипотенциальные поверхности, тем быстрее изменяется потенциал при перемещении

вдоль нормали к поверхности. Следовательно, где эти поверхности расположены гуще, там напряженность поля больше.

На рис. 1.16, *а* изображены эквипотенциальные поверхности точечного заряда; на рис. 1.16, *б* – эквипотенциальные поверхности диполя.

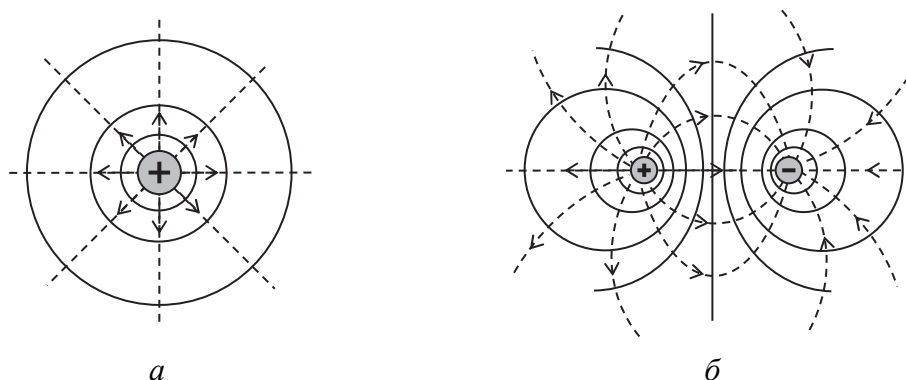


Рис. 1.16

Сплошными линиями показаны сечения эквипотенциальных поверхностей, пунктиром – силовые линии поля.

### **Контрольные вопросы**

1. Дайте определение электрического заряда.
2. Перечислите свойства электрического заряда.
3. Что понимают под дискретностью заряда?
4. Что такое инвариантность заряда?
5. Сформулируйте закон сохранения заряда.
6. Что понимают под элементарным зарядом?
7. Дайте определение точечного заряда, распределенного заряда.
8. Дайте определение линейной, поверхностной и объемной плотности заряда.
9. Запишите и сформулируйте закон Кулона.
10. Запишите и поясните закон Кулона в векторном виде.
11. Какой заряд называют пробным?
12. Дайте определение напряженности электростатического поля.
13. Дайте определение силовых линий (линий напряженности электростатического поля).
14. Как направлен вектор напряженности поля, создаваемого положительным, отрицательным точечным зарядом?
15. Свойства силовых линий.
16. Принцип суперпозиции электрических полей.

17. Запишите формулу для расчета напряженности поля точечного заряда.
18. Что понимают под потоком вектора напряженности?
19. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в интегральной форме.
20. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в дифференциальной форме.
21. Что понимают под циркуляцией вектора напряженности электростатического поля?
22. Запишите и поясните теорему о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в дифференциальной форме.
23. Сформулируйте и запишите теорему о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в интегральной форме.
24. Почему электростатическое поле называют консервативным?
25. Запишите и поясните теорему Гаусса для электростатического поля в вакууме в дифференциальной форме.
26. Дайте определение потенциала электростатического поля.
27. Дайте определение разности потенциалов.
28. Сформулируйте принцип суперпозиции потенциалов.
29. Запишите и поясните формулу связи между напряженностью и потенциалом.
30. Дайте определение эквипотенциальной поверхности.
31. Чему равна работа электростатического поля по перемещению заряда.

### **Задачи по теме**

#### **«Электрическое поле в вакууме»**

1. Точечные заряды  $q_1 = 20$  нКл,  $q_2 = -10$  нКл находятся в диэлектрической среде с  $\epsilon = 2$  на расстоянии  $d = 5$  см друг от друга. Определите напряженность поля в точке, удаленной на  $r_1 = 3$  см от первого и на  $r_2 = 4$  см от второго заряда. Определите также силу  $F$ , действующую в этой точке на точечный заряд  $q = 1$  нКл.
2. Три одинаковых точечных заряда  $q_1 = q_2 = q_3 = 2$  нКл находятся в вершинах равностороннего треугольника со сторонами  $a = 1$  см. Определите модуль и направление силы  $F$ , действующей на один из зарядов со стороны двух других. Заряды находятся в вакууме.
3. Два положительных точечных заряда  $q$  и  $9q$  находятся на расстоянии  $d$  друг от друга. Какой заряд и где надо поместить, чтобы система зарядов была в равновесии?

4. Четыре одинаковых заряда  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 40$  нКл закреплены в вершинах квадрата со стороной  $a = 10$  см. Найдите силу  $F$ , действующую на один из этих зарядов со стороны трех остальных. Заряды находятся в вакууме.

5. Три заряда  $q_1 = q_2 = q_3 = 10^{-8}$  Кл располагают в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд  $q_0$  и где надо поместить, чтобы вся система зарядов находилась в равновесии?

6. В вершинах правильного шестиугольника находятся заряды  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 1$  мкКл. Какой заряд  $q_0$  и где следует поместить, чтобы вся система была в равновесии?

7. В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 8 \cdot 10^{-10}$  Кл. Какой заряд  $q_0$  надо поместить в центр квадрата, чтобы система зарядов была в равновесии?

8. На расстоянии  $d = 20$  см в вакууме находятся два точечных заряда:  $q_1 = 50$  нКл и  $q_2 = 100$  нКл. Определите силу  $F$ , действующую на заряд  $q_3 = -10$  нКл, удаленный от обоих зарядов на одинаковое расстояние  $l$ , равное 15 см.

9. В вершинах правильного шестиугольника в вакууме расположены три положительных и три отрицательных заряда. Найдите напряженность электрического поля в центре шестиугольника при различных комбинациях в расположении этих зарядов. Сторона шестиугольника  $a = 3$  см, величина каждого заряда  $q = 1,5$  нКл.

10. В однородном поле с напряженностью  $E_0 = 40$  кВ/м находится заряд  $q = 27$  нКл. Найдите напряженность  $E$  результирующего поля на расстоянии  $r = 9$  см от заряда в точках: а) лежащих на силовой линии, проходящей через заряд; б) лежащих на прямой, проходящей через заряд перпендикулярно силовым линиям.

11. Ромб составлен из двух равносторонних треугольников со стороной  $a = 0,2$  м. В вершинах при острых углах помещены заряды  $q_1 = q_2 = 6 \cdot 10^{-8}$  Кл. В вершине одного тупого угла помещен заряд  $q_3 = -8 \cdot 10^{-8}$  Кл. Найдите напряженность электрического поля  $E$  в четвертой вершине. Заряды находятся в вакууме.

12. Одинаковые по величине, но разные по знаку заряды  $q_1 = -q_2 = 1,8 \cdot 10^{-8}$  Кл расположены в двух вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a = 0,2$  м. Найдите напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника. Заряды находятся в вакууме.

13. Заряды  $q_1 = 7,5$  нКл и  $q_2 = -14,7$  нКл расположены в вакууме на расстоянии  $d = 5$  см друг от друга. Найдите напряженность

электрического поля в точке на расстоянии  $r_1 = 3$  см от положительно-го заряда и  $r_2 = 4$  см от отрицательного заряда.

14. Два точечных заряда  $q_1 = 2q$  и  $q_2 = -3q$  находятся на расстоянии  $d$  друг от друга. Найдите положение точки, в которой напряженность поля  $E$  равна нулю.

15. Найдите напряженность электрического поля  $E$  в точке, лежащей посередине между точечными зарядами  $q_1 = 8 \cdot 10^{-9}$  Кл и  $q_2 = 6 \cdot 10^{-9}$  Кл, расположенными в вакууме на расстоянии  $r = 12$  см, в случае а) одноименных зарядов; б) разноименных зарядов.

16. Тонкий стержень длиной  $l = 20$  см несет равномерно распределенный заряд  $\tau = 0,1$  мкКл. Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в вакууме в точке  $A$ , лежащей на оси стержня на расстоянии  $a = 20$  см от его конца.

17. Тонкое кольцо несет распределенный заряд  $q = 0,2$  мкКл. Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в вакууме в точке  $A$ , равноудаленной от всех точек кольца на расстояние  $r = 20$  см. Радиус кольца  $R = 10$  см.

18. Бесконечный тонкий стержень, ограниченный с одной стороны, несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью  $\tau = 0,5$  мкКл/м. Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в вакууме в точке  $A$ , лежащей на оси стержня на расстоянии  $a = 20$  см от его начала.

19. Прямая тонкая проволока длиной  $l = 1$  м несет равномерно распределенный заряд. Вычислите линейную плотность  $\tau$  заряда, если напряженность поля  $E$  в вакууме в точке  $A$ , лежащей на прямой, перпендикулярной к оси стержня и проходящей через его середину, на расстоянии  $a = 0,5$  м от ее середины равна  $E = 200$  В/м.

20. Тонкий стержень длиной  $l = 10$  см равномерно заряжен с линейной плотностью  $\tau = 0,4$  мкКл. Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в вакууме в точке  $A$ , лежащей на прямой, перпендикулярной к оси стержня и проходящей через один из его концов, на расстоянии  $a = 8$  см от этого конца.

21. По тонкому полукольцу радиуса  $R = 10$  см равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 1$  мкКл/м. Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в вакууме в точке  $A$ , совпадающей с центром кольца.

22. Две трети тонкого кольца радиусом  $R = 10$  см несут равномерно распределенный с линейной плотностью  $\tau = 0,2$  мкКл/м заряд. Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого



распределенным зарядом в вакууме в точке  $O$ , совпадающей с центром кольца.

23. Два точечных заряда  $q_1 = 6$  мкКл и  $q_2 = 3$  мкКл находятся в вакууме на расстоянии  $d = 60$  см друг от друга. Какую работу необходимо совершить внешним силам, чтобы уменьшить расстояние между зарядами вдвое?

24. Тонкий диск радиуса  $r$  равномерно заряжен с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найдите потенциал электрического поля в вакууме в точке, лежащей на оси диска на расстоянии  $a$  от него.

25. Какую работу надо совершить, чтобы перенести заряд  $q = 6$  нКл из точки, находящейся на расстоянии  $a_1 = 0,5$  м от поверхности шара, в точку, находящуюся на расстоянии  $a_2 = 0,1$  м от его поверхности? Радиус шара  $R = 5$  см, потенциал шара  $\varphi = 200$  В.

26. Восемь одинаковых капель ртути, заряженных до потенциала  $\varphi_1 = 10$  В, сливаются в одну. Каков потенциал  $\varphi$  образовавшейся капли?

27. Электрическое поле образовано в вакууме бесконечно длинной заряженной нитью, линейная плотность заряда которой  $\tau = 20$  пКл/м. Определите разность потенциалов двух точек поля, отстоящих от нити на расстоянии  $r_1 = 8$  см и  $r_2 = 12$  см.

28. Тонкая квадратная рамка расположена в вакууме и равномерно заряжена с линейной плотностью заряда  $\tau = 200$  пКл/м. Определите потенциал  $\varphi$  поля в точке пересечения диагоналей.

29. Тонкий стержень длиной  $l = 50$  см согнут в кольцо. Он равномерно заряжен с линейной плотностью заряда  $\tau = 800$  нКл/м и находится в вакууме. Определите потенциал  $\varphi$  в точке, расположенной на оси кольца на расстоянии  $d = 10$  см от его центра.

30. Два электрических заряда  $q_1 = q$  и  $q_2 = -2q$  расположены на расстоянии  $l = 6a$  друг от друга. Найдите геометрическое место точек на плоскости, в которой лежат эти заряды, где потенциал создаваемого ими электрического поля равен нулю.

31. На сколько изменится кинетическая энергия заряженного шарика массой  $m = 1$  г и зарядом  $q_1 = 1$  нКл при его движении в вакууме под действием поля точечного заряда  $q_2 = 1$  мкКл из точки, удаленной на  $r_1 = 3$  см от этого заряда в точку, отстоящую на  $r_2 = 10$  см от него? Чему равна конечная скорость шарика, если начальная скорость равна  $v_0 = 0,5$  м/с?

32. Электрон со скоростью  $v_0 = 1,6 \cdot 10^6$  м/с влетел в перпендикулярное скорости электрическое поле с напряженностью  $E = 90$  В/см. Какое расстояние от точки влета пролетит электрон, когда его скорость составит угол  $\alpha = 45^\circ$  с начальным направлением?



33. Электрон с энергией  $K = 400$  эВ (в бесконечности) движется в вакууме вдоль силовой линии по направлению к поверхности металлической заряженной сферы радиусом  $R = 10$  см. Определите минимальное расстояние  $a$ , на которое приблизится электрон к поверхности сферы, если ее заряд  $q = -10$  нКл.

34. Электрон, пройдя в плоском воздушном конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобрел скорость  $v = 10^5$  м/с. Расстояние между пластинами  $d = 8$  мм. Найдите: 1) разность потенциалов  $U$  между пластинами; 2) поверхностную плотность заряда  $\sigma$  на пластинах.

35. Бесконечная плоскость находится в вакууме и заряжена равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma = -35,4$  нКл/м<sup>2</sup>. По направлению силовых линий электрического поля, созданного плоскостью, движется электрон. Определите минимальное расстояние  $l_{\min}$ , на которое может подойти к этой плоскости электрон, если на расстоянии  $l_0 = 10$  см от плоскости он имел кинетическую энергию  $K = 80$  эВ.

36. Какой минимальной скоростью  $v_{\min}$  должен обладать протон, чтобы он мог достигнуть поверхности заряженного металлического шара радиусом  $R = 10$  см, двигаясь из точки, находящейся на расстоянии  $a = 30$  см от центра шара? Потенциал шара  $\phi = 400$  В.

37. В однородное электрическое поле напряженностью  $E = 200$  В/м влетает (вдоль силовой линии) электрон со скоростью  $v_0 = 2$  Мм/с. Определите расстояние  $l$ , которое пройдет электрон до точки, в которой его скорость будет равна половине начальной.

38. Протон со скоростью  $v_0 = 6 \cdot 10^5$  м/с влетел в перпендикулярное скорости  $\vec{v}_0$  однородное электрическое поле с напряженностью  $E = 100$  В/м. На какое расстояние от начального направления движения сместится электрон, когда его скорость  $\vec{v}$  составит угол  $\alpha = 60^\circ$  с этим направлением? Чему равна разность потенциалов между точкой входа в поле и этой точкой?

39. Электрон влетает в однородное электрическое поле в направлении, противоположном направлению силовых линий. В некоторой точке поля с потенциалом  $\phi_1 = 100$  В электрон имел скорость  $v_0 = 2$  Мм/с. Определите потенциал  $\phi_2$  точки поля, в которой скорость электрона будет в три раза больше начальной. Какой путь пройдет электрон, если напряженность электрического поля  $E = 5 \cdot 10^4$  В/м?

40. Электрон влетает в плоский воздушный конденсатор длиной  $l = 5$  см со скоростью  $v_0 = 4 \cdot 10^7$  м/с, направленной параллельно пластинам. Конденсатор заряжен до напряжения  $U = 400$  В. Расстояние между пластинами  $d = 1$  см. Найдите смещение электрона, вызванное полем конденсатора, направление и величину его скорости в момент вылета?

## 2. Электрическое поле в веществе

Вещество, независимо от его природы и агрегатного состояния, помещенное во внешнее электрическое поле, претерпевает определенные изменения. Это приводит к возникновению ряда явлений, которые, в свою очередь, изменяют поле как внутри этого вещества, так и за его пределами.

### 2.1. Электрический диполь. Электрический момент диполя

**Диполем** называется совокупность двух равных зарядов противоположного знака, находящихся на расстоянии, малом по сравнению с расстоянием до точек, в которых рассматривается его электрическое поле. Линия, проходящая через заряды, называется **осью диполя**. Вектор  $\vec{l}$ , направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними, называется **плечом диполя** (рис. 2.1). Вектор, совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению модуля заряда на плечо диполя, называется **электрическим моментом диполя**

$$\vec{p}_e = q\vec{l}. \quad (2.1)$$

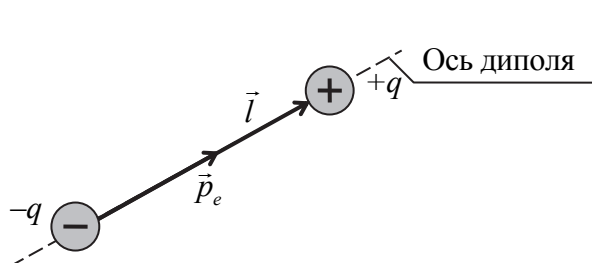


Рис. 2.1

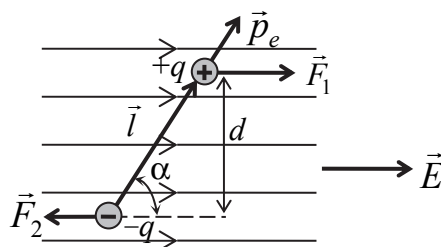


Рис. 2.2

Рассмотрим поведение диполя во внешнем электрическом поле. Если диполь поместить в *однородное* электрическое поле, образующие диполь заряды  $+q$  и  $-q$  окажутся под действием равных по величине, но противоположных по направлению сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (рис. 2.2). Момент пары сил, действующих на диполь, будет равен

$$M = Fd = Fl\sin\alpha = qEl\sin\alpha = p_e E\sin\alpha, \quad (2.2)$$

где  $d = l\sin\alpha$  – момент пары сил.

Формулу (2.2) можно записать в векторном виде:

$$\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E}. \quad (2.3)$$

Момент сил, действующий со стороны электрического поля, стремится повернуть диполь так, чтобы его электрический момент  $\vec{p}_e$  установился по направлению поля.

## 2.2. Свободные и связанные заряды в веществе. Типы диэлектриков

По отношению к действию электростатического поля все вещества можно разделить на проводники, полупроводники и диэлектрики. Характерным признаком проводников является наличие в них так называемых свободных носителей заряда (*свободных зарядов*), которыми являются электроны в металлах, ионы в электролитах, электроны и ионы в ионизованных газах и плазме. Под действием электрического поля эти заряды способны перемещаться по проводникам, и поэтому проводники проводят электрический ток. Диэлектрики, состоящие из нейтральных атомов или молекул, практически не содержат свободных носителей заряда, и потому плохо проводят электрический ток (т. е. являются в обычных условиях изоляторами). Заряды, которые входят в состав нейтральных атомов и молекул, а также заряды ионов в кристаллических диэлектриках с ионной решеткой называют *связанными зарядами*.

Различают *полярные и неполярные диэлектрики*, а также *ионные кристаллические диэлектрики*.

*Неполярные диэлектрики* ( $N_2$ ,  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$ ,  $CH_4$ ). Вещества, молекулы которых имеют симметрическое строение, т. е. центры «сосредоточения» положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего электрического поля совпадают и дипольный момент этих молекул в этом случае равен нулю. Молекулы таких диэлектриков называются *неполярными*.

*Полярные диэлектрики* ( $H_2O$ ,  $NH_3$ ,  $SO_2$ ,  $CO$ ). Вещества, молекулы которых имеют асимметрическое строение, т. е. центры «сосредоточения» положительных и отрицательных зарядов не совпадают и эти молекулы обладают дипольным моментом. Молекулы таких диэлектриков называются *полярными*.

*Ионно-кристаллические диэлектрики* ( $NaCl$ ,  $KCl$ ,  $KBr$ ). Вещества, молекулы которых имеют ионное строение. Ионные кристаллы представляют собой пространственные решетки с правильным чередованием ионов разных знаков. В этих кристаллах нельзя выделить отдельные молекулы, а рассматривать их можно как систему двух вставленных одна в другую ионных подрешеток противоположных знаков.

## 2.3. Поляризация диэлектриков, виды поляризации

Мы знаем, что диполи, помещенные во внешнее электростатическое поле, стараются расположиться по направлению поля (т. е. так, чтобы момент электрических сил, действующих на них, был равен нулю ( $M = p_e E \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ )) (см. п. 2.1).

Рассмотрим, как ведут себя различные диэлектрики во внешнем электростатическом поле:

1) полярные диэлектрики. Полярные молекулы имеют дипольный момент  $\vec{p}_e$ . В отсутствии внешнего поля благодаря тепловому движению дипольные моменты расположены беспорядочно. Под действием поля дипольные моменты  $\vec{p}_e$  всех молекул повернутся так, что их оси расположатся приблизительно вдоль направления внешнего поля (рис. 2.3).

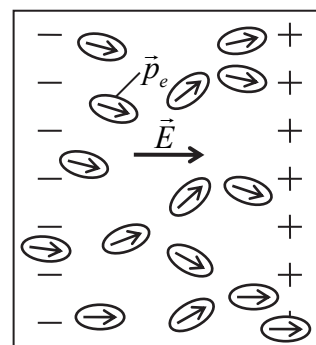


Рис. 2.3

Однако тепловое движение молекул препятствует строгой ориентации их дипольных

моментов. В резуль-

тате преимущественной ориентации дипольных моментов молекул вдоль поля на противоположных гранях возникают поляризационные заряды разных знаков, тогда как внутри диэлектрика заряды разных знаков в среднем скомпенсированы. Такого рода поляризация называется **ориентационной (или дипольной) поляризацией**;

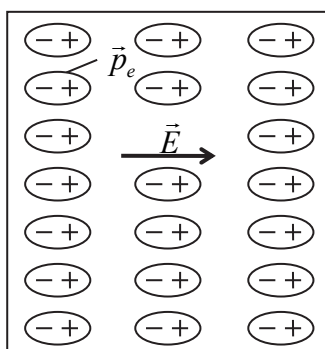


Рис. 2.4

2) неполярные диэлектрики. Если неполярная молекула в отсутствии поля не имеет дипольного момента, то под действием внешнего поля положительное ядро молекулы смещается в направлении электрического поля, а электронные оболочки – в обратном направлении

(рис. 2.4). Поэтому молекула приобретает дипольный момент  $\vec{p}_e$ , который будет пропорционален напряженности  $E$  внешнего поля. Такие диполи, возникающие при «деформации» атомов и молекул во внешнем поле, называются **квазиупругими диполями**. Их дипольный момент равен

$$\vec{p}_e = \epsilon_0 \alpha \vec{E}, \quad (2.4)$$

где  $\alpha = 4\pi r^3$  – поляризуемость молекулы,  $[\alpha] = 1 \text{ м}^3$ ;  $r$  – радиус молекулы.

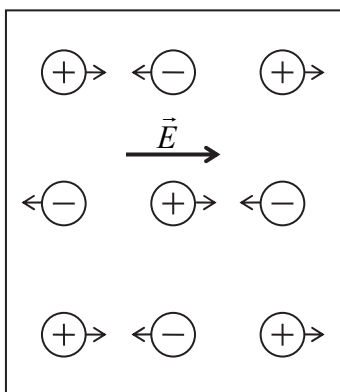


Рис. 2.5

В результате на противоположных гранях диэлектрика появятся разноименные поляризационные заряды. Такого рода поляризация называется *электронной поляризацией*.

3) ионно-кристаллические диэлектрики. В случае ионных кристаллических диэлектриков положительные ионы кристаллической решетки сместятся в направлении поля, а отрицательные ионы – противоположно полю, т. е. их подрешетки как бы сдвинутся относительно друг друга на некоторую величину (рис. 2.5). В результате весь образец приобретет результирующий дипольный момент. На противоположных его гранях возникнут нескомпенсированные поляризационные заряды противоположного знака. Такого рода поляризация называется *ионной поляризацией*.

Таким образом, под *поляризацией* понимают процесс ориентации диполей во внешнем электрическом поле или появление под воздействием внешнего электрического поля ориентированных по полю диполей.

## 2.4. Диэлектрическая восприимчивость неполярных и полярных диэлектриков

Возникающий во всех случаях дипольный момент образца зависит от числа микрочастиц, находящихся в его объеме. Для характеристики степени поляризации диэлектрика вводят физическую величину – *поляризованность (вектор поляризации)  $\vec{P}$* . **Вектор поляризации** – это векторная физическая величина, численно равная дипольному моменту единицы объема диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_{e_i}}{\Delta V}. \quad (2.5)$$

Для большого класса диэлектриков (кроме сегнетоэлектриков) поляризованность  $\vec{P}$  линейно зависит от напряженности электрического поля:

$$\vec{P} = \varkappa \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.6)$$

где  $\varkappa$  – диэлектрическая восприимчивость вещества, которая характеризует свойства диэлектрика. Эта величина безразмерная и всегда  $\varkappa > 0$ .

Рассмотрим *газообразный неполярный диэлектрик*. Молекулы неполярного диэлектрика приобретают во внешнем электрическом поле дипольный момент  $p_e$ , пропорциональный напряженности  $E$  внешнего поля, который определяется формулой (2.4).

Концентрация молекул в газообразном неполярном диэлектрике равна  $n$ . Учитывая формулу (2.5), получаем для поляризованности неполярного диэлектрика выражение

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_{e_i}}{\Delta V} = \frac{\Delta N \cdot \vec{p}_e}{\Delta V} = n\vec{p}_e = n\alpha\epsilon_0\vec{E} = \alpha\epsilon_0\vec{E}, \quad (2.7)$$

где  $\alpha = n\alpha$  – диэлектрическая восприимчивость неполярного вещества;  $\alpha$  – поляризуемость неполярной молекулы;  $n = \frac{\Delta N}{\Delta V}$  – концентрация молекул диэлектрика.

В случае жидких и кристаллических неполярных диэлектриков следует учитывать взаимодействие между атомами и молекулами. В результате зависимость  $\alpha$  от  $\alpha$  и  $n$  становится нелинейной, ее можно выразить *формулой Клаузиуса – Моссотти*:

$$\frac{\alpha}{\alpha + 3} = \frac{1}{3}n\alpha. \quad (2.8)$$

Рассмотрим *жидкие и газообразные полярные диэлектрики*. В этом случае поляризация преимущественно осуществляется за счет поворота дипольных моментов молекул под действием электрического поля. Процессу ориентирования диполей будет противодействовать дезориентирующее влияние теплового движения молекул, которое в результате их столкновений нарушает упорядоченную ориентировку диполей в направлении поля. Поэтому в расчетах следует учитывать совместное действие этих двух факторов. Теория поляризации полярных диэлектриков создана в 1912 г. Петером Йозефом Вильгельмом Дебаем, который воспользовался методикой расчета намагничивания парамагнетиков, разработанной в 1905 г. французским физиком Полем Ланжевенем. Поляризованность для таких диэлектриков равна

$$\vec{P} = \frac{np_e^2}{3kT}\vec{E} \Rightarrow \alpha = \frac{np_e^2}{3\epsilon_0kT}, \quad (2.9)$$

где  $p_e$  – дипольный момент полярной молекулы;  $n$  – концентрация молекул;  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температуры диэлектрика;  $\alpha$  – диэлектрическая восприимчивость полярного диэлектрика.



## 2.5. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике. Вектор электрического смещения

Рассмотрим плоскопараллельную пластинку из изотропного диэлектрика, помещенную в однородное электростатическое поле. Под действием поля диэлектрик будет поляризоваться. Выделим в поляризованном диэлектрике элементарный

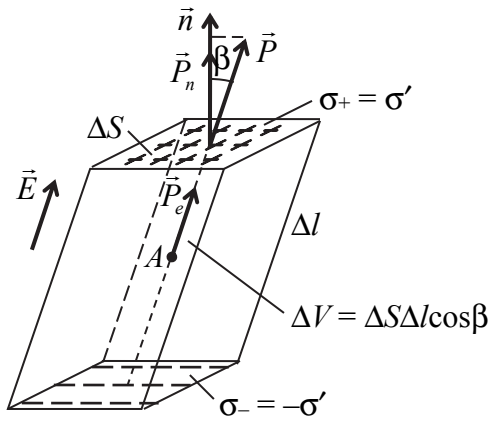


Рис. 2.5

объем  $\Delta V$  в виде наклонной призмы, основания которой выходят на поверхности диэлектрической пластинки (рис. 2.5).

С одной стороны, дипольный момент  $p_e$  выделенного элементарного объема равен произведению поляризованности  $P$  на величину его объема:

$$p_e = \sum_{i=1}^N p_{e_i} = P \Delta V = P \Delta S \Delta l \cos \beta. \quad (2.10)$$

С другой стороны, поверхностные заряды на основаниях призмы образуют электрический диполь. Его дипольный момент равен

$$p_e = q'l = \sigma' \Delta S \Delta l. \quad (2.11)$$

Сравнив формулы (2.10) и (2.11), получаем

$$P \Delta S l \cos \beta = \sigma' \Delta S l \Rightarrow P \cos \beta = \sigma' \Rightarrow P_n = \sigma', \quad (2.12)$$

т. е. *поверхностная плотность связанных зарядов некоторой элементарной площадки равна нормальной составляющей вектора поляризации.*

Формула (2.12) показывает, что нормальная составляющая  $P_n$  представляет по величине количество электричества, смещаемое при поляризации через единичную площадку в направлении нормали  $\vec{n}$  к ней. Эта интерпретация применима и в случае неоднородной поляризации, когда вектор  $\vec{P}$  меняется от точки к точке. В этом случае можно разделить диэлектрик на малые объемы, в пределах каждого из которых поляризация может считаться однородной.

Внутри диэлектрика на внешнее электрическое поле  $\vec{E}_0$  накладывается дополнительное электрическое поле  $\vec{E}'$  связанных зарядов. Определим значение избыточного связанного заряда, который возникает при поляризации диэлектрика внутри произвольной заданной замкнутой поверхности  $S$  (см. рис. 2.6).



Под действием электрического поля связанные заряды молекул, находящихся вблизи поверхности  $S$ , сместятся так, что их положительные и отрицательные заряды будут находиться по разные стороны поверхности  $S$ . Заряд  $dq'$ , смещенный при поляризации через площадку  $dS$  в направлении нормали, согласно формуле (2.12), равен  $P_n dS$ . Через всю поверхность  $S$  в направлении нормали  $\vec{n}$  будет смещаться заряд

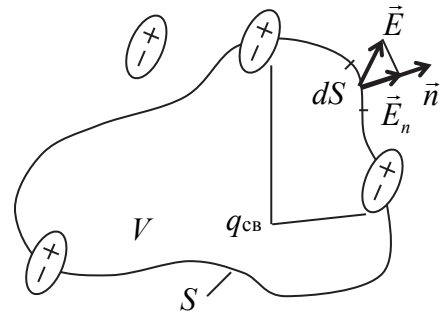


Рис. 2.6

$$q' = \oint_S dq' = \oint_S P_n dS. \quad (2.13)$$

В результате объем  $V$  диэлектрика, заключенный внутри замкнутой поверхности  $S$ , приобретет *избыточный связанный заряд*, равный по значению и противоположный по знаку наружному поверхностному заряду:

$$q_{cb} = -q' = -\oint_S P_n dS = -\oint_S \vec{P} d\vec{S}. \quad (2.14)$$

Применим теорему Гаусса (1.21) к этой замкнутой поверхности  $S$ , добавив при этом к свободным зарядам  $q$  избыточный связанный заряд  $q_{cb}$ :

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} d\vec{S} &= \frac{q + q_{cb}}{\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} = q - \oint_S \vec{P} d\vec{S} \Rightarrow \\ \Rightarrow \oint_S \vec{P} d\vec{S} + \epsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} &= q \Rightarrow \oint_S (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) d\vec{S} = q. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Величину  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  назвали **вектором электрического смещения** (единица измерения в системе СИ  $[D] = \text{Кл/м}^2$ ). Вектором электрического смещения  $\vec{D}$  описывается электрическое поле, создаваемое свободными зарядами. Поле вектора электрического смещения изображается с помощью линий электрического смещения, направление и густота которых определяются точно так же, как и для линий напряженности. Если линии вектора напряженности могут начинаться и заканчиваться на любых зарядах – свободных и связанных, то линии вектора электрического смещения начинаются и заканчиваются только на свободных зарядах.

Из выражения (2.15) следует

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q \quad \text{или} \quad \oint_S D_n dS = q. \quad (2.16)$$

Выражение (2.15) является *теоремой Гаусса для электростатического поля в диэлектриках*: поток вектора смещения электрического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных электрических зарядов.

Если правую часть теоремы Гаусса для электростатического поля в диэлектрике (2.16) выразить через объемную плотность  $\rho$  заряда ( $q = \int \rho dV$ ) и применить к выражению  $\oint D_n dS$  теорему Остроградского – Гаусса, то получим

$$\int_V \text{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV \Rightarrow \text{div} \vec{D} = \rho. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) называется *теоремой Гаусса для электростатического поля в диэлектрике в дифференциальной форме*.

## 2.6. Диэлектрическая проницаемость среды

Определим напряженность поля внутри диэлектрика. Рассмотрим однородное внешнее поле  $\vec{E}_0$ , в котором находится пластинка из однородного диэлектрика (рис. 2.7).

Под действием поля диэлектрик поляризуется, т. е. происходит

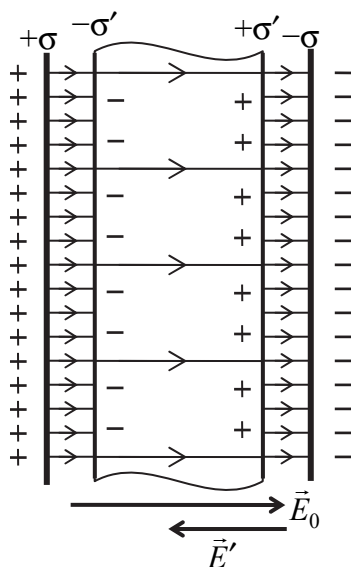


Рис. 2.7

смещение зарядов: положительные по полю, отрицательные – против поля. В результате на правой границе диэлектрика, обращенной к отрицательной плоскости, будет избыток положительного заряда с поверхностной плоскостью  $+\sigma'$ , на левой – отрицательного заряда с поверхностной плоскостью  $-\sigma'$ . Эти заряженные поверхности образуют поле, напряженность  $\vec{E}'$  которого направлена противоположно внешнему полю. Поэтому результирующее электростатическое поле внутри диэлектрика уменьшается:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \Rightarrow E = E_0 - E' < E_0. \quad (2.18)$$

Следовательно, поляризация диэлектрика вызывает уменьшение в нем поля по сравнению с первоначальным внешним полем.

Ослабление поля внутри диэлектрика означает, что часть силовых линий, которые начинаются на положительных свободных зарядах, заканчивается на отрицательно заряженной поверхности диэлектрика, а затем восстанавливаются на положительных зарядах противоположной поверхности диэлектрика и заканчиваются на отрицательных свободных зарядах. Найдем напряженность поля внутри диэлектрика. Так как поле создано двумя бесконечно заряженными плоскостями с поверхностной плотностью зарядов  $+\sigma'$  и  $-\sigma'$ , то

$$E' = E'_+ + E'_- = \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \quad (2.19)$$

Учитывая выражение (2.12), получаем

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{P_n}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0}. \quad (2.20)$$

Тогда напряженность результирующего поля внутри диэлектрика равна

$$\begin{aligned} E &= E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{\varkappa\varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = E_0 - \varkappa E \Rightarrow E(1 + \varkappa) = E_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E = \frac{E_0}{1 + \varkappa} \Rightarrow \frac{E_0}{E} = 1 + \varkappa = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 1 + \varkappa, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды.

