Доклады Национальной академии наук Беларуси

2004 ноябрь—декабрь Том 48 № 6

УДК 004.9

М. И. КУЛАК, С. А. НИЧИПОРОВИЧ, К. Н. НЕСТЕРОВИЧ

ФРАКТАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ИНФОРМАЦИОННОГО ПОТОКА В ЛИНЕЙНЫХ СХЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Белорусский государственный технологический университет

Поступило 14.06.2004

Одной из характерных особенностей современного этапа развития теории управления является необходимость учета усложнения структуры систем, обусловленного ростом размеров и сложности производственных процессов и процессов управления. Все это выдвигает ряд сложных проблем, связанных с фундаментальным обоснованием построения структуры систем управления.

Решение проблемы синтеза структуры систем управления включает решение следующих основных задач: выбор числа уровней (иерархии управления), оптимальное распределение функций между уровнями и звеньями системы (степень централизации) и установление нормы управляемости связанной с ограничением на мощность переработки информации звеньями [1].

При синтезе структуры систем управления важное значение приобретает разработка методов формализованного описания структур управления, а также процессов распространения управляющей информации в этих структурах.

В работе объектом исследования является процесс распространения информации в линейных схемах управления. Как отмечалось в [2], линейные схемы являются базовыми и широко используются, например, в системах организационного управления в подавляющем большинстве отраслей промышленности. Они достаточно распространены также и в системах технического управления [1]. Структура линейной схемы управления с нормой управляемости $\lambda = 2$ представлена на рис. 1.

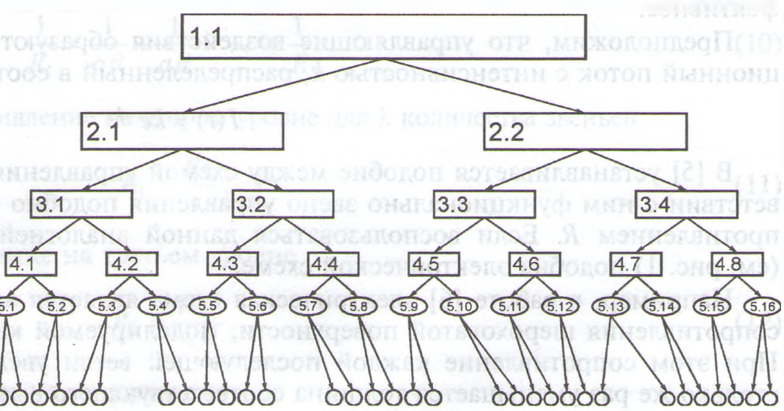

Рис. 1. Линейная схема управления с нормой управляемости $\lambda = 2$

При передаче управляющих воздействий от верхних на нижележащие уровни происходит разделение и дробление информационного потока. В результате если в системе много уровней, то поток может затухнуть и на нижние уровни информация не дойдет или дойдет во фрагментарном виде и не будет пригодна для использования.

Кроме того, необходимость постановки задач нижестоящим звеньям сопряжена с выбором одного из звеньев на этом уровне. Количество информации, которая должна быть дополнительно обработана при этом, равно логарифму от нормы управляемости. Необходимость обработки этой информации будет приводить к увеличению времени решения управленческой задачи. Можно считать, что эта дополнительная информация нейтрализует часть основной информации.

Таким образом, при переходе от уровня к уровню в информационном потоке будут нарастать потери информации. В случае если, например, информация представляет собой чисто текстовое сообщение, то потеря 60% сообщения приводит к тому, что его невозможно расшифровать. Происходит это потому что, как известно, 60% это уровень избыточности большинства европейских языков [3].

В результате можно говорить о том, что в иерархических схемах управления существует «сопротивление» информационному потоку. Цель работы — исследование и описание структуры информационного потока, а также разработка метода расчета этого сопротивления для линейных схем управления.

Процессу дробления информационного потока при переходе на нижележащие уровни схемы управления может быть сопоставлен реальный геометрический объект, имеющий структуру, описываемую канторовским множеством (рис. 2).

