Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Высшая математика

**Учебно-методическое пособие
для студентов заочного факультета**

В 4-х частях

Часть 3

Минск 2007

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я7
В 93

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом университета

Составители:
Ж. Н. Горбатович, А. С. Семенкова, Е. А. Шинкевич

Рецензенты:
доцент кафедры высшей математики БГЭУ,
кандидат физико-математических наук *С. Я. Гороховик*;
доцент кафедры информационных систем и технологий БГТУ,
кандидат технических наук *Н. Н. Пустовалова*

Высшая математика : учеб.-метод. пособие для студентов
В 93 заочного факультета. В 4 ч. Ч. 3 / сост. Ж. Н. Горбатович [и др.]. – Минск : БГТУ, 2007. – 56 с.

ISBN 978-985-434-741-7

Первая и вторая части учебно-методического пособия вышли в свет в 2005 и 2006 годах. В третьей части приведены основные теоретические сведения, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения по темам «Функции нескольких переменных», «Двойной интеграл», «Тройной интеграл», «Криволинейные интегралы».

Предназначено для студентов заочного факультета.

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я7

ISBN 978-985-434-741-7(Ч. 3)
ISBN 985-434-485-1

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

В 4-х частях
Часть 3

Составители: **Горбатович** Жанна Николаевна
Семенкова Александра Сергеевна
Шинкевич Елена Алексеевна

Редактор М. Ф. Мурашко

Подписано в печать 12.07.2007. Формат $60\times84\ {}^{1}\!/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3,3. Уч.-изд. л. 3,4.
Тираж 800 экз. Заказ .

Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220050. Минск, Свердлова, 13а.
ЛИ № 02330/0133255 от 30.04.2004.

Отпечатано в лаборатории полиграфии учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет».
220050. Минск, Свердлова, 13.
ЛП № 02330/0056739 от 22.01.2004.

Высшая математика

**Учебно-методическое пособие
для студентов заочного факультета**

В 4-х частях

Часть 3

Минск БГТУ 2007

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для оказания помощи студентам заочной формы обучения при самостоятельном изучении следующих тем курса «Функции нескольких переменных», «Двойной интеграл», «Тройной интеграл», «Криволинейные интегралы».

В главе «Функции нескольких переменных» рассматривается дифференцирование функций нескольких переменных, нахождение локальных экстремумов функций нескольких переменных, определение наибольшего и наименьшего значений функции нескольких переменных в заданной области, производная по направлению, градиент, метод наименьших квадратов. В главах «Двойной интеграл», «Тройной интеграл» рассматривается вычисление соответственно двойных и тройных интегралов в декартовой и полярной системах координат и их приложения. Глава «Криволинейные интегралы» содержит материал, позволяющий самостоятельно научиться вычислять криволинейные интегралы по длине дуги и по координатам в зависимости от способа задания линии интегрирования.

Указанный материал расположен в главах, разбитых на параграфы и пункты. В каждом параграфе приводятся соответствующие теоретические сведения (определения основных понятий, уравнения, формулы, правила, методы). Затем следуют примеры решения типовых задач. Далее предлагаются задачи для самостоятельного решения, представленные, как правило, в двух уровнях сложности. В конце каждого параграфа приводятся ответы на все вычислительные задачи.

При изложении материала применяются традиционные обозначения и терминология.

Пособие содержит справочный материал, схемы и графики. Приведен список рекомендуемой литературы. Материал пособия соответствует программе курса «Высшая математика» для студентов заочного факультета.

Данное пособие может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий по перечисленным выше темам, студентами при подготовке к зачетам и экзаменам, выполнении контрольных работ.

Глава 9. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

9.1. Понятие функции нескольких переменных. Частные производные. Полный дифференциал. Частные производные высших порядков

9.1.1. Основные теоретические сведения

Если каждой упорядоченной паре чисел $(x; y)$ из некоторого числового множества $D = \{(x; y)\}$ поставлено в соответствие согласно некоторому правилу f число z из множества Z, то говорят, что на множестве D задана **функция двух переменных** $z = f(x; y)$. При этом переменные x и y называются **независимыми переменными** (или аргументами). Множество $D = \{(x; y)\}$ называется **областью определения**, а множество $Z = \{f(x; y)\}$ – **множеством значений функции**.

Иногда под функцией $z = f(x; y)$ удобно понимать функцию точки $M(x; y)$ с координатами x и y и записывать $z = f(M)$.

Графиком функции $z = f(x; y)$ называется поверхность, образованная множеством точек пространства с координатами $(x; y; f(x; y))$ для всех $(x; y) \in D$ (рис. 9.1).

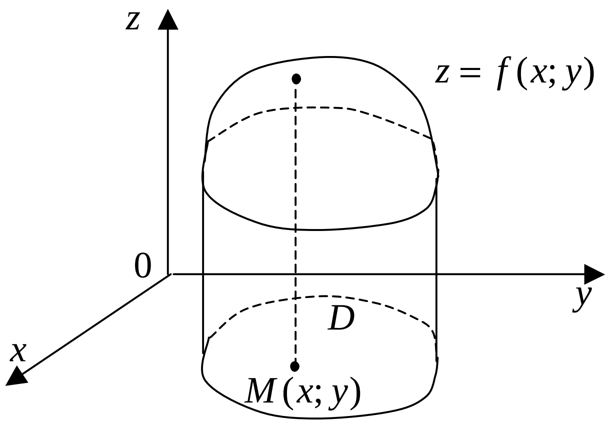

Рис. 9.1

Величина u называется функцией n переменных $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$, если каждой совокупности $(x_1; x_2; \ldots, x_n)$, переменных $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ из некоторой области n-мерного пространства соответствует определенное значение u, что символически записывается $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$.

Линией уровня функции $z = f(x; y)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, в которых функция z принимает постоянное значение, т. е. $f(x; y) = C$, где C – постоянная.

Частным приращением функции $z = f(x; y)$ по независимой переменной x, соответствующим приращению Δx переменной x, называется разность $\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$.

Частным приращением функции $z = f(x; y)$ по независимой переменной y, соответствующим приращению Δy переменной y, называется разность $\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

Полным приращением функции $z = f(x; y)$, соответствующим приращениям аргументов Δx и Δy, называется разность $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

Частной производной первого порядка функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции двух переменных $z = f(x; y)$ по определению частная производная по x равна

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x; y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x},$$

частная производная по y равна

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x; y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

При нахождении частной производной пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, считая все другие аргументы постоянными.

Полным дифференциалом функции $z = f(x; y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy.

Полный дифференциал функции $z = f(x; y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (9.1)$$

Функция, имеющая полный дифференциал в точке M, называется дифференцируемой в этой точке.

Полный дифференциал функции трех переменных вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial z}dz. \qquad (9.2)$$

Частными производными второго порядка функции $z = f(x;y)$ называются частные производные, если они существуют, от ее частных производных первого порядка.

Обозначения частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x;y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x;y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x;y).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков, например:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x;y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy} \text{ и т. д.}$$

Частные производные f''_{xy}, f''_{yx}, f'''_{xxy} называются смешанными производными.

Если $z = f(x;y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0;y_0)$, то в этой точке смешанные производные равны.

9.1.2. Примеры решения задач

Пример 1А. Найти область определения функций.

1) $z = 2x^2 + 3xy - 3y^3$; 2) $z = \lg(xy)$; 3) $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.

Решение.

1) Функция двух переменных $z = 2x^2 + 3xy - 3y^3$ определена при всех x и y. Ее областью определения будет вся плоскость Oxy.

2) Функция $z = \lg(xy)$ определена, если $xy > 0$. Этому неравенству

удовлетворяют координаты всех точек, лежащих в первой и третьей четвертях, а второй системе – координаты всех точек, лежащих в третьей четверти. Значит, областью определения функции $z = \lg(xy)$ является множество всех точек, расположенных в первом и третьем координатных углах.

3) Функция $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ определена, если подкоренное выражение положительно, а именно $4 - x^2 - y^2 > 0$ или $x^2 + y^2 < 4$. Этому неравенству удовлетворяют координаты всех точек, лежащих внутри окружности $x^2 + y^2 = 4$, радиус которой $R = 2$.

Пример 2А. Найти частные производные первого порядка.

1) $z = 5x^3 + 3x^2y^5 - 4y^6$; 2) $z = \ln(3x^2y - 2y^3x + 5)$.

Решение.

1) Считая y постоянной и дифференцируя $z = 5x^3 + 3x^2y^5 - 4y^6$ как функцию переменной x, находим частную производную по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (5x^3)'_x + (3x^2y^5)'_x - (4y^6)'_x = \left[\begin{array}{c}\text{постоянные множители}\\ \text{вынесем за знак производной}\end{array}\right] =$$

$$= 5(x^3)'_x + 3y^5(x^2)'_x - 0 = 5 \cdot 3x^2 + 3y^5 \cdot 2x = 15x^2 + 6xy^5.$$

Считая x постоянной и дифференцируя z как функцию переменной y, находим частную производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (5x^3)'_y + (3x^2y^5)'_y - (4y^6)'_y = 0 + 3x^2(y^5)'_y - 4(y^6)'_y =$$

$$= 3x^2 \cdot 5y^4 - 4 \cdot 6y^5 = 15x^2y^4 - 24y^5.$$

2) Применяя формулу $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}u'$ и правила нахождения частных производных, находим $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{(3x^2y - 2y^3x + 5)'_x}{3x^2y - 2y^3x + 5} = \dfrac{6xy - 2y^3}{3x^2y - 2y^3x + 5}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(3x^2y - 2y^3x + 5)'_y}{3x^2y - 2y^3x + 5} = \frac{3x^2 - 6y^2x}{3x^2y - 2y^3x + 5}.$$

Пример 3А. Найти полный дифференциал функции $z = x^2y^3$.

Решение. Полный дифференциал функции двух переменных находится по формуле $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Найдем частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2y^3)'_x = y^3(x^2)'_x = y^3 \cdot 2x = 2xy^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2y^3)'_y =$ $= x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2y^2$. Тогда $dz = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$.

Пример 4А. Найти частные производные второго порядка функции $z = 4x^5 + 3x^2y + 3xy^2 - y^4$.

Решение. Найдем сначала частные производные первого порядка:

$z'_x = (4x^5 + 3x^2y + 3xy^2 - y^4)'_x = 4(x^5)'_x + 3y(x^2)'_x + 3y^2(x)'_x - 0 =$
$= 20x^4 + 6yx + 3y^2$; $z'_y = 0 + 3x^2 + 6xy - 4y^3 = 3x^2 + 6xy - 4y^3$.

Дифференцируя z'_x, z'_y по переменным x и y, получаем частные производные второго порядка:

$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (20x^4 + 6yx + 3y^2)'_x = 80x^3 + 6y$;
$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (20x^4 + 6yx + 3y^2)'_y = 0 + 6x + 6y = 6x + 6y$;
$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (3x^2 + 6xy - 4y^3)'_x = 6x + 6y$;
$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (3x^2 + 6xy - 4y^3)'_y = 6x - 12y^2$.

Пример 5Б. Пусть $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Решение. Найдем сначала частные производные первого порядка: $\frac{\partial u}{\partial x} = (e^x(x\cos y - y\sin y))'_x = \begin{bmatrix}\text{используем формулу} \\ (uv)' = u'v + uv'\end{bmatrix} =$

$= (e^x)'_x(x\cos y - y\sin y) + e^x(x\cos y - y\sin y)'_x = e^x(x\cos y - y\sin y) +$
$+ e^x(\cos y - 0) = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y)$;

$\frac{\partial u}{\partial y} = (e^x(x\cos y - y\sin y))'_y = e^x(x(\cos y)'_y - (y)'_y \sin y - y(\sin y)'_y) =$
$= e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y)$.

Дифференцируя получившиеся функции, найдем производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=(e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y))'_x=(e^x)'_x(x\cos y-$$
$$-y\sin y+\cos y)+e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)'_x=e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)+$$
$$+e^x(\cos y-0+0)=e^x(x\cos y-y\sin y+2\cos y).$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=(e^x(-x\sin y-\sin y-y\cos y))'_y=e^x(-x(\sin y)'_y-$$
$$-(\sin y)'_y-((y)'_y\cos y+y(\cos y)'_y))=e^x(-x\cos y-\cos y-\cos y+y\sin y)=$$
$$=e^x(-x\cos y-2\cos y+y\sin y).$$

Находим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^x(x\cos y-y\sin y+2\cos y)+e^x(-x\cos y-$
$-2\cos y+y\sin y)=e^x(x\cos y-y\sin y+2\cos y-x\cos y-2\cos y+y\sin y)=$
$=e^x\cdot 0=0$, что и требовалось доказать.