**Диэлектрическая проницаемость вещества  $\varepsilon$**  – это физическая величина, которая показывает, во сколько раз напряженность электрического поля в диэлектрике меньше напряженности электрического поля в вакууме.

С учетом (2.6 и 2.21) вектор электрического смещения равен

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varkappa\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0(1 + \varkappa)\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}. \quad (2.22)$$

Получили формулу взаимосвязи векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ .

С учетом диэлектрических свойств среды можно записать:

– закон Кулона для двух точечных зарядов, находящихся в диэлектрике

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2}, \quad (2.23)$$

– напряженность поля точечного заряда, находящегося в диэлектрике

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{\epsilon r^2}; \quad (2.24)$$

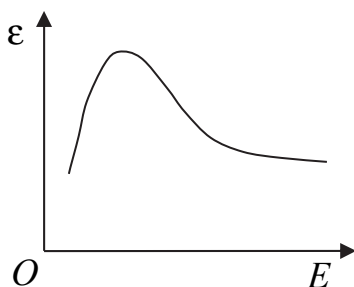
– потенциал поля точечного заряда, находящегося в диэлектрике

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r}. \quad (2.25)$$

В случае вакуума или воздуха берем  $\epsilon = 1$ .

## 2.7. Сегнетоэлектрики. Диэлектрический гистерезис. Температура Кюри

Существует группа кристаллических диэлектриков, для которых характерно резкое повышение диэлектрической проницаемости в некоторой области температур. Впервые такое поведение вещества в электрическом поле было обнаружено сотрудниками И. В. Курчатова при изучении свойств сегнетовой соли (двойная натрий-калиевая соль винной кислоты  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ). Это и послужило в дальнейшем основанием для выделения специального класса диэлектриков – *сегнетоэлектриков*. В настоящее время известно несколько сотен соединений, обладающих сегнетоэлектрическими свойствами. Группу сегнетоэлектрических материалов существенно расширяют и дополняют твердые растворы на основе различных соединений. Подобные растворы часто отличаются по своим свойствам от их ингредиентов. Сегнетоэлектрическими свойствами обладают кристаллы некоторых фосфатов и арсенатов, нитратов и солей глицина и бетаина, нитритов, двойных и сложных окислов, других соединений, содержащих почти все элементы таблицы Менделеева. К этому классу веществ относятся, например, титанат бария ( $\text{BaTiO}_3$ ), сульфат калия ( $\text{KN}_2\text{PO}_4$ ), титанат свинца  $\text{PbTiO}_3$ , ниобат калия  $\text{KNbO}_3$  и др. Сегнетоэлектрические



кристаллы характеризуются многообразием структурных типов и химического состава, что свидетельствует о различии молекулярных механизмов возникновения спонтанной поляризации.

Сегнетоэлектрики отличаются от остальных диэлектриков рядом характерных особенностей.

1. В то время как у обычных диэлектриков значение диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  составляет несколько единиц, достигая в виде исключения нескольких десятков (у воды, например,  $\epsilon = 81$ ), диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков бывает порядка нескольких тысяч. Например, для титаната бария  $\epsilon$  имеет значение около 2000 (при  $t = 120^\circ\text{C}$ ) и 6000–7000 (при  $t = 80^\circ\text{C}$ ).

2. Для сегнетоэлектриков отсутствует линейная зависимость между вектором поляризации  $\vec{P}$  и напряженности  $\vec{E}$  электрического поля. Следовательно, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  (и диэлектрическая восприимчивость  $\chi$ ) сегнетоэлектриков оказывается зависящей от напряженности поля (рис. 2.8). Для остальных диэлектриков  $\epsilon$  (и  $\chi$ ) не зависит от напряженности  $E$  поля.

3. Для сегнетоэлектриков характерно явление диэлектрического гистерезиса (от греч. «гистерезис» – запаздывание). При изменении поля значения поляризованности  $P$  (или электрического смещения  $D$ ) сегнетоэлектрика отстают от напряженности внешнего электрического поля  $E$ , в результате чего  $P$  (и  $D$ ) определяются не только величиной  $E$  в данный момент, но и предшествующими значениями, т. е. зависят от предыстории диэлектрика (от его предшествующих состояний поляризации). При циклических изменениях поля зависимость  $P$  от  $E$  изображается кривой (рис. 2.9), называемой петлей гистерезиса.

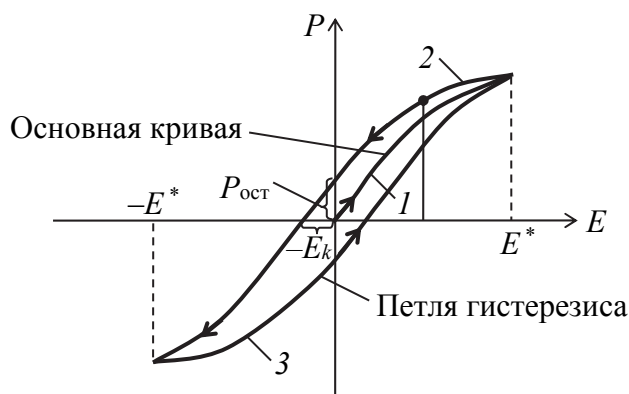


Рис. 2.9

При повышении напряженности  $E$  увеличение поляризованности  $P$  определяется кривой 1, которая не линейна. Если затем уменьшать  $E$ , то имеет место «запаздывание» в уменьшении поляризованности  $P$  (кривая 2). При  $E = 0$  поляризованность  $P = P_{\text{ост}}$  (остаточная поляризация). Для снятия остаточной поляризации нужно создать электрическое поле противоположного направления ( $E = -E_k$  – коэрцитивная

сила, от лат. *coercitio* – удерживание). Дальнейшее уменьшение значения напряженности приводит к возникновению поляризации противоположного направления, а последующее уменьшение модуля  $E$  вновь характеризуется «запаздыванием» в изменении значения  $P$  (кривая 3). В результате периодического изменения электрического поля  $E$  (от  $-E^*$  до  $E^*$ ) кривые 2, 3 для поляризованности  $P$  образуют характерную петлю гистерезиса. Кривая 1 называется основной кривой поляризации сегнетоэлектрика.

4. Сегнетоэлектрические свойства сильно зависят от температуры. При температурах, превышающих определенное значение  $T_k$ , различное для разных веществ, эти свойства исчезают. При переходе этой температуры имеет место превращение сегнетоэлектрика (фазовый переход) в обычный полярный диэлектрик. Указанная температура называется температурой (или точкой) Кюри (в честь французского физика Пьера Кюри). Например, для титаната бария точка Кюри лежит около  $80^\circ\text{C}$ , а для сегнетовой соли существуют две точки Кюри ( $+22,5^\circ\text{C}$  и  $-15^\circ\text{C}$ ), и сегнетоэлектрические свойства наблюдаются только при температурах, лежащих между этими точками.

5. Экспериментальные и теоретические исследования показали, что поляризация сегнетоэлектриков является следствием взаимодействия всех молекул сегнетоэлектрика, в связи с чем диполи элементарных ячеек кристалла выстраиваются в определенное направление под действием внутреннего электрического поля, созданного соседними молекулами сегнетоэлектрика. При этом образуются самопроизвольно поляризованные области – домены, в пределах которых все диполи ориентированы в одном направлении. Эта спонтанная (самопроизвольная) поляризация соответствует минимуму энергии домена.

При отсутствии внешнего поля дипольные моменты доменов расположены хаотически и макроскопический образец сегнетоэлектрика не поляризован ( $P = 0$ ) (рис. 2.10).

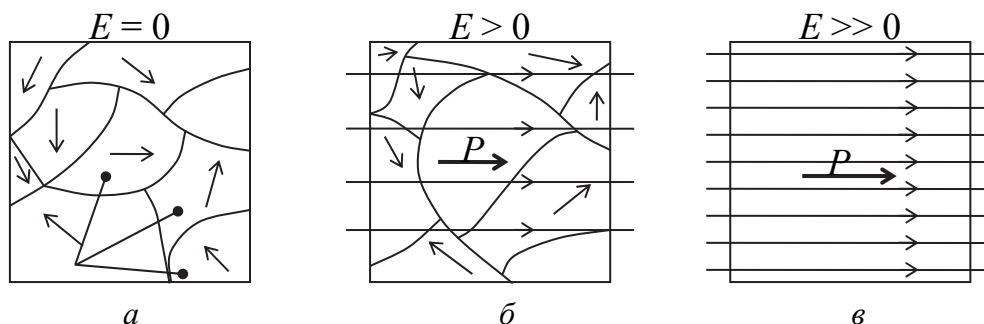


Рис. 2.10

Если такой сегнетоэлектрик поместить во все возрастающее по модулю внешнее электрическое поле  $E$ , то происходит переориентация доменов, отмечается преимущественное увеличение тех доменов, дипольные моменты которых ориентированы в направлении поля  $E$ , а также уменьшаются размеры доменов с противоположной ориентацией дипольных моментов.

В сильных полях наступает явление насыщения и весь образец будет представлять собой один макродомен. При температуре  $T > T_k$  доменная структура разрушается.

## 2.8. Эффекты, наблюдаемые в сегнетоэлектриках и других диэлектриках. Применение сегнетоэлектриков в науке и технике

**Пьезоэлектрический эффект** (от греч. *piezo* – давлению). Опыты, проведенные в 1880 г. братьями Пьером и Жаком Кюри, показали, что при механических деформациях (сжатия или растяжения) некоторых кристаллов (кварц, турмалин, сегнетовая соль, титанат бария, цинковая обманка и др.) в определенных направлениях на их гранях появляются электрические заряды противоположных знаков. Они создают электрическое поле, напряженность  $E$  которого зависит от давления ( $E \sim p$ ), т. е. механического напряжения. Пьезоэлектрический эффект в кварце происходит вдоль электрических осей кристалла, перпендикулярных к его оптической оси. Обращение направления деформации кристалла изменяет знаки зарядов на поверхностях на противоположные. *Прямой пьезоэлектрический эффект* используется для измерения механических напряжений, возникающих в деформированных материалах (*пьезодатчики*).

Реализуется и *обратный пьезоэлектрический эффект*. Он заключается в изменении линейных размеров некоторых кристаллов под действием электрического поля. Изменение направления электрического поля вызывает изменение характера деформаций на противоположный. В случае переменного электрического поля грани пластинки вибрируют, следовательно, они являются источником звуковых волн. Обратный пьезоэлектрический эффект используется при создании пьезоэлектрических генераторов ультразвука.

Рассмотрим более подробно некоторые примеры практического применения пьезоэффекта:

- пьезоэлектрическая зажигалка – самый распространенный пример использования прямого пьезоэффекта. Если разобрать кухонную



зажигалку, то можно увидеть, что искра, поджигающая газ, появляется в ней при деформации незамкнутой петли из упругого пьезоэлектрика. Расстояние между электродами такой зажигалки около 5 мм. Если учесть, что электрический пробой в воздухе возникает при напряженности поля около 2 МВ/м, то, значит, в вашей кухонной зажигалке при деформации пьезоэлектрика возникает напряжение как минимум в десять тысяч вольт;

- американские изобретатели Броз Дж. и Лаубердорфер В. разработали (патент США №3239283) конструкцию подшипника, в котором трение уничтожается вибрацией, но для ее создания не требуется специальных механизмов. Втулки подшипника изготавливаются из пьезоэлектрического материала. Ток заставляет пьезоэлектрик сжиматься и расширяться, создавая вибрацию, уничтожающую трение;

- установка на реактивных самолетах пьезопреобразователей позволяет экономить почти треть топлива, которое шло на выработку электроэнергии, следовательно, позволяет увеличить дальность полета. Здесь в электроэнергию непосредственно превращаются колебания и вибрация фюзеляжа и крыльев;

- фирма Philips успешно разрабатывает идею пьезоэлектрического привода для механизмов малой мощности. В частности, ею создан светофор, батареи которого заряжаются от шума автомобилей на перекрестке.

*Электрострикционный эффект.* При внесении диэлектриков во внешнее неоднородное электрическое поле изменяются форма и объем образца (деформация). Это явление называется *электрострикцией* (от электро- и лат. *strictio* – стягивание, сжимание). Следует отметить, что электрострикция имеет место во всех диэлектриках, помещенных в неоднородное электрическое поле, тогда как обратный пьезоэлектрический эффект наблюдается только в некоторых кристаллах, помещенных в однородное электрическое поле. Пьезоэффект пропорционален напряженности  $E$ , а электрострикция пропорциональна  $E^2$ . Поэтому электрострикционные силы не меняют своего направления при изменении направления электрического поля. Обратный пьезоэффект изменяет свое направление при изменении направления поля.

Сегнетоэлектрические материалы (монокристаллы, керамика, пленки) широко применяются в технике и научном эксперименте. Благодаря большим значениям  $\epsilon$  их используют в качестве материала для конденсаторов высокой удельной емкости. Большие значения пьезоэлектрических констант обуславливают применение сегнетоэлектриков

в качестве *пьезоэлектрических материалов* в приемниках и излучателях ультразвука, в преобразователях звуковых сигналов в электрические и наоборот, в датчиках давления и др. Резкое изменение сопротивления вблизи температуры фазового перехода в некоторых сегнетоэлектриках используется в *позисторах* для контроля и измерения температуры. Сильная температурная зависимость спонтанной поляризации (большая величина пьезоэлектрической константы) позволяет применять сегнетоэлектрики в приемниках электромагнитных излучений переменной интенсивности в широком диапазоне длин волн (от видимого до субмиллиметрового). Благодаря сильной зависимости  $\epsilon$  от напряженности электрического поля  $E$  сегнетоэлектрики используют в нелинейных конденсаторах (варикондах), которые нашли применение в системах автоматики, контроля и управления. Зависимость показателя преломления от поля обуславливает использование сегнетоэлектриков в качестве электрооптических материалов. Во внешнем электрическом поле изменяются преломляющие свойства сегнетоэлектрических кристаллов (компоненты тензора показателя преломления): это явление используется для управления световыми пучками, в оптических затворах, модуляторах и умножителях частоты лазерного излучения. Ниобат лития  $\text{LiNbO}_3$ , обладающий большими электрооптическими коэффициентами, является одним из лучших материалов для интегральных оптических модуляторов. Кристалл  $\text{KN}_2\text{PO}_4$  широко применяется для удвоения оптической частоты лазера. Из триглицинсульфата изготавливаются фотоприемники для инфракрасной области спектра.

Вариконды предназначены для управления параметрами электрических цепей за счет изменения их емкости при воздействии как постоянного или переменного напряжений, так и нескольких напряжений, приложенных одновременно и различающихся по значению и частоте. Вариконды являются нелинейными конденсаторами и по своему функциональному действию аналогичны варикапам. Основными сегнетоэлектрическими материалами, используемыми для изготовления варикондов, являются твердые растворы, например твердые растворы систем  $\text{Ba}(\text{Ti},\text{Sn})\text{O}_3$  или  $\text{Pb}(\text{Ti},\text{Zr},\text{Sn})\text{O}_3$ . Одна из основных характеристик варикондов – коэффициент нелинейности, равный отношению максимального значения диэлектрической проницаемости при некоторой максимальной для данного материала напряженности электрического поля к начальному значению диэлектрической проницаемости. Значения коэффициента нелинейности могут изменяться от 4

до 50 (в переменном поле). С увеличением приложенного напряжения диэлектрическая проницаемость, а следовательно, и электрическая емкость вариконда возрастают, достигают максимума и затем снижаются. Степень нелинейности и емкость варикондов сильно зависят от температуры. В простейшем случае вариконды работают под воздействием переменного синусоидального поля и постоянного электрического поля, причем напряженность постоянного поля значительно превышает напряженность переменного поля. Чем сильнее приложенное к сегнетоэлектрику постоянное поле, тем меньшее влияния на суммарную электрическую индукцию в сегнетоэлектрике оказывает переменное поле.

Вариконды имеют номинальные значения емкостей (при напряжении 5 В и частоте 50 Гц) от 10 до 100 000 пФ. Вариконды характеризуются высокой механической прочностью, устойчивостью к вибрациям, тряске, влаге; срок службы их практически неограничен. В серийном производстве вариконды изготавливают либо в виде одиночных дисков, либо это диски, собранные в цилиндр, с номинальными значениями емкости от 10 пФ до 0,22 мкФ. Особенности варикондов – временная и температурная нестабильность емкости, ограниченный диапазон рабочих частот и температур, высокие значения диэлектрических потерь.

Высокие нелинейные свойства позволяют использовать вариконды для стабилизации тока и напряжения, умножения частоты, для автоматического бесконтактного дистанционного управления, преобразования синусоидального напряжения в импульсное, усиления электрической мощности и т. д.

К линейным электрооптическим материалам относятся материалы, в которых наблюдается линейная зависимость диэлектрической проницаемости и коэффициента преломления от величины приложенного напряжения. Такими материалами являются кристаллы, не имеющие центра симметрии – пьезоэлектрические и сегнетоэлектрические материалы. Среди кубических линейных электрооптических кристаллов наиболее многочисленными являются кристаллы со структурой цинковой обманки (ZnS, ZnSe, ZnTe).

Квадратичным электрооптическим эффектом обладают кристаллы, имеющие центр симметрии, а также изотропные среды (некоторые жидкости, такие как нитробензол, сероуглерод). Среди материалов с квадратичным электрооптическим эффектом наибольшее применение имеют кристаллы группы дигидрофосфата калия  $\text{KH}_2\text{PO}_4$ , кристаллы

группы перовскитов (титанат бария  $\text{BaTiO}_3$  и твердые растворы на его основе). На базе кристаллов ниобата лития ( $\text{LiNbO}_3$ ), дигидрофосфата калия  $\text{KH}_2\text{PO}_4$ , его дейтерированного аналога созданы разнообразные конструкции электрооптических модуляторов.

## 2.9. Поле внутри проводника и вблизи его поверхности

В проводниках, к которым относятся металлы, жидкости и газы, имеются электрически заряженные частицы, способные под действием внешнего поля перемещаться по всему объему проводника. В металлах – это электроны, называемые свободными электронами (или электронами проводимости), которые свободно перемещаются между узлами кристаллической решетки, образованной ионами металла. В отсутствие внешнего поля электрические поля свободных электронов и положительных ионов металла взаимно компенсируют друг друга. В проводнике, внесенном в электрическое поле, происходит перераспределение свободных зарядов, в результате чего на поверхности проводника возникают нескомпенсированные положительные и отрицательные заряды (рис. 2.11). Перераспределение зарядов в проводнике происходит до тех пор, пока всюду внутри проводника поле электронов и положительных ионов  $\vec{E}'$  не скомпенсирует внешнее поле  $\vec{E}_0$  и в любой точке внутри проводника, находящегося в электростатическом поле, напряженность установившегося результирующего электрического поля  $\vec{E}$  равна 0. Этот процесс называют *электростатической индукцией*, а появившиеся на поверхности проводника заряды – *индукционными зарядами*.

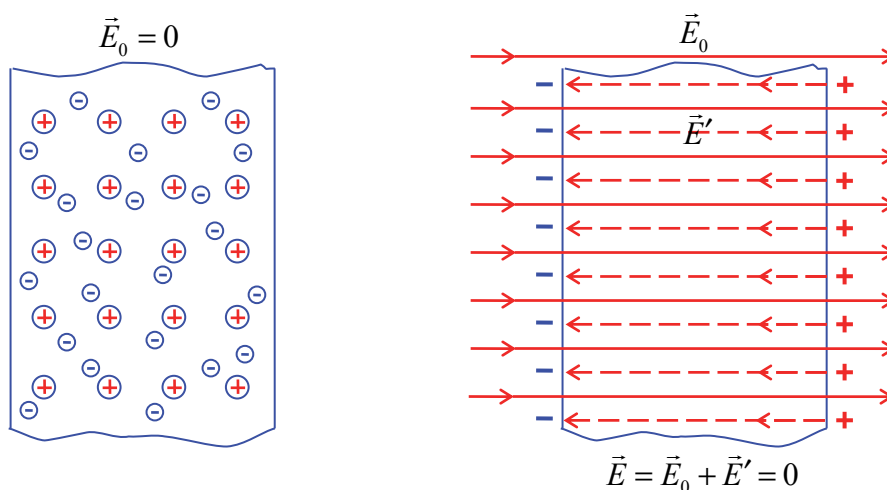


Рис. 2.11

Силловые линии электростатического поля вне проводника в непосредственной близости к его поверхности перпендикулярны поверхности. Если бы это было не так, то имела бы составляющая напряженности  $\vec{E}_\tau$  поля вдоль поверхности проводника и по поверхности протекал бы ток. Внутри проводника при равновесии зарядов во всех точках внутри проводника не только напряженность поля равна нулю ( $\vec{E} = 0$ ), равен нулю и заряд. Во всех точках на поверхности проводника  $\vec{E} = \vec{E}_n$  ( $\vec{E}_\tau = 0$ ). Потенциалы во всех точках внутри проводника одинаковы и равны потенциалу на поверхности проводника ( $E = -\frac{d\phi}{dr} = 0 \rightarrow \phi = \text{const}$ ). Таким образом, поверхность проводника, находящегося в электростатическом поле, эквипотенциальна ( $\frac{d\phi}{dl} = -E_\tau = 0$ ) и весь объем проводника также эквипотенциален.

Все внутренние области проводника, внесенного в электрическое поле, остаются электронейтральными, так как в заряженном проводнике индуцированные заряды распределяются всегда на его внешней поверхности. Если удалить некоторый объем, выделенный внутри проводника, и образовать пустую полость, то электрическое поле внутри полости будет равно нулю (рис. 2.12). На этом основана **электростатическая защита** – чувствительные к электрическому полю приборы для исключения влияния поля помещают в металлические ящики (в проводящий экран), которые соединяют с землей.

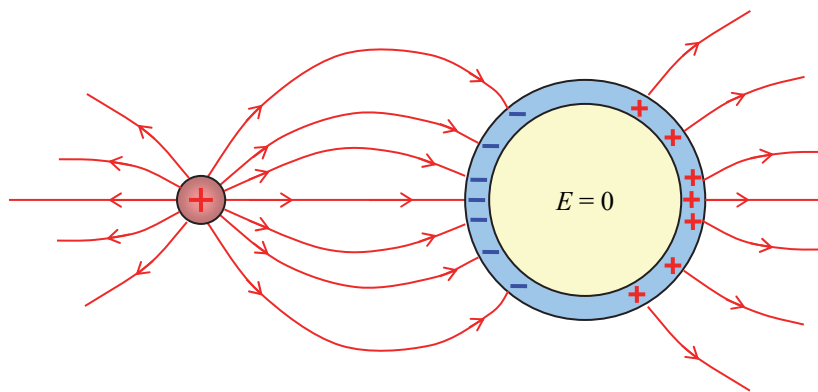


Рис. 2.12

Замкнутая проводящая незаземленная оболочка не экранирует внешнее пространство от поля зарядов, находящихся внутри оболочки. Электрический заряд внутри замкнутой сферической проводящей

оболочки создает равные по величине и противоположные по знаку индуцированные заряды на ее внутренней и внешней поверхностях (рис. 2.13, а).

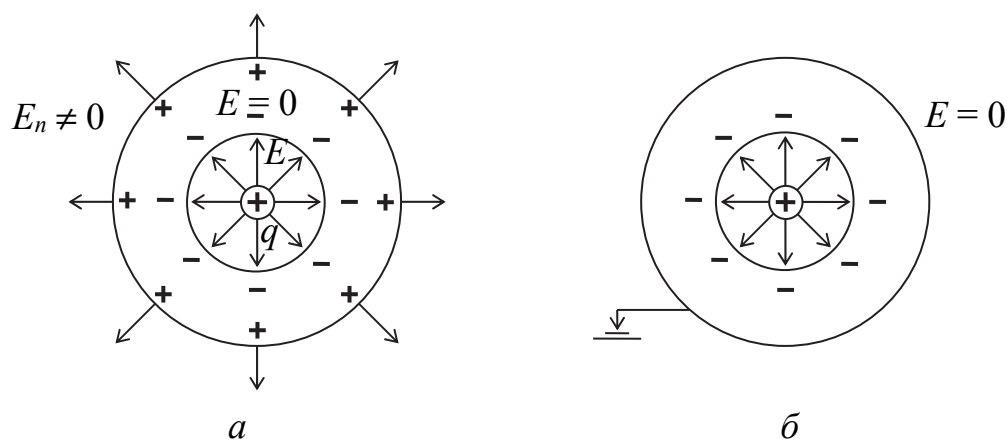


Рис. 2.13

Эффект экранировки имеется только в толще сферической оболочки ( $\vec{E} = 0$ ). Во внешнем пространстве поле создается электрическими зарядами, индуцированными на поверхности оболочки. Эффект экранировки внешнего пространства от поля заряда внутри проводящей сферической оболочки возникает, если убрать ее индуцированные заряды заземлением наружной поверхности оболочки (рис. 2.13, б).

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение электрического диполя, электрического момента диполя, плеча диполя.
2. Как ведет себя диполь в однородном электрическом поле?
3. Какие электрические заряды называют свободными, связанными.
4. Какие диэлектрики называют полярными, неполярными, ионно-кристаллическими?
5. Что представляют собой электронная, ионная и дипольная поляризации?
6. Как дипольный момент неполярной молекулы связан с напряженностью электрического поля?
7. Чему равен дипольный момент неполярных молекул в отсутствии внешнего электрического поля?
8. Как зависит дипольный момент неполярных молекул от напряженности электрического поля?



9. Дайте определение вектора поляризации, вектора электрического смещения.
10. Как векторы поляризации и электрического смещения связаны с напряженностью электрического поля?
11. Как вектор поляризации связан с поверхностной плотностью поляризационных зарядов?
12. Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектрике в интегральной форме.
13. Что характеризует диэлектрическая восприимчивость?
14. Чему равна диэлектрическая восприимчивость полярных и неполярных диэлектриков?
15. Каков физический смысл диэлектрической проницаемости среды?
16. Как диэлектрическая восприимчивость связана с диэлектрической проницаемостью?
17. Какие вещества относятся к сегнетоэлектрикам? Чем сегнетоэлектрики отличаются от остальных диэлектриков?
18. Изобразите зависимость между диэлектрической проницаемостью и напряженностью  $\vec{E}$  электрического поля.
19. В чем суть явления диэлектрического гистерезиса? Нарисуйте петлю гистерезиса и поясните. Что такое остаточная поляризованность и коэрцитивная сила?
20. Что такое температура (или точка) Кюри?
21. Что такое домен? Как происходит поляризация сегнетоэлектрика?
22. Какие эффекты наблюдаются в сегнетоэлектриках и других диэлектриках?
23. Какой процесс называют электростатической индукцией?
24. В чем суть электростатической защиты?

### **Задачи по теме**

#### **«Электрическое поле в диэлектрике»**

1. Два одинаково заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол  $\alpha$ . Шарик погружают в масло. Какова плотность  $\rho$  масла, если угол расхождения нитей при погружении в масло остается неизменным? Плотность материала шариков  $\rho_0 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , диэлектрическая проницаемость масла  $\epsilon = 2,2$ .

2. На каком расстоянии от шарика, имеющего заряд  $q = 7 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$  и подвешенного на нити в жидкости с плотностью  $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$



и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 2,1$ , расположена железная пылинка объемом  $V = 9 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$ , имеющая заряд  $q = -2,1 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$ , если вся система находится в равновесии?

3. Точечные заряды  $q_1 = 30 \text{ нКл}$  и  $q_2 = -20 \text{ нКл}$  находятся в диэлектрической среде с  $\epsilon = 2,5$  на расстоянии  $d = 20 \text{ см}$  друг от друга. Определите напряженность электрического поля  $E$  в точке, удаленной от первого заряда на расстояние  $r_1 = 30 \text{ см}$ , а от второго – на  $r_2 = 15 \text{ см}$ .

4. В трех вершинах квадрата со стороной  $a = 0,4 \text{ м}$  в диэлектрической среде с  $\epsilon = 1,6$  находятся заряды  $q_1 = q_2 = q_3 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$ . Найдите напряженность  $E$  в четвертой вершине.

5. В двух противоположных вершинах квадрата со стороной  $a = 0,3 \text{ м}$  в диэлектрической среде с  $\epsilon = 1,5$  находятся заряды величины  $q_1 = q_2 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$ . Найдите напряженность  $E$  и потенциал электрического поля  $\phi$  в двух других вершинах квадрата.

6. Тонкий стержень длиной  $l = 20 \text{ см}$  равномерно заряжен с линейной плотностью  $\tau = 0,1 \text{ мкКл}$ . Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в диэлектрической среде с  $\epsilon = 1,9$  в точке  $A$ , лежащей на прямой, перпендикулярной к оси стержня и проходящей через его центр, на расстоянии  $a = 20 \text{ см}$  от центра стержня.

7. По тонкому кольцу радиусом  $R = 20 \text{ см}$  равномерно распределен с линейной плотностью  $\tau = 0,2 \text{ мкКл/м}$  заряд. Определите максимальное значение напряженности  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в диэлектрической среде с  $\epsilon = 2$ , на оси кольца.

8. Расстояние между двумя тонкими бесконечными стержнями, расположенными параллельно друг другу,  $d = 16 \text{ см}$ . Стержни равномерно заряжены с линейной плотностью  $\tau = 15 \text{ нКл}$  и находятся в диэлектрической среде с  $\epsilon = 2,2$ . Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенными зарядами в точке  $A$ , удаленной на расстояние  $r = 10 \text{ см}$  от обеих стержней.

9. Два точечных заряда  $q_1 = 6 \text{ мкКл}$  и  $q_2 = 3 \text{ мкКл}$  находятся в диэлектрической среде с  $\epsilon = 3,3$  на расстоянии  $d = 40 \text{ см}$  друг от друга. Какую работу необходимо совершить внешним силам, чтобы уменьшить расстояние между зарядами вдвое?

10. Поле в вакууме образовано точечным диполем с электрическим моментом  $p = 200 \text{ пКл}\cdot\text{м}$ . Определите разность потенциалов  $U$  двух точек поля, расположенных симметрично относительно диполя на его оси на расстоянии  $r = 40 \text{ см}$  от центра диполя.

11. Тонкий стержень длиной  $l = 50$  см согнут в кольцо. Он равномерно заряжен с линейной плотностью заряда  $\tau = 800$  нКл/м и находится в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 1,4$ . Определите потенциал  $\phi$  в точке, расположенной на оси кольца на расстоянии  $d = 10$  см от его центра.

12. Две параллельные заряженные плоскости, поверхностные плотности заряда которых  $\sigma_1 = 2$  мкКл/м<sup>2</sup> и  $\sigma_2 = -0,8$  мкКл/м<sup>2</sup>, находятся в диэлектрической среде с  $\epsilon = 3$  на расстоянии  $d = 0,6$  см друг от друга. Определите разность потенциалов  $U$  между плоскостями.

### 3. Електроемкость. Энергия электрического поля

В этой главе речь пойдет о конденсаторах – важных устройствах, применяемых почти во всех электронных схемах, в которых используются для получения определенного изменения в напряжении в ответ на то или иное изменение электрического заряда, и будут обсуждены вопросы о возможности накопления электрической энергии и влиянии диэлектриков на электрические поля и разность потенциалов.

#### 3.1. Електроемкость уединенного проводника и конденсатора

**Уединенный проводник** – это проводник, удаленный от других проводников, тел и зарядов. Если сообщить такому проводнику некоторый заряд, то он распределится по его поверхности так, что напряженность поля внутри проводника будет равна нулю. Такое распределение является единственным. Различные по величине заряды распределяются на уединенном проводнике таким образом, что отношение плотностей заряда в двух произвольных точках поверхности проводника при любой величине заряда будет одним и тем же. Следовательно, потенциал  $\phi$  уединенного проводника пропорционален находящемуся на нем заряду  $q$ :

$$q = C\phi \Rightarrow C = \frac{q}{\phi}. \quad (3.1)$$

Коэффициент пропорциональности между потенциалом и зарядом называется электроемкостью (или просто емкостью) проводника. Электроемкость проводника численно равна отношению заряда  $q$  уединенного проводника к его потенциалу  $\phi$ .

Емкость уединенного проводника зависит от его формы и размеров, а также от диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  окружающей среды. Емкость уединенного проводника не зависит от материала, форм и размеров полостей внутри проводника, от агрегатного состояния, заряда и потенциала.

За единицу емкости 1 Ф (*Фарад*) принимают емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 Кл (1 Ф = 1 Кл/В). Емкость в 1 Ф очень велика, поэтому на практике пользуются дольными единицами: 1 мкФ =  $10^{-6}$  Ф; 1 нФ =  $10^{-9}$  Ф; 1 пФ =  $10^{-12}$  Ф.

Примером уединенного проводника является проводящий шар. Выведем формулу для емкости уединенного проводящего шара радиуса  $R$ , несущего заряд  $q$  и находящегося в однородной безграничной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Для этого используем взаимосвязь напряженности и потенциала электростатического поля  $d\phi = -E(r)dr$  и формулу для напряженности поля такого шара  $E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2}$ . Тогда  $d\phi = -E(r)dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{dr}{r^2}$ .

Проинтегрируем это выражение по  $r$  от  $r_1 = R$  до  $r_2 = \infty$ :

$$\int_{\phi}^0 d\phi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon R}. \quad (3.2)$$

Подставив (3.2) в (3.1), получим формулу для расчета емкости уединенного шара:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (3.3)$$

Емкостью в 1 Ф обладал бы уединенный шар, радиус которого в 1500 раз больше радиуса Земли ( $R_3 = 6400$  км).

### 3.2. Конденсаторы и их соединения

**Конденсатор** – это устройство, которое способно при небольшом относительно окружающих тел потенциале накапливать существенный заряд. Если два проводника имеют такую форму, что создаваемое ими электрическое поле сосредоточено в ограниченной области пространства, то образованная ими система носит название *конденсатора*, а сами проводники называют *обкладками* конденсатора. В этом случае линии электрического смещения начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой. Электрические заряды, находящиеся на обкладках заряженного конденсатора, всегда равны по величине и противоположны

по знаку. Таким образом, *конденсатор* представляет собой систему двух проводников, изолированных друг от друга, и один из них должен быть изолирован от земли.

В зависимости от формы обкладок различают плоские, сферические и цилиндрические конденсаторы. Основной характеристикой конденсатора является электрическая емкость, под которой понимают физическую величину, пропорциональную заряду и обратно пропорциональную разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \quad (3.4)$$

где  $q$  – заряд одной из обкладок;  $\varphi_1 - \varphi_2 = U$  – разность потенциалов (напряжение) между обкладками.

Величина емкости определяется геометрией конденсатора (формой и размерами обкладок и величиной зазора между ними), а также диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  среды, заполняющей

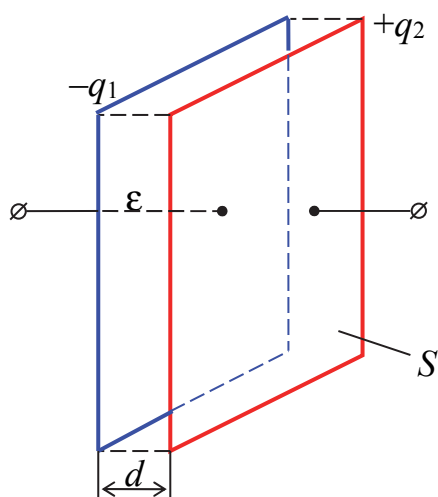


Рис. 3.1

пространство между обкладками. В случае если между обкладками конденсатора находится сегнетоэлектрик, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  которого зависит от напряженности поля, то пропорциональность между  $q$  и  $\Delta\varphi$  нарушается, а конденсаторы называются нелинейными.