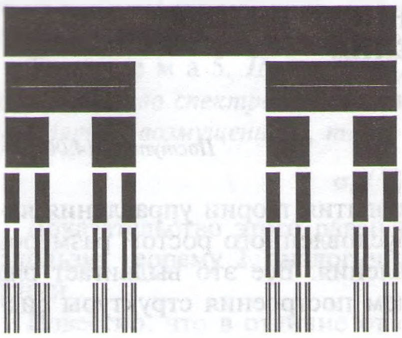

Рис. 2. Триадное канторовское множество с фрактальной размерностью $D = \ln 2/\ln 3 = 0{,}63$

Канторовское множество строится следующим образом [4]. На каждой последующей стадии построения множества удаляется часть исходного отрезка, а оставшиеся два отрезка имеют размер, составляющий $1/a$ ($a > 2$) от длины исходного отрезка. Построенное таким образом канторовское множество является фрактальным объектом, при этом его фрактальная размерность $D < 1$. Каждая новая стадия построения канторовского множества соответствует разветвлению схемы управления.

Если проводить аналогию со схемой управления, то фрактальная размерность канторовского множества D может быть использована в качестве меры «сопротивления» информационному потоку. Поскольку при уменьшении фрактальной размерности D уменьшается «толщина» проводников информационного тока, то «сопротивление» в схеме управления будет возрастать. В практическом плане это означает, что будут возрастать потери при прохождении управленческой информации по уровням схемы управления. Вместе с тем, чем меньше «сопротивление» схемы управления информационному потоку, тем она эффективнее.

Предположим, что управляющие воздействия образуют в системе управления информационный поток с интенсивностью k, распределенный в соответствии с законом Пуассона [5]

$$I(t) = ke^{-kt} . \tag{1}$$

В [5] устанавливается подобие между схемой управления и электрической цепью. В соответствии с ним функционально звено управления подобно участку электрической цепи с сопротивлением R. Если воспользоваться данной аналогией, то линейная схема управления (см. рис. 1) подобна электрической схеме.

Например, в работе [6] электрическая схема является эквивалентной схемой при расчете сопротивления шероховатой поверхности, моделируемой канторовским множеством (рис. 2). При этом сопротивление каждой последующей ветви увеличивается в a раз, поскольку во столько же раз уменьшается толщина соответствующего выступа поверхности.

Уравнение электрической цепи имеет вид

$$U = R_s \times I . \tag{2}$$

В схеме управления (информационной цепи) напряжению U соответствует информационная энтропия Шеннона H [5]. С учетом этого факта подставим (1) в (2)

$$H = R_s ke^{-kt} . \tag{3}$$

В теории управления энтропия системы управления отождествляется с ее сложностью и называется системной сложностью схемы управления $C_0 \equiv H$ [5], которая вычисляется по следующей формуле:

$$C_0 = \sum_{i=1}^{N} \log_2 \lambda_i , \tag{4}$$

где N — общее количество звеньев в схеме управления; λ_i — норма управляемости некоторого звена.

Если норма управляемости в схеме постоянна, то суммарное количество звеньев на всех уровнях управления M равно [2]

$$N = \sum_{m=1}^{M} \lambda^{m-1}. \tag{5}$$

С учетом (5) выражение (4) приобретает вид

$$C_{\text{o}} = \sum_{m=1}^{M} \lambda^{m-1} \log_2 \lambda. \tag{6}$$

Далее усредним (3) по некоторому интервалу наблюдения T

$$\int_0^T C_{\text{o}} dt = R_s k \int_0^T \mathrm{e}^{-kt} dt. \tag{7}$$

Интервал наблюдения выбирается из условия затухания распределения Пуассона (1). После интегрирования (7) преобразуется к виду

$$C_{\text{o}} = R_s \frac{\Delta}{T}, \tag{8}$$

где $\Delta = 1 - \exp(-kT)$.

Далее перейдем к расчету R_s. Общее сопротивление иерархической электрической цепи эквивалентной схеме (1)

$$R_s = R + R_1 + R_2 + \ldots + R_{m-1}, \tag{9}$$

где R — сопротивление звена электрической цепи на первом уровне; m — номер уровня.