9.1.3. Задачи для самостоятельного решения

А

Найти область определения функций.

1. $z=3x^2+4y^2$. 2. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$. 3. $z=\dfrac{1}{16-x^2-y^2}$.

Построить линии уровня функций.

4. $z=2x+y$. 5. $z=x^2+y^2$. 6. $z=\dfrac{y}{x^2}$.

Найти частные производные первого порядка.

7. $z=x^3+3x^2y-6xy^3+y^5-7$. $z'_x,\ z'_y$ –?

8. $z=r^2\cos\varphi$. $z'_r,\ z'_\varphi$ – ?

9. $z=3x^2+5xy-y^3+1$. $z'_x,\ z'_y$ – ?

10. $z=e^{u/t}$. $z'_u,\ z'_t$ – ?

11. $u=\ln(e^s+e^t)$. $u'_s,\ u'_t$ – ?

12. $u=\mathrm{arctg}(r\varphi)$. $u'_r,\ u'_\varphi$ – ?

13. $z=(7x^3y^2-7y+3x)^3$. $z'_x,\ z'_y$ – ?

14. $z=2^{x/y}$. $z'_x,\ z'_y$ – ?

15. $u=\sin(\varphi t+2\varphi-3t)$. $u'_t,\ u'_\varphi$ – ?

16. $z=xy+\dfrac{x}{y^2}$. $z'_x,\ z'_y$ – ?

17. $z=u^v$. $z'_u,\ z'_v$ – ?

18. $\theta=axe^{-2t}+bt$. $\theta'_x,\ \theta'_t$ – ?

19. $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$. $z'_x,\ z'_y\ -?$

20. $z=\sin\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{x}{y}$. $z'_x,\ z'_y\ -?$

Найти полные дифференциалы функций.

21. $z=\ln(x^4+y^4)$. 22. $r=\sin(\varphi^2+t^2)$. 23. $z=e^{ut}$.

24. $z=\arcsin(xy^3)$. 25. $z=\mathrm{ctg}\dfrac{y}{x}$. 26. $z=5xy^3+3x^2y^5+2$.

Найти все частные производные второго порядка функций.

27. $z=y^3-x^2y+x^3$. 28. $z=x^4-xy+y^2+9x-6y+15$.

29. $z=x\sqrt{y}-y^2-3x^2+6y$. 30. $z=\ln(x-2y)$.

9.1.4. Ответы

А

1. Все точки координатной плоскости Oxy. **2.** Круг, радиуса 3 с центром в начале координат, включая граничную окружность. **3.** Все точки плоскости Oxy, кроме точек, лежащих на окружности с центром в начале координат и радиусом $R=4$. **4.** $2x+y=C$ – прямые, параллельные прямой $2x+y=0$. **5.** $x^2+y^2=C$ – окружности при $C>0$. **6.** $y=Cx^2$ – параболы. **7.** $z'_x=3x^2+6xy-6y^3$, $z'_y=3x^2-18xy^2+5y^4$. **8.** $z'_r=2r\cos\varphi$, $z'_\varphi=-r^2\sin\varphi$. **9.** $z'_x=6x+5y$, $z'_y=5x-3y^2$. **10.** $z'_u=\dfrac{1}{t}e^{u/t}$, $z'_t=-\dfrac{u}{t^2}e^{u/t}$. **11.** $u'_s=\dfrac{e^s}{e^s+e^t}$, $u'_t=\dfrac{e^t}{e^s+e^t}$. **12.** $u'_r=\dfrac{\varphi}{1+r^2\varphi^2}$, $u'_\varphi=\dfrac{r}{1+r^2\varphi^2}$.

13. $z'_x=9(7x^3y^2-7y+3x)^2(7x^2y^2+1)$, $z'_y=3(7x^3y^2-7y+3x)\times$ $\times(14x^3y-7)$. **14.** $z'_x=\dfrac{1}{y}2^{x/y}\ln 2$, $z'_y=-\dfrac{x}{y^2}2^{x/y}\ln 2$.

15. $u'_t=(\varphi-3)\cos(\varphi\, t+2\varphi-3t)$, $u'_\varphi=(t+2)\cos(\varphi\, t+2\varphi-3t)$.

16. $z'_x=y+\dfrac{1}{y^2}$, $z'_y=x-\dfrac{2x}{y^3}$. **17.** $z'_u=vu^{v-1}$, $z'_v=u^v\ln u$.

18. $\theta'_x=ae^{-2t}$, $\theta'_t=-2axe^{-2t}+b$. **19.** $z'_x=\dfrac{-y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$, $z'_y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

20. $z'_x = -\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\cos\frac{x}{y} - \frac{1}{y}\sin\frac{y}{x}\sin\frac{x}{y}$,

$z'_y = \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\cos\frac{x}{y} + \frac{x}{y^2}\sin\frac{y}{x}\sin\frac{x}{y}$. **21.** $dz = \frac{4x^3dx + 4y^3dy}{x^4 + y^4}$.

22. $dr = 2\varphi\cos(\varphi^2 + t^2)d\varphi + 2t\cos(\varphi^2 + t^2)dt$.

23. $dz = te^{ut}du + ue^{ut}dt$. **24.** $dz = \frac{y^3dx + 3xy^2dy}{\sqrt{1 - x^2y^6}}$.

25. $dz = \frac{ydx}{x^2\sin^2\frac{y}{x}} - \frac{dy}{x\sin^2\frac{y}{x}}$. **26.** $dz = y^3(5 + 6xy^2)dx +$

$+15xy^2(1 + xy^2)dy$. **27.** $z''_{xx} = -2y + 6x$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -2x$, $z''_{yy} = 6y$.

28. $z''_{xx} = 12x^2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -1$, $z''_{yy} = 2$. **29.** $z''_{xx} = -6$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$,

$z''_{yy} = -\frac{x}{4\sqrt{y^3}} - 2$. **30.** $z''_{xx} = -\frac{1}{(x-2y)^2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{2}{(x-2y)^2}$,

$z''_{yy} = \frac{-4}{(x-2y)^2}$.

9.2. Локальные экстремумы функции двух переменных

9.2.1. Основные теоретические сведения

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой области D и $(x_0;y_0)$ – внутренняя точка этой области.

Точка $P_0(x_0;y_0)$ называется **точкой локального максимума (минимума) функции** $z = f(x;y)$, если существует окрестность точки $P_0(x_0;y_0)$ такая, что для всех точек $P(x;y)$, принадлежащих ей, выполняется неравенство $f(x_0;y_0) > f(x;y)$ ($f(x_0;y_0) < f(x;y)$).

Значение $f(x_0;y_0)$ называется **локальным максимумом (минимумом)**.

Точки максимума и минимума называются точками локального экстремума функции, а максимумы и минимумы функции – локальными экстремумами функции.

В области D функция может иметь несколько локальных экстремумов или не иметь ни одного.

Необходимые условия существования локального экстремума

Если в точке $P_0(x_0;y_0)$ дифференцируемая функция $z=f(x;y)$ имеет локальный экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0;y_0)=0$, $f'_y(x_0;y_0)=0$.

Функция может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует.

Если функция $z=f(x;y)$ имеет в точке $P_0(x_0;y_0)$ локальный экстремум, то ее полный дифференциал в этой точке равен нулю или не существует.

Точки, в которых частные производные первого порядка равны нулю, называются **стационарными** точками. Точки, в которых частные производные первого порядка равны нулю или не существуют, называются **критическими** точками.

Достаточные условия существования локального экстремума

Пусть в стационарной точке $P_0(x_0;y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $z=f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков. Вычислим в точке $P_0(x_0;y_0)$ значения частных производных второго порядка

$$A=f''_{xx}(x_0;y_0),\ B=f''_{xy}(x_0;y_0),\ C=f''_{yy}(x_0;y_0).$$

Обозначим

$$\Delta=\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0;y_0) & f''_{xy}(x_0;y_0) \\ f''_{xy}(x_0;y_0) & f''_{yy}(x_0;y_0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2.$$

Тогда

1) если $\Delta>0$, то функция $z=f(x;y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ имеет локальный экстремум, а именно:

а) $P_0(x_0;y_0)$ – точка локального максимума, если $A=f''_{xx}(x_0;y_0)<0$;

б) $P_0(x_0;y_0)$ – точка локального минимума, если $A=f''_{xx}(x_0;y_0)>0$;

2) если $\Delta<0$, то функция $z=f(x;y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ не имеет

экстремума;
3) если $\Delta = 0$, то экстремум в точке $P_0(x_0; y_0)$ может быть, а может и не быть. Необходимы дополнительные исследования.

9.2.2. Примеры решения задач

Пример 1Б. Исследовать на экстремум функцию $z = 10x + 11y - x^2 - xy - y^2$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка данной функции: $z'_x = 10 - 2x - y$, $z'_y = 11 - x - 2y$.

Найдем стационарные точки, решая систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} 10 - 2x - y = 0, \\ 11 - x - 2y = 0. \end{cases}$ Выразим y из первого уравнения и подставим во второе: $y = 10 - 2x$, $11 - x - 2(10 - 2x) = 0$, $11 - x - 20 + 4x = 0$, $3x = 9$, $x = 3$. Тогда $y = 10 - 2 \cdot 3 = 4$. Функция имеет одну стационарную точку $P_0(3;4)$.

Найдем производные второго порядка:

$z''_{xx}(x; y) = (10 - 2x - y)'_x = -2$, $z''_{xy}(x; y) = (10 - 2x - y)'_y = -1$, $z''_{yy}(x; y) = (11 - x - 2y)'_y = -2$. В точке $P_0(3;4)$ $A = z''_{xx}(3; 4) = -2$, $B = z''_{xy}(3; 4) = -1$, $C = z''_{yy}(3; 4) = -2$, а тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Значит, в точке $P_0(3;4)$ экстремум есть. Так как $A = z''_{xx}(3; 4) = -2 < 0$, то $P_0(3;4)$ – точка локального максимума и $z_{\max}(3; 4) = 10 \cdot 3 + 11 \cdot 4 - 3^2 - 3 \cdot 4 - 4^2 = 37$.

Пример 2Б. Исследовать на экстремум функцию $z = 4 - 4xy^2 - 24xy - x^2 - 32x$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка данной функции: $z'_x = -4y^2 - 24y - 2x - 32$, $z'_y = -8xy - 24x$.

Найдем стационарные точки, решая систему уравнений

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases} \begin{cases} -4y^2 - 24y - 2x - 32 = 0, \\ -8xy - 24x = 0. \end{cases} \begin{cases} 2y^2 + 12y + x + 16 = 0, \\ x(y+3) = 0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности систем:

$$1) \begin{cases} x = 0, \\ 2y^2 + 12y + x + 16 = 0, \end{cases} \text{ или } \quad 2) \begin{cases} y + 3 = 0, \\ 2y^2 + 12y + x + 16 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y^2 + 6y + 8 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -3, \\ x = -(2 \cdot 9 - 36 + 16) = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = -2, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = -4. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = -3. \end{cases}$$

Получили три стационарные точки: $P_1(0;-2)$, $P_2(0;-4)$, $P_3(2;-3)$. Найдем производные второго порядка: $z''_{xx} = -2$, $z''_{xy} = -8y - 24$, $z''_{yy} = -8x$.

В точке $P_1(0;-2)$ $A = z''_{xx}(0;-2) = -2$, $B = z''_{xy}(0;-2) = = 16 - 24 = -8$, $C = z''_{yy}(0;-2) = 0$, тогда $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} = -64 < 0$. Согласно достаточным условиям, в точке $P_1(0;-2)$ функция экстремума не имеет.

В точке $P_2(0;-4)$ $A = z''_{xx}(0;-4) = -2$, $B = z''_{xy}(0;-4) = = 32 - 24 = 8$, $C = z''_{yy}(0;-4) = 0$, тогда $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -64 < 0$. Согласно достаточным условиям, в точке $P_2(0;-4)$ функция экстремума не имеет.