Получим формулы для расчета емкости различных типов конденсаторов.

*Плоский конденсатор* (рис. 3.1) состоит из двух параллельных металлических пластин с площадью каждой  $S$ , расположенных на близком расстоянии  $d$  одна от другой и несущих заряды  $q_1 > 0$  и  $q_2 < 0$  ( $q_1 = q_2$ ).

Пространство заполнено средой, диэлектрическая проницаемость которой  $\epsilon$ . Зазор между пластинами  $d$  мал по сравнению с их размерами, т. е. краевым эффектом можно пренебречь.

Напряженность поля между обкладками  $E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$ . Так как  $\sigma = \frac{q}{S}$ , то

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}.$$

Тогда  $\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_0^d E dr = -\frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S} \int_0^d dr = -\frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S}$ . Учитывая формулу (3.4),

получим формулу для расчета емкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}. \quad (3.5)$$

*Сферический конденсатор* (рис. 3.2) состоит из двух концентрических металлических сферических обкладок, радиусы которых  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), а пространство между обкладками заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Заряды обкладок обозначим через  $+q$  и  $-q$ , а потенциалы обкладок – соответственно  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , и будем считать заряд равномерно распределенным по поверхности. Используя теорему Гаусса, легко показать, что электрическое поле существует только в пространстве между сферами и напряженность этого поля равна  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2}$ . Напряженность поля

связана с разностью потенциалов соотношением  $d\varphi = -E dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} dr$ .

Полное изменение потенциала при переходе от одной обкладки на другую получим интегрированием от  $R_1$  до  $R_2$ :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}.$$

Подставив выражение для разности потенциалов в (3.4), получим формулу для расчета емкости сферического конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (3.6)$$

Если  $R_2 - R_1 = d \ll R_1$ , то можно считать  $R_2 \approx R_1$ . Тогда

$$C \approx \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1^2}{d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 4\pi R_1^2}{d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d},$$

где  $S = 4\pi R_1^2$  – площадь поверхности обкладок.

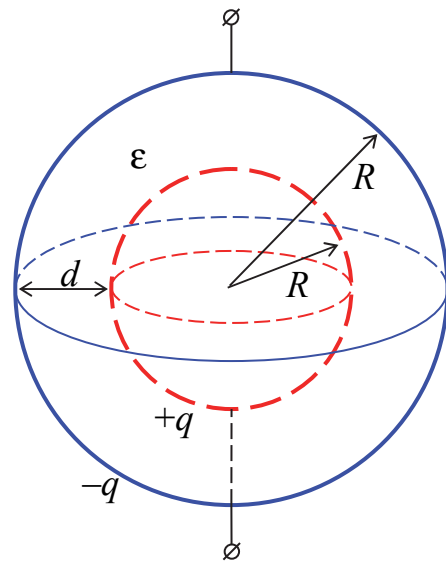


Рис. 3.2

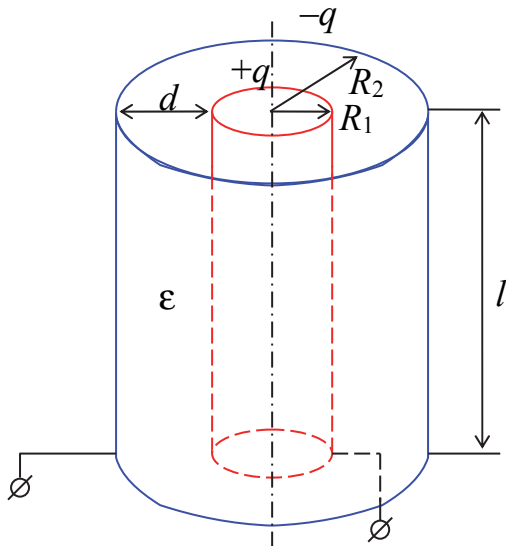


Рис. 3.3

Таким образом, если величина зазора между обкладками сферического конденсатора мала по сравнению со средним радиусом сфер, то емкость сферического конденсатора можно приближенно рассчитать по формуле для емкости плоского конденсатора.

*Цилиндрический конденсатор* (рис. 3.3) представляет собой два коаксиальных (т. е. имеющих одну ось симметрии) полых цилиндра радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) и общей длины  $l$ .

Пусть на обкладках имеются заряды  $+q$  и  $-q$ , потенциалы которых соответственно  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а пространство между обкладками заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Пренебрегая краевыми эффектами на торцах цилиндров, напряженность поля, которая создается только зарядом на внутреннем цилиндре, в точке на расстоянии  $r$  от оси цилиндра можно найти по формуле  $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon r} \tau$ . Тогда  $d\varphi = -E dr = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon r} \tau dr$ .

Разность потенциалов между обкладками получим интегрированием от  $R_1$  до  $R_2$ :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} = -\frac{ql}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Подставив выражение для разности потенциалов в (3.4), получим формулу для расчета емкости цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln(R_2 / R_1)}. \quad (3.7)$$

Если зазор  $d = R_2 - R_1$  между обкладками мал по сравнению с  $R_1$ , то  $\ln(R_2 / R_1) \approx (R_2 - R_1) / R_1$  и

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l R_1}{R_2 - R_1} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d},$$

где  $S = 2\pi R_1 l$  – площадь обкладки.

Помимо емкости, каждый конденсатор характеризуется предельным напряжением, которое можно прикладывать к обкладкам конденсатора, не опасаясь пробоя. При превышении этого напряжения между обкладками проскакивает искра, в результате чего разрушается диэлектрик и конденсатор выходит из строя. Величина пробивного напряжения зависит от свойств диэлектрика, его толщины и формы обкладок.

Для того чтобы получить желаемую емкость при заданном рабочем напряжении, конденсаторы соединяют параллельно или последовательно в батарее.

Рассмотрим параллельное соединение конденсаторов (рис. 3.4).

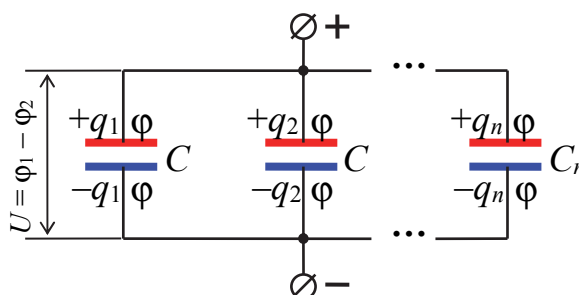


Рис. 3.4

При таком соединении разность потенциалов на обкладках конденсаторов одинакова. Заряды соответственно равны:  $q_1 = C_1(\varphi_1 - \varphi_2)$ ;  $q_2 = C_2(\varphi_1 - \varphi_2)$ ; ...;  $q_n = C_n(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Тогда заряд батареи конденсаторов равен  $q = \sum_{i=1}^n q_i = (C_1 + C_2 + \dots + C_n)(\varphi_1 - \varphi_2)$ , а полная емкость батареи определяется как

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{(C_1 + C_2 + \dots + C_n)(\varphi_1 - \varphi_2)}{\varphi_1 - \varphi_2} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

или

$$C = \sum_{i=1}^n C_i, \quad (3.8)$$

т. е. при параллельном соединении конденсаторов полная емкость равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

Рассмотрим последовательное соединение конденсаторов (рис. 3.5). При таком соединении заряды всех обкладок равны по модулю. Если одной обкладке первого конденсатора сообщить заряд  $+q$ , то на второй обкладке его индуцируется заряд  $-q$ , а на соединенной с ней первой



обкладке второго конденсатора появится заряд  $+q$  и т. д. Разность потенциалов на зажимах батареи  $\Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i$ , где для любого конденсатора  $\Delta\varphi_i = \frac{q}{C_i}$ .

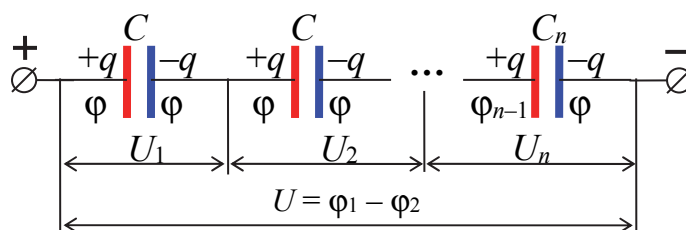


Рис. 3.5

Тогда  $\Delta\varphi = \frac{q}{C} = q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$ , откуда полная емкость

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}, \quad (3.9)$$

т. е. при последовательном соединении конденсаторов суммируются величины, обратные емкостям.

Таким образом, при последовательном соединении конденсаторов результирующая емкость всегда меньше наименьшей емкости, используемой в батарее.

При смешанном соединении конденсаторов емкость батареи конденсаторов можно рассчитать, используя формулы (3.8) и (3.9).

### 3.3. Энергия системы зарядов, проводника и конденсатора. Объемная плотность энергии электрического поля

*Энергия системы зарядов.* Заряд, находящийся на некотором проводнике, логично рассматривать как систему точечных зарядов. Рассмотрим систему, состоящую из двух зарядов, находящихся на некотором расстоянии друг от друга. Каждый из зарядов в поле другого обладает потенциальной энергией, равной  $\Pi_1 = q_1\varphi_{12} = q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r}$ , а

$\Pi_2 = q_2\varphi_{21} = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$ . Так как заряды неподвижны, то  $\Pi_1 = \Pi_2$ ,

поэтому энергия системы из двух неподвижных точечных зарядов равна  $\Pi = \frac{1}{2}(q_1\Phi_{12} + q_2\Phi_{21})$ .

Добавляя последовательно по одному заряду, получим, что энергия взаимодействия системы неподвижных зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \Phi_i, \quad (3.10)$$

где  $\Phi_i$  – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме  $q_i$ , в той точке, где помещается заряд  $q_i$ .

*Энергия проводника.* Рассмотрим уединенный проводник, предположив, что на проводнике уже имеется некоторый заряд  $q$ . Определим работу, которую надо затратить, чтобы из бесконечности перенести на проводник еще бесконечно малый заряд  $dq$ . Ввиду малости заряда  $dq$  будем считать, что при его сообщении проводнику потенциал проводника заметно не изменится. Тогда элементарная работа  $dA = \Phi dq$ , а полную работу переноса всех зарядов при зарядении тела от потенциала 0 до потенциала  $\Phi$  определим интегрированием:

$$A = \int_0^{\Phi} \Phi dq = \int_0^{\Phi} \Phi C d\Phi = C \int_0^{\Phi} \Phi d\Phi = \frac{1}{2} C \Phi^2.$$

Эта работа определяет энергию заряженного уединенного проводника. С учетом формулы (3.4) энергия заряженного уединенного проводника составит

$$W_3 = \frac{C\Phi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} q\Phi. \quad (3.11)$$

*Энергия конденсатора.* В случае замыкания проводом обкладок заряженного конденсатора в нем возникнет электрический ток и конденсатор разрядится. Электрический ток разряда конденсатора выделит в проводе некоторое количество теплоты, т. е. заряженный конденсатор обладает энергией.

Предположим, что конденсатор разряжается и мгновенное значение напряжения на его обкладках  $U(t)$ . Если бесконечно малый заряд  $dq$  переносится между обкладками конденсатора, то работа электрических сил  $dA = dq \cdot U(t)$ .

Так как  $dq = CdU$ , то  $dA = -CU(t)dU$ . Отрицательное значение работы означает, что разность потенциалов между обкладками убывает. Тогда полная работа, совершенная электрическими силами за время разряда, равная энергии  $W_3$  конденсатора, будет

$$A = W_3 = -C \int_U^0 U(t) dU = \frac{1}{2} CU^2. \quad (3.12)$$

Выражение для энергии заряженного конденсатора можно представить в любом из следующих видов:

$$W_3 = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} qU. \quad (3.13)$$

*Энергия электрического поля.* Энергию заряженного конденсатора можно выразить через величины, характеризующие электрическое поле в зазоре между обкладками конденсатора. Для плоского конденсатора  $W = \frac{CU^2}{2}$ . Подставим выражения для емкости и получим

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S U^2}{2d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} \left( \frac{U}{d} \right)^2 Sd, \text{ где } \frac{U}{d} = E \text{ есть напряженность поля}$$

в зазоре, а произведение  $Sd = V$  представляет собой объем, занимаемый полем конденсатора. Следовательно

$$W_3 = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 V. \quad (3.14)$$

Если поле однородно (что имеет место в плоском конденсаторе), заключенная в нем энергия распределяется в пространстве с постоянной плотностью  $w$ , равной энергии поля, деленной на занимаемый полем объем. Из (3.14) следует, что объемная плотность энергии электрического поля

$$w_3 = \frac{W_3}{V} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} DE = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon}. \quad (3.15)$$

*Энергия, приходящаяся на единицу объема в электростатическом поле, называется плотностью энергии электростатического поля.*

Зная плотность энергии поля в каждой точке, можно найти энергию поля, заключенную в любом объеме  $V$ . Для этого нужно вычислить интеграл:

$$W_3 = \int_V w_3 dV = \int_V \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} dV. \quad (3.16)$$

### Контрольные вопросы

1. Что называется электрической емкостью (или просто емкостью) проводника? Записать единицу измерения электрической емкости в системе СИ.

2. От чего зависит емкость уединенного проводника?
3. Записать и пояснить формулу для емкости уединенного проводящего шара.
4. Что такое конденсатор? Записать и пояснить формулу для электрической емкости конденсатора.
5. От чего зависит емкость конденсатора?
6. Записать и пояснить формулы для емкости плоского, сферического, цилиндрического конденсаторов.
7. Параллельное и последовательное соединение конденсаторов.
8. Записать и пояснить формулы для определения энергии системы зарядов, проводника.
9. Записать и пояснить формулы для определения энергии заряженного конденсатора.
10. Как определяется энергия электрического поля? Как определяется объемная плотность энергии электрического поля?

### Задачи по теме «Конденсаторы»

1. Найдите емкость плоского конденсатора, состоящего из двух круглых пластин диаметром 20 см, разделенных парафиновой прослойкой толщиной 1 мм. Диэлектрическая проницаемость парафина 2,1.
2. Плоский конденсатор состоит из двух пластин площадью  $200 \text{ см}^2$  каждая. Между пластинами находится слой слюды толщиной 2 мм. Какой наибольший заряд можно накопить на этом конденсаторе, если допустимое напряжение 3 кВ? Диэлектрическая проницаемость слюды равна 6.
3. Во сколько раз изменится емкость конденсатора, если в качестве прокладки между пластинами вместо бумаги, пропитанной парафином, использовать листовую слюду такой же толщины? Диэлектрическая проницаемость парафина 2,1; слюды – 6.
4. Расстояние между пластинами плоского конденсатора увеличили в 3 раза. Во сколько раз изменился заряд, напряжение между пластинами, напряженность поля, энергия и плотность энергии поля, если конденсатор: а) отключили от источника напряжения? б) остался подключенным к источнику постоянного напряжения?
5. Конденсаторы емкостью  $C_1 = 10 \text{ мкФ}$  и  $C_2 = 8 \text{ мкФ}$  заряжены до напряжений  $U_1 = 60 \text{ В}$  и  $U_2 = 100 \text{ В}$  соответственно. Определите напряжение  $U$  на обкладках конденсаторов после их соединения обкладками: 1) имеющими разноименные заряды; 2) имеющими одноименные заряды.

6. Плоский воздушный конденсатор зарядили до напряжения  $U = 180$  В и отключили от источника напряжения. Каким станет напряжение между обкладками, если расстояние между ними увеличить от  $d_1 = 5$  мм до  $d_2 = 12$  мм? Найдите работу  $A$  по раздвижению пластин и плотность  $w_e$  энергии электрического поля до и после раздвижения пластин. Площадь пластин  $S = 175$  см<sup>2</sup>.

7. Емкость плоского конденсатора  $C = 600$  пФ. Диэлектрик – стекло с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 6$ . Конденсатор зарядили до  $U = 300$  В и отключили от источника напряжения. Какую работу надо выполнить, чтобы пластину диэлектрика вынуть из конденсатора?

8. Два плоских конденсатора емкостями  $C_1 = 1$  мкФ и  $C_2 = 8$  мкФ соединены параллельно и заряжены до разности потенциалов  $U = 50$  В. Найдите разность потенциалов между пластинами конденсаторов, если после отключения от источника напряжения расстояние между пластинами первого конденсатора уменьшили в 2 раза.

9. Заряженный шар радиусом  $R_1 = 3$  см приводится в соприкосновение с незаряженным шаром радиусом  $R_2 = 5$  см. После того как шарики разъединили, энергия второго шарика оказалась равной  $W_2 = 0,4$  Дж. Какой заряд  $q_1$  был на первом шарике до соприкосновения?

10. Конденсаторы емкостью  $C_1 = 1$  мкФ,  $C_2 = 2$  мкФ и  $C_3 = 3$  мкФ подключены к источнику напряжения  $U = 220$  В. Определите энергию  $W$  каждого конденсатора в случае их последовательного и параллельного включения.

11. Три одинаковых плоских конденсатора соединены параллельно. Емкость батареи конденсаторов  $C = 90$  пФ. Площадь каждой пластины  $S = 100$  см<sup>2</sup>. Диэлектриком служит стекло с диэлектрической проницаемостью, равной  $\epsilon = 7$ . Определите толщину стекла.

12. Конденсаторы с емкостями  $C_1 = 1$  мкФ,  $C_2 = 2$  мкФ и  $C_3 = 3$  мкФ соединены последовательно и подключены к источнику напряжения 220 В. Найдите заряд и напряжение на каждом конденсаторе.

13. Два конденсатора зарядили до потенциалов  $U_1 = 600$  В и  $U_2 = 200$  В и соединили параллельно. Определите разность потенциалов между обкладками конденсатора, если емкость первого конденсатора в 3 раза больше емкости второго.

14. Пылинка имеет массу  $m = 10^{-11}$  кг и заряд  $q = 9,8 \cdot 10^{-16}$  Кл и находится в равновесии между горизонтальными пластинами, к которым приложено напряжение  $U = 500$  В. Определите расстояние между пластинами.

15. Воздушный конденсатор, заряженный до  $U_1 = 800$  В, соединен параллельно с таким же по размерам незаряженным конденсатором, заполненным диэлектриком. Найдите диэлектрическую проницае-

мость диэлектрика, если после соединения разность потенциалов между обкладками оказалась равной  $U_2 = 100$  В.

16. Заряд конденсатора  $q = 1$  нКл, площадь пластины  $S = 60$  см<sup>2</sup>, расстояние между пластинами  $d = 5$  мм. Найдите скорость электрона около положительной пластины, если вблизи отрицательной она равна нулю.

17. Между вертикальными пластинами плоского воздушного конденсатора на непроводящей нити подвешен шарик массой  $m = 4$  г, имеющий заряд  $q = 3$  нКл. Какой заряд надо сообщить конденсатору, чтобы нить составляла с вертикалью угол  $\alpha = 45^\circ$ . Площадь каждой пластины  $S = 314$  см<sup>2</sup>.

18. Найти емкость сферического конденсатора, состоящего из двух концентрических сфер с радиусами  $R_1 = 10$  см и  $R_2 = 11$  см, пространство между которыми заполнено маслом, диэлектрическая проницаемость которого равна  $\epsilon = 5$ . Какой радиус  $R$  должен быть у шара, помещенного в масло, чтобы он имел такую же емкость?

19. Радиус центральной жилы коаксиального кабеля  $R_1 = 1,5$  мм, а радиус оболочки  $R_2 = 3,5$  см. Между центральной жилой и оболочкой приложена разность потенциалов  $U = 1000$  В. Найти напряженность  $E$  электрического поля на расстоянии  $r = 2$  см от оси кабеля.

20. Цилиндрический конденсатор состоит из внутреннего цилиндра радиусом  $R_1 = 3$  мм, двух слоев диэлектрика и внешнего цилиндра радиусом  $R_2 = 1$  см. Первый слой диэлектрика толщиной  $d_1 = 3$  мм примыкает к внутреннему цилиндру. Найти отношение падений потенциала в этих слоях.

## 4. Постоянный электрический ток

Понятие постоянного тока столь же существенно в физике, как и понятие статического электричества. Основным признаком электрического тока является магнитное поле, существующее вокруг движущихся зарядов. Кроме того, при прохождении электрического тока через вещество наблюдаются тепловые, оптические и химические явления, в которых имеет место превращение электрической энергии в другие виды энергии.

### 4.1. Условия существования и характеристики постоянного электрического тока

*Электрическим током* называется любое упорядоченное движение электрических зарядов. В проводнике под действием приложенного электрического поля свободные электрические заряды перемещаются:



положительные – по полю, отрицательные – против поля, т. е. в проводнике возникает электрический ток, называемый **током проводимости**. Свободными носителями электрических зарядов в металлах являются электроны, в электролитах – положительные и отрицательные ионы, в газах – электроны и положительные ионы, в полупроводниках – электроны и дырки.

Для возникновения и существования электрического тока необходимо наличие:

а) свободных носителей заряда, способных перемещаться упорядоченно;

б) электрического поля, энергия которого должна каким-то образом восполняться.

Количественной характеристикой электрического тока служит сила тока. **Сила тока** – это скалярная физическая величина  $I$ , определяемая электрическим зарядом  $dq$ , проходящим через поперечное сечение проводника  $S$  в единицу времени  $dt$ :

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (4.1)$$

Если сила тока и его направление не изменяются во времени, то ток называется **постоянным** или **стационарным**. Сила постоянного тока  $I = \frac{q}{t}$ . Сила постоянного тока во всех сечениях проводника одинакова. Единица силы тока – ампер (1 А = 1 Кл/с).

Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он течет, неравномерно. Для характеристики направления электрического тока в разных точках рассматриваемой поверхности и распределения силы тока по этой поверхности служит **вектор плотности тока**  $\vec{j}$ . Сила тока сквозь произвольную поверхность определяется как поток вектора плотности тока:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (4.2)$$

**Вектор плотности тока** – это физическая величина, численно равная силе тока  $dI$ , проходящей через единицу площади  $dS_{\perp}$  поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \quad (4.3)$$

где  $dS_{\perp} = dS \cos\alpha$ .



Тогда  $dI = j dS \cos \alpha = j_n dS = \vec{j} \vec{n} dS$ , где  $\vec{n}$  – единичный вектор, нормальный к площадке  $dS$ ;  $j_n = j \cos \alpha$  – проекция вектора  $\vec{j}$  на направление нормали  $\vec{n}$ .

Для постоянного тока, текущего перпендикулярно сечению проводника,  $j = \frac{I}{S}$ . Плотность постоянного тока одинакова по всему поперечному сечению  $S$  однородного проводника. Вектор плотности электрического тока совпадает по направлению с движением положительно заряженных частиц. Плотность тока измеряется в амперах на квадратный метр (1 А/м<sup>2</sup>).

Выразим силу тока и плотность тока через среднюю скорость упорядоченного движения свободных носителей заряда в проводнике. Пусть за время  $dt$  через поперечное сечение проводника переносится заряд  $dq = ne\langle u \rangle S dt$ . Следовательно, сила тока

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{ne\langle u \rangle S dt}{dt} \Rightarrow I = ne\langle u \rangle S, \quad (4.4)$$

где  $n$  – концентрация свободных носителей заряда;  $e$  – элементарный заряд;  $\langle u \rangle$  – средняя скорость носителей заряда.

Для плотности тока

$$j = \frac{I}{S} = ne\langle u \rangle \Rightarrow \vec{j} = ne\langle \vec{u} \rangle. \quad (4.5)$$

## 4.2. Законы Ома в интегральной и дифференциальной формах

*Однородный (пассивный) участок электрической цепи.* Участок электрической цепи, не содержащий источников электроэнергии, называется **однородным** (рис. 4.1). Для такого участка (проводника) закон Ома (немецкий физик Георг Ом), который установлен экспериментально, гласит: *сила тока  $I$  в проводнике прямо пропорциональна напряжению  $U$  на его концах и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению  $R$  проводника (участка):*

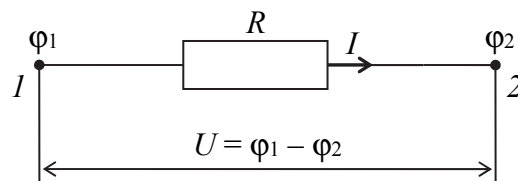


Рис. 4.1

$$I = \frac{U}{R}. \quad (4.6)$$

Единица сопротивления – Ом ( $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/А}$ ).

Выражение (4.6) является законом Ома для однородного участка цепи в интегральной форме.

Величина  $g$ , обратная сопротивлению, называется *электрической проводимостью* (или *электропроводностью*) проводника:

$$g = \frac{1}{R}. \quad (4.7)$$

Единица электропроводности – сименс ( $1 \text{ См} = 1 \text{ А/В} = 1/\text{Ом}$ ).

Сопротивление и электропроводность проводника являются его характеристиками, которые зависят от природы вещества проводника, его геометрии, а также его состояния. Для однородного линейного проводника сопротивление прямо пропорционально его длине  $l$  и обратно пропорционально площади поперечного сечения  $S$  проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (4.8)$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление вещества.

Единица удельного сопротивления есть Ом·м.

Величина  $\gamma = 1/\rho$  называется удельной электрической проводимостью (или удельной электропроводностью) материала проводника.

Единица удельной электропроводности –  $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} = \text{См/м}$ .

Опытным путем установлено, что для большинства металлов с повышением температуры удельное сопротивление (а значит и сопротивление) увеличивается. Такое изменение удельного сопротивления (сопротивления) описывается линейным законом, если интервал изменения температуры достаточно мал:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t) \quad \text{или} \quad R = R_0(1 + \alpha t), \quad (4.9)$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$ ,  $R$  и  $R_0$  – соответственно удельные сопротивления и сопротивления проводника при температурах  $t^\circ\text{C}$  и  $0^\circ\text{C}$ ;  $\alpha$  – температурный коэффициент сопротивления.

Для всех химически чистых металлов  $\alpha$  близок к  $1/273$ .

Зависимость сопротивления металлов от температуры используют в различных измерительных и автоматических устройствах (например, термисторы, термометры сопротивления), а зависимость удельного сопротивления металлов от механических воздействий, которое у чистых металлов и сплавов возрастает при растяжении, используется для измерения деформаций и механических напряжений. Расчет силы

тока в общем случае в проводящей среде осуществляется на основе закона Ома в дифференциальной форме. Для его вывода рассмотрим небольшой отрезок трубки тока (рис. 4.2) в однородной и изотропной проводящей среде.

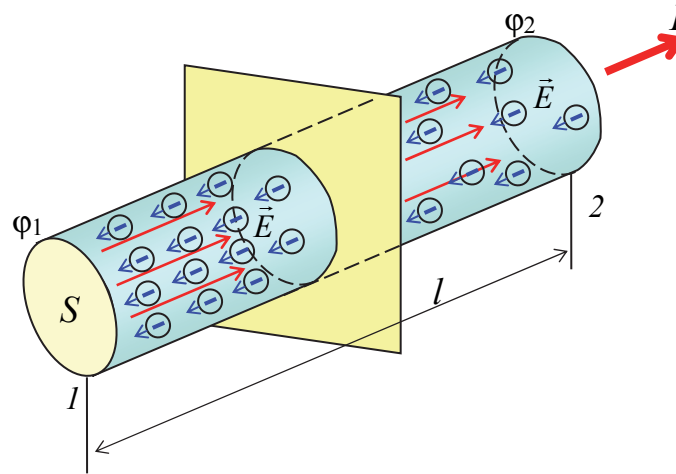


Рис. 4.2

На рисунке  $l$  – расстояние между точками 1 и 2 и потенциалы их соответственно равны  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а  $S$  – средняя величина площади сечения трубки тока.

По закону Ома,  $I = \frac{U}{R_{12}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_{12}}$ , где  $R_{12} = \rho \frac{l}{S}$ .

Далее учтем, что  $I = jS$  и  $\rho = \frac{1}{\gamma}$ .

Тогда  $jS = -\gamma \frac{\Delta\varphi}{l} S \Rightarrow j = -\gamma \frac{\Delta\varphi}{l}$ .

Но  $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta\varphi}{l} \right) = -\frac{d\varphi}{dl} = E$ , где  $E$  – напряженность электрического поля в некоторой точке внутри проводника. Таким образом, имеем

$$j = \gamma E \quad \text{или} \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}. \quad (4.10)$$

Плотность электрического тока в любой точке проводящей среды вычисляется как произведение удельной электропроводности среды на напряженность электрического поля в этой точке.

Выражение (4.10) является *законом Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме*.

Сравнивая формулу (4.10) с уравнением (4.5), можно сказать, что средняя скорость упорядоченного движения (скорость дрейфа) носителей заряда пропорциональна напряженности поля, т. е.

$$\langle \vec{u} \rangle = a\vec{E}, \quad (4.11)$$

где  $a$  – подвижность носителей заряда. Подставив выражение (4.11) в уравнение (4.5), получим

$$\vec{j} = ena\vec{E} = \gamma\vec{E}. \quad (4.12)$$

Таким образом, удельная электропроводимость  $\gamma$  среды определяется концентрацией носителей заряда и их подвижностью, т. е. равна  $\gamma = ena$ .

*Неоднородный (активный) участок электрической цепи.* Если в проводнике создать электрическое поле и не принять мер для его поддержания, то перемещение носителей тока приводит к тому, что потенциалы всех точек цепи выравниваются и поле внутри проводника исчезнет, а ток прекратится. Для того чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, нужно от конца проводника с меньшим потенциалом непрерывно отводить приносимые сюда заряды, а к концу с большим потенциалом непрерывно их подводить (разделение разноименных зарядов), т. е. необходимо наличие в цепи устройства, способного создавать и поддерживать разность потенциалов. Устройство, способное создавать и поддерживать разность потенциалов, называются **источником электрической энергии** или **генератором**. В источниках электроэнергии на носители зарядов действуют силы неэлектростатического происхождения, которые называются **сторонними силами**. Они могут быть обусловлены химическими процессами, вихревыми электрическими полями, диффузией носителей заряда в неоднородной среде и т. д.

Количественной характеристикой сторонних сил является его напряженность  $\vec{E}_{\text{ст}}$ , которая определяется сторонней силой, действующей на единичный положительный заряд. Сторонние силы можно охарактеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по цепи зарядами. Физическая величина, равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда в цепи или на ее участке, называется **электродвижущей силой (ЭДС)** источника электроэнергии:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q}. \quad (4.13)$$

Эта работа совершается за счет энергии, затрачиваемой в источнике тока.

Работа сторонних сил по перемещению заряда  $q_0$  на участке цепи равна

$$A = \int_1^2 \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l} = q_{\text{пр}} \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (4.14)$$

Отсюда ЭДС, действующая в замкнутой цепи, – это циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (4.15)$$

Для поля сторонних сил циркуляция его напряженности по замкнутому контуру не равна нулю. Поэтому поле сторонних сил – непотенциально.

Участок электрической цепи называется **неоднородным**, если он содержит источник (или источники) электрической энергии (рис. 4.3).

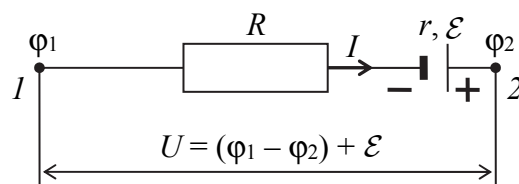


Рис. 4.3

Рассмотрим участок цепи, полное сопротивление которого  $R_{12}$ , и  $\varphi_1 > \varphi_2$ . Для любой точки данного участка напряженность результирующего поля  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{ст}}$ . Поэтому закон Ома для неоднородного участка цепи в дифференциальной форме запишется в виде

закон Ома для неоднородного участка цепи в дифференциальной форме запишется в виде

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{ст}}). \quad (4.16)$$

В случае если на заряд, кроме сторонних сил, действуют силы электростатического поля, то результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд, равна

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{эл}} + \vec{F}_{\text{ст}} = q_{\text{пр}}(\vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{ст}}). \quad (4.17)$$

Тогда работа, совершаемая этой силой на участке цепи  $1 \rightarrow 2$ , определяется выражением

$$A_{12} = q_{\text{пр}} \int_1^2 \vec{E}_{\text{эл}} d\vec{l} + q_{\text{пр}} \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} = q_{\text{пр}}(\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}). \quad (4.18)$$

Величина, численно равная работе, совершаемой электрическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного

заряда, называется *падением напряжения* или просто *напряжением на данном участке цепи*:

$$U_{12} = \frac{A_{1-2}}{q} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (4.19)$$

Так как  $U_{12} = IR_{12}$ , то

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (4.20)$$

С учетом выражения (4.20) закон Ома в интегральной форме для неоднородного участка цепи принимает вид

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R_{12}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R + r}, \quad (4.21)$$

где  $R$  – сопротивление внешнего участка цепи;  $r$  – внутреннее сопротивление источника тока.

При применении формулы (4.21) для расчета характеристик участка электрической цепи пользуются правилами знаков для силы тока и ЭДС:

- если направление тока (произвольно выбранное) совпадает с направлением движения по участку от точки 1 до точки 2, то сила тока  $I$  берется со знаком «плюс», в противоположном случае – сила тока  $I$  берется со знаком «минус»;

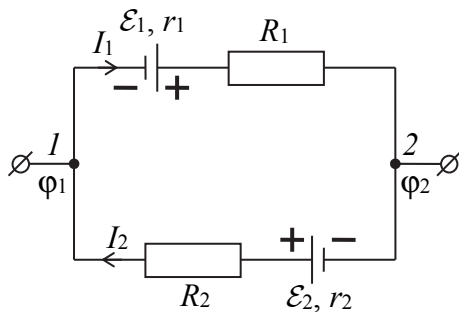


Рис. 4.4

- если внутри источника ток идет от катода к аноду, т. е. напряженность поля сторонних сил в источнике совпадает по направлению с током на участке цепи, то ЭДС этого источника считается положительной, в противоположном случае – ЭДС этого источника считается отрицательной.

Для электрической цепи (рис. 4.4), состоящей из двух участков, согласно выбранному направлению движения по каждому участку от точки 1 до точки 2 и правилам знаков, уравнения, записанные с применением закона Ома (4.21) для неоднородного участка цепи имеют следующий вид:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1}{R_1 + r_1}; \quad -I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - \mathcal{E}_2}{R_2 + r_2}.$$

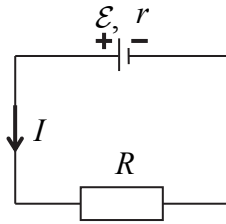


Рис. 4.5

Если цепь замкнута, то в выражении (4.21)  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$  и получим выражение закона Ома для замкнутой цепи (рис. 4.5):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{12}} = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (4.22)$$

Если  $R \ll r$ , то происходит короткое замыкание источника энергии. Сила тока короткого замыкания достигает максимального значения и равна

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{r} = I_{\text{к.з.}} \quad (4.23)$$

Для большинства реальных источников из-за малости  $r$  режим короткого замыкания является аварийным, и поэтому применяют защиту от короткого замыкания.