При параллельном соединении проводников на втором уровне электрической схемы сопротивление находим по формуле

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{aR} + \frac{1}{aR} + \cdots + \frac{1}{R}. \tag{10}$$

Из (10) получаем общее сопротивление на втором уровне для λ количества звеньев

$$R_1 = \frac{Ra}{\lambda}. \tag{11}$$

По аналогии с (10) сопротивление на третьем уровне

$$R_2 = \frac{Ra^2}{\lambda^2}. \tag{12}$$

Соответственно, сопротивление на m-м уровне

$$R_{m-1} = \frac{Ra^{m-1}}{\lambda^{m-1}}. \tag{13}$$

Подставим в (9) соотношения (11), (12) и (13)

$$R_s = R + R\frac{a}{\lambda} + R\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 + \ldots + R\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{m-1} = R\left[1 + \frac{a}{\lambda} + \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a}{\lambda}\right)^{m-1}\right]. \tag{14}$$

Выражение (14) представляет собой геометрическую прогрессию, сумма первых m-членов которой определяется по формуле

$$R_s = \frac{R\left[\left(\frac{a}{\lambda}\right)^m - 1\right]}{\frac{a}{\lambda} - 1}. \tag{15}$$

По определению [4], фрактальная размерность канторовского множества

$$D = \frac{\ln \lambda}{\ln a}. \tag{16}$$

Преобразуем (16)

$$D = \frac{\ln \lambda}{\ln a} = \frac{\log_\lambda \lambda}{\log_\lambda a} = \frac{1}{\log_\lambda a}. \tag{17}$$

Выразим a из (17)

$$a = \lambda^{\frac{1}{D}}. \tag{18}$$

Подставим (18) в (15)

$$R_s = R\left[\lambda^{\left(\frac{1}{D}-1\right)m} - 1\right] \Big/ \lambda^{\frac{1}{D}-1} - 1. \tag{19}$$

После подстановки (19) выражение (8) преобразуется к следующему виду:

$$Bx^M - x + (1 - B) = 0. \tag{20}$$

При выводе (20) использованы следующие обозначения:

$$B = \frac{R\Delta}{C_o T}, \tag{21}$$

$$x = \lambda^{\frac{1}{D}-1}. \tag{22}$$

После определения корней уравнения (20) фрактальную размерность информационного потока находим по формуле вытекающей из (22)

$$D = \frac{1}{1 + \dfrac{\ln x_m}{\ln \lambda}}, \tag{23}$$

где x_m — корни уравнения (20). Уравнение (20) является алгебраическим уравнением. Степень уравнения определяется количеством уровней управления в схеме M. Количество корней в общем случае равно степени уравнения. Исходя из физического смысла фрактальной размерности канторовского множества D, принимать во внимание можно действительные корни, удовлетворяющие условию $x_m > 1$.

В выражении (21) необходимо учитывать, что сопротивление R обратно пропорционально интенсивности информационного потока k

$$R = \frac{\alpha}{k}. \tag{24}$$

Коэффициент пропорциональности α в формуле (24) находим в результате рассмотрения предельной схемы управления с одним уровнем. Для такой схемы в соответствии с (6) $C_o = \log_2 \lambda$. Общее сопротивление $R_s = R$. В результате из (8) получаем выражение для коэффициента α

$$\alpha = \frac{T \log_2 \lambda}{\Delta}. \tag{25}$$

Выражение (23) позволяет вычислить фрактальную размерность информационного потока D и тем самым определить меру «сопротивления» информационному потоку в линейных схемах управления (см. рис. 1).

Зависимости фрактальной размерности D от изменения интенсивности информационного потока k для линейных четырехуровневых схем с различной нормой управляемости представлена на рис. 3.