В точке $P_3(2;-3)$ $A = z''_{xx}(2;-3) = -2$, $B = z''_{xy}(2;-3) = = 24 - 24 = 0$ $C = z''_{yy}(2;-3) = -16$, тогда $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -16 \end{vmatrix} = 32 > 0$. Согласно достаточным условиям, в точке $P_3(2;-3)$ функция имеет экстремум. Так как $A = z''_{xx}(2;-3) = -2 < 0$, то $P_3(2;-3)$ – точка локального максимума и $z_{\max}(2;-3) = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - 24 \cdot 2 \cdot (-3) - 4 - 64 = 8$.

9.2.3. Наименьшее и наибольшее значения (глобальные экстремумы) функции двух переменных в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D. Тогда в области D она достигает своих наименьшего m и наибольшего M значений. Эти значения достигаются либо во внутренних точках области D, либо в точках, лежащих на границе области D.

Точки, в которых функция принимает наименьшее и наибольшее значения в ограниченной замкнутой области, называются точками глобального экстремума.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x; y)$ в области D

1. Найти все критические точки функции $z = f(x; y)$, принадлежащие области D, и вычислить значения функции в этих точках.
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x; y)$ на границе D.
3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наименьшее m и наибольшее M.

Пример 1Б. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 - 2x - 18y + 4$ в замкнутой области D, ограниченной осью Oy, прямыми $y = 4$ и $y = x$.

Решение. Построим область D (рис. 9.2) – треугольник OAB.

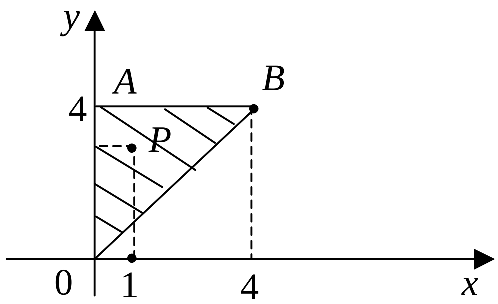

Рис. 9.2

1. Определим критические точки, лежащие внутри треугольника OAB. Для этого найдем частные производные: $z'_x = 2x - 2$,

$z'_y = 6y - 18$. Приравняв частные производные к нулю, получим систему уравнений $\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 6y - 18 = 0. \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1, \\ y = 3. \end{cases}$ Итак, стационарная точка $P(1;3)$ принадлежит области D. Находим значение функции в этой точке $z(1;3) = 1 + 3 \cdot 9 - 2 - 18 \cdot 3 + 4 = -24$.

2. Исследуем функцию на границе области D, т. е. на отрезках OA, AB, OB. На отрезке OA $x = 0$, $z(0;y) = 3y^2 - 18y + 4$, $y \in [0;4]$. Найдем критические точки функции одной переменной $z(0;y) = 3y^2 - 18y + 4$ на отрезке OA, решив уравнение $z'_y = 6y - 18 = 0$. Отсюда $y = 3 \in [0;4]$ – критическая точка. $z(0;3) = 3 \cdot 9 - 18 \cdot 3 + 4 = -23$. Найдем значения функции $z(0;y)$ на концах отрезка OA: $z(O) = z(0;0) = 4$, $z(A) = z(0;4) = 3 \cdot 16 - -18 \cdot 4 + 4 = -20$.

На отрезке AB $y = 4$, $z(x;4) = x^2 - 2x - 20$, $x \in [0;4]$. Находим критические точки функции $z(x;4) = x^2 - 2x - 20$ на промежутке $x \in [0;4]$ из условия $\frac{dz}{dx} = 2x - 2 = 0$, $x = 1 \in [0;4]$ – критическая точка. Значение функции в этой точке $z(1;4) = 1 - 2 - 20 = -21$. Найдем значения функции на концах отрезка AB: $z(B) = z(4;4) = = 4^2 - 2 \cdot 4 - 20 = -12$, $z(A)$ – вычислено ранее.

На отрезке OB $y = x$, $z = 4x^2 - 20x + 4$, $x \in [0;4]$. $z'_x = 8x - 20$, $x = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \in [0;4]$ – критическая точка. Значения функции в этой точке $z\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right) = 4 \cdot \frac{25}{4} - 20 \cdot \frac{5}{2} + 4 = -21$. Значения функции на концах отрезка OB: $z(O)$ и $z(B)$ – вычислены ранее.

Из полученных значений функции выбираем наименьшее $m = -24$ и наибольшее $M = 4$.

Точка $P_1(1;3)$ – точка глобального минимума, $P_2(0;0)$ – точка глобального максимума данной в условии функции в заданной области D.

9.2.4. Условный экстремум

Условным экстремумом функции $z = f(x;y)$ называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x;y) = 0$ (уравнение связи).

1. Если уравнение связи можно однозначно разрешить относительно переменной y (или x), т. е. выразить y как функцию x: $y = \psi(x)$, то, подставив в аналитическое выражение функции $z = f(x;y)$ вместо y функцию $y = \psi(x)$, получим функцию $z = f(x;\psi(x))$ одной переменной x. Исследуем ее на экстремум. Тем самым решится вопрос об условном экстремуме функции $z = f(x;y)$, так как условие связи $\varphi(x;y) = 0$ будет уже учтено.

2. Чтобы найти условный экстремум функции $z = f(x;y)$ при наличии уравнения связи $\varphi(x;y) = 0$ составляют функцию Лагранжа $F(x;y) = f(x;y) + \lambda\varphi(x;y)$, где λ – неопределенный постоянный множитель, и исследуют ее на экстремум.

Необходимое условие экстремума функции $u = F(x;y)$ имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x;y) = 0. \end{cases} \tag{9.3}$$

Из этой системы трех уравнений находятся неизвестные x, y, λ, тем самым находятся стационарные точки.

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании исследования знака второго дифференциала функции Лагранжа $d^2F(x;y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 x} d^2x + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dxdy + \dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 y} d^2y$ для найденных значений x, y, λ из системы (9.3) при условии, что dx и dy связаны уравнением $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$ ($dx^2 + dy^2 \neq 0$).

А именно, функция $z = f(x;y)$ имеет условный максимум, если $d^2F < 0$, и условный минимум, если $d^2F > 0$. В частности, если дискриминант Δ для функции $u = F(x; y)$ в стационарной точке положителен, то в этой точке имеется условный максимум функции $z = f(x; y)$ при $A < 0$ (или $C < 0$) и условный минимум при $A > 0$ (или $C > 0$).

Пример 1А. Найти экстремум функции $z = e^{2xy}$ при условии, что x и y связаны соотношением $x + y = 2$.

Решение. Из уравнения связи $x + y = 2$ выразим $y = 2 - x$ и подставим в выражение для функции z: $z = e^{2x(2-x)}$ или $z = e^{4x-2x^2}$. Получим функцию одной переменной x. Исследуем ее на экстремум. Найдем $z' = e^{4x-2x^2}(4-4x)$. $z' = 0$ при $4 - 4x = 0$, следовательно, $x = 1$ – критическая точка.

Знак z' $\quad + \quad$ $\quad - \quad$

$z(x)$ $\quad \nearrow \quad$ max $\quad \searrow \quad$ x

В точке $x = 1$ функция $z(x)$ имеет максимум. А тогда данная функция $z = e^{2xy}$ имеет в точке (1;1) условный максимум. Значение функции $z_{\max}(1;1) = e^2$.

Пример 2Б. Найти экстремум функции $z = x + 2y$ при условии, что x и y связаны соотношением $x^2 + y^2 = 5$.

Решение. Геометрически задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений аппликаты z плоскости $z = x + 2y$ для точек пересечения ее с цилиндром $x^2 + y^2 = 5$.

Составляем функцию Лагранжа

$$F(x; y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Имеем $\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2\lambda y$. Система (9.3) имеет вид

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим при $\lambda = -\frac{1}{2}$ стационарную точку функции $F(x; y)$, $M_1(1; 2)$, при $\lambda = \frac{1}{2}$ – стационарную точку функции

$F(x;y)$, $M_2(-1;-2)$. Найдем $\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = 2\lambda$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 y} = 2\lambda$ и составим для функции $F(x;y)$ дискриминант Δ, учитывая, что $A = \left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 x}\right|_{M_1} = -1$, $B = 0$, $C = \left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 y}\right|_{M_1} = -1$, $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$ – экстремум есть и, так как $A < 0$, то $M_1(1;\,2)$ – точка условного максимума для функции $z = x + 2y$.

Аналогично проверяется, что точка $M_2(-1;-2)$ является точкой условного минимума.

$z_{\max}(1;2) = 1 + 4 = 5$, $z_{\min}(-1;-2) = -1 - 4 = -5$.

9.2.5. Метод наименьших квадратов

При исследовании физических, химических и других процессов приходится находить аналитическое выражение зависимости между различными величинами на основе экспериментальных данных. Функции, полученные в результате решения такого рода задач, называются **эмпирическими** или **аппроксимирующими**.

Пусть известны результаты измерений $(x_i; y_i)$, $i = \overline{1,n}$, величины y при различных значениях величины x, представленные в виде таблицы

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\ldots$	y_i	$\ldots$	y_n

или в виде точечной диаграммы (рис. 9.3).

Требуется по таблице значений $(x_i; y_i)$ подобрать эмпирическую функцию $y = \varphi(x)$, удовлетворяющую условиям $y_i = \varphi(x_i)$, $i = \overline{1,n}$.

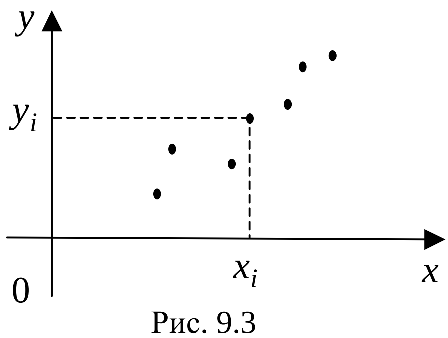

Рис. 9.3

При подборе аппроксимирующей функции $y = \varphi(x)$ следует учитывать характер расположения экспериментальных точек $(x_i; y_i)$,

$i = \overline{1,n}$, на точечной диаграмме.

Если точки $(x_i; y_i)$, $i = \overline{1,n}$ располагаются на точечной диаграмме вдоль прямой, то рекомендуется выбирать линейную функцию $y = ax + b$, зависящую от двух параметров a и b, которые можно найти с использованием метода наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов состоит в том, что параметры a и b выбранной зависимости $y = ax + b$ находятся из условия минимума суммы квадратов отклонений значений y_i, $i = \overline{1,n}$, полученных в результате эксперимента, от ординат аппроксимирующей функции $y = ax + b$:

$$S = S(a;b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 .$$

Для нахождения минимума функции $S = S(a;b)$, являющейся функцией двух переменных a и b, необходимо приравнять нулю частные производные этой функции по a и b:

$$\begin{cases} S'_a = 0, \\ S'_b = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (2(y_i - ax_i - b)(-x_i)) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (2(y_i - ax_i - b)(-1)) = 0. \end{cases}$$

После преобразований получаем систему

$$\begin{cases} nb + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \end{cases} \qquad (9.4)$$

решением которой являются искомые параметры a и b.

Пример 1А. Экспериментально получены шесть значений искомой функции $y = f(x)$ при шести значениях аргумента, которые записаны в таблице. Методом наименьших квадратов найти функцию $y = f(x)$ в виде $y = ax + b$.

x	1	2	4	5	6	8
y	–4,3	–1	5	8,5	12	18

Решение. Находим $\sum\limits_{i=1}^{6} x_i = 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 8 = 26$,

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 1 + 4 + 16 + 25 + 36 + 64 = 146,$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i = -4{,}3 - 1 + 5 + 8{,}5 + 12 + 18 = 38{,}2,$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = -4{,}3 - 2 + 20 + 42{,}5 + 72 + 144 = 272{,}2.$$

Подставляя полученные значения сумм в систему (9.4), получим $\begin{cases} 6b + 26a = 38{,}2, \\ 26b + 146a = 272{,}2, \end{cases}$ т. е. $a = 3{,}2$, $b = -7{,}5$. Следовательно, искомая функция $y = 3{,}2x - 7{,}5$.

Рис. 9.4

На рис.9.4 изображена линейная зависимость $y = 3{,}2x - 7{,}5$.

9.2.6. Задачи для самостоятельного решения

А

Найти стационарные точки функций.

1. $z = 3x^2 + 6xy + y^2 - 12x$.
2. $z = xy(6 - x - y)$ ($x > 0$, $y > 0$).
3. $z = 8(x - y) - x^2 - y^2$.
4. $z = 5x^2 + 2(y - 3)^2$.

5. Показать, что точка $P(3;3)$ является точкой локального максимума функции $z = 9xy - x^2y - xy^2$.