### 4.3. Правила Кирхгофа для расчета электрических цепей

Расчет разветвленных электрических цепей упрощается, если пользоваться правилами, сформулированными немецким физиком Густав Роберт Кирхгофом. Этих правил два. Первое из них относится к узлам цепи. **Узлом** называется точка разветвленной цепи, в которой сходятся три и более проводника (рис. 4.6). Ток, текущий к узлу, берется со знаком «плюс», текущий от узла, – со знаком «минус».

*Первое правило Кирхгофа:* алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле разветвленной электрической цепи, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (4.24)$$

Первое правило Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда применительно к узлу разветвленной цепи. Уравнение для узла  $A$  на рис. 4.6, записанное с применением первого правила Кирхгофа, имеет следующий вид:  $I_1 + I_2 + I_4 - I_3 = 0$ .

*Второе правило Кирхгофа (правило контуров):* в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил

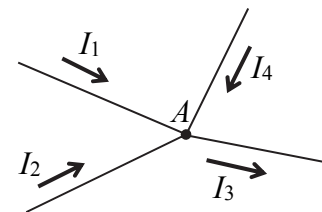


Рис. 4.6



токов  $I_i$  на сопротивления  $R_i$  соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС источников  $\mathcal{E}$ , действующих в этом контуре:

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{k=1}^m \mathcal{E}_k . \quad (4.25)$$

Второе правило Кирхгофа является обобщением закона Ома на разветвленные электрические цепи.

Применяя второе правило Кирхгофа, необходимо помнить правило знаков для силы тока и ЭДС: если направление тока, выбранное произвольно, совпадает с направлением обхода контура (выбор этого направления произволен), то сила тока  $I$  берется со знаком «плюс», в противоположном случае – со знаком «минус»; ЭДС считаются положительными, если они создают токи, совпадающие с направлением обхода контура (при обходе контура внутри источника мы идем от отрицательного полюса источника к положительному), в противном случае – отрицательными (рис. 4.7).

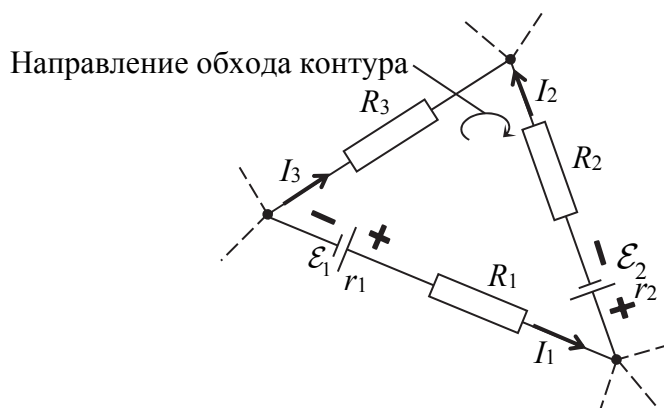


Рис. 4.7

Для контура, изображенного на рис. 4.7, согласно выбранному направлению обхода по часовой стрелке уравнение, записанное по второму правилу Кирхгофа, будет иметь следующий вид:  $I_3 R_3 - I_2 (R_2 + r_2) - I_1 (R_1 + r_1) = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ .

Порядок действий при решении задач с применением правил Кирхгофа приведен ниже:

1. Произвольно выбрать и указать на схеме электрической цепи направление токов на всех участках.
2. Произвольно выбрать направление обхода всех контуров цепи и указать его на рисунке.

3. Записать на основе первого правила Кирхгофа (4.24)  $k - 1$  уравнение ( $k$  – число узлов в рассчитываемой электрической цепи).

4. На основе второго правила Кирхгофа (4.24) составить такое число уравнений, чтобы общее число составленных уравнений (с учетом уравнений, записанных по первому правилу Кирхгофа) было равно числу неизвестных задачи. Выбранные замкнутые контуры цепи должны отличаться хотя бы одним участком.

В разветвленной цепи, содержащей  $y$  узлов и  $k$  участков цепи между соседними узлами, число независимых уравнений, соответствующих второму правилу Кирхгофа, составляет  $k - y + 1$ .

5. Решить полученную систему алгебраических уравнений.

6. В случае если рассчитанное значение силы тока (или какой-нибудь другой искомой величины) в каком-либо участке электрической цепи окажется положительным, то направление тока совпадает с выбранным на схеме, в противном случае ток направлен противоположно выбранному направлению.

#### 4.4. Работа и мощность тока

Рассмотрим однородный произвольный участок, к концам которого приложено напряжение  $U$ . За время  $dt$  через сечения проводника переносится заряд  $dq = Idt$ . Работа сил электрического поля по переносу заряда  $dq$  будет равна

$$dA = Udq = IUdt. \quad (4.26)$$

В этом случае работу электрического поля называют **работой тока**. Используя закон Ома, получим

$$dA = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt. \quad (4.27)$$

Разделив работу  $dA$  на время  $dt$ , за которое она совершается, получим мощность  $P$ , развиваемую током на рассматриваемом участке цепи:

$$P = \frac{dA}{dt} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (4.28)$$

Формулы (4.28) справедливы и для постоянного, и для переменного токов. В случае переменного тока этими формулами определяется мгновенное значение мощности.

## 4.5. Закон Джоуля – Ленца в интегральной и дифференциальной формах

При прохождении тока по неподвижному металлическому проводнику происходит рассеяние энергии вследствие столкновений носителей заряда между собой и с другими частицами среды. Вся работа тока полностью превращается во внутреннюю энергию проводника, в результате чего проводник нагревается и по закону сохранения энергии выделяемое количество теплоты  $\delta Q$  за малый промежуток времени  $dt$  будет

$$\delta Q = dA. \quad (4.29)$$

Следовательно,

$$\delta Q = UI dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt. \quad (4.30)$$

Количество теплоты, выделяющееся за конечный промежуток времени  $t$  током, который изменяется со временем  $I = I(t)$ , во всем объеме проводника получаем интегрированием. В этом случае количество теплоты, выделяющееся за время  $t$ , надо рассчитывать по формуле

$$Q = \int_0^t (I(t))^2 R dt. \quad (4.31)$$

Если ток постоянный, то

$$Q = I^2 R t. \quad (4.32)$$

Последнее уравнение было экспериментально установлено английским физиком Джеймсом Прескоттом Джоулем и независимо от него русским физиком Эмилием Христиановичем Ленцем и носит название **закона Джоуля – Ленца в интегральной форме**: количество теплоты, выделяемое постоянным электрическим током на участке цепи, равно произведению квадрата силы тока на время его прохождения и электрическое сопротивление этого участка цепи.

Получим **закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме**. Выделим в проводнике элементарный цилиндрический объем  $dV = dS dl$ , обладающий сопротивлением  $R = \rho \frac{dl}{dS}$ . Ось цилиндра совпадает с направлением тока. По закону Джоуля – Ленца, за время  $dt$  в этом объеме выделится теплота:

$$dQ = I^2 R dt = (jdS)^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = \rho j^2 dV dt, \quad (4.33)$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление материала проводника;  $j$  – плотность тока в проводнике.

Величина  $Q_{\text{уд}} = \frac{dQ}{dV dt}$  называется **удельной тепловой мощностью тока** – количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема.

С учетом этого закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме будет иметь вид

$$Q_{\text{уд}} = \rho j^2 = \frac{1}{\gamma} j^2. \quad (4.34)$$

С учетом закона Ома в дифференциальной форме  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  получим

$$Q_{\text{уд}} = \gamma E^2 = \vec{j} \vec{E}. \quad (4.35)$$

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение электрического тока и укажите условия его существования.
2. Какими величинами характеризуется электрический ток и как они связаны между собой?
3. Что такое однородный (пассивный) участок электрической цепи?
4. От чего зависит сопротивление проводника? Что понимают под удельным сопротивлением, проводимостью, удельной проводимостью и средним температурным коэффициентом сопротивления? В каких единицах они измеряются?
5. Запишите и поясните закон Ома для однородного участка цепи в интегральной и дифференциальной формах.
6. Что такое неоднородный (активный) участок электрической цепи?
7. Дайте определение электродвижущей силы и напряжения. В каких случаях напряжение на участке цепи равно разности потенциалов на концах этого участка? Какая физическая величина измеряется вольтметром?
8. Запишите и поясните закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной и дифференциальной формах.
9. Поясните, как пользоваться законом Ома для неоднородного участка цепи (поясните правило знаков для токов и ЭДС).
10. Запишите и поясните закон Ома для замкнутой цепи. Что такое ток короткого замыкания?

11. Как определяется работа и мощность в цепи постоянного тока? В каких единицах они измеряются?

12. Сформулируйте и запишите закон Джоуля – Ленца в интегральной и дифференциальной формах. Поясните физический смысл величин, входящих в эти законы.

13. Сформулируйте и напишите правила Кирхгофа. Что такое узел электрической цепи?

14. Поясните, как пользоваться правилами Кирхгофа для расчета разветвленной электрической цепи (правило знаков для токов и ЭДС).

### **Задачи по теме**

#### **«Постоянный электрический ток»**

1. Проволоку, имеющую по всей длине одинаковую площадь сечения, разрезали на 5 равных частей, которые связали затем в плотный пучок. Сопротивление пучка оказалось равным  $R = 1$  Ом. Каково было сопротивление  $R_1$  проволоки?

2. Сколько метров провода сечением  $S = 10$  мм<sup>2</sup> надо взять, чтобы его сопротивление было таким же, как у проводника длиной  $l_1 = 1$  м, сечением  $S_1 = 0,1$  мм<sup>2</sup>, сделанного из того же материала?

3. Определите площадь поперечного сечения и длину проводника из алюминия, если его сопротивление  $R = 0,1$  Ом, а масса  $m = 54$  г. Плотность алюминия  $\rho_{\text{пл}} = 2700$  кг/м<sup>3</sup>, удельное сопротивление  $\rho = 2,8 \cdot 10^{-8}$  Ом·м.

4. Цепь состоит из трех последовательно соединенных проводников, подключенных к источнику с напряжением  $U = 24$  В. Сопротивления первого проводника  $R_1 = 4$  Ом, второго –  $R_2 = 6$  Ом, а напряжение на концах третьего проводника  $U_3 = 4$  В. Найдите силу тока  $I$  в цепи, сопротивление третьего  $R_3$  проводника и напряжения на концах первого  $U_1$  и второго  $U_2$  проводников.

5. К сети напряжением  $U = 120$  В присоединяются два резистора, при последовательном их присоединении ток в цепи равен  $I_1 = 3$  А, а при параллельном –  $I_2 = 16$  А. Определите сопротивления  $R_1, R_2$  резисторов.

6. При замыкании источника на сопротивление разность потенциалов на его зажимах  $U = 5$  В. Если внешнее сопротивление увеличить в 6 раз, то разность потенциалов на зажимах подрастает в 2 раза. Найдите ЭДС источника.

7. При внешнем сопротивлении  $R_1 = 3$  Ом ток в цепи равен  $I_1 = 0,3$  А, а при внешнем сопротивлении  $R_2 = 5$  Ом – ток  $I_2 = 0,2$  А. Определите ток короткого замыкания  $I_{к.з}$  источника.

8. Батарея с ЭДС  $\mathcal{E} = 6$  В и внутренним сопротивлением  $r = 1,4$  Ом питает внешнюю цепь, состоящую из двух последовательно соединенных

сопротивлений величиной  $R_1 = 2$  Ом и  $R_2 = 8$  Ом. Определите разность потенциалов  $U$  на зажимах батареи и силы токов  $I_1$ ,  $I_2$  в сопротивлениях.

9. При силе тока  $I_1 = 3$  А во внешней цепи батареи выделяется мощность  $P_1 = 18$  Вт, при токе  $I_2 = 1$  А –  $P_2 = 10$  Вт. Определите силу тока  $I_{к.з}$  короткого замыкания источника ЭДС.

10. ЭДС батареи  $\mathcal{E} = 24$  В. Наибольшая сила тока, которую может дать батарея,  $I_{\max} = 10$  А. Определите максимальную мощность  $P_{\max}$ , которая может выделяться во внешней цепи.

11. В конце зарядки аккумулятора вольтметр, который подключен к его полюсам, показывает напряжение  $U_1 = 12$  В. Сила тока зарядки  $I_1 = 4$  А. В начале разрядки аккумулятора при силе тока  $I_2 = 5$  А вольтметр показывает напряжение  $U_2 = 11,8$  В. Определите электродвижущую силу  $\mathcal{E}$  и внутреннее сопротивление  $r$  аккумулятора.

12. От генератора, ЭДС которого  $\mathcal{E} = 220$  В, требуется передать энергию на расстояние  $l = 2,5$  км. Мощность потребителя  $P = 10$  кВт. Найдите минимальное сечение проводящих медных проводов  $d_{\min}$ , если потери мощности в сети не должны превышать 5% мощности потребителя.

13. От батареи, ЭДС которой  $\mathcal{E} = 600$  В, требуется передать энергию на расстояние  $l = 1$  км. Потребляемая мощность  $P = 5$  кВт. Найдите минимальные потери мощности в сети, если диаметр медных подводных проводов  $d = 0,5$  см.

14. Три проводника сопротивлениями  $R_1 = 3$  Ом,  $R_2 = 6$  Ом и  $R_3 = 8$  Ом соединены параллельно. В первом проводнике выделилось  $Q_1 = 20,95$  кДж теплоты. Сколько теплоты выделилось во втором  $Q_2$  и третьем  $Q_3$  проводниках за то же время?

15. В электроплитке два нагревателя. При включении одного вода закипает за  $t_1 = 20$  мин, при включении второго – за  $t_2 = 40$  мин. За сколько минут закипит вода, если включены оба нагревателя последовательно? параллельно?

16. Электродвигатель питается от сети с напряжением  $U = 220$  В. Чему равна мощность двигателя и его КПД при протекании по его обмотке тока  $I_1 = 2$  А, если при полном торможении якоря по цепи идет ток  $I_2 = 5$  А?

17. В сеть с напряжением  $U = 100$  В подключили катушку с сопротивлением  $R_1 = 2$  кОм и вольтметр, соединенные последовательно. Показание вольтметра  $U_1 = 80$  В. Когда катушку заменили другой, вольтметр показал  $U_2 = 60$  В. Определите сопротивление  $R_2$  другой катушки.

18. Батарея с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  замкнута на внешнее сопротивление  $R$ . Наибольшая мощность, выделяющаяся во внешней цепи, равна  $P_{\max} = 9$  Вт. При этом течет ток  $I = 3$  А. Найдите ЭДС батареи  $\mathcal{E}$  и ее внутреннее сопротивление  $r$ .

19. Два источника тока ( $\mathcal{E}_1 = 8 \text{ В}$ ,  $r_1 = 2 \text{ Ом}$ ;  $\mathcal{E}_2 = 6 \text{ В}$ ,  $r_2 = 1,6 \text{ Ом}$ ) и резистор ( $R = 10 \text{ Ом}$ ) соединены, как показано на рис. 4.8. Вычислите силу тока, текущего через резистор.

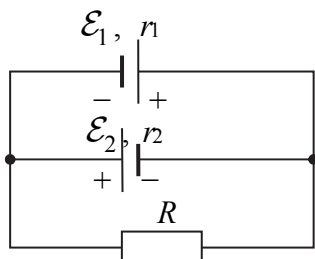


Рис. 4.8

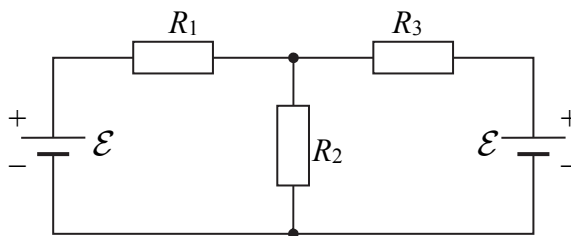


Рис. 4.9

20. Определите силу тока в сопротивлении  $R_3$  (рис. 4.9) и напряжение на концах этого сопротивления, если  $\mathcal{E}_1 = 4 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 3 \text{ В}$ ,  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 1 \text{ Ом}$ . Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

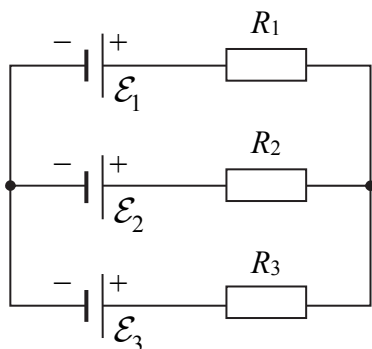


Рис. 4.10

21. Три источника тока с ЭДС  $\mathcal{E}_1 = 11 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 4 \text{ В}$  и  $\mathcal{E}_3 = 6 \text{ В}$  и три реостата с сопротивлениями  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 2 \text{ Ом}$  соединены, как показано на рис. 4.10. Определите силу тока в реостатах. Внутреннее сопротивление источников пренебрежимо мало.

22. Какую силу тока показывает миллиамперметр в схеме на рис. 4.11, если  $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 6 \text{ В}$ ,  $R_1 = 80 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 20 \text{ Ом}$  и сопротивление миллиамперметра  $R_A = 2 \text{ Ом}$ ? Внутреннее сопротивление элементов не учитывать.

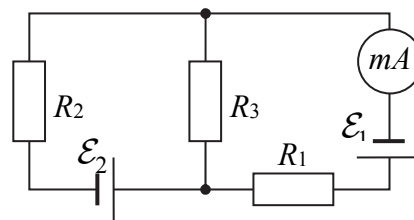


Рис. 4.11

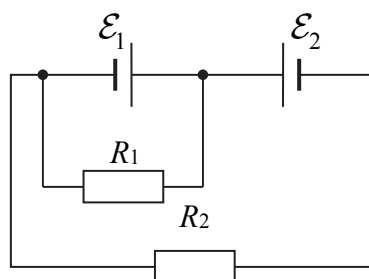


Рис. 4.12

23. Два одинаковых элемента имеют ЭДС  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 2 \text{ В}$  и внутренние сопротивления  $r_1 = r_2 = 0,5 \text{ Ом}$  (рис. 4.12). Найдите токи  $I_1$  и  $I_2$ , текущие через сопротивление  $R_1 = 0,5 \text{ Ом}$  и  $R_2 = 1,5 \text{ Ом}$ , а также ток  $I$  через элемент с ЭДС  $\mathcal{E}_1$ .



# МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

В современной физике *магнетизм* – раздел, связанный с большинством ведущих областей физической науки и изучающий взаимодействие вещества с магнитным полем.

## 1. Магнитное поле в вакууме

**Магнитное поле** – это особая форма материи. Магнитное поле порождается любыми движущимися зарядами: электрический ток в металле, в электролите, газе, пучок электронов, протонов и т. п. Конвекционный ток (движущееся заряженное макроскопическое тело) также создает в окружающем пространстве магнитное поле. Магнитное поле постоянных магнитов создается зарядами, движущимися внутри атомов. С другой стороны, и действует магнитное поле только на движущиеся электрические заряды. Таким образом, между движущимися друг относительно друга электрическими зарядами, кроме электрических сил, действуют еще и магнитные силы.

### 1.1. Магнитное поле. Взаимодействие токов. Вектор магнитной индукции

В пространстве, которое окружает электрические токи или постоянные магниты, возникает поле, называемое *магнитным*. На контур с током или магнитную стрелку, помещенные в магнитное поле, последнее оказывает ориентирующее действие. Все постоянные магниты обладают полюсами, которые носят название северный и южный. Одноименные полюса взаимно отталкиваются, а разноименные – притягиваются.

Силовой характеристикой магнитного поля является *вектор магнитной индукции* (или иначе *вектор индукции магнитного поля*)  $\vec{B}$ . Определение и

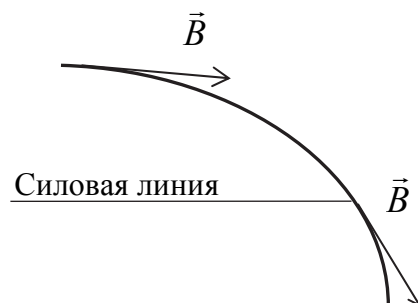


Рис. 1.1

физический смысл вектора магнитной индукции будут рассмотрены ниже.

Графически (рис. 1.1) магнитное поле изображают с помощью **линий магнитной индукции (силовых линий)** – линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора магнитной индукции. Линии магнитной индукции всегда замкнуты, выходят из северного полюса и входят в южный, охватывают проводники с током. Густота линий магнитной индукции пропорциональна величине индукции магнитного поля.

В качестве примера рассмотрим силовые линии прямого и кругового проводников с токами. В случае прямого тока линии индукции (рис. 1.2, *а*) представляют собой концентрические окружности (с центрами на оси проводника), которые расположены в плоскостях, перпендикулярных току. При этом направление линий индукции удобно определять по **правилу буравчика** (или иначе **правило правого винта**) в основной формулировке: *если направление поступательного движения оси буравчика сопоставить с направлением прямого тока, то направление вращения его рукоятки укажет направление линий магнитной индукции.*

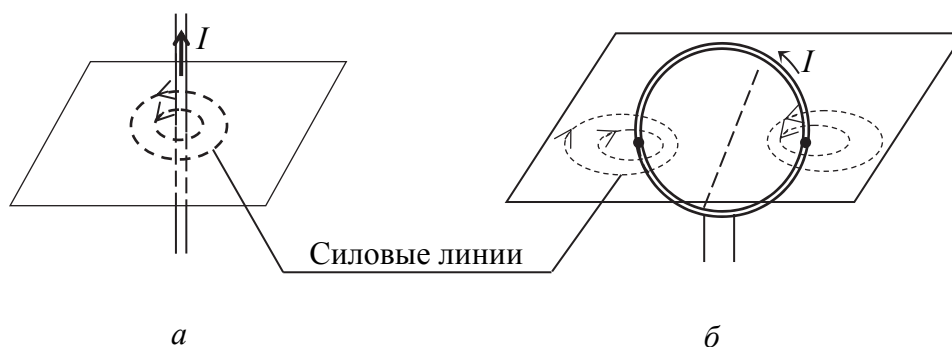


Рис. 1.2

Силовые линии индукции кругового тока изображены на рис. 1.2, *б*, причем направление силовых линий также определяется по правилу буравчика.

Линии индукции соленоида, который представляет собой систему одинаковых круговых токов, схематично изображены на рис. 1.3, *а*. Внутри соленоида, длина которого намного больше диаметра его витков, магнитное поле является однородным, а прямые линии магнитной индукции направлены так, чтобы выполнялось правило буравчика (неосновная формулировка): *если рукоятку буравчика вращать*

по направлению тока в витках, то силовые линии будут направлены по движению оси буравчика. Все линии индукции на рисунке или замкнуты, или имеют тенденцию замкнуться, если их продлить. Линии индукции соленоида очень схожи с линиями прямого (полосового) магнита (рис. 1.3, б), которые выходят из северного полюса  $N$  и входят в южный полюс  $S$ . Кажется, что они разорваны в объеме магнита. Однако опыты и теоретические расчеты показали, что линии индукции и в этом случае замкнуты внутри магнита.

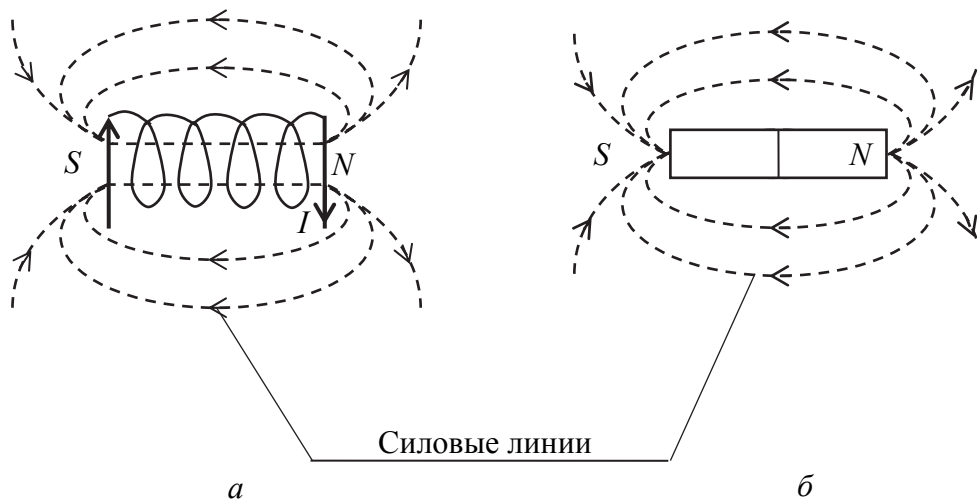


Рис. 1.3

В связи с тем, что магнитные поля соленоида и полосового постоянного магнита схожи друг с другом, торцам соленоида часто приписывают полярность. Французский физик А. Амперу высказал гипотезу о том, что магнитные свойства постоянных магнитов обусловлены существующими в них микротоками. К настоящему времени эта гипотеза полностью подтверждена и лежит в основе современных представлений о магнитных свойствах вещества.

На рис. 1.4 приведены примеры использования правила правого винта в основной формулировке для определения направления вектора  $\vec{B}$  магнитного поля, создаваемого токами  $I_1$  и  $I_2$ . На рисунке ток силой  $I_1$  ( $\odot$ ) – «ток к нам», а ток силой  $I_2$  ( $\oplus$ ) – «ток от нас».

Поскольку магнитное поле действует на проводник с током, то, например, два параллельных гибких проводника с токами одинакового направления притягиваются, выгибаясь, как показано на рис. 1.5 штриховыми линиями. Противоположно направленные токи отталкиваются.

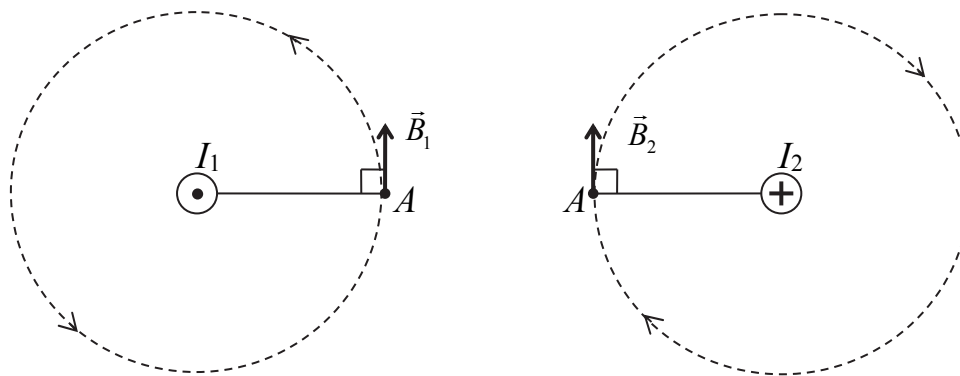


Рис. 1.4

Вектор магнитной индукции характеризует результирующее магнитное поле, создаваемое всеми макро- и микротоками. **Макроскопические токи** – это электрические токи, протекающие по проводникам в электрических цепях, а **микроскопические токи** – токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах.

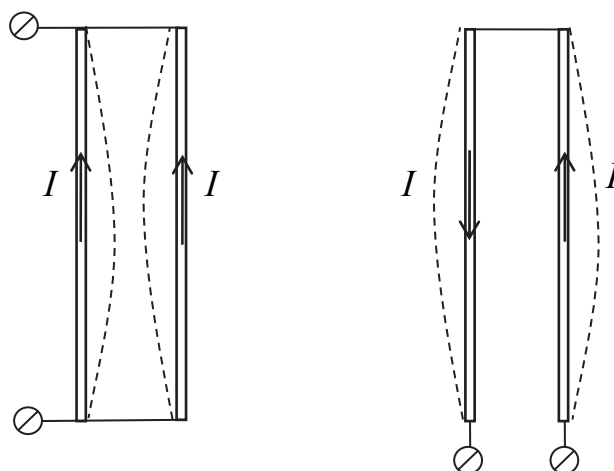


Рис. 1.5

Например, если вблизи какого-то тела поместить проводник с током (макроток), то под действием его магнитного поля микротоки во всех атомах определенным образом ориентируются, создавая в теле дополнительное магнитное поле. Магнитное поле макротока описывается вектором напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ . Для однородной изотропной среды вектор магнитной индукции связан с вектором напряженности магнитного поля соотношением

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}, \quad (1.1)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная,  $\mu$  – магнитная проницаемость среды – безразмерная величина, показывающая, во сколько раз магнитное поле макротокков усиливается за счет поля микротокков среды. Единица магнитной индукции в СИ  $[B] = 1$  Тл, а единица напряженности магнитного поля в СИ  $[H] = 1$  А/м.

Для магнитного поля справедлив **принцип суперпозиции** магнитных полей: *магнитная индукция результирующего магнитного поля в некоторой точке, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме магнитных индукций полей, создаваемых каждым током или движущимися зарядами в данной точке:*

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i. \quad (1.2)$$

Аналогично можно сформулировать принцип суперпозиции для напряженности магнитного поля.

## 1.2. Закон Био – Савара – Лапласа

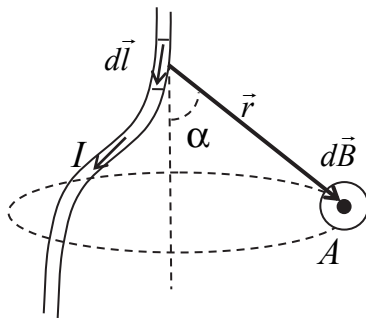


Рис. 1.6

Согласно закону Био – Савара – Лапласа, элемент проводника  $dl$  с током  $I$  создает в некоторой точке  $A$  индукцию поля

$$d\vec{B} = \mu\mu_0 \frac{I}{4\pi r^3} [d\vec{l} \times \vec{r}], \quad (1.3)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из элемента  $dl$  проводника в точку  $A$ . Направление  $d\vec{B}$  перпендикулярно  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ , и совпадает с касательной к линии магнитной индукции (рис.1.6).

Модуль вектора  $d\vec{B}$  определяется выражением

$$dB = \mu\mu_0 \frac{I}{4\pi r^2} dl \sin \alpha, \quad (1.4)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

Для напряженности магнитного поля закон Био – Савара – Лапласа будет иметь вид

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^3} [d\vec{l} \times \vec{r}] \text{ и } dH = \frac{I}{4\pi r^2} dl \sin \alpha. \quad (1.5)$$

Закон Био – Савара – Лапласа совместно с принципом суперпозиции магнитных полей позволяет найти индукция магнитного поля, создаваемого проводником любой конфигурации. В этом случае принцип суперпозиции магнитных полей будет иметь вид

$$\vec{B} = \int d\vec{B} \text{ или } \vec{H} = \int d\vec{H}. \quad (1.6)$$

### 1.3. Расчет магнитных полей прямого проводника с током бесконечной и конечной длины

Пусть прямолинейный проводник  $MN$  конечной длины с током  $I$  лежит в плоскости чертежа (рис. 1.7). Согласно закону Био – Савара – Лапласа (1.4), вектор магнитной индукции  $d\vec{B}$  перпендикулярен плоскости чертежа и направлен «к нам». Численное значение  $dB$ , создаваемого в точке  $A$  элементом  $dl$  проводника с током  $I$ , равно

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (1.7)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

Векторы  $d\vec{B}$  от каждого элемента  $d\vec{l}$  имеют одинаковое направление, так как проводник прямолинейный. Поэтому суммарная магнитная индукция равна

$$B = \int dB = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin \alpha}{r^2}. \quad (1.8)$$

Преобразуем выражение (1.8) таким образом, чтобы магнитная индукция стала функцией одной переменной  $\alpha$ . Из рис. 1.7 следует,

$$\text{что } r = \frac{r_0}{\sin \alpha}, \text{ а } dl = \frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha}.$$

Тогда

$$dl = \frac{r_0 d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подставив полученные значения  $r$  и  $dl$  в соотношение (1.8), получим

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha, \quad (1.9)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – значения угла  $\alpha$  для крайних точек проводника  $MN$ .

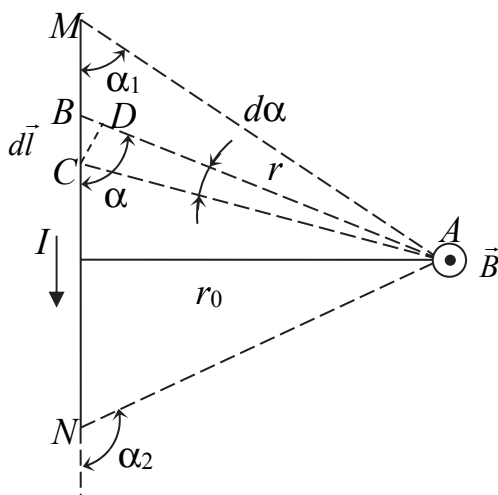


Рис. 1.7

Проинтегрировав равенство (1.9), получим формулу для расчета магнитной индукции прямого проводника с током конечной длины:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (1.10)$$

Если проводник  $MN$  бесконечно длинный, то  $\alpha_1 = 0$ , а  $\alpha_2 = \pi$ . Тогда из (1.10) магнитная индукция прямого проводника с током бесконечной длины в любой точке поля вне проводника равна

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0}. \quad (1.11)$$

Напряженность магнитного поля  $H = \frac{B}{\mu\mu_0}$  и для прямолинейного проводника с током равна конечной длины:

$$H = \frac{I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (1.12)$$

а для бесконечно длинного проводника

$$H = \frac{I}{4\pi r_0}. \quad (1.13)$$

#### 1.4. Магнитное поле движущегося заряда

Вокруг проводника с током силой  $I$  существует магнитное поле. Так как ток представляет собой направленное движение частиц, то вокруг отдельно движущейся заряженной частицы существует магнитное поле. Закон Био – Савара – Лапласа позволяет найти выражение для индукции магнитного поля, создаваемого отдельным движущимся со скоростью  $v$  точечным электрическим зарядом  $q$ .

Выразим произведение  $I d\vec{l}$ , входящее в выражение (1.4), через плотность тока  $j$  и размеры проводника (сечение  $S$  и длину  $dl$ )

$$I d\vec{l} = j S d\vec{l} = q n v d\vec{l} S, \quad (1.14)$$

где  $n$  – концентрация носителей заряда.

Вектор плотности тока  $j$  параллелен  $d\vec{l}$ .

Поэтому

$$I d\vec{l} = q n v d\vec{l} S = \vec{v} dq, \quad (1.15)$$

где  $dq = q n d\vec{l} S$  – заряд элементарного объема проводника с током  $I$ .



Подставив это выражение в закон Био – Савара – Лапласа, получим

$$d\vec{B} = \mu\mu_0 \frac{I}{4\pi r^3} [d\vec{l} \times \vec{r}] = \mu\mu_0 \frac{dq}{4\pi r^3} [\vec{v} \times \vec{r}]. \quad (1.16)$$

Индукция  $B$  пропорциональна заряду  $dq$  в объеме  $dV$ , поэтому индукцию поля  $B$ , создаваемую одним точечным зарядом  $q$ , который движется со скоростью  $v$ , можно определить по формуле

$$\vec{B}_q = \mu\mu_0 \frac{q}{4\pi r^3} [\vec{v} \times \vec{r}]. \quad (1.17)$$

Напряженность магнитного поля заряда  $q$ , движущегося со скоростью  $\vec{v}$ , равна

$$\vec{H}_q = \frac{\vec{B}_q}{\mu\mu_0} = \frac{q}{4\pi r^3} [\vec{v} \times \vec{r}]. \quad (1.18)$$

Из приведенных соотношений (1.17) и (1.18) следует, что индукция  $\vec{B}_q$  и напряженность  $\vec{H}_q$  магнитного поля движущегося заряда в некоторой произвольной точке этого поля направлены перпендикулярно к плоскости, в которой лежат  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ , и их направления определяются правилом векторного произведения указанных векторов.