Как видно на рис. 3, при увеличении интенсивности потока k его фрактальная размерность D уменьшается. В соответствии с формулой (18) уменьшению D соответствует увеличение a. В результате, чем дальше D уходит от единицы, тем больше в целом «сопротивление» схемы управления. В соответствии со структурой канторовского множества (см. рис. 2) потери информации в схеме можно рассчитать по формуле

$$\delta = 1 - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{m-1}. \qquad (26)$$

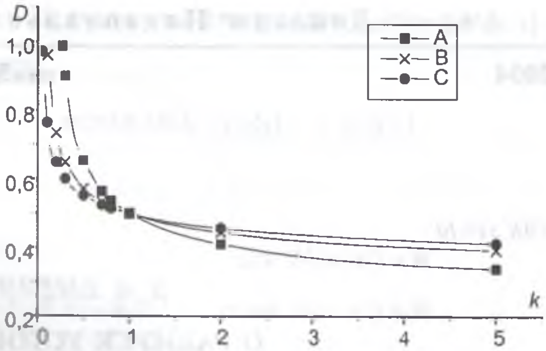

Рис. 3. Зависимость фрактальной размерности от интенсивности информационного потока для схем с нормой управляемости: А — $\lambda = 2$; В — $\lambda = 3$; С — $\lambda = 4$

Результаты расчета зависимости потерь информационного потока от нормы управляемости для четырехуровневых схем представлены на рис. 4.

Из рис. 4 видно, что в информационном потоке можно выделить три зоны. При низкой интенсивности потока $D = 1$ и потерь информации не происходит $\delta = 0$. С увеличением интенсивности поток начинает дробиться и начинается зона его фрактального поведения для которой характерно $D < 1$ и $1 > \delta > 0$. Критическое значение интенсивности зависит от нормы управляемости и составляет для четырехуровневых схем при $\lambda = 2$, $k_c = 0{,}267$; $\lambda = 3$, $k_c = 0{,}100$; $\lambda = 4$, $k_c = 0{,}047$. При значительном дальнейшем увеличении интенсивности поток уменьшается до нуля. Так при $k = 10$ потери $\delta > 0{,}99$, т. е. происходит своеобразное «запирание» схемы и информация не распространяется.

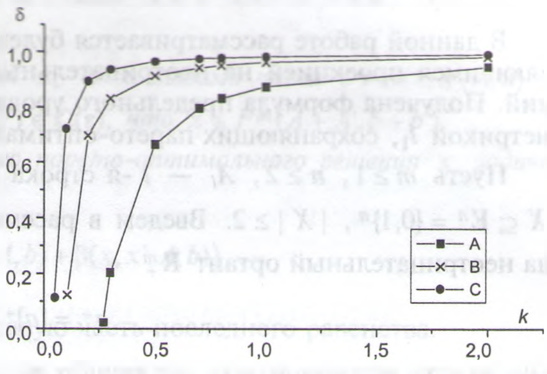

Рис. 4. Зависимость потерь от интенсивности информационного потока для схем с нормой управляемости: А — $\lambda = 2$; В — $\lambda = 3$; С — $\lambda = 4$

В заключение необходимо отметить, что в работе рассмотрены только линейные схемы управления. Представляет интерес исследовать с помощью разработанного подхода и другие более сложные схемы [2]. Построенная фрактальная модель закладывает основы для такого рода исследований.

Литература

1. Ц в и р к у н А. Д. Основы синтеза структуры сложных систем. М., 1982.

2. Т р у с е в и ч Н. Э., К у л а к М. И. // Вестник издательско-полиграфического комплекса Беларуси. 2003. № 1. С. 79—84.

3. В и н о к у р о в а О. А., Е ф и м о в М. В., С а м а р и н Ю. Н. и др. Методы и средства переработки информации в допечатных системах. М., 2003.

4. Ф е д е р Е. Фракталы. М., 1991.

5. В о л к о в а В. Н., Д е н и с о в А. А. Основы теории систем и системного анализа. СПб., 2003.

6. Л и у С., К а п л а н Т., Г р э й П. Отклик шероховатых поверхностей на переменном токе. Фракталы в физике / Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти. М., 1988.

KULAK M. I., NICHIPOROVICH S. A., NESTEROVICH K. N.

THE FRACTAL STRUCTURE OF THE INFORMATION STREAM IN LINEAR MANAGEMENT SCHEMES

Summary

The article is devoted to the development of the method, allowing one to study the information losses in passing through levels of the management scheme. The direct purpose of this work is associated with defining the resistance to an information stream for various management schemes. As a result, the dependence of fractal dimensions on the changes in the intensity of the information stream for linear schemes with various extents of controllability and dependence of the information losses on the controllability extent are obtained.