6. Показать, что точка $P(1;-1)$ является точкой локального минимума функции $z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$.

7. Найти локальный экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

8. Найти точки локального экстремума функции $z = (x+5)^2 + (y-1)^2$.

9. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны соотношением $x - 2y - 5 = 0$.

10. Найти экстремум функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны соотношением $2x + 3y - 5 = 0$.

11. Полагая, что x и y связаны зависимостью $y = ax + b$, определить коэффициенты a и b по методу наименьших квадратов, если данные опыта представлены следующей таблицей значений переменных:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	–0,4	0,2	1	1,7	2	2

Б

12. Исследовать на экстремум функцию двух переменных $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

13. Разложить положительное число a на три положительных слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

14. Найти экстремум функции $z = 2xy$ при условии, что x и y связаны соотношением $x^2 + y^2 = 8$.

15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x - 2y - 3$ в области $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le x + y \le 1$.

16. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ в замкнутой области, ограниченной осями координат и прямой $x + y = -5$.

9.2.7. Ответы

А

1. $(-1;3)$. **2.** $(2;2)$. **3.** $(4;-4)$ **4.** $(0;3)$. **7.** $z_{\min}(0;3) = -9$. **8.** $(-5;1)$ – точка минимума, $z_{\min}(-5;1) = 0$. **9.** $z_{\min}(1;-2) = 5$.

10. $z_{\max}\left(\frac{5}{4};\frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}$. **11.** $y = 0{,}62x + 0{,}89$.

Б

12. $z_{\min}(0;0)=0$, $z_{\max}\left(-\frac{5}{3};0\right)=\frac{125}{27}$. **13.** Все слагаемые равны между собой. **14.** $z_{\max}(2;2)=z_{\max}(-2;-2)=8$; $z_{\min}(-2;2)=z_{\min}(2;-2)=-8$. **15.** $z_{\text{наиб}}(1;0)=-2$, $z_{\text{наим}}(0;1)=-5$. **16.** $z_{\text{наиб}}(0;-5)=41$, $z_{\text{наим}}(-2;-1)=-3$.

9.3. Производная по направлению. Градиент

9.3.1. Основные теоретические сведения

Производной функции $z=f(x;y)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{l}=\overrightarrow{MM_0}$ называется предел (если он существует) отношения приращения функции $\Delta z=f(M_1)-f(M)$ к величине перемещения $|MM_1|$, когда последнее стремится к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{|MM_1|\to 0}\frac{f(M_1)-f(M)}{|MM_1|}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}, \text{ где } \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

Если функция $z=f(x;y)$ дифференцируема, то производная в данном направлении вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta, \tag{9.5}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

В случае функции трех переменных $u=u(x;y;z)$ производная в данном направлении $\vec{l}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{9.6}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}(x_l;y_l;z_l)$, определяемые по формулам

$$\cos\alpha=\frac{x_l}{\sqrt{x_l^2+y_l^2+z_l^2}},\ \cos\beta=\frac{y_l}{\sqrt{x_l^2+y_l^2+z_l^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z_l}{\sqrt{x_l^2+y_l^2+z_l^2}}. \tag{9.7}$$

Производная по направлению $\vec{l}$ характеризует скорость изменения функции в точке M по этому направлению. Если $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, то функция $u = u(x; y; z)$ возрастает в направлении $\vec{l}$, если $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$, то функция $u = u(x; y; z)$ убывает в направлении $\vec{l}$. Величина $\left|\frac{\partial u}{\partial l}\right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции $u = u(x; y; z)$ в направлении $\vec{l}$ в точке M: чем больше $\left|\frac{\partial u}{\partial l}\right|$, тем быстрее изменяется функция.

Градиентом функции $z = f(x; y)$ называется вектор, имеющий своими координатами значения частных производных функции z в точке $M(x; y)$:

$$\text{grad}z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}. \qquad (9.8)$$

Градиент функции и производная в направлении вектора $\vec{l}$ связаны формулой

$$\frac{\partial z}{\partial l} = np_{\vec{l}}\,\text{grad}z. \qquad (9.9)$$

Градиент указывает направление наибыстрейшего роста функции $z = f(x; y)$ в данной точке. Производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ в направлении градиента имеет наибольшее значение, равное

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\text{наиб}} = |\text{grad}z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}. \qquad (9.10)$$

Для функции трех переменных $u = u(x; y; z)$

$$\text{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \qquad (9.11)$$

9.3.2. Примеры решения задач

Пример 1А. Найти производную функции $z = 3x^2y + 2xy^2$ в точке $M(2;3)$ по направлению вектора $\vec{l} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Решение. Используем формулу (9.5): $\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$. Направляющие косинусы вектора $\vec{l}$ находим по формулам (9.7), учитывая $z_l=0$: $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{4}{5}$.

Находим частные производные функции $z_x'=6xy+2y^2$, $z_y'=3x^2+4xy$. Значения частных производных в точке $M(2;3)$: $z_x'(2;3)=6\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3^2=54$, $z_y'(2;3)=3\cdot 2^2+4\cdot 2\cdot 3=36$. Производная по направлению $\frac{\partial z}{\partial l}=54\cdot\frac{3}{5}+36\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{18}{5}$.

Пример 2А. Дана функция $z=x^2-3xy+y^5$. Найти градиент этой функции и его величину в точке $(-1;1)$.

Решение. Находим градиент функции по формуле (9.8): $\text{grad}z=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$. Частные производные заданной функции $z_x'=2x-3y$, $z_y'=-3x+5y^4$. Найдем значения частных производных в указанной точке $(-1;1)$: $z_x'(-1;1)=2\cdot(-1)-3\cdot 1=-5$, $z_y'(-1;1)=3+5=8$. Величина градиента $|\text{grad}z|=\sqrt{(-5)^2+8^2}=\sqrt{89}$.

Пример 3Б. Найти направление максимального роста функции $z=\frac{4x^2}{y}+5y^2$ в точке $M(3;2)$. Найти наибольшее из значений производных по разным направлениям в точке A.

Решение. Направление максимального роста функции определяется градиентом функции. Поэтому найдем частные производные $z_x'=\frac{8x}{y}$, $z_y'=-\frac{4x^2}{y^2}+10y$ и их значения в точке $M(3;2)$: $z_x'(3;2)=\frac{8\cdot 3}{2}=12$, $z_y'(3;2)=-\frac{4\cdot 9}{4}+10\cdot 2=11$. $\text{grad}z=12\vec{i}+11\vec{j}$ – направление наибыстрейшего роста функции. Наибольшее значение производной в точке A равно: $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\text{наиб}}=|\text{grad}z|=\sqrt{12^2+11^2}=\sqrt{265}$.

9.3.3. Задачи для самостоятельного решения

А

1. Найти производную функции $z = \ln(x^3 + y^2)$ в точке $M(2;-1)$ в направлении вектора $\vec{l} = 12\vec{i} - 5\vec{j}$.

2. Найти производную функции $z = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$ в точке $M(4;1)$ по направлению $\overrightarrow{MM_1}$, где $M_1(8;-2)$.

3. Найти производную функции $u = xy + yz + zx$ в точке $M(2;1;3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(5;5;15)$.

4. Найти градиент функции $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ в точке $M(5;3)$.

5. Найти градиент функции $z = x^3 - y^3 + 2xy$ в точке $M(1;2)$.

Б

6. Найти производную функции $u = x^2 - 3yz + 10$ в точке $M(1;2;-1)$ в направлении, составляющем одинаковые углы со всеми координатными осями.

7. Определить направление наибыстрейшего возрастания функции $z = x^3y^2 - 5x$ в точке $M(-1;-1)$ и вычислить значение производной по этому направлению.

8. Найти производную функции $z = \ln(x + y)$ в точке $M(1;2)$, принадлежащей параболе $y^2 = 4x$, по направлению этой параболы.

9.3.4. Ответы

А

1. $\dfrac{154}{117}$. **2.** $\dfrac{4}{5}$. **3.** $\dfrac{68}{13}$ **4.** $\dfrac{5}{4}\vec{i} - \dfrac{3}{4}\vec{j}$. **5.** $7\vec{i} - 10\vec{j}$.

Б

6. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **7.** $\mathrm{grad} z = -2\vec{i} + 2\vec{j}$; $\sqrt{8}$. **8.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Глава 10. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

10.1. Двойной интеграл

10.1.1. Основные теоретические сведения

Обобщением определенного интеграла на случай функций двух переменных является так называемый двойной интеграл.

Пусть D – замкнутая, ограниченная линией L, область плоскости Oxy, в которой задана непрерывная функция двух переменных $z = f(x; y)$. Разобьем область D на n «элементарных областей» $D_1, D_2, \dots, D_n$, площади которых обозначим через $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ (рис. 10.1). В каждой области D_i $(i = \overline{1, n})$ выберем произвольную точку $C_i(x_i; y_i)$ и составим сумму

$$\begin{aligned} S_n &= f(C_1)\Delta S_1 + f(C_2)\Delta S_2 + \dots + f(C_n)\Delta S_n = \\ &= f(x_1; y_1)\Delta S_1 + f(x_2; y_2)\Delta S_2 + \dots + f(x_n; y_n)\Delta S_n = \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i . \end{aligned} \tag{10.1}$$

Эта сумма называется **интегральной суммой** функции $z = f(x; y)$ в области D.

Наибольшее расстояние между точками области называется диаметром области. Обозначим через d наибольший из диаметров областей D_i $(i = \overline{1, n})$. Тогда стремление d к нулю будет означать измельчение разбиения области D на «элементарные области» D_i (и, как следствие, стремление n к ∞).

Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм S_n при $d \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения области D на «элементарные области» D_i, ни от выбора точек $C_i(x_i; y_i)$, то этот предел называется двойным интегралом от функции $f(x; y)$ по области D и обозначается

$$\iint_D f(x; y)\,dS \text{ или } \iint_D f(x; y)\,dx\,dy,$$

$$\iint_D f(x; y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{(n\to\infty) \\ \max d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i .$$

В таком случае говорят, что функция $f(x;y)$ интегрируема в области D. При этом функция $f(x;y)$ называется подынтегральной функцией, область D – областью интегрирования, $dxdy$ (или dS) – элементом площади.

Если функция $f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема в этой области.

Геометрический и механический смысл двойного интеграла

Пусть $f(x;y) \geq 0$ и непрерывна в области D. Тогда интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dS$ равен объему цилиндрического тела, ограниченного снизу областью D, с боков – цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, направляющей служит линия L, и сверху тело ограничено поверхностью $z = f(x;y)$ (рис. 10.2):

$$V = \iint\limits_D f(x;y)dxdy. \tag{10.2}$$

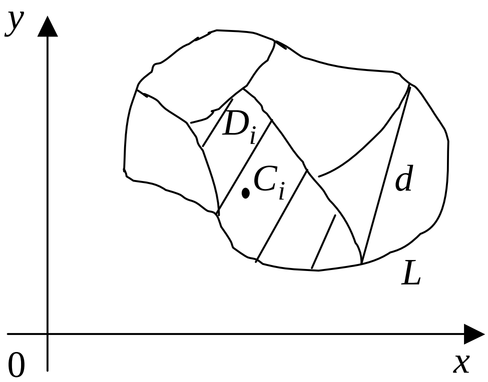

Рис. 10.1

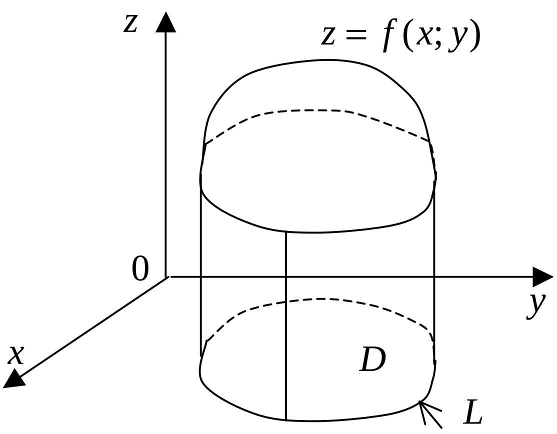

Рис. 10.2

Пусть поверхностная плотность плоской пластины D $\gamma = \gamma(x;y)$ есть непрерывная функция от x и y. Тогда масса пластины m численно равна двойному интегралу от плотности:

$$m = \iint\limits_D \gamma(x;y)dxdy.$$

Свойства двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла.