### 1.5. Циркуляция вектора магнитной индукции

Циркуляцией вектора магнитной индукции по заданному замкнутому контуру называется интеграл по этому контуру

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl, \quad (1.19)$$

где  $d\vec{l}$  – вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура;  $B_l = B \cos \alpha$  – составляющая вектора  $\vec{B}$  в направлении касательной к контуру, с учетом выбранного направления обхода;  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$ .

Для магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника с током силой  $I$  и находящегося в вакууме рассчитаем циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль некоторого замкнутого контура  $L$ , охватывающего проводник с током, т. е. вычислим интеграл  $\oint B_l dl$ . Для этого мысленно разобьем контур  $L$  на элементы длиной  $dl$  (рис. 1.8). При вычислении циркуляции нужно учитывать направление (знак) силы тока по отношению к выбранному направлению обхода контура. **Правило знаков для токов:** сила тока считается положительной,

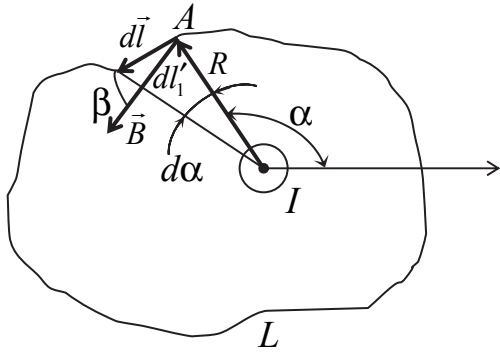


Рис. 1.8

если направление тока и направление обхода контура удовлетворяют правилу правого винта (буравчика), ток противоположного направления считается отрицательным.

С учетом выражения (1.11) для магнитной индукции прямолинейного тока в вакууме определим циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по контуру  $L$ :

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B dl \cos\beta = \oint_L \mu_0 \frac{I}{2\pi R} dl \cos\beta. \quad (1.20)$$

Из рисунка видно, что

$$dl = \frac{dl^*}{\cos\beta} = \frac{R d\alpha}{\cos\beta}. \quad (1.21)$$

Подставим выражение (1.21) в (1.20):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L \mu_0 \frac{I}{2\pi R} dl \cos\beta = \oint_L \mu_0 \frac{I}{2\pi R} \frac{R d\alpha}{\cos\beta} \cos\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = \mu_0 I. \quad (1.22)$$

Далее рассмотрим случай, когда замкнутый контур  $L$  не охватывает проводник с током, т. е. такой ток не пронизывает поверхность этого контура (рис. 1.9). При вычислении циркуляции интеграл по  $L$  разделим на два интеграла:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_{1a2} \vec{B} d\vec{l} + \int_{1b2} \vec{B} d\vec{l}. \quad (1.23)$$

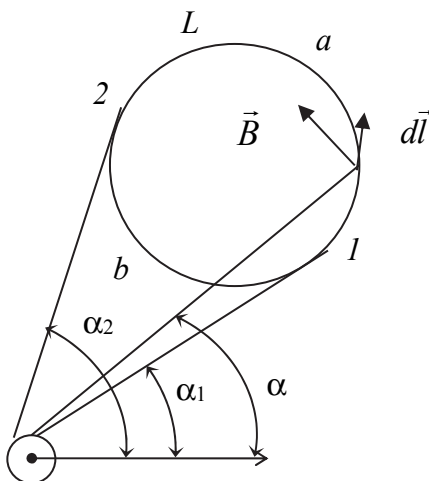


Рис. 1.9

При интегрировании на участке  $1a2$  угол  $\alpha$  изменяется от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ , на участке  $1b2$  угол  $\alpha$  изменяется от  $\alpha_2$  до  $\alpha_1$ . В результате с учетом предыдущего получаем

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} d\alpha = 0. \quad (1.24)$$

Таким образом, рассмотрев два случая, можно сделать следующий вывод:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \begin{cases} \mu_0 I & \text{— контур охватывает проводник с током;} \\ 0 & \text{— контур не охватывает проводник с током.} \end{cases} \quad (1.25)$$

Это утверждение справедливо для магнитных полей, созданных проводниками с током любой формы и размеров, т. е. формула универсальна. Поэтому если поле создается системой произвольных по форме проводников с токами силой  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то с помощью формулы (1.25) и принципа суперпозиции магнитных полей (1.2) можно рассчитать циркуляцию напряженности  $\vec{B}$  результирующего поля:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L \sum_{i=1}^n \vec{B}_i d\vec{l} = \sum_{i=1}^n \oint_L \vec{B}_i d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^k I_i, \quad (1.26)$$

где  $k \leq n$ .

Получили **теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$  в вакууме в интегральной форме** (или иначе **закон полного тока для магнитного поля в вакууме**): *циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром:*

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^k I_i, \quad (1.27)$$

где  $k$  — число проводников с токами, охватываемое контуром  $L$  произвольной формы.

Эта теорема справедлива только для поля в вакууме. Из полученного результата следует, что магнитное поле непотенциально, оно вихревое.

Так как магнитная индукция в вакууме связана с напряженностью магнитного поля соотношением  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , то можно получить теорему о циркуляции напряженности в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^k I_i. \quad (1.28)$$

Между циркуляцией вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  и циркуляцией вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  существует следующее различие:

1. Циркуляция вектора  $\vec{E}$  электростатического поля всегда равна нулю, т. е. поле является потенциальным.
2. Циркуляция вектора  $\vec{B}$  магнитного поля не равна нулю, т. е. такое поле является вихревым.

Получим *теорему о циркуляции магнитной индукции в вакууме в дифференциальной форме*: если контур  $L$  находится в сплошной проводящей среде, то значение полного тока, пронизывающего поверхность контура, можно определить как поток вектора плотности тока через поверхность  $S$ , ограниченную этим контуром:

$$\sum_{i=1}^k I_i = \int_S j_n dS. \quad (1.29)$$

Подставим (1.29) в (1.27) и применим теорему Стокса ( $\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S (\text{rot} \vec{A})_n dS$ ):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S j_n dS \Rightarrow \int_S (\text{rot} \vec{B})_n dS = \mu_0 \int_S j_n dS \Rightarrow \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (1.30)$$

Получили теорему о циркуляции вектора магнитной индукции в вакууме в дифференциальной форме:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (1.31)$$

Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в дифференциальной форме будет иметь вид

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}. \quad (1.32)$$

Уравнение (1.32) математически выражает тот факт, что магнитное поле имеет *вихревой* характер и его источниками являются электрические токи.

## 1.6. Магнитное поле тороида и соленоида

Закон полного тока (1.27) часто используют для расчета индукции магнитного поля постоянного электрического тока. Для примера рассмотрим применение закона полного тока для расчета индукции магнитного поля соленоида и тороида.

**Соленоид** – это катушка индуктивности в виде намотанного на цилиндрическую поверхность изолированного проводника, по которому течет электрический ток. Рассмотрим соленоид длиной  $l$ , имеющей  $N$  витков. Длину соленоида считаем во много раз больше, чем диаметр его витков, т. е. рассматриваемый соленоид бесконечно длинный. Внутри соленоида поле является однородным, вне соленоида – неоднородным и очень слабым и чем длиннее соленоид, тем меньше магнитная индукция вне его. Поэтому будем считать, что поле бесконечно длинного соленоида сосредоточено целиком внутри него.

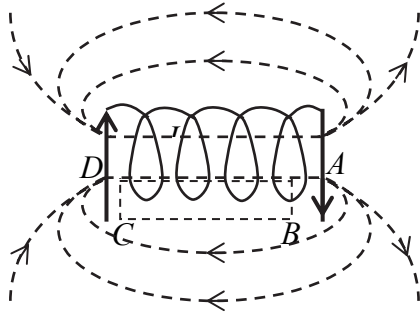


Рис. 1.10

Для нахождения магнитной индукции выберем замкнутый прямоугольный контур  $ABCD$  (рис. 1.10) Согласно теореме о циркуляции вектора  $\vec{H}$

$$\oint_{ABCD} H_l dl = NI. \quad (1.33)$$

Интеграл по  $ABCD$  можно представить в виде интегралов по  $AB$ ;  $BC$ ;  $CD$ ;  $DA$ . На участках  $AB$  и  $CD$  контур перпендикулярен линиям магнитной индукции и  $H_l = 0$ . На участке  $CB$  вне соленоида  $H = 0$ , а на участке  $DA$  контур совпадает с линией магнитной индукции и циркуляция вектора  $\vec{H}$  равна

$$\oint_{DA} H_l dl = Hl = NI. \quad (1.34)$$

Из последнего уравнения получаем, что напряженность магнитного поля соленоида

$$H = \frac{NI}{l} = nI, \quad (1.35)$$

где  $n$  – число витков соленоида, приходящихся на единицу длины.

С учетом (1.1) индукция магнитного поля соленоида

$$B = \mu\mu_0 \frac{N}{l} I = \mu\mu_0 nI. \quad (1.36)$$

**Тороид** – это кольцевая катушка с витками, намотанными на сердечник, имеющий форму тора, по которому течет электрический ток.

Пусть  $R_1$  и  $R_2$  соответственно внешний и внутренний радиусы сечения тороида. Общее число витков тороида равно  $N$  с током  $I$ .

Если  $r < R_2$ , то контур не охватывает проводники с током,  $\sum_{i=1}^N I_k = 0$ , и по закону полного тока

$$\oint_L H dl \cos \alpha = 2\pi r H = 0 \Rightarrow H = 0. \quad (1.37)$$

Если  $r > R_1$ , то контур охватывает  $2N$  проводников с током  $I$ . Половина из них идет в одном направлении, а половина – в обратном направлении (рис. 1.11). Поэтому алгебраическая сумма токов во всех проводниках равна нулю и значит

$$2\pi r H = 0 \Rightarrow H = 0. \quad (1.38)$$

Из полученного результата следует, что вне тороида магнитное поле отсутствует. Магнитное поле сосредоточено внутри объема ( $R_2 \leq r \leq R_1$ ) тороида. Линии магнитной индукции в данном случае есть окружности, центры которых расположены на оси тороида. В этом случае контур радиуса  $r$  охватывает  $N$  проводников, токи в которых равны  $I$  и одинаково направлены. Поэтому по теореме о циркуляции

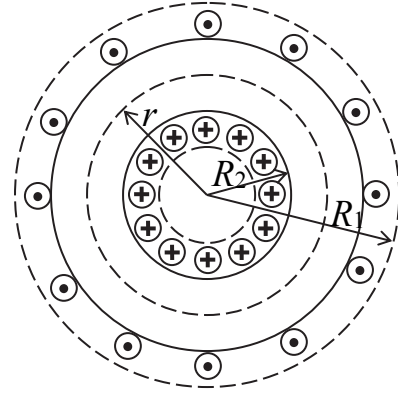


Рис. 1.11

$$\oint_L H_1 dl = Hl = 2\pi r H = NI. \quad (1.39)$$

Отсюда напряженность магнитного поля внутри тороида

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = nI, \quad (1.40)$$

где  $n$  – число витков тороида, приходящихся на единицу длины.

Напряженность магнитного поля на осевой линии тороида равна

$$H_{\text{ср}} = \frac{NI}{2\pi r_{\text{ср}}}. \quad (1.41)$$

С учетом (1.1) индукция магнитного поля внутри тороида равна

$$B = \mu\mu_0 \frac{NI}{2\pi r} = \mu\mu_0 nI. \quad (1.42)$$

Индукция магнитного поля на осевой линии тороида равна

$$B_{\text{ср}} = \mu\mu_0 \frac{NI}{2\pi r_{\text{ср}}} = \mu\mu_0 nI. \quad (1.43)$$

## 1.7. Магнитный поток. Теорема Гаусса для магнитного поля

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через площадку  $dS$  называется величина, равная

$$d\Phi_m = \vec{B}d\vec{S} = B_n dS, \quad (1.44)$$

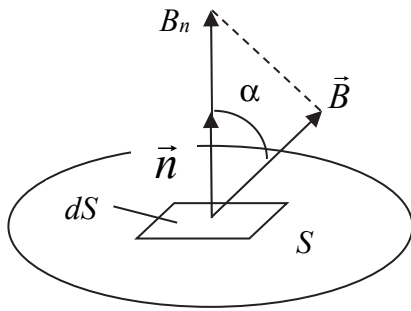


Рис. 1.12

где  $B_n = B \cos \alpha$  – проекция вектора  $\vec{B}$  на направление нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$ ,  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$  (рис. 1.12). Магнитный поток равен числу линий магнитной индукции, пронизывающих замкнутую поверхность в направлении внешней нормали.

Поток вектора магнитной индукции через произвольную поверхность  $S$  равен

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS. \quad (1.45)$$

Если магнитное поле однородно ( $\vec{B} = \text{const}$ ), а поверхность  $S$  плоская, то магнитный поток равен

$$\Phi_m = BS \cos \alpha. \quad (1.46)$$

За единицу магнитного потока принимается магнитный поток сквозь плоскую поверхность единичной площади, расположенную перпендикулярно к однородному магнитному полю, индукция которого равна единице. В системе СИ единица магнитного потока называется **вебером** [Вб].

Магнитный поток через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, называется **потокосцеплением**  $\Psi$  этого контура (потокосцепленным с контуром). Если контур имеет  $N$  витков, то потокосцепление этого контура

$$\Psi = N\Phi_m, \quad (1.47)$$

где  $\Phi_m$  – поток, пронизывающий один виток контура.

В природе отсутствуют элементарные «магнитные заряды», аналогичные электрическим зарядам, поэтому линии индукции  $B$  магнитного поля не имеют ни начала, ни конца, т. е. магнитные силовые линии замкнуты. Следовательно, поток  $\Phi_m$  через любую замкнутую поверхность будет всегда равен нулю, так как число входящих линий равно числу выходящих силовых линий:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad \text{или} \quad \oint_S B_n dS = 0. \quad (1.48)$$

**Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной форме:** поток вектора магнитной индукции сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю.



Так как  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , то поток вектора  $\vec{H}$  через любую замкнутую поверхность также равен нулю:

$$\oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0 \text{ или } \oint_S H_n dS = 0. \quad (1.49)$$

Для записи теоремы Гаусса для магнитного поля в дифференциальной форме воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса  $\oint_S A_n dS = \int_V \text{div} \vec{A} dV$ :

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_V \text{div} \vec{B} dV = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{B} = 0. \quad (1.50)$$

Для напряженности магнитного поля получится аналогичное выражение:

$$\text{div} \vec{H} = 0. \quad (1.51)$$

Выражения (1.50) и (1.51) являются дифференциальной формой теоремы Гаусса.

### Контрольные вопросы

1. Что называется вектором магнитной индукции  $B$ ? Записать единицу измерения вектора магнитной индукции в системе СИ.
2. Сформулируйте правило правого винта (правило буравчика) для определения направления линий магнитной индукции  $B$ .
3. Сформулировать принцип суперпозиции для магнитного поля.
4. Записать и пояснить закон Био – Савара – Лапласа. Для чего используется закон Био – Савара – Лапласа?
5. Запишите и поясните формулы для расчета индукции магнитных полей прямого проводника с током бесконечной и конечной длины.
6. Магнитное поле движущегося заряда.
7. Что называют циркуляцией вектора магнитной индукции по заданному замкнутому контуру?
8. Запишите и сформулируйте закон полного тока для магнитного поля в вакууме в интегральной и дифференциальной формах.
9. Запишите и поясните формулы для расчета индукции магнитных полей соленоида и тороида.
10. Контур с током в магнитном поле. Момент сил, действующих на контур. Энергия контура с током в поле с индукцией  $B$ .
11. Поток вектора магнитной индукции. Записать и пояснить чему равен поток вектора магнитной индукции в случае однородного

магнитного поля. Записать единицу измерения магнитного потока в системе СИ.

12. Что такое потокосцепление?

13. Запишите и сформулируйте теорему Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах.

### **Задачи по теме «Магнитное поле в вакууме»**

1. По двум параллельным бесконечно длинным проводникам, которые находятся на расстоянии  $d = 5$  см, текут токи величиной  $I_1 = I_2 = 10$  А каждый. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке, которая находится на расстоянии  $r_1 = r_2 = 5$  см от каждого из проводников, когда токи текут: 1) в одном направлении; 2) в противоположных направлениях.

2. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке пересечения диагоналей прямоугольника со сторонами  $a = 8$  см и  $b = 12$  см, по которым течет ток силой  $I = 50$  А.

3. Найдите индукцию  $B$  магнитного поля в центре контура, имеющего вид прямоугольника, по которому течет ток силой  $I = 6$  А. Диагональ контура равна  $b = 14$  см, а угол между диагоналями  $\alpha = 30^\circ$ .

4. Круговой виток расположен относительно бесконечно длинного провода так, что его плоскость параллельна проводу. Сила тока в витке  $I_2 = 10$  А, а сила тока в проводе  $I_1 = 5$  А. Диаметр кругового витка  $D = 14$  см. Расстояние от центра витка до провода  $d = 20$  см. Определите магнитную индукцию  $B$  в центре витка.

5. Ток силой  $I = 50$  А течет по бесконечно длинному проводнику, согнутому под углом  $\alpha = 90^\circ$ . Найти магнитную индукцию  $B$  в точке, которая лежит на биссектрисе угла на расстоянии  $r = 20$  см от его вершины.

6. Определите магнитную индукцию  $B$  в точке пересечения высот равностороннего треугольника со стороной  $a = 20$  см, по которым течет ток силой  $I = 50$  А.

7. Два круговых витка с током, имеющие одинаковый радиус ( $R_1 = R_2$ ) и общий центр, расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях. Магнитная индукция результирующего поля в центре витков равна  $B = 0,2$  мТл. Магнитная индукция поля первого витка с током в этой же точке равна  $B_1 = 0,16$  мТл. Определите магнитную индукцию  $B_2$  поля второго витка в их центре и силу тока  $I_2$  в нем, если сила тока в первом витке равна  $I_1 = 10$  А.

8. Круговой виток и прямолинейный проводник с током находятся в одной плоскости (рис. 1.13). Расстояние от прямолинейного

проводника до центра витка равно  $d = 8$  см, радиус витка  $R = 4$  см, сила тока в витке равна  $I_1 = 15$  А, сила тока в проводнике  $I_2 = 20$  А. Найдите напряженность  $H$  и индукцию  $B$  магнитного поля в центре кругового витка. Как изменится индукция магнитного поля в той же точке, если направление тока в прямолинейном проводнике изменится на противоположное?

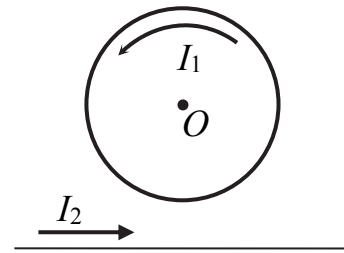


Рис. 1.13

9. В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток силой  $I = 10$  А, находится прямоугольная рамка так, что большие стороны ее длиной  $l = 5$  см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно ее ширине. Найдите магнитный поток через рамку, если она имеет  $N = 20$  витков.

10. По двум длинным прямым проводникам, расположенным параллельно на расстоянии  $r = 15$  см друг от друга, текут в противоположных направлениях токи  $I_1 = 10$  А и  $I_2 = 5$  А. Определите индукцию магнитного поля в точке, расположенной на расстоянии  $r_1 = 5$  см от первого проводника на продолжении отрезка прямой, соединяющей проводники.

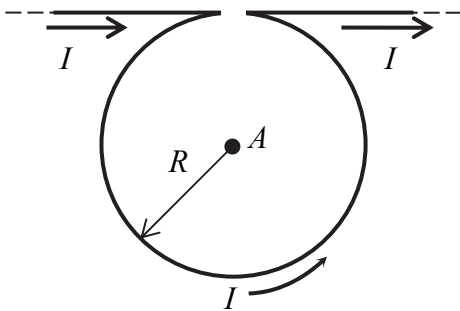


Рис. 1.14

11. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам, расстояние между которыми  $r = 15$  см, текут токи силой  $I_1 = 50$  А и  $I_2 = 70$  А в противоположных направлениях. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на расстояние  $r_1 = 20$  см от первого и  $r_2 = 30$  см от второго проводников.

12. Прямой бесконечный проводник имеет круглую петлю (см. рис. 1.14). Определите напряженность  $H$  магнитного поля в центре витка (точка  $A$ ), если диаметр петли  $R = 25$  см и по проводнику течет ток силой  $I = 5$  А.

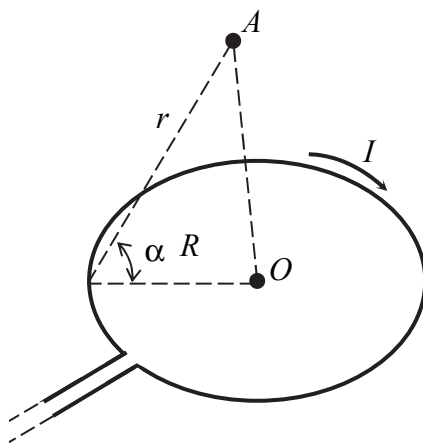


Рис. 1.15

13. По тонкому кольцу течет ток  $I = 60$  А. Определите напряженность  $H$  магнитного поля в точке  $A$ , равноудаленной от точек кольца на расстояние  $r = 10$  см (рис. 1.15). Угол  $\alpha = \pi / 3$ .

14. По трем длинным прямым проводам, расположенным в одной плоскости параллельно друг другу на расстоянии 3 см друг от друга, текут токи силой  $I_1 = I_2$  и  $I_3 = I_1 + I_2$ . Определить положение прямой, в каждой точке которой индукция магнитного поля, создаваемого токами, равна нулю.

15. Найти напряженность  $H$  магнитного поля, создаваемого отрезком прямолинейного проводника длиной  $l = 30$  см с током в точке, расположенной на перпендикуляре к середине этого отрезка на расстоянии  $a = 5$  см от него. По проводнику течет ток  $I = 20$  А.

## 2. Действие магнитного поля на проводник с током и движущуюся заряженную частицу

Сила, действующая на электрический заряд, зависит не только от того, где он находится, но и от того, с какой скоростью он движется. Каждая точка в пространстве характеризуется двумя векторными величинами, которые определяют силу, действующую на любой заряд. Во-первых, имеется электрическая сила, дающая ту часть силы, которая не зависит от движения заряда и описывается с помощью электрического поля. Во-вторых, есть еще добавочная компонента силы, называемая магнитной силой, которая зависит от скорости заряда. Эта магнитная сила имеет удивительное свойство: в любой данной точке пространства как направление, так и величина силы зависят от направления движения частицы; в каждый момент сила всегда перпендикулярна вектору скорости; кроме того, в любом месте сила всегда перпендикулярна определенному направлению в пространстве, и, наконец, величина силы пропорциональна компоненте скорости, перпендикулярной этому выделенному направлению. Все эти свойства можно описать, если ввести вектор магнитного поля, который определяет выделенное направление в пространстве и одновременно служит константой пропорциональности между силой и скоростью.

### 2.1. Сила Ампера

Действие магнитного поля на проводник с током опытным путем было установлено Г. Эрстедом и А. Ампером и детально исследовано А. Ампером. На основании опытных данных А. Ампер установил, что сила, с которой магнитное поле действует на элемент проводника с током, находящегося в магнитном поле, равна

$$d\vec{F}_A = I [d\vec{l} \times \vec{B}], \quad (2.1)$$

где  $d\vec{l}$  – вектор, совпадающий по направлению с током.

Модуль силы Ампера определяется как

$$dF_A = IBdl \sin \alpha, \quad (2.2)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$ .

Направление силы Ампера принято определять по **правилу левой руки**: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее вошел вектор магнитной индукции, а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый на  $90^\circ$  большой палец покажет направление силы Ампера, действующей со стороны поля.

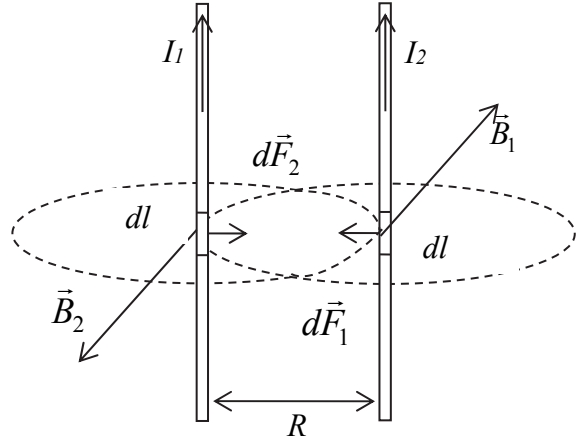


Рис. 2.1

Рассмотрим два бесконечных прямолинейных параллельных проводника с токами  $I_1$  и  $I_2$ , находящиеся на расстоянии  $R$  друг от друга (рис. 2.1). Проводник с током  $I_1$  создает

вокруг себя магнитное поле, которое действует на элемент проводника  $dl$  с током  $I_2$ . Направление вектора магнитной индукции данного поля определяется правилом правого винта и его модуль равен

$$B_1 = \mu\mu_0 \frac{I_1}{2\pi R}, \quad (2.3)$$

а модуль силы с учетом того, что  $\sin \alpha = 1$ , имеет вид  $dF_1 = I_2 B_1 dl$ .

Тогда сила взаимодействия двух проводников с током равна

$$\begin{aligned} dF_1 &= \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi R} dl \quad \text{и} \quad dF_2 = \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi R} dl \Rightarrow \\ \Rightarrow dF &= dF_1 = dF_2 = \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi R} dl. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Сила взаимодействия на единицу длины проводника в вакууме будет равна

$$\frac{dF}{dl} = \mu_0 \frac{2I_1 I_2}{4\pi R}. \quad (2.5)$$

При условии, что  $I_1 = I_2 = 1$  А и  $R = 1$  м получим, что  $\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7}$  Н/м.

Соотношение (2.5) лежит в основе определения единицы силы тока. За единицу силы тока – 1 ампер (А) принимается сила такого постоянного тока, при прохождении которого по двум параллельным бесконечно длинным проводникам очень малого сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, сила их магнитного взаимодействия равна  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

## 2.2. Контур с током в магнитном поле.

### Магнитный момент контура с током.

### Механический момент, действующий на контур с током в однородном магнитном поле

На практике для измерения индукции магнитного поля используется контур (замкнутый проводник) с током. Магнитное поле оказывает на нее ориентирующее действие. Рамке с током приписывают магнитный момент. Под магнитным моментом контура с током понимают векторную физическую величину, численно равную произведению силы тока, текущего в контуре, на его площадь:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (2.6)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор положительной нормали к поверхности рамки.

Направление магнитного момента совпадает с направлением положительной нормали, направление которой определяется правилом правого винта.

Рассмотрим прямоугольный контур  $1-2-3-4$  с током  $I$ , помещенный в магнитное поле индукцией  $\vec{B}$  (рис. 2.2). Силы  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_4$  (рис. 2.2, а), приложенные к проводникам  $2-3$  и  $4-1$ , численно равны

$$F_2 = F_4 = IBc \sin(90 - \alpha) = IBc \cos \alpha. \quad (2.7)$$

Эти силы направлены вдоль вертикальной оси рамки в противоположные стороны и уравнивают друг друга. На рис. 2.2, б показан вид контура сверху.

Силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_3$ , действующие на прямолинейные проводники  $1-2$  и  $3-4$ , по закону Ампера численно равны

$$F_1 = F_3 = IBd. \quad (2.8)$$

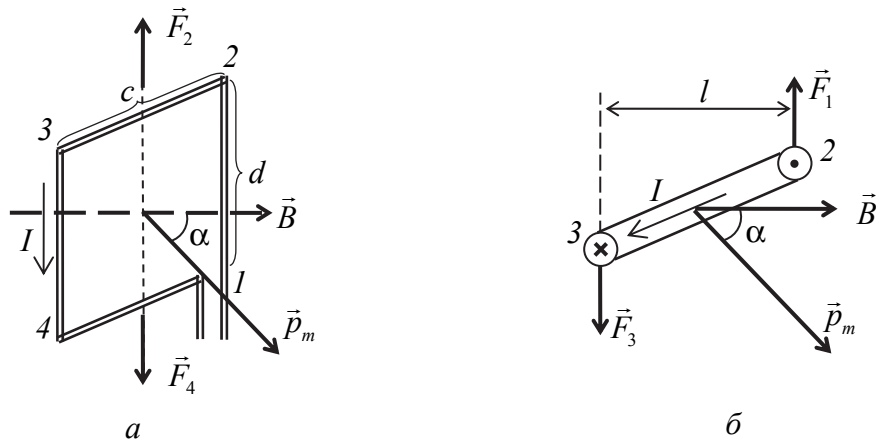


Рис. 2.2

Эти силы образуют пару сил, вращающий момент которой равен произведению модуля одной силы на плечо пары  $l$ .

Результирующий вращающий момент  $M$ , действующий на контур, равен моменту пары сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_3$ :

$$M = F_1 l = F_3 l, \quad (2.9)$$

где  $l = c \sin \alpha$  – плечо пары сил.

Подставляя (2.8) в (2.9), получим

$$M = IdcB \sin \alpha. \quad (2.10)$$

Так как  $dc = S$  – площадь контура и  $IS = p_m$  – магнитный момент контура с током, а  $\alpha$  – угол между  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ , то соотношение (2.10) можно переписать в виде

$$M = p_m B \sin \alpha. \quad (2.11)$$

В векторном виде соотношение (2.11) имеет вид

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (2.12)$$

Формула (2.12) справедлива для плоского контура произвольной конфигурации. Согласно ей, магнитную индукцию можно определить как отношение максимального вращающего момента, действующего на рамку с током, к ее магнитному моменту

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m} = \frac{M_{\max}}{IS}. \quad (2.13)$$

Силы магнитного поля стремятся расположить контур так, чтобы его магнитный момент  $p_m$  был параллелен вектору  $\vec{B}$  (т. е. когда  $M = p_m B \sin 0^\circ = 0$ ).



Для того чтобы увеличить угол между векторами  $p_m$  и  $B$  на  $d\alpha$ , нужно совершить работу против сил поля:

$$\delta A = Md\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha. \quad (2.14)$$

Поворачиваясь на угол  $d\alpha$  при возвращении в исходное положение, контур с током может совершить такую же работу. Следовательно, работа равна уменьшению потенциальной энергии  $\Pi$ , которой обладает контур с током в магнитном поле  $B$ :

$$\delta A = -d\Pi. \quad (2.15)$$

Выбирая нулевой уровень энергии  $\Pi$  при  $\alpha = \pi/2$ , проинтегрируем это выражение по  $\alpha$  в пределах от  $\alpha$  до  $\pi/2$ . В результате получим

$$\Pi = - \int_{\alpha}^{\pi/2} \delta A = - \int_{\alpha}^{\pi/2} Md\alpha = - \int_{\alpha}^{\pi/2} p_m B \sin \alpha d\alpha = -p_m B \cos \alpha,$$

или

$$\Pi = -\vec{p}_m \vec{B}. \quad (2.16)$$

Формулы (2.16) определяют энергию контура с током в поле с индукцией  $B$ .

### 2.3. Работа перемещения проводника с током в магнитном поле

Рассмотрим проводник длиной  $l$  с током  $I$ , находящийся в однородном внешнем магнитном поле. Поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка «от нас» (рис. 2.3). Проводник не закреплен и под действием силы Ампера будет свободно перемещаться из положения 1 в положение 2 параллельно самому себе на отрезок  $dx$ . Элементарная работа, совершаемая магнитным полем, равна

$$dA = Fdx = IBldx = IBdS = Id\Phi_m, \quad (2.17)$$

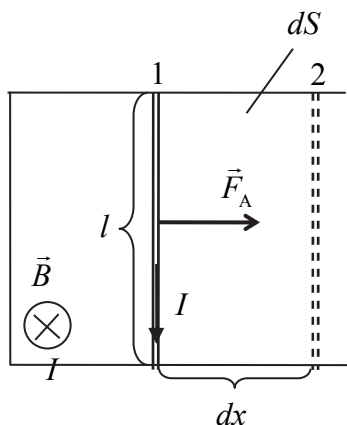


Рис. 2.3

где  $ldx = dS$  – площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитное поле;  $BdS = d\Phi_m$  – поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь.

Если сила тока  $I$  в проводнике постоянна, то после интегрирования (2.17) имеем

$$A = I\Phi_m. \quad (2.18)$$

Работа, совершаемая силами Ампера при перемещении в магнитном поле проводника с постоянным током, равна произведению силы тока на величину магнитного потока сквозь поверхность, которую пересекает проводник при своем движении.

Определим величину работы сил Ампера при перемещении замкнутого контура  $ABCD$  в магнитном поле с постоянным током  $I$ . Поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка (рис. 2.4) – за чертеж. Предположим, что контур  $ABCD$  перемещается в плоскости чертежа и в результате бесконечно малого перемещения займет положение  $A'B'C'D'$ . Контур  $ABCD$  разобьем на два соединенных своими концами проводника  $ABC$  и  $CDA$ . Работа, совершаемая силами Ампера при рассматриваемом перемещении контура в магнитном поле, равна алгебраической сумме работ по перемещению проводников  $ABC$  и  $CDA$ :

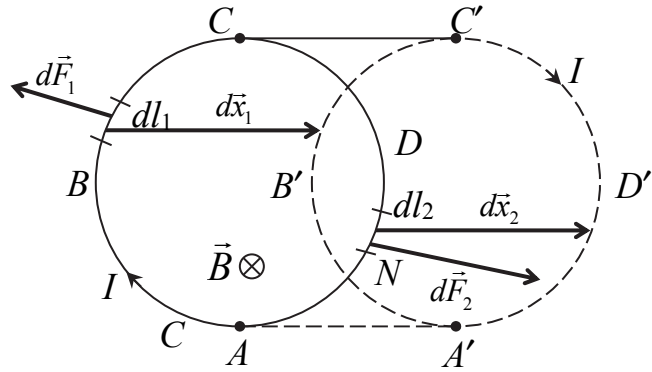


Рис. 2.4

$$dA = dA_1 + dA_2. \quad (2.19)$$

При перемещении проводника  $CDA$  контура силы Ампера направлены в сторону перемещения и образуют с направлением перемещения острые углы, поэтому совершаемая ими работа  $dA_2 > 0$ . Эта работа равна произведению силы тока в контуре на пересеченный проводником  $CDA$  при своем движении поток  $d\Phi_{m2}$ , следовательно

$$dA_2 = Id\Phi_{m2}. \quad (2.20)$$

Силы, действующие на проводник  $ABC$  контура, направлены против перемещения и образуют с направлением перемещения тупые углы, поэтому  $dA_1 < 0$ . Проводник  $ABC$  пересекает при своем движении поток  $d\Phi_{m1}$ , следовательно

$$dA_1 = -Id\Phi_{m1}. \quad (2.21)$$

Подставив (2.20) и (2.21) в (2.19), получим

$$dA = dA_1 + dA_2 = -Id\Phi_{m1} + Id\Phi_{m2} = I(d\Phi_{m2} - d\Phi_{m1}). \quad (2.22)$$

Так как  $d\Phi_{m2} - d\Phi_{m1} = d\Phi_m$  – изменение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром, при его перемещении из положения  $ABCD$  в положение  $A'B'C'D'$ , то выражение для элементарной работы  $dA$  равно

$$dA = Id\Phi_m, \quad (2.23)$$

или после интегрирования

$$A = I\Delta\Phi_m. \quad (2.24)$$

Таким образом, *работа, совершаемая силами Ампера при перемещении в магнитном поле замкнутого контура с постоянным током, равна произведению силы тока на изменение магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром.*

## 2.4. Сила Лоренца. Масс-спектрометрия

В общем случае на движущуюся заряженную частицу действуют электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$  и магнитное поле индукцией  $\vec{B}$ . Результирующая сила  $\vec{F}$ , действующая на движущуюся со скоростью  $\vec{v}$  заряженную  $q$  частицу, называется *силой Лоренца*:

$$\vec{F}_л = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.25)$$

В случае, если силой, действующей со стороны электрического поля, можно пренебречь, то сила Лоренца

$$\vec{F}_л = q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (2.26)$$

Модуль силы Лоренца равен

$$F_л = qvB \sin \alpha, \quad (2.27)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Из соотношения (2.26) следует, что сила Лоренца всегда направлена *перпендикулярно* к направлению вектора скорости заряженной частицы и поэтому играет роль *центробежной силы*, которая *не совершает работы*. Эта сила изменяет только направление скорости движения частицы в магнитном поле. Абсолютная величина скорости частицы и его кинетическая энергия при движении в магнитном поле *не изменяются*.

Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы. Поэтому она изменяет только направление скорости, не изменяя ее модуля, и следовательно, она не совершает работы. Так как магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем

заряженной частицей, то кинетическая энергия этой частицы при движении в магнитном поле не изменяется.

Если магнитное поле однородно ( $\vec{B} = \text{const}$ ) и на частицы не действует электрическое поле (или его действием можно пренебречь), то возможны три случая движения заряженных частиц в этом поле.

1. Заряженная частица движется в магнитном поле вдоль линий магнитной индукции ( $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi$ ). Сила Лоренца  $F_{\perp}$  равна нулю. Магнитное поле на частицу не действует, и она движется равномерно и прямолинейно.

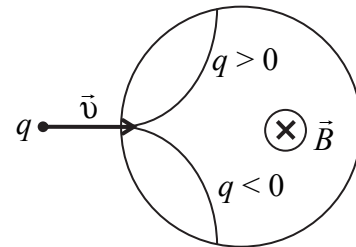


Рис. 2.5

2. Заряженная частица движется в магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции (угол  $\alpha = \pi/2$ ). Сила Лоренца  $F = qBv$  постоянна по модулю и нормальна к траектории частицы. Частица будет двигаться по окружности с нормальным ускорением  $a_n = v^2 / R$  (рис. 2.5). Из второго закона Ньютона выразим радиус окружности

$$qBv = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}, \quad (2.28)$$

а период вращения

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (2.29)$$

3. Заряженная частица движется под углом к линиям магнитной индукции. Движение частицы можно представить в виде суммы двух движений: а) равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью  $\vec{v}_{\parallel}$ ; б) равномерного движения по окружности в плоскости, перпендикулярной полю  $\vec{v}_{\perp}$ .

Суммарное движение будет движением по винтовой траектории, ось которой параллельна магнитному полю (рис. 2.6). Из рисунка видно, что

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v \sin \alpha. \quad (2.30)$$

Радиус винтовой линии равен

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}. \quad (2.31)$$

Период вращения частицы

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (2.32)$$

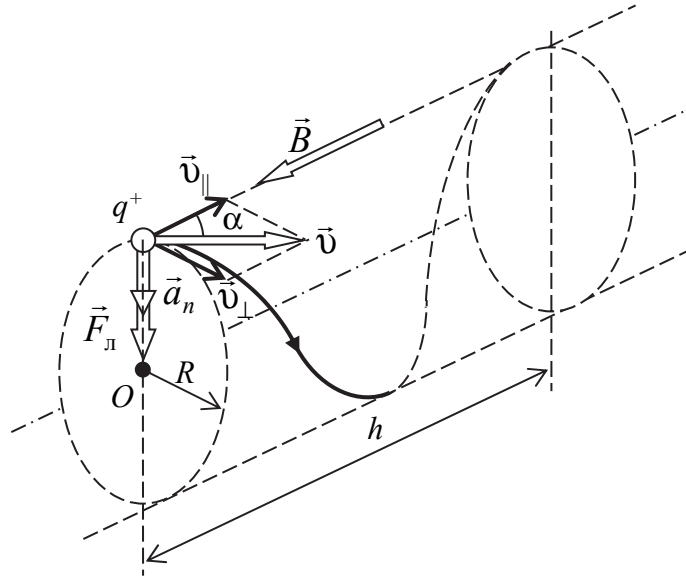


Рис. 2.6

Шаг винтовой линии (расстояние, которое проходит частица вдоль оси винтовой линии за время, равное периоду вращения)

$$h = v_{\parallel} T = v T \cos \alpha = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}. \quad (2.33)$$

Если магнитное поле неоднородно и заряженная частица движется под углом к линиям магнитного поля в направлении возрастания поля, то радиус и шаг спирали уменьшаются с ростом индукции магнитного поля. На этом основана фокусировка пучка заряженных частиц магнитным полем.

Закономерности движения заряженных частиц в магнитных и электрических полях легли в основу масс-спектрометрии, метода определения массы ионов. На рис. 2.7 представлен масс-спектрограф Бейнбриджа. В нем пучок ионов проходит сначала через так называемый селектор (или фильтр) скоростей, который выделяет из пучка ионы с определенным значением скорости. В селекторе ионы подвергаются одновременному воздействию взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей, отклоняющих ионы в противоположные стороны. Через выходную щель селектора проходят только те ионы, для которых действия электрического и магнитного полей компенсируют друг друга. Это происходит при условии, что  $qE = qvB$ . Следовательно, скорости вышедших из селектора ионов, независимо от их массы и заряда, имеют одинаковое значение, равное  $v = E / B$ .

Выйдя из селектора, ионы попадают в область перпендикулярного к их скорости однородного магнитного поля с индукцией  $B_1$ . В этом поле они движутся по окружностям, радиусы которых зависят от  $q / m$ , согласно формуле

$$R = \frac{m\nu}{qB_1}. \quad (2.34)$$

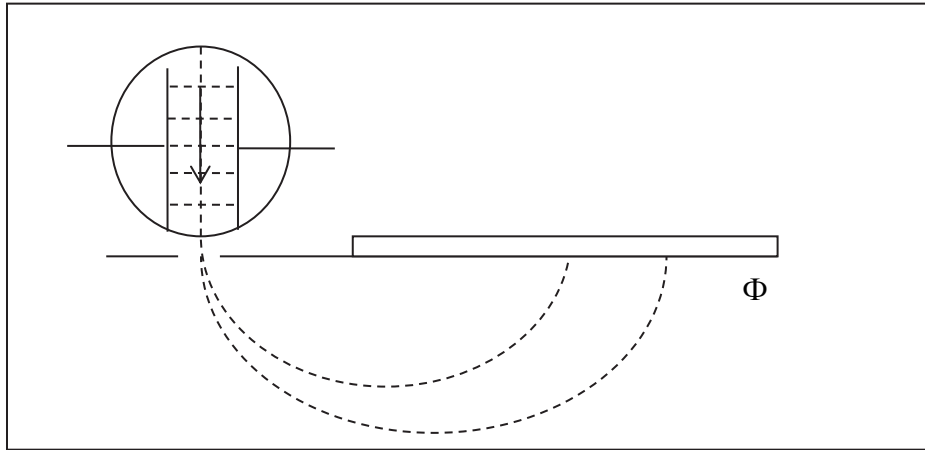


Рис. 2.7

Описав половину окружности, ионы попадают на фотопластинку на расстояниях от щели, равных  $2R$ . Следовательно, ионы каждого сорта (определяемого значением  $q / m$ ) оставляют на пластинке след в виде узкой полоски. Зная параметры прибора, можно вычислить удельные заряды ионов. Поскольку заряды ионов являются целыми кратными элементарного заряда  $e$ , то по найденным значениям  $q / m$  можно определить массы ионов. В настоящее время имеется много типов усовершенствованных масс-спектрографов. Созданы также приборы, в которых ионы регистрируются не фотопластинкой, а с помощью электрического устройства. Они получили название масс-спектрометров.

## 2.5. Эффект Холла

Американский физик Э. Холл обнаружил, что в пластинке металла (или в полупроводника) с током  $I$ , помещенной в магнитное поле  $\vec{B}$ , возникает электрическое поле в направлении, перпендикулярном направлению тока и вектору  $\vec{B}$ , т. е. на противоположных гранях пластинки между точками  $A$  и  $C$  (рис. 2.8) возникает разность потенциалов. Явление возникновения разности потенциалов  $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_C$  в этом случае носит название *эффекта Холла*.

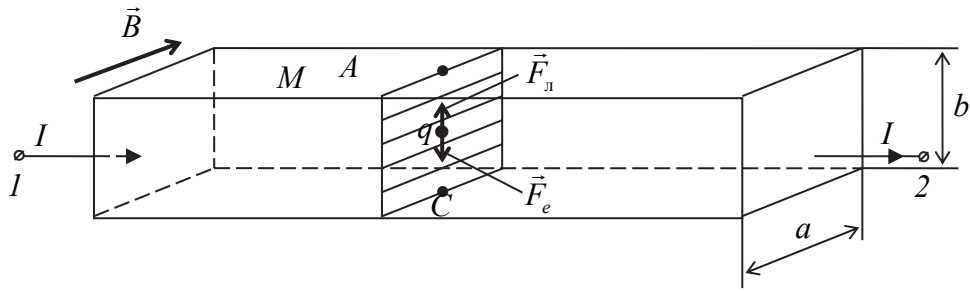


Рис. 2.8

Рассмотрим металлическую пластину толщиной  $a$  и высотой  $b$ , по которой проходит ток  $I$ . Она помещена в магнитное поле так, чтобы ее горизонтальные грани были параллельны плоскости, образованной векторами плотности тока  $j$  и вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ . В отсутствие магнитного поля разность потенциалов между точками  $A$  и  $C$  равна нулю ( $\varphi_A = \varphi_C$ ), поскольку точки  $A$  и  $C$  лежат на эквипотенциальной поверхности, перпендикулярной вектору  $\vec{E}$ . При наличии магнитного поля возникает разность потенциалов  $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_C$ .

$$\Delta\varphi_H = RbjB, \quad (2.35)$$

где  $R$  – постоянная Холла.

Классическая электронная теория позволяет достаточно просто объяснить возникновение холловской разности потенциалов  $\Delta\varphi_H$ . Пусть сила тока  $I$  обусловлена упорядоченным движением свободных носителей заряда  $q$ , концентрация которых  $n$ , средняя скорость дрейфа  $u$ . Тогда плотность тока

$$j = qnu. \quad (2.36)$$

При включении магнитного поля на каждый заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $u$ , будет действовать сила Лоренца

$$F_l = quB, \quad (2.37)$$

которая вызовет отклонение положительных зарядов ( $q > 0$ ) к одной грани пластинки, а отрицательных зарядов ( $q < 0$ ) – к другой грани. В результате у верхней грани образуется избыточный положительный заряд, а вблизи нижней грани – отрицательный. Появятся поперечное электрическое поле  $E^*$  и соответствующая ему электрическая сила:

$$F_{эл} = qE^* = q\frac{\Delta\varphi}{b}. \quad (2.38)$$



Когда напряженность этого поперечного поля достигнет такой величины, что его действие на заряды будет уравнивать силу Лоренца, установится стационарное распределение зарядов в поперечном направлении.

Тогда

$$F_{\text{эл}} = F_{\text{л}} \Rightarrow q \frac{\Delta\varphi_H}{b} = qVb \Rightarrow \Delta\varphi_H = Vb \Rightarrow \Delta\varphi_H = \frac{1}{qn} Bbj, \quad (2.39)$$

Сравнивая (2.35) и (2.39) получаем, что постоянная Холла равна

$$R = \frac{1}{qn}. \quad (2.40)$$

Поскольку концентрация  $n$  – положительная величина, знак постоянной  $R$  определяется знаком заряда  $q$  свободных носителей заряда в материале пластинки. Если постоянную Холла измерить на опыте, то по формуле (2.40) можно рассчитать концентрацию носителей заряда. Когда электропроводность материала определяется зарядами обоих знаков, то по знаку постоянной Холла можно судить о том, какие заряды вносят преобладающий вклад в удельную электрическую проводимость  $\gamma$  исследуемого проводника. Для полупроводников знак постоянной Холла определяет тип проводимости ( $R < 0$  – *электронная*,  $R > 0$  – *дырочная*).

Определение значения постоянной Холла для электронных проводников позволяет вычислить среднюю длину свободного пробега электронов  $\bar{\lambda}$ . Эффект Холла также широко используется для измерения индукции  $B$  магнитных полей.

### Контрольные вопросы

1. Запишите и поясните формулу для расчета силы Ампера в векторной форме. Чему равен модуль силы Ампера? Запишите и поясните формулу.
2. Как определить направление действия силы Ампера? Сформулируйте правило.
3. Контур с током в магнитном поле. Магнитный момент контура с током. Механический момент, действующий на контур с током в однородном магнитном поле.
4. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.
5. Запишите и поясните формулу для расчета силы Лоренца в векторной форме.

6. Чему равен модуль силы Лоренца? Запишите и поясните формулу.
7. Как определить направление действия силы Лоренца? Сформулируйте правило.
8. Чему равна сила Лоренца, если заряженная частица движется параллельно магнитному полю?
9. Чему равна сила Лоренца, если заряженная частица движется в магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции?
10. Чему равен радиус кривизны и период вращения частицы траектории движения частицы, если заряженная частица движется в магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции?
11. Как движется заряженная частица, если она влетает в магнитное поле под углом к линиям магнитной индукции?
12. Чему равны радиус и шаг винтовой линии, если заряженная частица влетает в магнитное поле под углом к линиям магнитной индукции?
13. Чему равен период вращения заряженной частицы, если она влетает в магнитное поле под углом к линиям магнитной индукции?
14. Объяснить устройство и принцип работы масс-спектрографа Бейнбриджа.
15. В чем суть эффекта Холла? Чему равна холловская разность потенциалов и постоянная Холла? Что можно рассчитать, измерив постоянную Холла?

### **Задачи по теме**

#### **«Действие магнитного поля на проводник с током и движущуюся заряженную частицу»**

1. Два прямолинейных длинных параллельных проводника, по которым текут токи в одном направлении силой  $I_1 = 7$  А и  $I_2 = 14$  А, находятся на расстоянии  $r_1 = 10$  см друг от друга. Какую работу  $A$ , отнесенную к длине проводника, надо совершить, чтобы увеличить расстояние между проводниками до  $r_2 = 0,2$  м.
2. Плоская катушка, которая имеет  $N = 20$  витков радиусом  $R = 5$  см, находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл. Плоскость катушки образует угол  $\alpha = 60^\circ$  с направлением поля. По виткам катушки течет ток силой  $I = 4$  А. Найти вращательный момент  $M$ , который действует на катушку.
3. Ток, текущий в рамке, содержащей  $N$  витков, создает магнитное поле. В центре рамки индукция поля  $B = 0,126$  Тл. Найти магнитный момент  $p_m$  рамки, если ее радиус  $R = 10$  см.

4. В однородном магнитном поле, индукция которого  $B = 1$  Тл, движется равномерно прямой проводник длиной  $l = 20$  см, по которому течет ток силой  $I = 2$  А. Скорость проводника равна  $v = 15$  см/с и направлена перпендикулярно вектору индукции. Найти работу  $A$  перемещения проводника за  $t = 5$  с.

5. Плоский контур с током  $I = 5$  А свободно установился в однородном магнитном поле ( $B = 0,4$  Тл). Площадь контура  $S = 200$  см<sup>2</sup>. Поддерживая ток в контуре неизменным, его повернули относительно оси, лежащей в плоскости контура, на угол  $\alpha = 40^\circ$ . Определить совершенную при этом работу  $A$ .

6. Виток, в котором поддерживается постоянная сила тока  $I = 60$  А, свободно установился в однородном магнитном поле ( $B = 20$  мТл). Диаметр витка  $d = 10$  см. Какую работу  $A$  нужно совершить для того, чтобы повернуть виток относительно оси, совпадающей с диаметром, на угол  $\alpha = \pi/3$ ?

7. В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции расположен плоский контур площадью  $S = 100$  см<sup>2</sup>. Поддерживая в контуре постоянную силу тока  $I = 50$  А, его переместили из поля в область пространства, в которой поле отсутствует. Определить магнитную индукцию  $B$  поля, если при перемещении контура была совершена работа  $A = 0,4$  Дж.

8. В скрещенные под прямым углом однородные магнитное ( $H = 1$  МА/м) и электрическое ( $E = 50$  кВ/м) поля влетел ион. При какой скорости  $v$  иона (по модулю и направлению) он будет двигаться в скрещенных полях прямолинейно?

9. Протон ( $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл;  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг) движется по окружности радиусом  $R = 0,5$  см с линейной скоростью  $v = 10^6$  м/с. Определить магнитный момент  $p_m$ , создаваемый эквивалентным круговым током.

10. Ион, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $U = 645$  В, влетел в скрещенные под прямым углом однородные магнитное ( $B = 1,5$  мТл) и электрическое ( $E = 200$  В/м) поля. Определить отношение заряда иона к его массе, если ион в этих полях движется прямолинейно.

11. Два иона разных масс с одинаковыми зарядами влетели в однородное магнитное поле, стали двигаться по окружностям радиусами  $R_1 = 3$  см и  $R_2 = 1,73$  см. Определить отношение масс ионов, если они прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов.

12. Частица, которая несет один элементарный заряд и имеет кинетическую энергию  $W = 2$  кэВ, движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом  $R = 4$  мм. Определить силу Лоренца, которая действует на частицу со стороны магнитного поля.

13. Электрон ( $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл;  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг) разгоняется в вакууме из состояния покоя под действием электрического поля и влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно к линиям магнитной индукции. Определить ускоряющую разность потенциалов  $U$  электрического поля и индукцию магнитного поля, если электрон описывает окружность радиусом  $R = 7,58 \cdot 10^{-3}$  м за  $t = 5,96 \cdot 10^{-10}$  с.

14. Электрон влетает в однородное магнитное поле под углом  $\alpha = 45^\circ$  к линиям магнитной индукции и движется по винтовой линии с шагом  $h = 20$  мм. Магнитная индукция поля  $B = 1 \cdot 10^{-2}$  Тл. Определите импульс  $p$  частицы.

15. Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов  $U = 800$  В и, влетев в однородное магнитное поле  $B = 47$  мТл, стал двигаться по винтовой линии с шагом  $h = 6$  см. Определить радиус  $R$  винтовой линии.

16. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов  $U = 100$  В и, влетев в однородное магнитное поле ( $B = 0,1$  Тл), стала двигаться по винтовой линии с шагом  $h = 6,5$  см и радиусом  $R = 1$  см. Определить отношение заряда частицы к ее массе.

17. Протон ( $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл;  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг) прошел ускоряющую разность потенциалов  $U = 300$  В и влетел в однородное магнитное поле ( $B = 20$  мТл) под углом  $\alpha = 30^\circ$  к линиям магнитной индукции. Определить шаг  $h$  и радиус  $R$  винтовой линии, по которой будет двигаться протон в магнитном поле.

18.  $\alpha$ -Частица, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $U$ , стала двигаться в однородном магнитном поле ( $B = 50$  мТл) по винтовой линии с шагом  $h = 5$  см и радиусом  $R = 1$  см. Определить ускоряющую разность потенциалов, которую прошла  $\alpha$ -частица ( $q = 3,2 \cdot 10^{-19}$  Кл;  $m = 6,64 \cdot 10^{-27}$  кг).

19. Через сечение медной пластинки толщиной  $a = 0,5$  мм и высотой  $b = 0,5$  мм пропускается электрический ток  $I = 20$  А. При помещении пластинки в магнитное поле ( $B = 1$  Тл), перпендикулярное к ребру  $b$  и направлению тока, возникает поперечная разность потенциалов  $U = 3,1$  мкВ. Найти концентрацию  $n$  электронов проводимости в меди и их скорость  $v$  при этих условиях.

20. Через сечение алюминиевой пластинки толщиной  $a = 0,5$  мм пропускается электрический ток  $I = 5$  А. Пластинка помещена в магнитное поле ( $B = 0,7$  Тл), перпендикулярное к ребру  $b$  и направлению тока. Найти возникающую поперечную разность потенциалов  $U$ . Концентрацию  $n$  электронов проводимости в алюминии считать равной концентрации атомов.

### 3. Явление электромагнитной индукции

Электромагнитная индукция (лат. *inductio* – наведение) – явление порождения вихревого электрического поля переменным магнитным полем. Если внести в переменное магнитное поле замкнутый проводник, то в нем появится электрический ток. Появление этого тока называют индукцией тока, а сам ток – **индукционным**. Принцип получения переменного тока используется в индукционных генераторах, вырабатывающих электрическую энергию на тепловых или гидроэлектростанциях. Сопротивление вращению ротора генератора, возникающее при взаимодействии индукционного тока с магнитным полем, преодолевается за счет работы паровой или гидротурбины, вращающей ротор. Такие генераторы преобразуют механическую энергию в энергию электрического тока.

#### 3.1. опыты Фарадея. Закон электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле

Явление электромагнитной индукции было открыто Фарадеем в 1831 г. и заключается в следующем: *во всяком замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции через площадь, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток. Этот ток называется индукционным.* Рассмотрим некоторые опыты, на основании которых и было открыто данное явление.

В первом опыте (рис. 3.1, а), если в катушку, замкнутую на гальванометр, вдвигать или выдвигать постоянный магнит, то при его движении наблюдается отклонение влево или вправо стрелки гальванометра, т. е. возникает индукционный ток. Причем следует отметить, что отклонения стрелки гальванометра тем больше, чем больше скорость движения магнита относительно катушки.

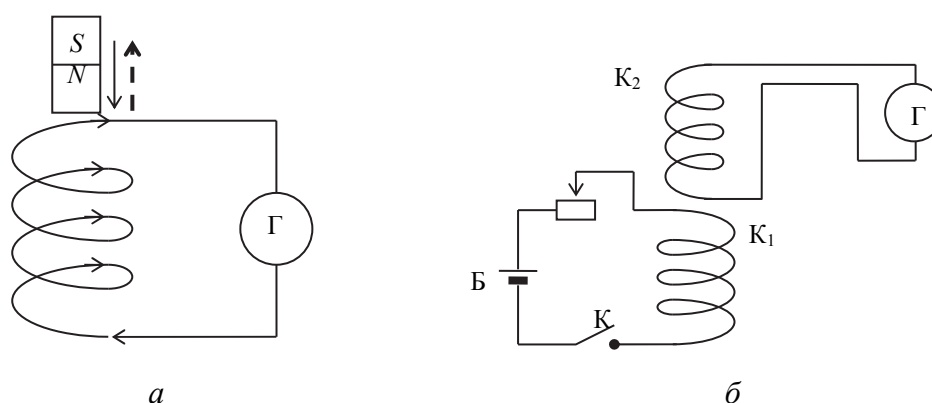


Рис. 3.1

При изменении полюсов магнита направление отклонения стрелки изменится. Индукционный ток возникает в катушке и в том случае, если постоянный магнит неподвижен, а катушка движется. Во втором опыте (рис. 3.1, б) используют две катушки ( $K_1$  и  $K_2$ ), которые могут быть вставлены одна в другую. Катушка  $K_1$  подключена через реостат и ключ к источнику электроэнергии, а катушка  $K_2$  подсоединена к гальванометру. Стрелка гальванометра будет отклоняться при замыкании или размыкании цепи с катушкой  $K_1$  в моменты увеличения или уменьшения электрического тока в цепи, а также при перемещении катушек относительно друг друга. Направления отклонений стрелки гальванометра влево или вправо определяются увеличением и уменьшением электрического тока, его включением и выключением, а также сближением или удалением друг от друга катушек.

На основании опытов М. Фарадей пришел к выводу, что индукционный ток в замкнутом контуре возникает всегда, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции, а величина индукционного тока определяется *скоростью* изменения потока магнитной индукции и не зависит от способа его изменения. При этом ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi_m}{dt} \text{ – закон Фарадея.} \quad (3.1)$$

Это уравнение справедливо независимо от того, чем вызвано изменение потока индукции через контур: изменением его формы, его поворотом, перемещением в неоднородном поле или изменением со временем магнитной индукции самого поля.

Русский физик Ленц Э. Х., который исследовал взаимосвязь направления индукционного тока и причины, вызывающие ток, в 1833 г. установил закономерность, называемую *правилом Ленца*: *при всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную замкнутым контуром, в последнем возникает индукционный ток, который имеет такое направление, что его собственное магнитное поле препятствует изменению внешнего магнитного потока, вызывающего этот индукционный ток.*

В 1845–1847 гг. Нейман создал теорию электромагнитной индукции и получил математическое выражение для закона, который объединил закон Фарадея и правило Ленца – был назван законом Фарадея – Ленца:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (3.2)$$



ЭДС индукции в проводящем контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

Рассмотрим контур, в котором индуцируется ЭДС, состоящий из  $N$  витков. Поскольку витки соединяются последовательно, то ЭДС, возбуждаемые в каждом витке, будут складываться.

Поэтому

$$\mathcal{E}_i = -\sum_{k=1}^N \frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \Phi_m. \quad (3.3)$$

Величину  $\Psi = \sum_{k=1}^N \Phi_{mi} = N \cdot \Phi_m$  называют **потокосцеплением**.

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -N \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) выражает закон электромагнитной индукции для контура из  $N$  витков.

ЭДС электромагнитной индукции в контуре условно считают положительной, если магнитный момент  $\vec{p}_m$  соответствующего ей индукционного тока образует острый угол с линиями магнитной индукции того поля, которое возбуждает этот ток. На рис. 3.2, а  $\mathcal{E}_i < 0$ , а на рис. 3.2, б  $\mathcal{E}_i > 0$ .

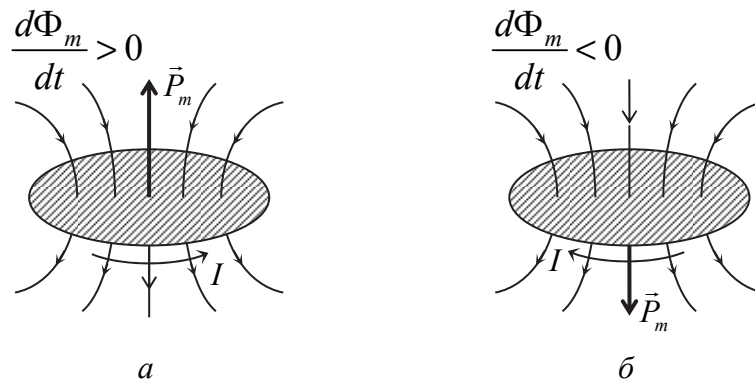


Рис. 3.2

Хотя величина ЭДС индукции и не зависит от способа изменения магнитного потока, однако механизм возникновения ее при этом оказывается разным. Обратимся сначала к случаю, когда поток изменяется вследствие движения проводящего контура (или изменения его геометрии) в постоянном магнитном поле ( $\partial B / \partial t = 0$ ). Здесь роль сторонних сил, разделявших разноименные заряды в проводнике, играет



составляющая силы Лоренца, направленная параллельно участкам (или одному участку) контура. Если неподвижный проводник находится в изменяющемся со временем поле ( $\partial B / \partial t \neq 0$ ), то механизм возникновения ЭДС оказывается другим. Изменяющееся магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле, под действием которого и происходит разделение разноименных носителей заряда в проводнике.

### 3.2. Токи Фуко

Если объемный проводник поместить в изменяющееся во времени магнитное поле  $B(t)$ , то в его объеме возникнут индукционные токи, которые будут течь по некоторым замкнутым «траекториям», охватывающим линии  $B$ . Такие токи называются **вихревыми токами** или **токами Фуко**. Французский физик Фуко Л. впервые заметил, что сердечники электрических машин нагреваются, если их пронизывает изменяющееся во времени магнитное поле.

Силу тока и распределение линий вихревых токов в объеме массивного проводника рассчитать достаточно трудно. Плотность вихревых токов зависит от удельного сопротивления материала проводника и скорости изменения внешнего магнитного поля.

Вихревые токи вызывают нагревание сердечников трансформаторов и металлических частей электрических машин. Для снижения потерь электрической энергии из-за возникновения вихревых токов сердечники трансформаторов изготавливают не из сплошного куска ферромагнетика, а из отдельных металлических пластин, отделенных друг от друга диэлектрической прослойкой. Причем плоскости пластин располагаются так, чтобы они были перпендикулярны направлению токов Фуко. Этот технический прием значительно повышает сопротивление сердечника по отношению к вихревым токам и, что очень важно, практически не влияет на его магнитные свойства. Электрическое сопротивление сердечников повышается, если они изготовлены не из металлов, а из магнитодиэлектриков – спрессованных под большим давлением смесей порошков ферромагнетиков и диэлектриков. Высокое удельное сопротивление имеют сердечники из *ферритов*, состоящих из полупроводниковых ферромагнитных материалов с удельным сопротивлением, которое в миллиарды раз превышает удельное сопротивление обычных ферромагнитных веществ.

Если в проводнике, поперечное сечение которого не изменяется, протекает постоянный ток, то плотность тока одинакова в разных точках сечения этого проводника. В случае переменного тока магнитное

поле внутри проводника изменяется, и в нем возникают вихревые токи. Эти токи направлены так, что противодействуют изменению основного тока внутри проводника и вблизи поверхности проводника способствуют его изменению. Таким образом, в случае переменного тока сопротивление внутренней части проводника будет больше, чем внешней части. Плотность переменного тока максимальна у поверхности проводника и минимальна на его оси. Такое явление получило название *скин-эффекта* (или *поверхностного эффекта*). Для токов высокой частоты применяют проводники трубчатой формы, так как внутренняя часть проводников не играет никакой роли.

Скин-эффект используется для поверхностной закалки различных деталей машин, так как при нагревании сплошных проводников токами высокой частоты практически вся теплота выделяется в поверхностном слое. При этом обеспечивается износостойкость детали.

Вихревые токи широко используются для плавки металлов в индукционных печах. В этом случае они должны быть как можно большими, так как, согласно закону Джоуля – Ленца, количество теплоты, выделившейся в проводнике  $R$ , пропорционально квадрату силы тока. Для увеличения вихревых токов в индукционных печах применяются токи высокой частоты, которые создают быстро изменяющееся электромагнитное поле, что, в свою очередь, приводит к увеличению индуцированной ими ЭДС.

### 3.3. Явление самоиндукции. Индуктивность

Если в некотором замкнутом контуре течет непостоянный ток, то магнитное поле, создаваемое этим током, также непостоянно. Следовательно, меняется поток магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром самого этого тока. Изменение потока магнитной индукции поведет к возникновению в контуре ЭДС. Таким образом, всякое изменение тока в контуре влечет возникновение ЭДС индукции в этом же самом контуре. Данное явление носит название *явления самоиндукции*.

Из закона Био – Савара – Лапласа следует, что магнитная индукция  $B$  пропорциональна силе тока, которая возбуждает поле. Тогда сила тока  $I$  в контуре и полный магнитный поток  $\Psi_c$  через поверхность, ограниченную контуром, пропорциональны друг другу.

Магнитный поток собственного поля  $\Psi_c$ , пронизывающий площадь, ограниченную контуром тока, равен

$$\Psi_c = LI, \quad (3.5)$$

где коэффициент пропорциональности  $L$  называется *индуктивностью контура*.

Единицей индуктивности служит генри (Гн); 1 Гн – индуктивность такого контура, в котором при силе тока 1 А возникает магнитный поток в 1 Вб.

Как показывает опыт, индуктивность контура зависит от геометрической формы контура и его размеров, его ориентации в пространстве, а также от магнитной проницаемости среды  $\mu$ .

Например, найдем индуктивность соленоида. Возьмем соленоид, общее число витков которого равно  $N$ , сечение витка  $S$ , длина соленоида  $l$ . Пусть полость соленоида заполнена средой с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Будем считать соленоид настолько длинным, что напряженность поля  $B$  внутри его равна  $B = \mu\mu_0 \frac{N}{l} I$ .

Магнитный поток через каждый виток равен  $\Phi_m = BS$ , а поток через все  $N$  витков соленоида (потокосцепление) будет

$$\Psi_c = N\Phi_m = NBS = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} SI. \quad (3.6)$$

Сравнивая (3.6) с формулой (3.5), получим

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu\mu_0 n^2 V, \quad (3.7)$$

где  $n = \frac{N}{l}$  – число витков на единицу длины;  $V = Sl$  – объем соленоида.

Найдем ЭДС самоиндукции, воспользовавшись законом Фарадея – Ленца:

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d\Psi_c}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -\left(L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt}\right). \quad (3.8)$$

Если контур не деформируется и среда не ферромагнитная, то  $L = \text{const}$ , и из выражения (3.8) получим

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.9)$$

Знак «минус» в этой формуле соответствует закону Ленца. Под действием ЭДС самоиндукции возникает индукционный ток, который противодействует изменению тока в цепи: замедляет его возрастание или убывание.

В электрических цепях постоянного тока ЭДС самоиндукции проявляет себя в моменты включения и отключения источников энергии или изменения потребляемой ими мощности.

### 3.4. Энергия и объемная плотность энергии магнитного поля

Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис. 3.3. Пусть при включенной ЭДС (ключ К в положении 1) в цепи течет ток  $I$ , который создает в соленоиде магнитное поле  $B$  и сцепленный с витками соленоида полный поток  $\Psi_c = LI$ .

Если ключ К перевести в положение 2, то магнитное поле начнет уменьшаться, поскольку в цепи некоторое время будет течь постепенно убывающий ток, поддерживаемый возникающей в соленоиде ЭДС самоиндукции. Если считать индуктивность  $L = \text{const}$ , то она равна

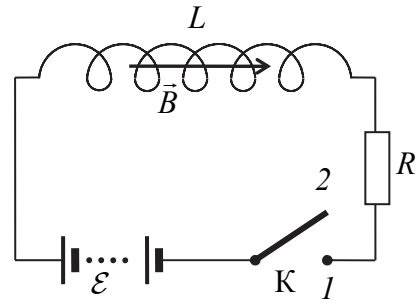


Рис. 3.3

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.10)$$

Работа, совершаемая этим током за время  $dt$ , будет

$$\delta A = \mathcal{E}_c I dt = -LI dI. \quad (3.11)$$

Полную работу, которая совершается в цепи за время изменения силы тока от  $I$  до нуля, определим путем интегрирования элементарной работы  $\delta A$ :

$$A = -\int_I^0 LI dI = \frac{1}{2} LI^2. \quad (3.12)$$

Эта работа расходуется на изменение внутренней энергии сопротивления  $R$ , т. е. на его нагревание в соответствии с законом Джоуля – Ленца.