10.1.2. Вычисление двойного интеграла

Предположим, что область D (рис. 10.3) можно задать в виде системы неравенств $\begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y(x) \le y_2(x). \end{cases}$

Геометрически это означает, что если проводить вертикальные прямые $x = x_i$ ($a < x_i < b$) через внутренние точки области D, то они пересекают границу области в точках M_i (точках «входа») и точках N_i (точках «выхода»), причем точки M_i принадлежат кривой $y = y_1(x)$, а точки N_i принадлежат кривой $y = y_2(x)$. Тогда

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy. \qquad (10.3)$$

Если же область D (рис. 10.4) можно задать в виде системы неравенств $\begin{cases} c \le y \le d, \\ x_1(y) \le x(y) \le x_2(y), \end{cases}$ то

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx. \qquad (10.4)$$

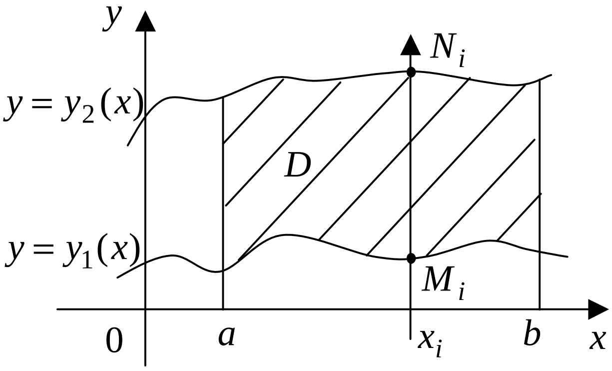

Рис. 10.3

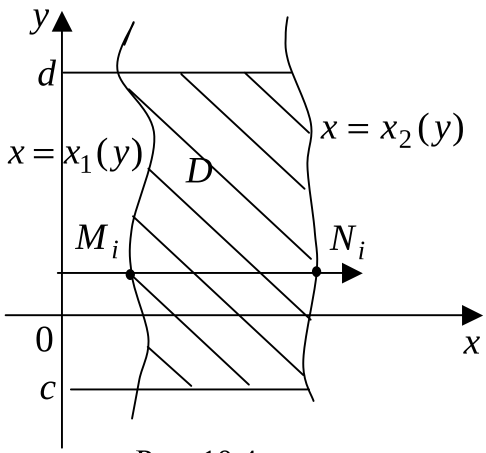

Рис. 10.4

Интегралы, стоящие в правых частях равенств (10.3) и (10.4), называются **повторными** (или двукратными). Они отличаются друг от друга порядком интегрирования. Интеграл, содержащий функцию $f(x;y)$, называется **внутренним** интегралом, другой – **внешним**. При вычислении повторных интегралов следует брать сначала внутренний интеграл, при этом переменная, не стоящая под знаком дифференциала, считается постоянной. Затем вычисляется внешний интеграл. Каждый из них вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница как определенный интеграл.

Области, не представимые в описанном выше виде, следует разбить на конечное число таких областей при помощи прямых, параллельных координатным осям.

10.1.3. Примеры решения задач

Пример 1А. Вычислить повторный интеграл $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy dy$.

Решение. Сначала вычислим внутренний интеграл по формуле Ньютона–Лейбница. Его результат будет подынтегральной функцией для внешнего интеграла.

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} xy dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\int_0^{x^2} y dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{x^2} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x \left(\frac{x^4}{2} - 0 \right) dx = \int_0^1 \frac{x^5}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{2} \left. \frac{x^6}{6} \right|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Пример 2А. Вычислить повторный интеграл $\int_0^2 dy \int_0^y (x^2 + 2y) dx$.

Решение. $\int_0^2 dy \int_0^y (x^2 + 2y) dx = \int_0^2 \left(\int_0^y (x^2 + 2y) dx \right) dy =$

$$= \int_0^2 \left. \left(\frac{x^3}{3} + 2yx \right) \right|_0^y dy = \int_0^2 \left(\frac{y^3}{3} + 2y^2 - 0 \right) dy = \frac{1}{3} \int_0^2 y^3 dy + 2 \int_0^2 y^2 dy =$$

$$= \frac{1}{3} \left. \frac{y^4}{4} \right|_0^2 + \left. \frac{2y^3}{3} \right|_0^2 = \frac{1}{12} \cdot 16 + \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{20}{3}.$$

Пример 3А. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x + y) dx dy$, где область D – параболический сегмент, ограниченный параболой $y = x^2$ и прямой $y = x$.

Решение. Сведем двойной интеграл к повторному. Изобразим область интегрирования (рис. 10.5).

Область D можно задать в виде системы неравенств $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ x^2 \le y \le x. \end{cases}$ Тогда, используя формулу (10.3), можно записать

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x+y)dy = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} \right) -$$

$$-\left(x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

Пример 4А. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x;y)dy$.

Решение. По пределам интегрирования построим область D: $0 \le x \le 1$, $x^3 \le y \le x^2$. Строим кривые $y = x^2$, $y = x^3$, прямые $x = 0$, $x = 1$ (рис. 10.6).

Область D можно задать в виде системы неравенств $\begin{cases} 0 \le y \le 1, \\ \sqrt{y} \le x(y) \le \sqrt[3]{y}. \end{cases}$ По формуле (10.4) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x;y)dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x;y)dx$.

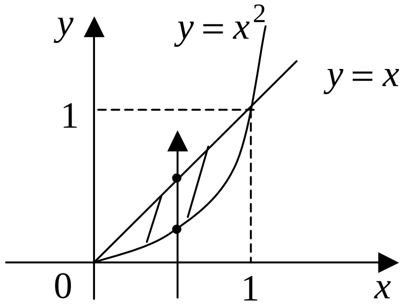

Рис. 10.5

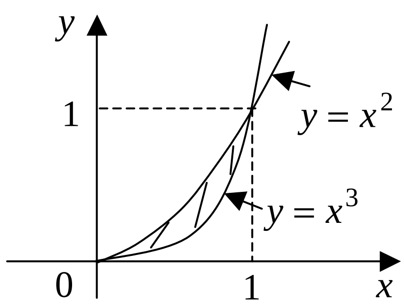

Рис. 10.6

Пример 5А. Вычислить двойной интеграл $\iint_D dxdy$, где D – область, ограниченная линиями $y = x^2$, $y + x = 2$, $y = 0$.

Решение. Построим область интегрирования D (рис. 10.7).

1) Если проводить вертикальные прямые через внутренние точки области D, то точки «входа» M_1 и M_2 принадлежат одной линии, а точки «выхода» двум линиям, поэтому для вычисления двойного интеграла область D нужно разбить на две области D_1 и D_2 и исходный интеграл будет равен сумме двух интегралов: $\iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy$.

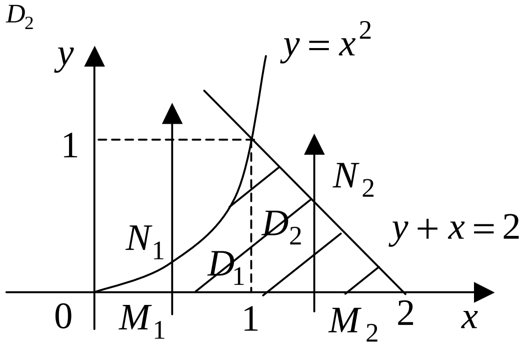

Рис. 10.7

Область D_1 с помощью системы неравенств можно задать следующим образом: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$. Область D_2: $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2 - x$. Поэтому двойной интеграл по области D будет равен сумме двух повторных интегралов

$$\iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2 = \frac{5}{6}.$$

2) если проводить горизонтальные прямые, то область D можно записать с помощью одной системы неравенств $0 \le y \le 1$, $\sqrt{y} \le x \le 2 - y$, и тогда по формуле (10.4)

$$\iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} dx = \int\limits_0^1 \left(x \,\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y} \right) dy = \int\limits_0^1 \left(2 - y - \sqrt{y}\right) dy =$$

$$= \left.\left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{2y^{3/2}}{3}\right)\right|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

Таким образом, при вычислении двойного интеграла следует выбирать порядок интегрирования.

10.1.4. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Пусть в полярных координатах $(\varphi; r)$ область D задана в виде системы неравенств

$$\begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta, \\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi). \end{cases}$$

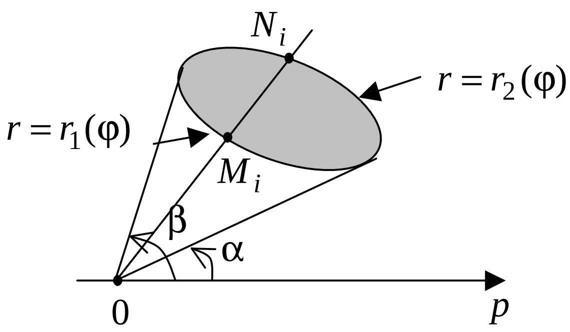

Рис. 10.8

Формула замены переменных в двойном интеграле при переходе к полярным координатам имеет вид

$$\iint\limits_D f(x; y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi\,; r\sin\varphi)rdrd\varphi =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi\,; r\sin\varphi)rdr. \tag{10.5}$$

Замечание. Между декартовыми координатами $(x; y)$ точки M и ее полярными координатами $(\varphi; r)$ существует связь (рис. 10.9). Пусть полярная ось p совпадает с положительной полуосью Ox, а полюс полярной системы координат O совпадает с началом координат системы Oxy.

Из рис. 10.9 видно, что прямоугольные координаты x, y точки M выражаются через полярные координаты r, φ точки следующим образом:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Отметим также, что $dxdy = rdrd\varphi$.

К полярным координатам особенно удобно переходить в тех случаях, когда область интегрирования круг или часть круга. Переход к повторному интегралу (расстановка пределов) выполняется аналогично случаю прямоугольных координат.

Пример. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, переходя к полярным координатам, если D – первая четверть круга $x^2+y^2\le a^2$.

Решение. Область D представлена на рис. 10.10.

Используем формулу (10.5) перехода к полярным координатам.

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\,rd\varphi dr = \iint\limits_D r^2 d\varphi dr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^a r^2 dr = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{r^3}{3}\bigg|_0^a \right) d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{a^3}{3}\,d\varphi = \frac{a^3}{3}\,\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^3}{6}.$$

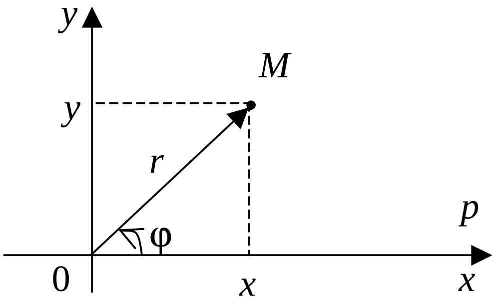

Рис. 10.9

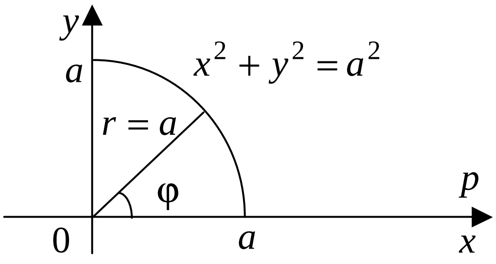

Рис. 10.10

10.1.5. Задачи для самостоятельного решения

А

1. Вычислить повторные интегралы: а) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy$; б) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x dx$.

2. Вычислить $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy$, где D – прямоугольник $0\le x\le 2$, $0\le y\le 1$.

3. Вычислить $\iint\limits_D \left(x^3+y^3\right)dxdy$, где D – область, ограниченная линиями $x-2y=0$, $x-y=0$, $x=4$.

4. Вычислить $\iint\limits_D y\,dxdy$, где D – область, ограниченная линиями $x=0$, $y=\sqrt{x}$, $x+y=2$.

5. Перейти к полярным координатам в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$, где а) D – $x^2+y^2 \le 1$; б) D – кольцо $1 \le x^2+y^2 \le 4$.

6. Вычислить $\iint\limits_{x^2+y^2\le 9} \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$, переходя к полярным координатам.

Б

7. Вычислить $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy$.

8. В интеграле $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x;y)dx$ изменить порядок интегрирования.

9. Вычислить $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, где D – область, ограниченная линиями $x=0$, $y=x^2+2x-3$, $2y=3x$.

10. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, где D – область, ограниченная линией $x^2+y^2=2x$.

11. Вычислить $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$.

10.1.6. Ответы

А

1. а) $\frac{2}{3}a\sqrt{a}$; б) $\frac{1}{2}$. **2.** $\frac{2}{3}\pi$. **3.** $\frac{752}{5}$. **4.** $\frac{11}{12}$. **5.** а) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)rdr$; б) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)rdr$. **6.** 18π.

Б

7. $\ln\frac{25}{24}$. **8.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x;y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x;y)dy$. **9.** $\frac{208}{15}$. **10.** $\frac{16}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$.

11. $\frac{\pi}{4}(e^{a^2}-1)$.

10.2. Вычисление объемов тел и площадей плоских фигур

Справочный материал
(простейшие поверхности и их уравнения)

1. Уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

2. Уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

3. Уравнение параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ (рис. 10.11).

4. Уравнение конической поверхности вращения: $z^2 = x^2 + y^2$ (рис. 10.12).

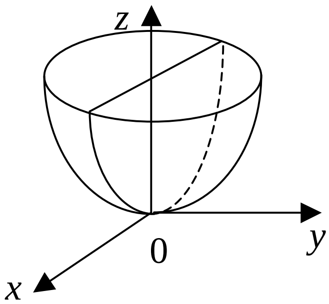

Рис. 10.11

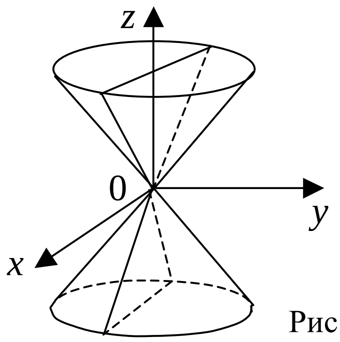

Рис. 10.12

5. Уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz, и направляющей $F(x;y) = 0$: $F(x;y) = 0$.

Например, функция $y = x^2$ в пространстве задает цилиндрическую поверхность с направляющей параболой $y = x^2$, лежащей в плоскости Oxy, и образующими, параллельными оси Oz (рис. 10.13).

Вычисление объемов тел и площадей плоских фигур

1. Если D – ограниченная область плоскости Oxy, то ее площадь S вычисляется по формуле

$$S = S(D) = \iint\limits_D dxdy. \qquad (10.6)$$

2. Если V – цилиндрическое тело с образующими, параллельными оси Oz, ограниченное снизу областью D, а сверху поверхностью $z = f(x;y) \geq 0$ (рис. 10.2), то объем этого тела вычисляется по формуле

$$V=\iint\limits_D f(x;y)dxdy. \qquad (10.7)$$

3. Если V – тело, ограниченное снизу поверхностью $z=g(x;y)$, сверху – поверхностью $z=f(x;y)$, причем проекцией этих поверхностей на плоскость Oxy является область D, в которой $f(x;y)$ и $g(x;y)$ непрерывны ($f(x;y)\geq g(x;y)$), то объем этого тела (рис. 10.14) вычисляется по формуле

$$V=\iint\limits_D (f(x;y)-g(x;y))dxdy. \qquad (10.8)$$

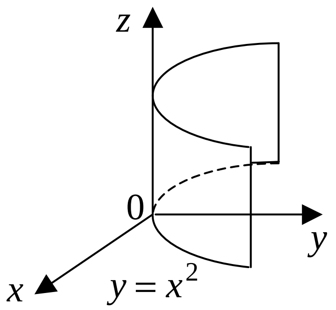

Рис. 10.13

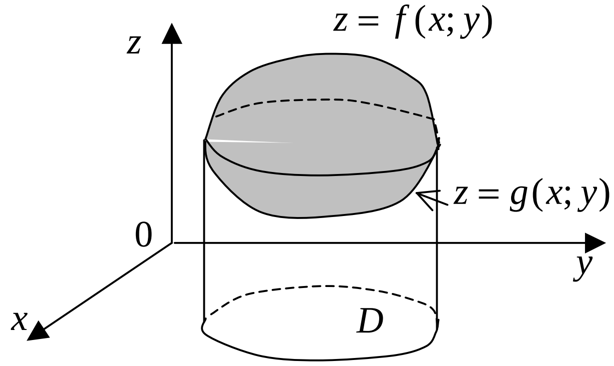

Рис. 10.14

Пример 1А. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $z=2-y$, $y=x^2$.

Решение. Тело, объем которого нужно вычислить, изображено на рис. 10.15. Поверхность $y=x^2$ – цилиндрическая (см. справочный материал), $z=2-y$ – плоскость, параллельная оси Ox (так как в уравнении отсутствует переменная x) и пересекающая ось Oz в точке $(0;0;2)$, ось Oy в точке $(0;2;0)$, $z=0$ – уравнение плоскости Oxy.

Тело симметрично относительно плоскости zOy, следовательно, можно вычислить объем половины тела и результат удвоить. Область D – проекция тела на плоскость xOy. По формуле (10.7) имеем

$$V=\iint\limits_D (2-y)dxdy=2\iint\limits_{D_1}(2-y)dxdy=2\int\limits_0^{\sqrt2}dx\int\limits_{x^2}^{2}(2-y)dy=$$

$$=2\int\limits_0^{\sqrt2}\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{2}dx=2\int\limits_0^{\sqrt2}\left[4-2-\left(2x^2-\frac{1}{2}x^4\right)\right]dx=\frac{32\sqrt2}{15}.$$

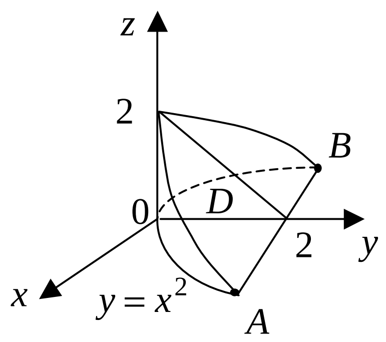

Рис. 10.15

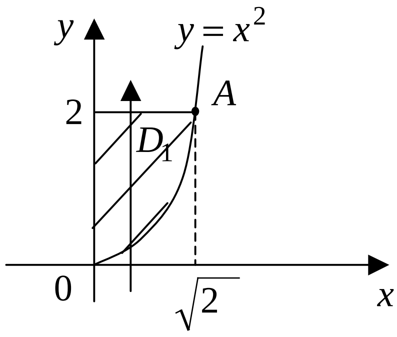

Рис. 10.16

.

Пример 2А. Найти площадь области D, ограниченной линиями $x + y - 7 = 0$, $xy = 6$.

Решение. Данная область, ограниченная прямой $y = 7 - x$ и гиперболой $y = \dfrac{6}{x}$, изображена на рис. 10.17. Решаем систему уравнений $\begin{cases} y = 7 - x, \\ y = \dfrac{6}{x}. \end{cases}$ Отсюда $7 - x = \dfrac{6}{x}$, $x^2 - 7x + 6 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, $y_1 = 6$, $y_2 = 1$. Тогда $A(1;6)$, $B(6;1)$ – точки пересечения прямой и гиперболы.

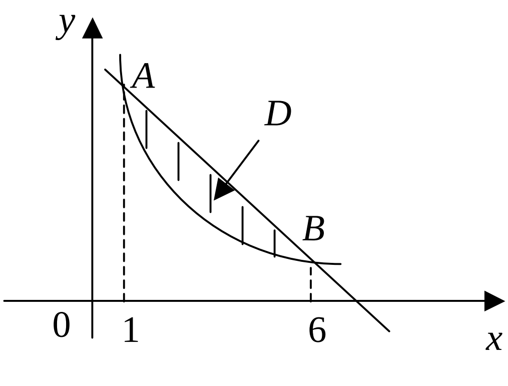

Рис. 10.17

Применяя формулу (10.6), находим площадь области D.

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_1^6 dx \int\limits_{6/x}^{7-x} dy = \int\limits_1^6 y\Big|_{6/x}^{7-x} dx = \int\limits_1^6 \left(7 - x - \frac{6}{x}\right) dx = \frac{35}{2} - 6\ln 6.$$

10.2.1. Задачи для самостоятельного решения

А

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = 2x$ и прямой $y = x$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 2x^2$ и прямой $y = 2$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 10x + 25$ и $y^2 = -6x + 9$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$.

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$.

Б

8. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $2z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ (внутри параболоида).

10.2.2. Ответы

А

1. $\frac{2}{3}$. **2.** $\frac{8}{3}$. **3.** $\frac{16}{3}\sqrt{15}$. **4.** $\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}$. **5.** $\frac{128}{15}$. **6.** $\frac{88}{105}$. **7.** $\frac{1}{6}$.

Б

8. $\frac{\pi}{2} - 1$. **9.** $\frac{\pi}{3}(6\sqrt{3} - 5)$.

10.3. Тройной интеграл

10.3.1. Основные теоретические сведения

Пусть в пространственной области $V \in \mathrm{R}^3$ определена и непрерывна функция трех переменных $u = f(x; y; z)$. Разобьем область V на n произвольных областей V_1, $V_2, \ldots$, V_n, с объемами ΔV_1, $\Delta V_2, \ldots$, ΔV_n. В каждой области V_i $(i = \overline{1, n})$ выберем произвольную точку $C_i(x_i; y_i; z_i)$ и составим интегральную сумму

$$S_n = f(C_1)\Delta V_1 + f(C_2)\Delta V_2 + \ldots + f(C_n)\Delta V_n = \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta V_i .$$

Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм S_n при условии стремления к нулю наибольшего из диаметров d_i областей V_i (и $n \to \infty$), не зависящий от способа разбиения области V на области V_i и выбора точек C_i, то этот предел называется **тройным интегралом** от функции $u = f(x; y; z)$ по области V и обозначается

$$\iiint\limits_V f(x; y; z)dV \text{ или } \iiint\limits_V f(x; y; z)dxdydz = \lim_{\substack{(n\to\infty) \\ \max d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta V_i .$$

10.3.2. Вычисление тройного интеграла

Пусть функция трех переменных $u = f(x; y; z)$ определена и непрерывна в пространственной области V, которая ограничена сверху поверхностью $z = z_2(x; y)$, а снизу – поверхностью $z = z_1(x; y)$, где функции $z_1(x; y)$ и $z_2(x; y)$ определены и непрерывны в области $D \in Oxy$ (рис. 10.18).

Тогда вычисление тройного интеграла сводится к последовательному (справа налево) вычислению определенного интеграла по переменной z (переменные x и y считаются при этом константами) и двойного интеграла от того, что получится, по области D.

$$\iiint\limits_V f(x; y; z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x; y; z)dz . \qquad (10.9)$$

Получившийся двойной интеграл можно вычислять как в декартовой, так и в полярной системе координат.

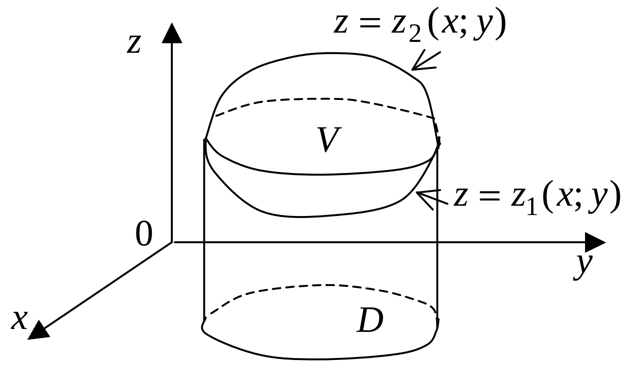

Рис. 10.18

При вычислении тройного интеграла можно выбирать и другой порядок интегрирования.

Пример 1А. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V xydxdydz$, где V – область, ограниченная поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x = 2$, $y = 2$ и координатными плоскостями.

Решение. Область V представлена на рис. 10.19. Поверхность $z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения, ограничивает область V сверху. Снизу область V ограничена плоскостью Oxy. Поверхность $x = 2$ – плоскость, параллельная плоскости zOy, $y = 2$ – плоскость, параллельная плоскости zOx. Проекцией области V на плоскость Oxy будет квадрат (рис. 10.20) – область D.