Совершение работы сопровождается исчезновением магнитного поля в соленоиде, поэтому естественно предположить, что она выполняется за счет энергии магнитного поля, сосредоточенного внутри соленоида. Следовательно, в общем случае проводник с индуктивностью  $L$ , по которому проходит ток  $I$ , обладает энергией, равной энергии магнитного поля этого тока:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2. \quad (3.13)$$

Энергию магнитного поля можно выразить через величины, характеризующие поле: индукцию  $B$  поля и объем  $V$ , занимаемый этим полем.

Для соленоида  $L = \mu\mu_0 n^2 V$  и  $B = \mu_0 n I$ , поэтому энергия магнитного поля соленоида равна

$$W_m = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 V I^2 = \frac{1}{2\mu\mu_0} B^2 V = \frac{1}{2} H B V = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2 V. \quad (3.14)$$

Магнитное поле длинного соленоида практически однородно в его объеме. В связи с этим естественно предположить, что энергия магнитного поля  $B$  распределена равномерно с объемной плотностью

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{1}{2\mu\mu_0} B^2 = \frac{1}{2} H B = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2. \quad (3.15)$$

Рассмотрим теперь неоднородное магнитное поле, когда  $B = B(x, y, z)$ . В пределах бесконечно малого объема  $dV$  поле можно считать однородным, поэтому энергия  $dW_m$ , заключенная в этом объеме  $dV$ , равна

$$dW_m = w_m dV. \quad (3.16)$$

Интегрируя это выражение по объему  $V$  поля, мы можем определить полную энергию магнитного поля:

$$W_m = \int_V w_m dV. \quad (3.17)$$

### Контрольные вопросы

1. Что называется потоком сцепления?
2. В чем заключается явление электромагнитной индукции?
3. Сформулируйте правило Ленца для определения направления индукционного тока в контуре.
4. Сформулируйте закон Фарадея – Ленца (закон электромагнитной индукции).
5. Скин-эффект.
6. В чем заключается явление самоиндукции?
7. Что называется индуктивностью контура? Записать единицу измерения индуктивности контура в системе СИ.
8. Записать и пояснить выражение для индуктивности соленоида.
9. Чему равна ЭДС самоиндукции?
10. Чему равна энергия магнитного поля? Чему равна энергия магнитного поля соленоида? Чему равна объемная плотность энергии магнитного поля?

## Задачи по теме

### «Явление электромагнитной индукции»

1. В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,15$  Тл равномерно с частотой  $n = 560$  об/мин вращается плоская катушка, которая имеет  $N = 800$  витков проволоки с сопротивлением  $R$ . Средняя площадь одного витка  $S = 40$  см<sup>2</sup>. Ось вращения катушки лежит в ее плоскости и перпендикулярна к линии индукции. Определите максимальную ЭДС индукции  $\mathcal{E}_m$ , которая возникает в рамке.

2. Обмотка соленоида состоит из слоя плотно прилегающих друг к другу витков медного провода. Диаметр провода  $d = 0,2$  мм, удельное сопротивление меди  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м, диаметр соленоида  $D = 5$  см. По соленоиду течет ток  $I_0 = 1$  А. Определить, какое количество электричества протечет через обмотку, если ее замкнуть накоротко. Толщиной изоляции провода пренебречь.

3. Рамка площадью  $S = 3 \cdot 10^{-2}$  м<sup>2</sup> имеет  $N = 200$  витков и вращается с постоянной угловой скоростью в магнитном поле с индукцией  $B = 1,5 \cdot 10^{-2}$  Тл. Ось рамки перпендикулярна к линиям магнитной индукции. Найдите период  $T$  вращения рамки, если максимальная ЭДС индукции в рамке  $\mathcal{E}_m = 14$  В.

4. В однородном магнитном поле, индукция которого  $B = 5 \cdot 10^{-5}$  Тл, вращается стержень длиной  $l = 1$  м с постоянной угловой скоростью  $\omega = 20$  рад/с. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна линиям индукции магнитного поля. Найдите ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i$ , возникающую в стержне.

5. Соленоид диаметром  $D = 10$  см и длиной  $l = 60$  см имеет  $N = 1000$  витков. Сила тока в нем равномерно возрастает на  $\Delta I = 0,2$  А за  $\Delta t = 1$  с. На соленоид надето кольцо из медной проволоки, имеющей площадь поперечного сечения  $S = 1$  мм<sup>2</sup>. Найдите силу индукционного тока  $I_i$ , возникающего в кольце. Удельное сопротивление меди  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м.

6. На стержень из немагнитного материала длиной  $l = 50$  см и сечением  $S = 2$  см<sup>2</sup> намотан провод в один слой так, что на каждый сантиметр длины стержня приходится  $N = 20$  витков. Определить энергию  $W_m$  магнитного поля внутри соленоида, если сила тока в обмотке  $I = 0,5$  А.

7. Медное кольцо помещено в магнитное поле так, что его плоскость перпендикулярна линиям магнитной индукции. Диаметр кольца  $D = 25$  см, диаметр провода кольца  $d = 3$  мм. Определите скорость



изменения магнитной индукции  $dB/dt$  поля, если в кольце возникает индукционный ток силой  $I_i = 5$  А. Удельное сопротивление меди  $\rho = 0,17 \cdot 10^{-7}$  Ом·м.

8. Рамка площадью  $S = 100$  см<sup>2</sup> содержит  $N = 10^3$  витков провода сопротивлением  $R = 12$  Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление  $R_1 = 20$  Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле ( $B = 0,1$  Тл), делая  $n = 8$  об/с. Чему равно максимальное значение мощности  $P_{\max}$  переменного тока в цепи?

9. Проволочная рамка, содержащая  $N = 40$  витков, охватывает площадь  $S = 240$  см<sup>2</sup>. Вокруг нее создается однородное магнитное поле, перпендикулярное к ее плоскости. При повороте рамки на  $1/6$  оборота за  $t = 0,15$  с в ней наводится ЭДС индукции, равная 160 мВ. Определите индукцию  $B$  магнитного поля.

10. Определите индуктивность соленоида длиной  $l = 40$  см и сопротивлением  $R = 10$  Ом, если обмоткой соленоида является медная проволока массой  $m = 1$  кг. Плотность меди  $\rho^* = 8,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, а ее удельное сопротивление  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м.

11. Через катушку, индуктивность которой  $L = 21$  мГн, течет ток, изменяющийся со временем по закону  $I = I_{\max} \sin \omega t$ , где  $I_{\max} = 5$  А,  $\omega = 2\pi/T$ ,  $T = 0,02$  с. Найдите зависимость от времени ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_c(t)$ , возникающей в катушке и энергии магнитного поля  $W_m(t)$  катушки.

12. Индуктивность соленоида, намотанного в один слой на немагнитный каркас,  $L = 1,6$  мГн. Длина соленоида  $l = 1$  м, сечение  $S = 20$  см<sup>2</sup>. Сколько витков  $N$  приходится на каждый сантиметр длины соленоида?

13. На картонный каркас длиной  $l = 50$  см и площадью сечения  $S = 4$  см<sup>2</sup> намотан в один слой провод диаметром  $d = 0,2$  мм так, что витки плотно прилегают друг к другу (толщиной изоляции пренебречь). Вычислите индуктивность  $L$  получившегося соленоида.

14. Сколько витков проволоки  $N$  диаметром  $d = 0,4$  мм с изоляцией ничтожной толщины нужно намотать на картонный цилиндр диаметром  $D = 2$  см, чтобы получить однослойную катушку с индуктивностью  $L = 1$  мГн? Витки вплотную прилегают друг к другу.

15. Катушка, намотанная на немагнитный цилиндрический каркас, имеет  $N = 750$  витков и индуктивность  $L_1 = 25$  мГн. Чтобы увеличить индуктивность катушки до  $L_2 = 36$  мГн, обмотку с катушки сняли и заменили обмоткой из более тонкой проволоки с таким расчетом, чтобы длина катушки осталась прежней. Сколько витков  $N$  оказалось в катушке после перемотки?



16. Соленоид содержит  $N = 1000$  витков. Сечение сердечника  $S = 10 \text{ см}^2$ . По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией  $B = 1,5 \text{ Тл}$ . Найдите среднее значение ЭДС самоиндукции  $\langle \mathcal{E}_c \rangle$ , которая возникнет в соленоиде, если ток уменьшится до нуля за время  $t = 500 \text{ мкс}$ .

17. На катушке с сопротивлением  $R = 8,2 \text{ Ом}$  и индуктивностью  $L = 25 \text{ мГн}$  поддерживается постоянное напряжение  $U = 55 \text{ В}$ . Сколько энергии  $W$  выделится при размыкании цепи катушки? Какая средняя ЭДС самоиндукции  $\langle \mathcal{E}_c \rangle$  появится при этом в катушке, если энергия будет выделяться в течение времени  $t = 12 \text{ мс}$ ?

18. Торойд содержит  $N = 20$  витков на  $l = 1 \text{ см}$ . Определите объемную плотность энергии  $w_m$  в тороиде, если по его обмотке протекает ток  $I = 3 \text{ А}$ .

19. Торойд с железным сердечником длиной  $l = 20 \text{ см}$  имеет воздушный зазор  $b = 10 \text{ мм}$ . По обмотке тороида, содержащей  $N = 500$  витков, проходит ток  $I = 3 \text{ А}$ . Найдите плотность энергии  $w_m$  магнитного поля в сердечнике и воздушном зазоре, если при этих условиях магнитная проницаемость сердечника  $\mu = 580$ . Рассеянием магнитного потока пренебречь.

20. Объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида длиной  $l = 1 \text{ м}$  и радиусом  $R = 2 \text{ см}$  равна  $w_m = 0,1 \text{ Дж/м}^3$ . Определите силу тока  $I$  в соленоиде, если его индуктивность равна  $L = 0,4 \text{ мГн}$ .

21. Какова должна быть напряженность  $E$  однородного электрического поля, чтобы оно обладало той же плотностью энергии, что и магнитное поле индукцией  $B = 0,5 \text{ Тл}$ ?

22. Определите энергию  $W_m$  магнитного поля соленоида, имеющего  $N = 500$  витков, которые равномерно намотаны на картонный каркас радиусом  $R = 20 \text{ мм}$  и длиной  $l = 50 \text{ см}$ , если по нему проходит ток  $I = 5 \text{ А}$ .

23. Соленоид содержит  $N = 1000$  витков. Сила тока в обмотке соленоида  $I = 1 \text{ А}$ , магнитный поток  $\Phi_m = 0,01 \text{ Вб}$ . Вычислите энергию  $W_m$  магнитного поля.

24. На железное кольцо (торойд) намотано в один слой  $N = 200$  витков. Чему равна энергия  $W_m$  магнитного поля, если при токе  $I = 2,5 \text{ А}$  магнитный поток в железе  $\Phi_m = 0,5 \text{ мВб}$ ?

## 4. Магнитное поле в веществе

Все вещества, помещенные в магнитное поле, намагничиваются. Для объяснения намагничивания тел французский физик Андре-Мари Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют круговые

токи, которые называются *молекулярными токами* (микротоки). Каждый такой ток обладает магнитным моментом и создает в окружающем пространстве магнитное поле. В отсутствие внешнего магнитного поля молекулярные токи ориентированы беспорядочным образом, вследствие чего обусловленное ими результирующее поле равно нулю. Под действием внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию в одном направлении, вследствие чего вещество (магнетик) намагничивается – его суммарный магнитный момент становится отличным от нуля. Магнитные поля отдельных молекулярных токов в этом случае уже не компенсируют друг друга, и возникает внутреннее магнитное поле, которое накладывается на внешнее.

#### 4.1. Атом в магнитном поле. Магнитные моменты электронов и атомов. Орбитальный и спиновый магнитные моменты

Природа молекулярных токов стала понятней после того, как опытами английского физика Эрнеста Резерфорда было установлено, что атомы всех веществ состоят из положительно заряженного ядра и движущихся вокруг него отрицательно заряженных электронов.

Пусть электрон движется со скоростью  $\vec{v}$  по орбите радиуса  $R$  (рис. 4.1). Через площадку, расположенную в любом месте на пути электрона, переносится за один оборот заряд

$$q = e, \quad (4.1)$$

где  $e$  – элементарный заряд. Следовательно, движущийся по орбите электрон образует круговой ток силы

$$I = \frac{e}{T} = en, \quad (4.2)$$

где  $T$  и  $n$  – период и частота вращения электрона соответственно.

Поскольку заряд электрона отрицательный, направление движения электрона и направление тока противоположны. Магнитный момент тока, создаваемого электроном, равен

$$p_m = IS = en\pi R^2. \quad (4.3)$$

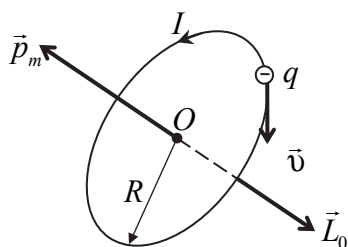


Рис. 4.1

Скорость движения электрона по орбите равна

$$v = 2\pi Rn. \quad (4.4)$$

С учетом формулы (4.4) получаем

$$p_m = \frac{evR}{2}. \quad (4.5)$$

Момент  $\vec{p}_m$ , обусловленный движением электрона по орбите, называется **орбитальным магнитным моментом электрона**.

С другой стороны, движущийся по орбите электрон обладает моментом импульса, равным

$$L_0 = m_e v R, \quad (4.6)$$

где  $m_e$  – масса электрона.

Момент импульса  $\vec{L}_0$  называют **орбитальным моментом импульса электрона**. Направления векторов  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}_0$  противоположны (рис. 4.1).

Отношение магнитного момента элементарной частицы к ее моменту импульса называется **гиромагнитным отношением**. Для электрона **орбитальное гиромагнитное отношение** равно

$$\frac{p_m}{L_0} = -\frac{e}{2m_e}. \quad (4.7)$$

С учетом взаимного расположения (направления моментов  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}_0$  противоположны) получаем

$$\vec{p}_m = -g_{\text{орб}} \vec{L}_0, \quad (4.8)$$

где  $g_{\text{орб}} = \frac{e}{2m_e}$  – орбитальное гиромагнитное отношение.

Взаимосвязь магнитного момента и орбитального момента импульса лежит в основе **магнитомеханических явлений**, заключающихся в том, что вращение магнетика вызывает его намагничивание и, наоборот, намагничивание магнетика приводит к его вращению. Существование первого явления было экспериментально доказано американским физиком Сэмюэлем Барнеттом в 1909 г., второго – немецким физиком Альбертом Эйнштейном и голландским физиком Вандером Йоханнесом де Хаасом в 1915 г.

В основе опыта Эйнштейна и де Хааса лежат следующие соображения. Если намагнитить стержень из магнетика, то магнитные моменты электронов установятся по направлению поля, механические

моменты – против поля. В результате суммарный момент импульса электронов  $\sum \vec{L}_i$  станет отличным от нуля (первоначально вследствие хаотической ориентации моментов отдельных электронов он был равен нулю). Момент импульса системы «кристаллическая решетка и электроны» должен остаться без изменений (согласно закону сохранения момента импульса), поэтому стержень приобретает момент импульса, равный  $\sum \vec{L}_i$  и направленный противоположно суммарному моменту импульса электронов, и, следовательно, приходит во вращение.

Опыт Эйнштейна и де Хааса осуществлялся следующим образом. Тонкая железная проволочка подвешивалась на упругой нити и помещалась внутрь соленоида. Закручивание нити при намагничивании об-

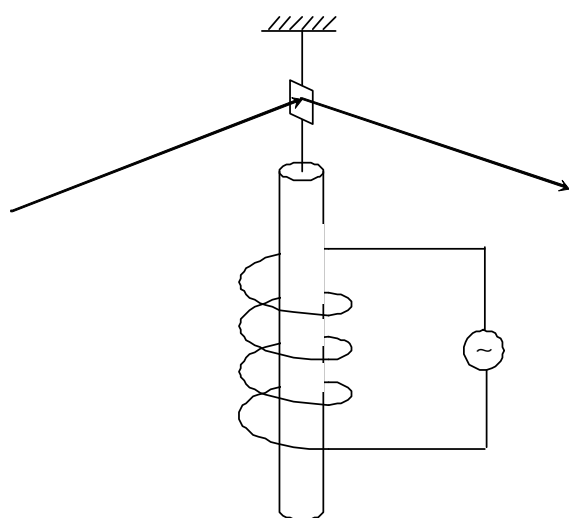


Рис. 4.2

разца постоянным магнитным полем получалось весьма малым. Для усиления эффекта был применен метод резонанса: по цепи соленоида пропускали переменный ток, частота которого подбиралась равной собственной частоте механических колебаний системы. При этих условиях амплитуда колебаний достигала наибольших значений, которые можно было измерить, наблюдая смещение светового зайчика, отраженного от зеркальца, укрепленного на нити. Из данных опыта было

вычислено гиромагнитное отношение, которое оказалось равным  $-\frac{e}{m_e}$ .

Таким образом, знак заряда носителей, создающих молекулярные токи, совпал со знаком заряда электрона. Однако полученный результат превысил ожидаемое значение гиромагнитного отношения в два раза.

С. Барнетт приводил железный стержень в очень быстрое вращение вокруг его оси и измерял возникающее при этом намагничивание. Из результатов этого опыта С. Барнетт также получил для гиромагнитного отношения величину, в два раза большую.

В дальнейшем выяснилось, что, кроме орбитального момента импульса, электрон обладает *собственным моментом импульса*  $L_s$ , или *спином*. Первоначально предполагалось, что он образуется вследствие вращения электрона вокруг собственной оси. В соответствии с этим

собственный механический момент электрона получил название спин (от английского *to spin* – вращаться). Однако в дальнейшем выяснилось, что спин является первичной характеристикой электрона, которую нельзя свести к более простым понятиям (как, например, масса и заряд).

Собственный магнитный момент электрона  $p_s$  связан со спином *спиновым гиромагнитным отношением*:

$$\vec{p}_s = -g_s \vec{L}_s, \quad (4.9)$$

где  $g_s = \frac{e}{m_e}$  – *спиновое гиромагнитное отношение*.

Спиновое гиромагнитное отношение совпадает со значением, полученным в опытах Эйнштейна и де Хааса и Барнетта. Отсюда следует, что магнитные свойства железа обусловлены не орбитальным, а собственным магнитным моментом электронов.

Спином обладают не только электроны, но и другие элементарные частицы. Собственным магнитным моментом обладают также ядра атомов ядра (который обусловлен магнитными моментами входящих в состав ядра элементарных частиц – протонов и нейтронов).

Таким образом, магнитный момент атома складывается из орбитальных и собственных моментов входящих в его состав электронов, а также из магнитного момента ядра.

## 4.2. Намагниченность. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость среды

Для количественного описания намагничивания магнетиков вводят векторную величину – намагниченность, которая определяется магнитным моментом единицы объема магнетика:

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_m, \quad (4.10)$$

где  $\Delta V$  – физически бесконечно малый объем, взятый в окрестности рассматриваемой точки.

Намагниченность принято связывать не с магнитной индукцией, а с напряженностью магнитного поля. В несильных полях намагниченность прямо пропорциональна напряженности поля, вызывающего намагничивание:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (4.11)$$

где  $\chi$  – магнитная восприимчивость вещества, безразмерная величина, характерная для каждого магнетика.

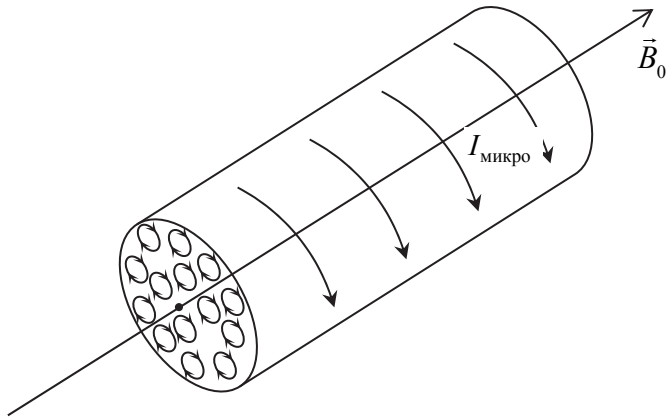


Рис. 4.3

Для описания поля, создаваемого молекулярными токами, рассмотрим магнетик в виде кругового цилиндра сечения  $S$  и длины  $l$ , внесенного в однородное внешнее магнитное поле с индукцией  $B_0$ . Плоскости всех молекулярных токов располагаются перпендикулярно вектору  $\vec{B}_0$  (рис. 4.3). Если рассмотреть любое сечение цилиндра, перпендикулярное его оси, то во внутренних участках сечения магнетика молекулярные токи соседних атомов направлены навстречу друг другу и взаимно компенсируются. Нескомпенсированными будут лишь молекулярные токи, выходящие на боковую поверхность цилиндра (рис. 4.3). Ток, текущий по боковой поверхности цилиндра, подобен току в соленоиде и создает внутри него поле, магнитную индукцию  $B^i$  которого можно вычислить по формуле (если представить что рассматриваемый магнетик является соленоидом, состоящим из одного витка):

$$B^i = \mu_0 \frac{I_{\text{микро}}}{l}, \quad (4.12)$$

где  $I_{\text{микро}}$  – сумма сил молекулярных токов, текущих по поверхности цилиндра;  $l$  – длина рассматриваемого цилиндра.

Магнитный момент этого тока

$$p_m = I_{\text{микро}} S = \frac{I_{\text{микро}} S l}{l} = \frac{I_{\text{микро}}}{l} V, \quad (4.13)$$

где  $V$  – объем магнетика.

Намагниченность  $J$  такого магнетика будет равна

$$J = \frac{p_m}{V} = \frac{I_{\text{микро}}}{l}. \quad (4.14)$$

Сопоставляя формулы (4.12) и (4.14), получим, что индукция внутреннего поля

$$B^i = \mu_0 J \text{ или } \vec{B}^i = \mu_0 \vec{J}. \quad (4.15)$$

Согласно принципу суперпозиции магнитных полей, индукция результирующего магнитного поля будет равна векторной сумме индукции внешнего и внутреннего магнитных полей:

$$\vec{B} = \vec{B}^i + \vec{B}_0. \quad (4.16)$$

Подставим (4.15) в (4.16) и получим

$$\vec{B} = \vec{B}^i + \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J} + \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{H}, \quad (4.17)$$

с учетом (4.13)

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \chi \vec{H} + \mu_0 \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (4.18)$$

где  $1 + \chi = \mu$  – безразмерная величина, называемая магнитной проницаемостью среды. Магнитная проницаемость среды показывает, во сколько раз индукция магнитного поля в веществе поля больше индукции поля в вакууме при одной и той же напряженности магнитного поля:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{B}{B_0}. \quad (4.19)$$

Так как магнитная восприимчивость  $\chi$  бывает как положительной, так и отрицательной, то магнитная проницаемость среды  $\mu$  может быть как больше, так и меньше единицы.

### 4.3. Типы магнетиков

1. *Диамагнетики.* У диамагнитных веществ суммарный магнитный момент атома равен нулю, так как имеющиеся в атоме орбитальные, спиновые и ядерные моменты взаимно компенсируются (рис. 4.4, а). Однако электронные орбиты атома под действием внешнего магнитного поля совершают прецессионное движение, которое эквивалентно круговому току. Так как этот микроток

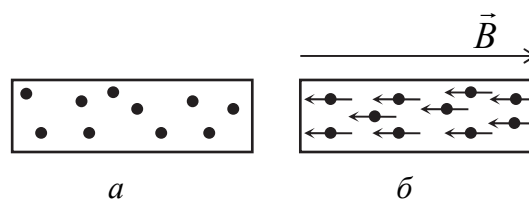


Рис. 4.4

индуцирован внешним магнитным полем, то, согласно правилу Ленца, его собственное магнитное поле, а следовательно, и магнитный момент направлены противоположно внешнему полю (рис. 4.4, б). Индуцированные магнитные моменты атомов (молекул) складываются и образуют собственное магнитное поле вещества, ослабляющее внешнее магнитное поле. Этот эффект получил название *диамагнитного эффекта*,



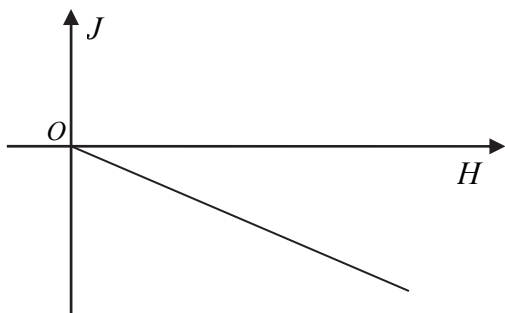


Рис. 4.5

а вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле против направления поля, назвали диамагнетиками. Так как диамагнитный эффект обусловлен действием внешнего магнитного поля на электроны атомов вещества, то диамагнетизм свойствен всем веществам.

Теоретические и экспериментальные данные показывают, что значение магнитной восприимчивости для диамагнетиков  $\chi = -10^{-6}$ .

Восприимчивость диамагнетиков почти не зависит от температуры  $T$  и напряженности  $H$  магнитного поля. Поэтому процесс намагничивания диамагнетиков характеризуется линейной зависимостью  $J$  от  $H$  (рис. 4.5).

2. *Парамагнетики.* Однако наряду с диамагнитными веществами существуют и парамагнитные – вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле по направлению поля.

У парамагнитных веществ при отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты электронов не компенсируют друг друга, и атомы (молекулы) парамагнетиков всегда обладают магнитным моментом. Однако

вследствие теплового движения молекул их магнитные моменты ориентированы беспорядочно, поэтому парамагнитные вещества магнитными свойствами не обладают (рис. 4.6, а). При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле устанавливается преимущественная ориентация магнитных моментов атомов по полю (полной ориентации препятствует тепловое движение атомов) (рис. 4.6, б). Таким образом,

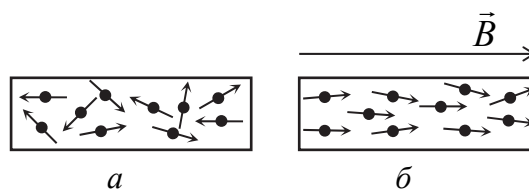


Рис. 4.6

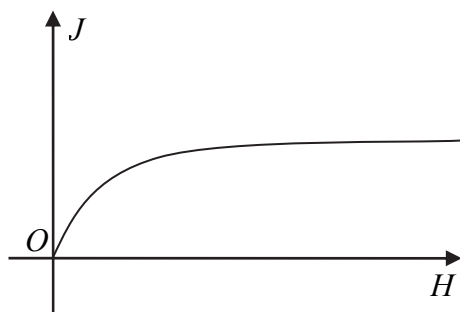


Рис. 4.7

парамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, совпадающее по направлению с внешним полем и усиливающее его. Этот эффект называется *парамагнитным*. При ослаблении внешнего магнитного поля до нуля ориентация магнитных моментов вследствие теплового движения нарушается и парамагнетик размагничивается.

Процесс намагничивания парамагнетиков во многом аналогичен тому, как поляризуется диэлектрик, состоящий из полярных молекул. Кривая намагничивания парамагнетиков (рис. 4.7) указывает на явление насыщения, которое связано с ориентационным упорядочением магнитных моментов молекул вещества. Классическая статистическая теория парамагнетизма была построена французским физиком Полем Ланжевенем в 1905 г. Согласно этой теории, в однородных постоянных магнитных полях (не очень сильных) восприимчивость  $\chi$  парамагнетика оказывается обратно пропорциональна температуре. Значения проницаемости  $\chi$  парамагнетика лежат в пределах  $10^{-5}$ – $10^{-3}$ .

Подводя итог, отметим, что атомы всех веществ являются носителями диамагнитных свойств. Если магнитный момент атомов велик, то парамагнитные свойства преобладают над диамагнитными и вещество является парамагнетиком. Если магнитный момент атомов мал, то преобладают диамагнитные свойства и вещество является диамагнетиком.

#### 4.4. Ферромагнетики. Магнитный гистерезис. Точка Кюри

Некоторые из веществ обладают свойством давать весьма большое добавочное поле. Такие вещества характеризуются большой магнитной проницаемостью  $\mu$  ( $\sim 10^4$ – $10^5$ ) и называются **ферромагнитными**. К числу ферромагнитных веществ относятся железо, никель, кобальт, их сплавы и некоторые сплавы неферромагнитных веществ.

Ферромагнитные вещества обладают рядом особенностей:

- они сохраняют намагниченность и после того, как намагничивающее поле прекратило свое действие;

- магнитная проницаемость  $\mu$  (а также магнитная восприимчивость  $\chi$ ) для них не является величиной постоянной, а зависит от напряженности намагничивающего поля (рис. 4.8). Зависимость магнитной проницаемости  $\mu$  (или восприимчивости  $\chi$ ) от  $H$  характеризуется тем, что  $\mu$  (или  $\chi$ ) сначала сильно возрастает с увеличением напряженности намагничивающего поля, а затем, достигнув максимума, начинает уменьшаться. При больших значениях намагничивающего поля значение  $\mu$  стремится к единице, а  $\chi$  – к нулю.

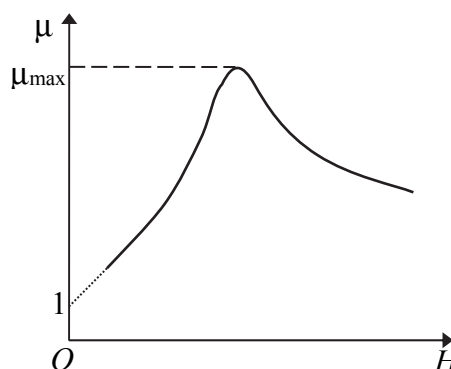


Рис. 4.8

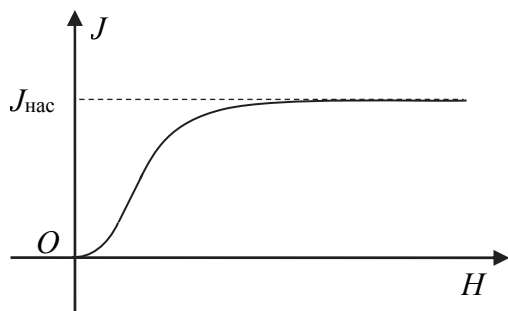


Рис. 4.9

Рассмотрим графическую зависимость намагничивания  $J$  от напряженности поля  $H$  (рис. 4.9). Как видно из графика, намагничивание быстро возрастает с увеличением напряженности, а затем возрастание уменьшается, и, наконец, начиная с некоторого значения  $H$ , дальнейшее увеличение напряженности не дает увеличения намагничивания  $J$ , что соответствует горизонтальному участку графика. Это явление, открытое русским физиком Александром Григорьевичем Столетовым (1872 г.), носит название **магнитного насыщения**.

Зависимость магнитной индукции  $B$  от напряженности  $H$  намагничивающего поля  $H$  выражается сходным графиком, не имеющим, однако, горизонтальной части (рис. 4.10). При насыщении магнитная индукция растет по линейному закону в зависимости от напряженности внешнего поля.

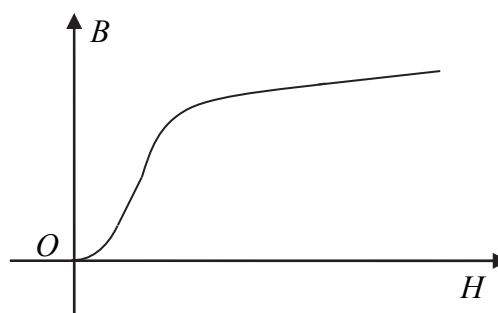


Рис. 4.10

Весьма важной особенностью ферромагнетиков является **магнитный гистерезис**. Явление гистерезиса заключается в том, что намагниченность  $J$  (следовательно, и магнитная индукция  $B$ ) зависит не только от значения напряженности намагничивающего поля  $H$  в данный момент, но и от того, какова напряженность была раньше.

На рис. 4.11 приведен график зависимости  $J$  от  $H$ . Ветвь кривой  $OA$  дает возрастание намагниченности  $J$  при увеличении поля  $H$  при условии, что намагничивание производится первый раз. Точка  $A$  соответствует насыщению (намагниченность достигает максимального значения  $J_{\text{нас}}$ ). Если после того как насыщение достигнуто, начать уменьшать напряженность поля  $H$ , то намагниченность  $J$  будет спадать не по кривой  $AO$ , а по новой кривой  $AC$ . Тем же самым значениям  $H$ , проходимым в обратном порядке, соответствуют большие значения  $J$ . При  $H = 0$  намагниченность полностью не пропадает, а сохраняется **остаточная намагниченность**  $J_{\text{ост}}$ . Чтобы вызвать дальнейшее уменьшение  $J$ , надо изменить направление намагничивающего поля  $H$  на обратное.

При некотором определенном  $H = -H_c$  намагниченность  $J$  пропадает (точка  $D$ , рис. 4.11). Значение  $H_c$  называется *коэрцитивной силой*. При еще большем возрастании напряженность  $H$  обратного по направлению поля возникает намагниченность обратного знака. Здесь может быть также достигнуто насыщение (точка  $A'$ , рис. 4.11). Далее, уменьшая напряженность обратного по направлению магнитного поля до нуля, получаем остаточную намагниченность  $-J_{ост}$  (точка  $C'$ , рис. 4.11). Чтобы убрать остаточную намагниченность, необходимо приложить поле напряженностью  $+H_c$  (точка  $D'$ , рис. 4.11). Если затем напряженность  $H$  магнитного поля увеличивать до значения  $+H_{нас}$ , то зависимость  $J$  от  $H$  изобразится симметричной кривой  $ACDA'C'D'A$ , которую назвали *петлей гистерезиса*. Если намагниченность ферромагнетика достигает насыщения, то петля гистерезиса называется *максимальной* (рис. 4.11, сплошная линия). Если в процессе намагничивания ферромагнетика насыщение не достигается, то полученную петлю гистерезиса называют *частным циклом* (рис. 4.11, пунктирная линия). Все частные циклы лежат внутри максимальной петли гистерезиса.

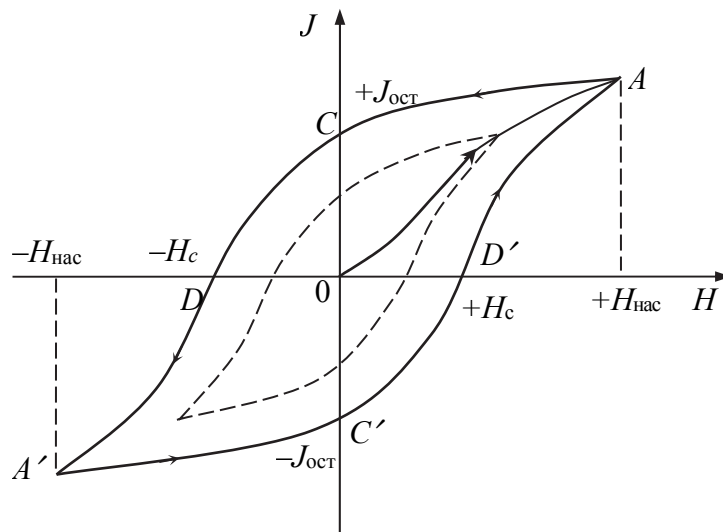


Рис. 4.11

В результате явления гистерезиса одному и тому же значению намагничивающего поля  $H$  могут соответствовать несколько значений намагниченности  $J$ . Например,  $H = 0$  соответствуют: 1) отсутствие намагниченности (точка 0); 2) намагниченность, выражаемая отрезком  $OD$  (имеет место после намагничивания ферромагнетика); 3) намагниченность, выражаемая отрезком  $OD'$  (имеет место после перемагничивания ферромагнетика).