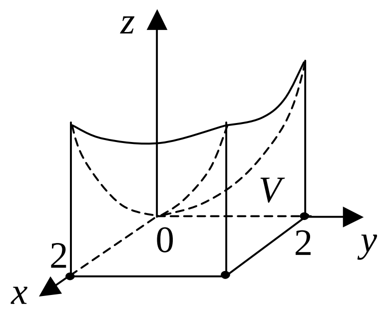

Рис. 10.19

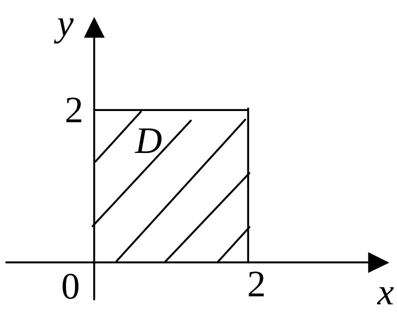

Рис. 10.20

По формуле (10.9) имеем

$$\iiint_V xydxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{x^2+y^2} xydz = \iint_D xy\left(z\Big|_0^{x^2+y^2} \right)dxdy =$$

$$= \iint_D xy\left(x^2 + y^2\right)dxdy = \iint_D \left(x^3 y + xy^3\right)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^2 \left(x^3 y + xy^3\right)dy =$$

$$= \int_0^2 \left(x^3 \left(\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 + x\left(\frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_0^2 \right) dx = \int_0^2 \left(2x^3 + 4x\right)dx = \left(\frac{x^4}{2} + 2x^2 \right)\Bigg|_0^2 = 8 + 8 = 16.$$

Пример 2А. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V (x+y)dxdydz$, где V – область, ограниченная поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$), $z = 0$.

Решение. Область V представлена на рис. 10.21. Поверхность $z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения, который сверху ограничивает область V, снизу область V ограничена плоскостью Oxy (так как $z = 0$). Поверхность $x^2 + y^2 = 4$ – цилиндрическая, направляющей у которой является окружность радиуса $R = 2$. Так как $x \ge 0, y \ge 0$, то рассматриваются части поверхностей в первом октанте.

По формуле (10.9) имеем

$$\iiint_V (x+y)dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{x^2+y^2} (x+y)dz = \iint_D (x+y)\left(x^2 + y^2\right)dxdy.$$

Так как областью интегрирования D является четверть круга (рис. 10.22), то удобно перейти к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда уравнение окружности $x^2 + y^2 = 4$. $r = 2$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le r \le 2$, $dxdy = rd\varphi dr$.

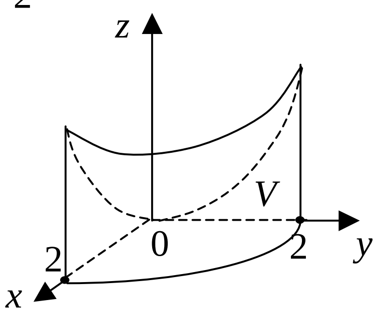

Рис. 10.21

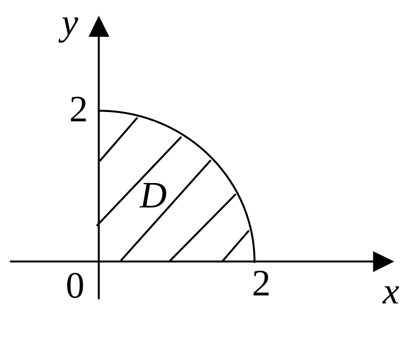

Рис. 10.22

$$\iint_D (x+y)\left(x^2+y^2\right)dxdy = \iint_D (r\cos\varphi + r\sin\varphi)r^2 rd\varphi dr =$$

$$= \iint_D r^4(\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi dr = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 r^4(\cos\varphi + \sin\varphi)\, dr =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)\, d\varphi \int_0^2 r^4 dr = \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)\left(\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^2\right) d\varphi =$$

$$= \frac{32}{5}\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{32}{5}(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{64}{5}.$$

10.3.3. Вычисление объемов с помощью тройного интеграла

Если в тройном интеграле (10.9) $f(x;y;z)=1$ в области V, то этот интеграл определяет объем области V

$$V = \iiint_V dxdydz. \tag{10.10}$$

Пример 1А. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$.

Решение. Данное тело представлено на рис. 10.23. Тело ограничено снизу параболоидом вращения $2z = x^2 + y^2$, сверху – плоскостью $z = 2$, которая пересекает параболоид по окружности $x^2 + y^2 = 4$.

Так как область D – круг (рис. 10.24), то при вычислении двойного интеграла переходим к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $x^2 + y^2 = 4$, $r = 2$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le r \le 2$, $dxdy = rd\varphi dr$.

Тогда $V = \iiint_V dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2} dz = \iint_D \left(2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right)dxdy =$

$$= \iint_D \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) rd\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(2r - \frac{r^3}{2}\right)dr = \int_0^{2\pi}\left(\left.\left(2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{8}\right)\right|_0^2\right)d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}(4-2)d\varphi = 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

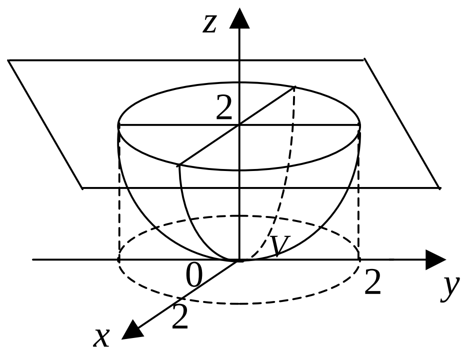

Рис. 10.23

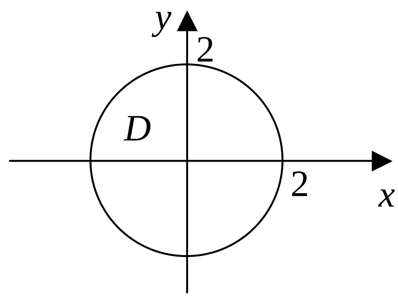

Рис. 10.24

Пример 2А. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $z=2-y$, $y=x^2$.

Решение. Данное тело представлено на рис. 10.25, область D – на рис. 10.26. Тогда

$$V=\iint\limits_{D} dxdy\int\limits_{0}^{2-y} dz=\iint\limits_{D}(2-y)dxdy=\int\limits_{0}^{2} dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(2-y)dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{2}(2-y)x\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\,dy=\int\limits_{0}^{2}(2-y)2\sqrt{y}dy=2\int\limits_{0}^{2}\left(2y^{1/2}-y^{3/2}\right)dy=\frac{32}{15}\sqrt{2}\,.$$

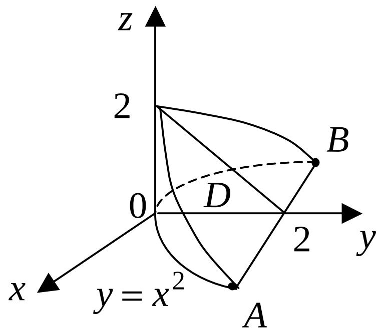

Рис. 10.25

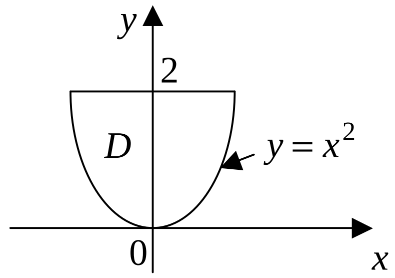

Рис. 10.26

10.3.4. Задачи для самостоятельного решения

А

1. Расставить пределы в тройном интеграле $\iiint\limits_{V} f(x;y;z)dxdydz$ по области, ограниченной поверхностями

а) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$;

б) $x^2+y^2+z^2=1$, $z=0$ ($z\ge 0$).

2. Вычислить а) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_{xy}^{x+y} dz$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{a} rdr\int\limits_{r}^{a+\sqrt{a^2-r^2}} dz$.

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=6$.

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$ и $z^2=x^2+y^2$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $z=4-y^2$, $y=\dfrac{x^2}{2}$.

10.3.5. Ответы

А

1. а) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y} f(x;y;z)dz$; б) $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x;y;z)dz=$ $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 rdr\int\limits_0^{\sqrt{1-r^2}} f(r\cos\varphi;r\sin\varphi;z)dz$. **2.** а) $\dfrac{7}{24}$; б) $\dfrac{\pi a^3}{4}$. **3.** 36. **4.** $\dfrac{\pi}{6}$. **5.** $12\dfrac{4}{21}$.

Глава 11. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

11.1. Криволинейные интегралы первого рода (КРИ1)

11.1.1. Определение и свойства КРИ1

Пусть в каждой точке гладкой кривой AB (или L) плоскости Oxy задана непрерывная функция двух переменных $z = f(x;y)$. Разобьем AB на n частей точками $A = M_0$, $M_1, \ldots$, $M_n = B$. На каждой дуге $\overset{\smile}{M_{i-1}M_i}$, длина которой Δl_i $(i = \overline{1,n})$, выберем произвольно точку $C_i(x_i;y_i)$.

Составим сумму $S_n = f(C_1)\Delta l_1 + f(C_2)\Delta l_2 + \ldots + f(C_n)\Delta l_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta l_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta l_i$. Эта сумма называется **интегральной суммой** первого рода. Пусть $d = \max \Delta l_i$ – наибольшая из длин дуг $\overset{\smile}{M_{i-1}M_i}$ $(i = \overline{1,n})$.

Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм S_n при $d \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения, ни от выбора точек $C_i(x_i;y_i)$, то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода (КРИ1) $$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta l_i = \int_{AB} f(x;y)dl.$$

Если функция $f(x;y)$ непрерывна на AB, то тот предел всегда существует. Криволинейный интеграл первого рода обладает свойствами, аналогичными свойствам определенного интеграла (аддитивность, линейность, оценка модуля, теорема о среднем). Однако есть отличие $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{BA} f(x;y)dl$, т. е. криволинейный интеграл первого рода **не зависит от направления интегрирования**.

11.1.2. Вычисление криволинейных интегралов первого рода

1. Если кривая L задана непрерывно дифференцируемой функцией $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, то

$$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_a^b f(x;\varphi(x))\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\,dx. \qquad (11.1)$$

2. Если кривая L задана параметрически, т. е. в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t)$, $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции на промежутке $t \in [\alpha;\beta]$, то

$$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t);y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt. \qquad (11.2)$$

3. Если кривая L задана уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ в полярных координатах, то

$$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\,d\varphi. \qquad (11.3)$$

11.1.3. Примеры решения задач

Пример 1А. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{x}{y}dl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$ между точками $A(2;2)$ и $B(8;4)$.

Решение. Кривая L – дуга параболы – изображена на рис. 11.1. Уравнение L – $y = \sqrt{2x}$ для $x \in [2;8]$. Используем формулу (11.1) для вычисления криволинейного интеграла. Найдем $y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}$, тогда

$$\int\limits_L \frac{x}{y}dl = \int\limits_2^8 \frac{x}{\sqrt{2x}}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx = \int\limits_2^8 \frac{x}{2x}\sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int\limits_2^8 (2x+1)^{1/2}\cdot\frac{1}{2}d(1+2x) =$$

$$= \frac{1}{4}\left.\frac{2(2x+1)^{3/2}}{3}\right|_2^8 = \frac{1}{6}\left[(16+1)^{3/2} - (4+1)^{3/2}\right] = \frac{1}{6}\left[17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right].$$

Пример 2А. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \left(x^2 + y^3\right)dl$, где L – контур треугольника ABO с вершинами $A(1;0)$, $B(0;1)$, $O(0;0)$.

Решение. Поскольку $\int\limits_L \left(x^2 + y^3\right)dl = \int\limits_{AB} \left(x^2 + y^3\right)dl +$

$+\int\limits_{BO}\left(x^2+y^3\right)dl+\int\limits_{OA}\left(x^2+y^3\right)dl$, то остается вычислить криволинейный интеграл по каждому из отрезков AB, BO, OA (рис. 11.2)

1) AB: так как уравнение прямой AB имеет вид $y=1-x$, $x\in[0;1]$, то $dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+(-1)^2}\,dx=\sqrt{2}dx$. Тогда

$$\int\limits_{AB}\left(x^2+y^3\right)dl=\int\limits_0^1\left[x^2+(1-x)^3\right]\sqrt{2}dx=\sqrt{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{(1-x)^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{12}\sqrt{2}.$$

2) BO: отрезок BO лежит на оси Oy, поэтому $x=0$, $0\le y\le 1$, $dl=dy$ и $\int\limits_{BO}\left(x^2+y^3\right)dl=\int\limits_0^1 y^3dy=\frac{1}{4}$.

3) OA: $y=0$, $0\le x\le 1$, $dl=dx$ и $\int\limits_{OA}\left(x^2+y^3\right)dl=\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$.

Окончательно $\int\limits_{L}\left(x^2+y^3\right)dl=\frac{7\sqrt{2}}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}(\sqrt{2}+1)$.

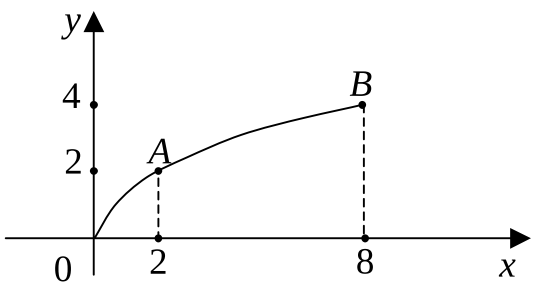

Рис. 11.1

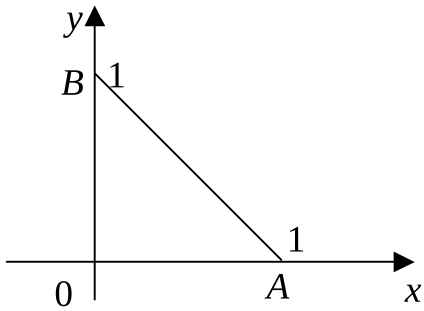

Рис. 11.2

Пример 3А. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L\sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L – окружность $x^2+y^2=R^2$.

Решение. Введем полярные координаты $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда, поскольку $x^2+y^2=R^2$, то уравнение окружности примет вид $r=R$, $r'=0$, дифференциал дуги $dl=\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi=\sqrt{R^2}\,d\varphi=Rd\varphi$. При этом $\varphi\in[0;2\pi]$. Следовательно, $\int\limits_L\sqrt{x^2+y^2}\,dl=\int\limits_0^{2\pi}R\cdot Rd\varphi=2\pi R^2$.

11.2. Криволинейные интегралы второго рода (КРИ2)

11.2.1. Определение и свойства криволинейных интегралов второго рода

Пусть на гладкой кривой AB (или L) плоскости Oxy задана непрерывная функция двух переменных $P(x;y)$. Разобьем кривую AB на n произвольных частей точками $A=M_0$, $M_1,\ldots$, $M_n=B$. На каждой дуге $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$, длина которой Δl_i $(i=\overline{1,n})$, выберем произвольно точку $C_i(x_i;y_i)$.

Составим сумму $\sigma_n = P(C_1)\Delta x_1 + P(C_2)\Delta x_2 + \ldots + P(C_n)\Delta x_n = = \sum\limits_{i=1}^{n} P(C_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} P(x_i;y_i)\Delta x_i$, где Δx_i – проекция дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ на ось Ox. Эта сумма называется **интегральной суммой** второго рода. Пусть $d=\max \Delta l_i$ – наибольшая из длин дуг $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ $(i=\overline{1,n})$. Если $d\to 0$, то и наибольшее из $\Delta x_i \to 0$, а $n\to\infty$.

Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм σ_n при $d\to 0$ ($\max\Delta x_i \to 0$), не зависящий ни от способа разбиения дуги L на части, ни от выбора точек $C_i(x_i;y_i)$ $(i=\overline{1,n})$, то этот предел называется **криволинейным интегралом второго рода (КРИ2) по координате** x

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(x_i;y_i)\Delta x_i = \int_{AB} P(x;y)dx = \int_L P(x;y)dx.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл второго рода по координате y, который обозначается

$$\int_L Q(x;y)dy,$$

где $Q(x;y)$ – непрерывная функция.

Сумма криволинейных интегралов $\int\limits_L P(x;y)dx$ и $\int\limits_L Q(x;y)dy$ называется криволинейным интегралом второго рода и обозначается

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy .$$

Криволинейные интегралы второго рода называются также криволинейными интегралами по координатам.

Криволинейный интеграл второго рода обладает свойствами, аналогичными свойствам определенного интеграла. В частности,

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = -\int_{BA} P(x;y)dx + Q(x;y)dy ,$$

т. е. криволинейный интеграл второго рода **меняет знак при изменении направления интегрирования.**

11.2.2. Вычисление криволинейных интегралов второго рода

1. Если кривая L задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, где $y = y(x)$ и ее производная $y'(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_a^b [P(x;y(x)) + Q(x;y(x))y'(x)]dx . \tag{11.4}$$

2. Если кривая L задана параметрически, т. е. в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, где функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(t)$, $y'(t)$, то

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \tag{11.5}$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t);y(t))x'(t) + Q(x(t);y(t))y'(t)]dt .$$

3. Если кривая L замкнута, то криволинейный интеграл второго рода обозначается $\oint_L Pdx + Qdy$. Направление обхода иногда поясняется стрелкой на кружке, который расположен на знаке интеграла.

Связь между двойным интегралом по области D и криволинейным интегралом по границе L этой области устанавливается формулой Остроградского–Грина.

Пусть на плоскости Oxy задана область D, ограниченная кривой, пересекающейся с прямыми, параллельными координатным осям не более чем в двух точках.

Если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в области D, то имеет место формула

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \qquad (11.6)$$

где L – граница области D и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении (т. е. при движении вдоль кривой область D остается слева).

Формула (11.6) называется **формулой Остроградского–Грина**.

Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области D. Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ не зависел от линии интегрирования, лежащей в области D, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D имело место равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Область D называется односвязной, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит D.

Некоторые приложения криволинейного интеграла второго рода
Площадь плоской фигуры

Площадь S плоской фигуры D, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной замкнутой линией L, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_L xdy - ydx,$$

при этом кривая L обходится против часовой стрелки.

Работа переменной силы

Работа переменной силы $\vec{F} = P(x;y)\vec{i} + Q(x;y)\vec{j}$ вдоль пути L выражается интегралом

$$A = \int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy. \qquad (11.7)$$

11.2.3. Примеры решения задач

Пример 1А. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{(M)}^{(N)} x^2ydx + xy^2dy$ вдоль кривой $y = x^2$ от $M(0;0)$ до $N(1;1)$.

Решение. Воспользуемся формулой (11.4). $dy = 2xdx$, тогда

$$\int_{(M)}^{(N)} x^2ydx + xy^2dy = \int_0^1 x^2x^2dx + xx^4 2xdx = \int_0^1 \left(x^4 + 2x^6\right)dx = \frac{17}{35}.$$

Пример 2А. Найти работу силы $\vec{F} = -4y\vec{i} + (4y - 3x)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль ломаной OBC, причем $O(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;4)$.

Решение. Ломаная OBC представлена на рис. 11.4.

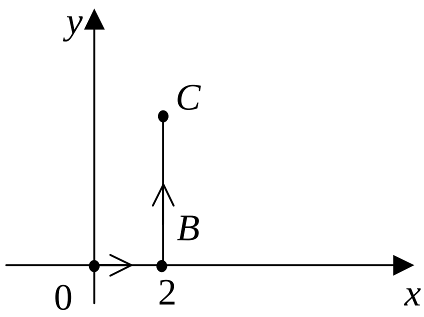

Рис. 11.4

По формуле (11.7) имеем

$$A = \int_{OBC} -4ydx + (4y - 3x)dy =$$

$$= \int_{OB} -4ydx + (4y - 3x)dy +$$

$$+ \int_{BC} -4ydx + (4y - 3x)dy$$

OB: $y = 0$, $dy = 0$, $0 \le x \le 2$. Тогда

$$\int_{OB} -4ydx + (4y - 3x)dy = \int_0^2 (0 - 3x \cdot 0)dx = 0.$$

BC: $x = 2$, $dx = 0dy$, $0 \le y \le 4$.

Тогда

$$\int_{BC} -4ydx + (4y - 3x)dy = \int_0^4 (-4y \cdot 0 + (4y - 6))dy = \int_0^4 (4y - 6)dy = (2y^2 - 6y)\Big|_0^4 =$$

$= 32 - 24 = 8$, и работа $A = 0 + 8 = 8$.

Пример 3А. Вычислить $\oint_L xdy - ydx$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 9$.

Решение.

1) Используя параметрические уравнения окружности $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$, получаем

$$\oint_L xdy - ydx = \int_0^{2\pi} (3\cos t 3\cos t dt - 3\sin t(-3\sin t))dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(9\cos^2 t + 9\sin^2 t\right)dt = 9\int_0^{2\pi} dt = 9 \cdot 2\pi = 18\pi.$$

2) Можно вычислить интеграл по формуле (11.6): $P = -y$, $Q = x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, D – круг $x^2 + y^2 \le 9$. Тогда $\oint_L xdy - ydx =$ $= \iint_D (1-(-1))dxdy = 2\iint_D dxdy = 2 \cdot 9\pi = 18\pi$, так как $\iint_D dxdy = S_D$.

11.2.4. Задачи для самостоятельного решения

А

1. Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода.

а) $\int_L \frac{dl}{x+y}$, где L – отрезок AB, $A(2;4)$, $B(1;3)$;

б) $\int_L \left(x^2 + y^2\right)dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

2. Вычислить криволинейные интегралы 2-го рода.

а) $\int_L 2xydx + x^2dy$, где L – отрезок AB, $A(2;1)$, $B(2;0)$;

б) $\int_L xydx$, где L – дуга синусоиды $y = \sin x$ от точки $(0;0)$ до точки $(\pi;0)$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = y\vec{i} + 2xy)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, против часовой стрелки.

Б

4. Вычислить $\int_L y^2 dl$, где L – дуга циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

5. Вычислить $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, где L – верхняя половина эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

11.2.5. Ответы

А

1. а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln\dfrac{3}{2}$; **б)** $2\pi a^3$. **2. а)** -4; б) π. **3.** $a^2\left(\dfrac{2}{3}a - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Б

4. $\dfrac{256}{15}a^3$. **5.** $-\dfrac{4}{3}ab^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики/ В. А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1986, 1989.
2. Гусак, А. А. Высшая математика: в 2 т./ А. А. Гусак. – Минск.: ТетраСистемс, 2001.
3. Герасимович, А. И. Математический анализ: справ. пособие; в 2 ч. Ч. 2./ А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Мінск.: Выш. шк., 1989.
4. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс/ К. Н. Лунгу [и др.]; под ред. С. Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2004.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3
Глава 9. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ 4
9.1. Понятие функции нескольких переменных. Частные производные. Полный дифференциал. Частные производные высших порядков 4
9.1.1. Основные теоретические сведения 4
9.1.2. Примеры решения задач 6
9.1.3. Задачи для самостоятельного решения 9
9.1.4. Ответы 10
9.2. Локальные экстремумы функции двух переменных 11
9.2.1. Основные теоретические сведения 11
9.2.2. Примеры решения задач 13
9.2.3. Наименьшее и наибольшее значения (глобальные экстремумы) функции двух переменных в замкнутой области ... 15
9.2.4. Условный экстремум 17
9.2.5. Метод наименьших квадратов 19
9.2.6. Задачи для самостоятельного решения 21
9.2.7. Ответы 22
9.3. Производная по направлению. Градиент 23
9.3.1. Основные теоретические сведения 23
9.3.2. Примеры решения задач 24
9.3.3. Задачи для самостоятельного решения 26
9.3.4. Ответы 26
Глава 10. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 27
10.1. Двойной интеграл 27
10.1.1. Основные теоретические сведения 27

10.1.2. Вычисление двойного интеграла.. 29
10.1.3. Примеры решения задач.. 30
10.1.4. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах33
10.1.5. Задачи для самостоятельного решения.............................. 34
10.1.6. Ответы 35
10.2. Вычисление объемов тел и площадей плоских фигур 36
10.2.1. Задачи для самостоятельного решения.............................. 39
10.2.2. Ответы 39
10.3. Тройной интеграл.. 40
10.3.1. Основные теоретические сведения 40
10.3.2. Вычисление тройного интеграла.. 40
10.3.3. Вычисление объемов с помощью тройного интеграла..... 43
10.3.4. Задачи для самостоятельного решения.............................. 44
10.3.5. Ответы 45
Глава 11. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ...................................... 46
11.1. Криволинейные интегралы первого рода (КРИ1) 46
11.1.1. Определение и свойства КРИ1 46
11.1.2. Вычисление криволинейных интегралов первого рода.... 46
11.1.3. Примеры решения задач.. 47
11.2. Криволинейные интегралы второго рода (КРИ2).................... 49
11.2.1. Определение и свойства криволинейных интегралов второго рода.. 49
11.2.2. Вычисление криволинейных интегралов второго рода 50
11.2.3. Примеры решения задач.. 52
11.2.4. Задачи для самостоятельного решения.............................. 53
11.2.5. Ответы 54