Различные ферромагнитные вещества дают весьма разнообразные кривые гистерезиса. Ферромагнитные свойства оказываются тесно связанными с кристаллической структурой вещества. Кривые намагничивания (петли гистерезиса) реальных материалов зависят от их мелкокристаллической структуры и меняются под влиянием внешних воздействий. Принято различать «магнитомягкие» ферромагнетики, характеризующиеся малой коэрцитивной силой, и «магнито жесткие», характеризующиеся большой коэрцитивной силой. Магнитомягкие ферромагнетики используются для изготовления сердечников электрических машин (трансформаторов, генераторов, электродвигателей). Магнито жесткие ферромагнетики применяются как постоянные магниты.

Ферромагнетизм специфически связан с твердой фазой вещества. Для всякого ферромагнетика существует такая температура  $T = \Theta$ , при которой его ферромагнитные свойства пропадают. Эта температура  $\Theta$  называется *температурой или точкой Кюри*. При температурах, лежащих выше точки Кюри, ферромагнетик ведет себя как обычное парамагнитное вещество. В точке Кюри наблюдается не только исчезновение ферромагнитных свойств у вещества, но и аномалия в ряде других их свойств, например аномалия в ходе теплоемкости, электропроводности и т. д.

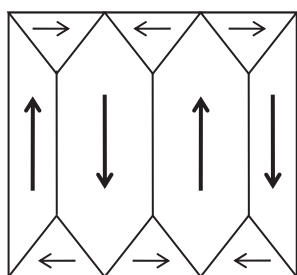


Рис. 4.12

Рассмотренные особенности ферромагнетика обусловлены тем, что в нем имеется множество сравнительно крупных самопроизвольно намагниченных областей, называемых *доменами* (рис. 4.12). Домены содержат большое число атомов, и в пределах одного домена спиновые магнитные моменты электронов всех атомов ориентированы одинаково. Это упорядочение определяется специфическим (квантово-механическим) взаимодействием спинов молекул ферромагнитных веществ. Возникновение доменной структуры соответствует минимуму энергии тела.

При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты различных доменов ориентированы беспорядочно, в результате чего тело в среднем не намагничено (рис. 4.13, а). С появлением внешнего магнитного поля домены, ориентированные в направлении этого поля начинают увеличиваться в объеме за счет соседних доменов, имеющих иные ориентации магнитных моментов. Ферромагнетик начинает намагничиваться (рис. 4.13, б).

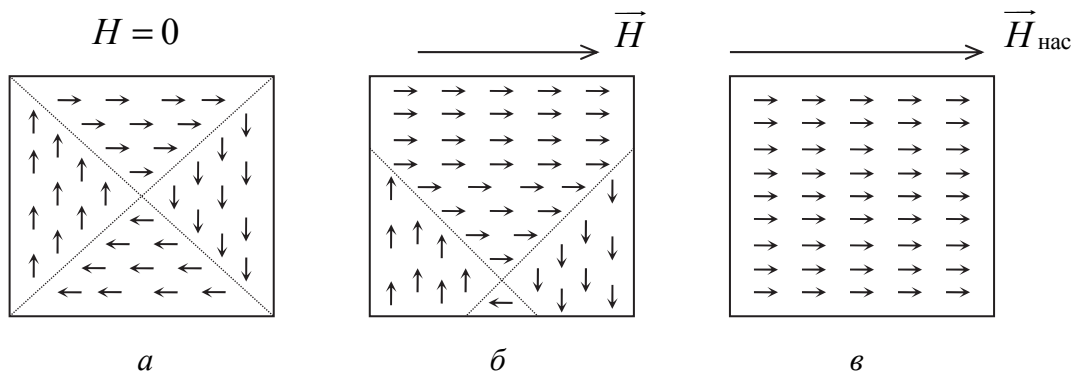


Рис. 4.13

Сначала при увеличении напряженности внешнего поля происходит обратимый рост границ доменов, ориентированных по полю (рис. 4.14, область 1); при дальнейшем возрастания поля уже происходит необратимый рост границ доменов (рис. 4.14, область 2). Далее – переворачивание доменов, ориентированных против поля, в направлении внешнего поля (рис. 4.14, область 3). При достаточно сильных полях все домены ориентируются в направлении поля (ферромагнетик представляет один монодомен) и намагничивание достигает насыщения (рис. 4.13, в).

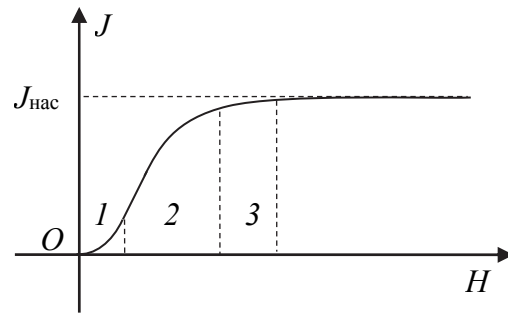


Рис. 4.14

При выключении внешнего поля тепловое движение не в состоянии полностью разрушить преимущественную ориентацию доменов, поэтому ферромагнетики полностью не размагничиваются, а сохраняют остаточную индукцию (намагниченность). Этим объясняется явление гистерезиса.

При нагревании ферромагнетика до точки Кюри тепловое движение молекул становится достаточно интенсивным, чтобы разрушить домены, поэтому исчезает спонтанная намагниченность и ферромагнетик ведет себя как обычный парамагнетик. Процесс, связанный переходом через точку Кюри, не сопровождается выделением или поглощением теплоты, что указывает на фазовый переход второго рода.

## 4.5. Эффекты, наблюдаемые в ферромагнетиках, и их применение

**Магнитострикционный эффект.** При намагничивании ферромагнетиков наблюдается явление магнитострикции (от лат. *strictio* – сжатие, натягивание), которое состоит в изменении формы и объема



образца при его намагничивании. Открыт английским физиком Джеймсом Прескоттом Джоулем в 1842 г. Изменение энергетического состояния кристаллической решетки в магнитном поле приводит к изменению расстояний между узлами решетки и, как следствие, изменению размеров и формы кристаллического тела.

Этот эффект используется в магнитоотрицательных датчиках, устройствах микроперемещений, реле, магнитоотрицательных преобразователях, излучателях и приемниках звука, фильтров, стабилизаторов частоты, линий задержки в радиотехнических и акустических устройствах, а также в магнитоотрицательных источниках ультразвука.

*Магнитоупругий эффект.* Магнитоупругий эффект был открыт итальянским физиком Виллари Э. в 1865 г. Этот эффект заключается в изменении намагниченности тела при его деформации (эффект, обратный магнитоотрицательности). Он обусловлен изменением под действием механических напряжений доменной структуры ферромагнетика, определяющей его намагниченность. Применяется в магнитоупругих датчиках. Магнитоупругий датчик представляет собой измерительный преобразователь механических усилий или давления в электрический сигнал. Выполняется в виде катушки индуктивности с ферромагнитным сердечником, у которого намагниченность (следовательно, и индуктивность катушки) меняется при деформации сердечника под действием измеряемой величины.

*Магнитокалорический эффект.* Магнитокалорический эффект – это изменение температуры магнетика под действием магнитного поля; как правило, в условиях теплоизоляции намагничивание приводит к увеличению температуры, а размагничивание – к ее снижению. Этот эффект применяется для магнитного охлаждения вещества (адиабатическое размагничивание). Магнитокалорический эффект впервые был обнаружен в железе немецким физиком Эмилем Варбургом в 1881 г. В 1926–27 гг. голландский физик Петер Йозеф Вильгельм Дебай и американский физик Уильям Фрэнсис Джоук независимо друг от друга объяснили этот процесс и описали способы для достижения очень низких температур. Понижение температуры магнетика, находящегося в сильном магнитном поле, при быстром выключении поля происходит в результате затраты внутренней энергии магнетика на дезориентацию магнитных моментов микрочастиц. В парамагнитных солях магнитное охлаждение позволяет достичь температуры  $\sim 10^{-3}$  К, в системах ядерных магнитных моментов –  $10^{-6}$ – $10^{-5}$  К.



## *Контрольные вопросы*

1. Как взаимосвязаны орбитальный и магнитный моменты электрона в атоме? Что понимают под гиромагнитным отношением?
2. Чему равно орбитальное и спиновое гиромагнитные отношения?
3. В чем суть магнитомеханических явлений?
4. Из каких магнитных моментов складывается магнитный момент атома?
5. Что такое намагниченность? В чем ее физический смысл?
6. Выведите связь между векторами магнитной индукции, напряженности магнитного поля и намагниченности.
7. В чем физический смысл магнитной проницаемости среды?
8. Запишите и объясните соотношение между магнитной проницаемостью и магнитной восприимчивостью.
9. Что такое диамагнетики? парамагнетики? В чем различие их магнитных свойств?
10. Какие вещества относятся к ферромагнетикам? Какие особые свойства присущи им?
11. Каков механизм намагничения ферромагнетиков?
12. Что такое магнитный гистерезис? Нарисуйте петлю гистерезиса и поясните ее.
13. Какие ферромагнетики являются магнитомягкими? магнитожесткими? Где их применяют?
14. Какую температуру для ферромагнетика называют точкой Кюри?
15. Что понимают под магнитострикционным, магнитоупругим и магнитокалорическим эффектами?

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Теория электромагнитного поля, начала которой заложил М. Фарадей, математически была завершена Дж. Максвеллом. При этом одной из важнейших новых идей, выдвинутых Максвеллом, стала мысль о симметрии во взаимозависимости электрического и магнитного полей: поскольку меняющееся во времени магнитное поле создает электрическое поле, следует ожидать, что меняющееся во времени электрическое поле создает магнитное поле.

## 1. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля. Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме

В соответствии с законом Фарадея – Ленца, ЭДС индукции, возбуждаемая в неподвижном замкнутом проводящем контуре, определяется формулой

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (1.1)$$

Тем самым выясняется, что переменное магнитное поле создает в проводящем замкнутом контуре вихревое электрическое поле. Согласно определению, ЭДС равна циркуляции вектора напряженности электрического поля:

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} d\vec{l}. \quad (1.2)$$

Обобщенный таким образом закон Фарадея – Ленца имеет вид

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (1.3)$$

Формула (1.3) получила название *первого уравнения Максвелла в интегральной форме*: циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром. Из этого уравнения следует, что переменное магнитное поле создает в пространстве вихревое электрическое поле независимо от того, находится в этом поле проводник или нет.

Явление возникновения в пространстве вихревого электрического поля под влиянием переменного магнитного поля было использовано для создания индукционного ускорителя электронов – *бетатрона* (рис. 1.1). Идея этого метода ускорения электронов высказана в 1928 г. норвежским физиком Рольфом Видероз. В дальнейшем она была разработана русским физиком Яковом Петровичем Терлецким. Первый бетатрон был построен в 1940 г. в США Дональдом Вильямом Керстом.

Основной его частью является мощный электромагнит ЭМ (рис. 1.1) с коническими полюсными наконечниками. Между наконечниками расположена ускорительная камера К, имеющая форму тора и откачанная до высокого вакуума. Обмотка электромагнита питается переменным током. Изменение силы тока в обмотке электромагнита вызывает в пространстве между его полюсами изменение магнитного поля и возникновение вихревого электрического поля. Силовые линии вихревого электрического поля представляют собой концентрические окружности и расположены в плоскости, перпендикулярной оси электромагнита и проходящей через середину зазора между полюсами (рис. 1.1). В определенный момент времени в камеру попадает пучок электронов из термоэлектронного излучателя, расположенного внутри камеры. На каждый электрон будет действовать сила со стороны электрического поля, вследствие чего скорость у электронов будет увеличиваться. Непременным условием ускорения электрона является его непрерывное движение по одной и той же орбите. Для этого полюсным наконечникам придают такую форму, чтобы магнитное поле убывало от центра к краю по определенному закону.

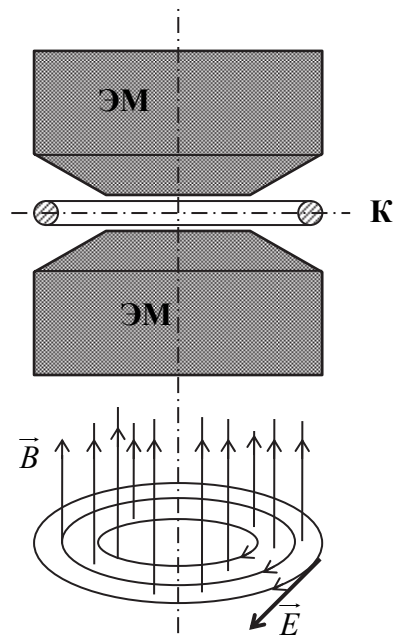


Рис. 1.1

Согласно закону полного тока, циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I. \quad (1.4)$$

Из закона полного тока следует, что источником магнитного поля являются упорядоченно движущиеся электрические заряды. Максвелл предположил, что, помимо токов всех видов, связанных с упорядоченным движением зарядов, источником возникновения магнитного поля является также переменное электрическое поле.

Действительно, по теореме Гаусса поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = q, \quad (1.5)$$

где  $q$  – алгебраическая сумма свободных электрических зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью.

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \oint_S D_n dS \right] = \frac{dq}{dt}. \quad (1.6)$$

Если поверхность  $S$  неподвижна и не деформируется, то изменение во времени потока  $\Phi_D$  будет вызываться только изменением электрического смещения  $D$  с течением времени. Поэтому полную производную, стоящую в правой части уравнения, можно заменить частной производной по времени и дифференцирование внести под знак интеграла:

$$\frac{dq}{dt} = \oint_S \frac{dD_n}{dt} dS. \quad (1.7)$$

С другой стороны, сила тока определяется выражением

$$I = \frac{dq}{dt} = \int_0^S j_n dS. \quad (1.8)$$

Из сравнения выражения (1.8) с формулой (1.7) следует, что величина  $\frac{dD_n}{dt}$  имеет размерность плотности тока. Она представляет собой численное значение нормальной составляющей плотности тока,

обусловленного не движением свободных электрических зарядов, а изменением во времени электрического поля. Поэтому Джеймс Максвелл предложил назвать величину  $\frac{d\vec{D}}{dt}$  *плотностью тока смещения*:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (1.9)$$

Следовательно, плотность тока смещения в данной точке пространства равна скорости изменения вектора электрического смещения в этой точке.

Током смещения сквозь произвольную поверхность  $S$  называется физическая величина, численно равная потоку вектора плотности тока смещения сквозь эту поверхность:

$$I_{\text{см}} = \int_S (j_{\text{см}})_n dS = \int_S \frac{dD_n}{dt} dS = \frac{d}{dt} \left( \int_S D_n dS \right) = \frac{d\Phi_D}{dt}. \quad (1.10)$$

До Дж. Максвелла считалось, что если цепи постоянного тока должны быть обязательно замкнутыми, то это условие не обязательно для цепей переменных токов. С точки зрения Максвелла, цепи любых токов замкнуты. Замкнутость цепей переменных токов обеспечивается токами смещения, которые протекают на тех участках, где нет проводников, например между обкладками конденсатора в процессе его зарядки или разрядки.

Согласно Максвеллу, ток смещения, подобно обычным токам проводимости, является источником возникновения вихревого магнитного поля. В общем случае токи проводимости и ток смещения не разделены в пространстве, как это имеет место, например, в конденсаторе с переменным напряжением на обкладках. Все типы токов существуют в одном и том же объеме и можно говорить о полном токе, равном сумме токов проводимости и токов смещения. Поэтому *обобщенный закон полного тока* будет иметь следующий вид:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I + I_{\text{см}}. \quad (1.11)$$

Из всех физических свойств, присущих току проводимости, Максвелл приписал току смещения только одно свойство – способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле.

Учитывая ток смещения (1.10), получим

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I + \frac{d\Phi_D}{dt}. \quad (1.12)$$

Формула (1.12) получила название **второго уравнения Максвелла в интегральной форме**: циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру  $L$  равна полному току, пронизывающему поверхность, ограниченную этим контуром.

Из уравнения (1.12) следует, что переменное магнитное поле может возбуждаться движущимися зарядами (электрическим током) и переменным электрическим полем (током смещения). Из двух уравнений Максвелла можно сделать важный вывод: между электрическим и магнитным полями существует тесная взаимная связь. Изменение во времени электрического поля вызывает появление вихревого магнитного поля, а переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля.

Первые два уравнения Максвелла (1.3) и (1.12) дополняются еще двумя уравнениями. *Третье уравнение Максвелла* выражает теорему Гаусса для потока вектора электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$ , охватывающую суммарный заряд  $q$ :

$$\oint_S D_n dS = q. \quad (1.13)$$

Оно позволяет рассчитывать электрическое поле, созданное заданной системой электрических зарядов, произвольным образом расположенных в пространстве.

*Четвертое уравнение Максвелла* представляет собой теорему Гаусса для магнитного потока сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$ :

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (1.14)$$

Эта теорема является следствием того, что свободных магнитных «зарядов» (свободных магнитных полюсов) в природе не существует.

Система уравнений (1.3, 1.12–1.14) является системой уравнений Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме.

## 2. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в дифференциальной форме. Материальные уравнения

Используя систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме (1.3, 1.12–1.14), получим полную систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в дифференциальной форме.

Рассмотрим первое уравнение Максвелла (1.3). К левой части уравнения применим теорему Стокса:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S (\text{rot} \vec{E})_n dS, \quad (1.15)$$

где  $S$  – произвольная поверхность, ограниченная контуром  $L$ .

Если контур  $L$  не деформируется и не перемещается в пространстве, то правую часть уравнения (1.3) можно представить в виде

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \int_S B_n dS \right] = \int_S \frac{dB_n}{dt} dS. \quad (1.16)$$

Подставив выражения (1.15–1.16) в уравнение (1.3), получим

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow \int_S (\text{rot} \vec{E})_n dS = -\int_S \frac{dB_n}{dt} dS. \quad (1.17)$$

Так как поверхность  $S$  в выражении (1.17) является произвольной, то равенство интегралов будет выполняться, если выполняется условие

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (1.18)$$

Уравнение (1.18) является *первым уравнением Максвелла в дифференциальной форме*.

Рассмотрим второе уравнение Максвелла (1.12). К левой части уравнения применим теорему Стокса:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\text{rot} \vec{H})_n dS. \quad (1.19)$$

Суммарный ток проводимости, пронизывающий произвольную поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$ , запишем в виде

$$I = \int_S j_n dS. \quad (1.20)$$



Если контур  $L$  не деформируется и не перемещается в пространстве, то поток вектора электрического смещения через поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$ , можно записать в виде

$$\frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S D_n dS = \int_S \frac{dD_n}{dt} dS. \quad (1.21)$$

Подставив выражения (1.19–1.21) в уравнение (1.12), получим

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I + \frac{d\Phi_D}{dt} \Rightarrow \oint_L (\text{rot} \vec{H})_n dS = \int_S j_n dS + \int_S \frac{dD_n}{dt} dS. \quad (1.22)$$

Так как поверхность  $S$  в выражении (1.22) является произвольной, то равенство интегралов будет выполняться, если выполняется условие

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (1.23)$$

Уравнение (1.24) является **вторым уравнением Максвелла в дифференциальной форме**.

**Третьим и четвертым уравнениями Максвелла в дифференциальной форме** являются теоремы Гаусса для электрического (1.24) и магнитного (1.25) поля в дифференциальной форме:

$$\text{div} \vec{D} = \rho. \quad (1.24)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (1.25)$$

Уравнения (1.18), (1.23–1.25) составляют систему четырех уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

Четыре фундаментальных уравнения Максвелла не образуют полную систему уравнений для электромагнитного поля в веществе. В самом деле, если два векторных уравнения системы (1.18), (1.23) записать в координатной форме, то с учетом двух оставшихся уравнений получится восемь скалярных уравнений. Они связывают между собой проекции пяти векторов ( $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{j}$ ) и  $\rho$ , т. е. восемь уравнений содержат шестнадцать неизвестных величин. Это связано с тем, что уравнения Максвелла не содержат никакой информации о свойствах среды, в которой существует электромагнитное поле. Электромагнитные свойства вещества (материи) определяются уравнениями, которые в случае изотропной, однородной, проводящей, неферромагнитной и сегнетоэлектрической среды ( $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\sigma = \text{const}$ ) имеют вид

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (1.26)$$

Уравнения (1.26) называют *материальными уравнениями среды*.

Уравнения (1.18), (1.23–1.26) образуют полную систему уравнений электромагнитного поля в среде, решение которой при заданных граничных условиях позволяет определить векторы  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{j}$  и скаляр  $\rho$  в каждой точке среды с заданными ее характеристиками  $\epsilon, \mu, \sigma$ .

Уравнения справедливы при следующих условиях:

- 1) материальные тела в поле неподвижны;
- 2) материальные константы  $\epsilon, \mu, \sigma$  могут зависеть от координат, но не должны зависеть от времени и векторов поля;
- 3) в поле отсутствуют постоянные магниты и ферромагнитные тела.

Из уравнений Максвелла следует:

- источниками электрического поля являются либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля (1-е и 3-е уравнения);
- магнитное поле может возбуждаться либо электрическими токами, либо переменным электрическим полем (2-е уравнение);
- переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле – с магнитным, т. е. электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом и образуют единое электромагнитное поле.

### 3. Электромагнитные волны. Волновое уравнение

Мы выяснили, что переменное электрическое поле порождает магнитное, которое тоже оказывается переменным. Это переменное магнитное поле порождает электрическое и т. д. Таким образом, если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электромагнитное поле, то в окружающем заряды пространстве возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Этот процесс будет периодическим во времени и пространстве и, следовательно, представляет собой *электромагнитную волну*.

Покажем, что существование электромагнитных волн вытекает из системы уравнений Максвелла (1.18), (1.23–1.25). Для упрощения математических преобразований рассмотрим электромагнитное поле в случае однородной незаряженной (объемная плотность заряда  $\rho = 0$ ), непроводящей (плотность тока  $j = 0$ ), несегнетоэлектрической ( $\epsilon = \text{const}$ ) и неферромагнитной ( $\mu = \text{const}$ ) среды.

Система уравнений Максвелла для этого случая с учетом материальных уравнений ( $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ ) будет иметь вид

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{d(\mu\mu_0\vec{H})}{dt} \Rightarrow \operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0\frac{d\vec{H}}{dt}; \quad (1.27)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{d(\epsilon\epsilon_0\vec{E})}{dt} \Rightarrow \operatorname{rot}\vec{H} = \epsilon\epsilon_0\frac{d\vec{E}}{dt}; \quad (1.28)$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0; \quad (1.29)$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0. \quad (1.30)$$

Возьмем ротор от выражения (1.27) и изменим последовательность дифференцирования по координатам и времени:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = \operatorname{rot}\left(-\mu\mu_0\frac{d\vec{H}}{dt}\right) \Rightarrow \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\mu\mu_0\frac{d}{dt}(\operatorname{rot}\vec{E}). \quad (1.31)$$

Подставим выражение (1.28) в выражение (1.31)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\mu\mu_0\frac{d}{dt}\left(\epsilon\epsilon_0\frac{d\vec{E}}{dt}\right) \Rightarrow \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0\frac{d^2\vec{E}}{dt^2}. \quad (1.32)$$

Так как выражение в правой части (1.32) представляет двойное векторное произведение, то

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) &= \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla\vec{E}) - (\nabla\nabla)\vec{E} = \\ &= \nabla(\nabla\vec{E}) - \Delta\vec{E} = \nabla(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

С учетом (1.29) получим

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\Delta\vec{E}. \quad (1.34)$$

Подставим (1.34) в (1.32) и получим

$$\Delta\vec{E} = \mu\mu_0\epsilon\epsilon_0\frac{d^2\vec{E}}{dt^2}. \quad (1.35)$$

Аналогично можно получить для  $\vec{H}$ :

$$\Delta\vec{H} = \mu\mu_0\epsilon\epsilon_0\frac{d^2\vec{H}}{dt^2}. \quad (1.36)$$

Выражения (1.35–1.36) представляют собой *волновые уравнения* для  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\frac{d^2\vec{E}}{dt^2} - v^2\Delta\vec{E} = 0 \text{ и } \frac{d^2\vec{H}}{dt^2} - v^2\Delta\vec{H} = 0, \quad (1.37)$$

где  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}$  – фазовая скорость электромагнитной волны.

Решением волновых уравнений (1.37) являются функции вида

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kr + \alpha) \text{ и } \vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (1.38)$$

где  $\vec{E}_m$  и  $\vec{H}_m$  – амплитудные значения напряженности электрического и магнитного полей;  $\omega$  – циклическая частота электромагнитных колебаний;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число;  $r$  – расстояние от источника до некоторой точки волнового фронта;  $\alpha$  – начальная фаза колебаний, которые называются *уравнениями электромагнитной волны*.

## 4. Основные свойства электромагнитной волны. Уравнение электромагнитной волны

Рассмотрим основные свойства электромагнитных волн:

1) из выражений (1.37) видно, что переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве в виде электромагнитной волны. Фазовая скорость волны равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}. \quad (1.39)$$

Если электромагнитная волна распространяется в вакууме ( $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ), то получаем

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}, \quad (1.40)$$

где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в вакууме.

С учетом выражения (1.40) фазовая скорость электромагнитной волны равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}, \quad (1.41)$$

где  $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$  – абсолютный показатель преломления среды;

2) электромагнитная волна является поперечной. Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны к направлению распространения волны (вектору  $\vec{v}$ ) (рис. 1.2);

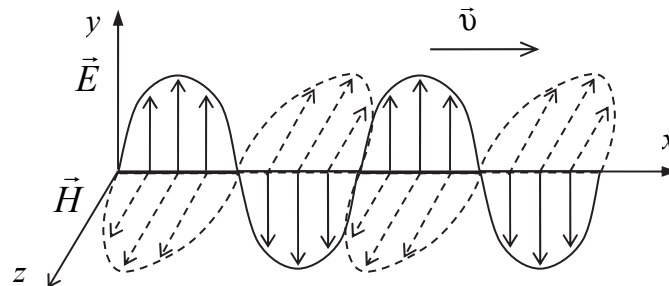


Рис. 1.2

3) векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  электромагнитной волны всегда взаимно перпендикулярны (рис. 1.2);

4) колебания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в волне происходят с одинаковой фазой, а амплитуды колебаний этих векторов связаны соотношением

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E_m = \sqrt{\mu\mu_0} H_m. \quad (1.42)$$

Все свойства электромагнитных волн можно получить из уравнений Максвелла (1.28–1.31).

Понимание того, что из дифференциальных уравнений вытекала возможность существования электромагнитных волн, позволило Дж. Максвеллу с блестящим успехом развить электромагнитную теорию света.

## 5. Энергия электромагнитной волны. Вектор Умова – Пойнтинга

Электромагнитные волны переносят энергию. Поток волновой энергии, или энергетический поток (энергия  $dW$ , переносимая волной в единицу времени  $dt$  через некоторую площадку), равен

$$\Phi_\omega = \frac{dW}{dt}. \quad (1.43)$$

Плотность потока энергии  $S$ , переносимой волной (энергия, переносимая волной в единицу времени через единичную площадку  $\Delta S_\perp$ , перпендикулярную направлению переноса энергии), равна

$$S = \frac{\Delta\Phi_{\text{э}}}{\Delta S_{\perp}} = \frac{\Delta W}{\Delta S_{\perp} \Delta t} = wv \text{ или } \vec{S} = w\vec{v}, \quad (1.44)$$

где  $w$  – объемная плотность энергии волны;  $v$  – фазовая скорость волны;  $\vec{S}$  – вектор плотности потока энергии волны.

Плотность энергии электромагнитного поля  $w$  складывается из плотности энергии электрического поля и плотности энергии магнитного поля:

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2, \quad (1.45)$$

где  $w_e$  – плотность энергии электрического поля волны;  $w_m$  – плотность энергии магнитного поля волны.

В данной точке пространства векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются в одинаковой фазе. Поэтому соотношение (1.42) между амплитудными значениями  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  справедливо и для их мгновенных значений:

$$\epsilon\epsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2. \quad (1.46)$$

Отсюда следует, что плотности энергии электрического и магнитного полей волны каждый момент времени одинаковы:

$$\epsilon\epsilon_0 E_{mm}^2 = \mu\mu_0 H_m^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 \Rightarrow w_e = w_m. \quad (1.47)$$

Поэтому можно выражение (1.45) написать в виде

$$w = 2w_e = \epsilon\epsilon_0 E^2. \quad (1.48)$$

Из выражения (1.46) получим напряженность  $E$  электрического поля волны

$$E = \frac{\sqrt{\mu\mu_0}}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0}} H \quad (1.49)$$

и подставим в (1.48):

$$w = \sqrt{\epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0} EH = \frac{1}{v} EH, \quad (1.50)$$

где  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0}}$  – фазовая скорость электромагнитной волны. Под-

ставив выражение (1.50) в (1.44), получим модуль вектора плотности потока  $S$  энергии электромагнитной волны:

$$S = EH. \quad (1.51)$$

Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Поэтому направление вектора  $\vec{E} \times \vec{H}$  совпадает с направлением переноса энергии (направлением вектора фазовой скорости), а модуль этого вектора равен  $EH$ . Следовательно, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить как векторное произведение  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (1.52)$$

Вектор  $S$  называется *вектором Умова – Пойнтинга*.

## 6. Шкала электромагнитных волн

Свойства электромагнитных волн сильно зависят от их частоты (или длины волны). Между диапазонами нет резких переходов, они иногда перекрываются, а границы между ними условны. Поскольку скорость распространения излучения (в вакууме) постоянна, то частота его колебаний жестко связана с длиной волны в вакууме.

В таблице приведена классификация электромагнитных волн в зависимости от их частоты (длины волны).

Виды излучения	Диапазоны		Название групп частот	Основные способы получения и примеры применения
	частот, Гц	длин волн, м		
Низкочастотные волны	$< 3 \cdot 10^3$	$> 10^5$	Инфранизкие	Генераторы специальных конструкций
			Низкие	
			Промышленные	Генераторы переменного тока; большинство электрических приборов и двигателей
			Звуковые	Звуковые генераторы. Используются в электроакустике (микрофоны), кино, радиовещании
Радиоволны и микроволны	$3 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^{12}$	$10^5 - 10^{-4}$	Длинные	Генераторы электрических колебаний различных конструкций. Используются в телеграфии, радиовещании, телевидении, радиолокации и т. д.
			Средние	
			Короткие	
			Метровые	Метровые и дециметровые волны используются для исследования свойств вещества
			Дециметровые	
			Сантиметровые Миллиметровые Переходные	



Виды излучения	Диапазоны		Название групп частот	Основные способы получения и примеры применения
	частот, Гц	длин волн, м		
Инфракрасное излучение	$10^{12}$ – $4,3 \cdot 10^{14}$	$3 \cdot 10^{-4}$ – $7 \cdot 10^{-7}$	Декамикронные	Излучение нагретых тел (газоразрядные лампы и т. п.). Используются в инфракрасной спектроскопии, при фотографировании в темноте (в инфракрасных лучах)
			Микронные	
Видимое излучение	$4,3 \cdot 10^{14}$ – – $7,5 \cdot 10^{14}$	$7 \cdot 10^{-7}$ – $4 \cdot 10^{-7}$		Излучение молекул и атомов при тепловых и электрических воздействиях
Ультрафиолетовое излучение	$7,5 \cdot 10^{14}$ – – $10^{16}$	$4 \cdot 10^{-7}$ – $3 \cdot 10^{-8}$	Ближние	Излучение Солнца, ртутных ламп и т. п. Используются в ультрафиолетовой микроскопии, медицине
			Крайние	
Рентгеновские лучи	$10^{16}$ – $3 \cdot 10^{18}$	$3 \cdot 10^{-8}$ – $10^{-10}$	Ультрамягкие	Получаются в рентгеновских трубках и других приборах, в которых происходит торможение электронов с энергией более $10^5$ эВ. Используются в медицине, для изучения строения вещества, в дефектоскопии
			Мягкие	
			Жесткие	
Гамма-лучи	$3 \cdot 10^{18}$ – $3 \cdot 10^{29}$	$10^{-10}$ – $10^{-21}$		Возникают при радиоактивных распадах ядер, при торможении электронов энергией более $10^5$ эВ и при других взаимодействиях элементарных частиц. Используются в гамма-дефектоскопии, при изучении свойств вещества

Видимый свет (видимое излучение) – это электромагнитные волны, лежащие в диапазоне длин от 780 нм (красный свет) до 400 нм (фиолетовый свет). Однако видимый свет по своей физической природе ничем не отличается от других электромагнитных волн. Поэтому термин «свет» применяют в более широком смысле. В частности, говоря о скорости света в вакууме  $c$ , под светом понимают не только видимое излучение, а фактически любые электромагнитные волны.

### Контрольные вопросы

1. Что является причиной возникновения вихревого электрического поля? Чему равна циркуляция вихревого электрического поля?
2. Почему вводится понятие тока смещения? Что он собой по существу представляет? Чему равна плотность тока смещения?

3. Запишите обобщенный закон полного тока и поясните его физический смысл.

4. Запишите систему уравнений Максвелла в интегральной форме и поясните ее физический смысл.

5. Запишите полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме и поясните их физический смысл.

6. Что представляют собой материальные уравнения?

7. Какие основные выводы можно сделать из теории Максвелла?

8. Что такое электромагнитная волна?

9. Какие характеристики поля периодически изменяются в бегущей электромагнитной волне?

10. Запишите волновые уравнения для векторов напряженности электрического и магнитного полей, поясните их.

11. Запишите уравнения электромагнитной волны, поясните их.

12. Перечислите основные свойства электромагнитных волн.

13. Как определяется фазовая скорость электромагнитных волн?

14. Дайте определение потока волновой энергии. В каких единицах он измеряется?

15. Дайте определение плотности потока волновой энергии. В каких единицах она измеряется?

16. Чему равна объемная плотность энергии в электромагнитной волне?

17. Что такое вектор Умова – Пойнтинга? В чем его физический смысл?

18. Поясните шкалу электромагнитных волн. Каковы источники излучения разных видов волн? Приведите примеры применения этих видов излучения.

Учебное издание

**Бобрович Олег Георгиевич  
Тульев Валентин Валентинович**

**Ф И З И К А**  
**В 3-х частях**  
**Ч. 2. Электричество  
и магнетизм**

Пособие

Редактор *Е. И. Гоман*  
Компьютерная верстка *Е. В. Ильченко*  
Корректор *Е. И. Гоман*

Издатель:

УО «Белорусский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/227 от 20.03.2014.

Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.