УДК 681.5

Студ. В.Н. Бирюкова, А.А. Гармаза
Научн. рук. доц. Д.С. Карпович
(кафедра автоматизации производственных процессов и электротехники, БГТУ)

ИЗУЧЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ, ПАРАМЕТРЫ КОТОРЫХ ЗАВИСЯТ ОТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КООРДИНАТЫ

При исследовании динамических систем достаточно часто пренебрегают их размерами, считая, что речь идет о некоторых материальных точках, обладающих определенными физическими свойствами, но не имеющих геометрических размеров. В то же время, существует широкий класс объектов, для которых такое пренебрежение приводит к качественно неверным результатам моделирования. Изучение подобных объектов – с распределенными параметрами – должно осуществляться с учетом их пространственной протяженности.

Поведение во времени типовых объектов, рассматриваемых в «классической» теории автоматического управления, характеризуется совокупностью конечного числа величин, и их описание в той или иной мере строится на системе конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений. Подобные объекты называются объектами с сосредоточенными параметрами.

Описание таких объектов не учитывает влияние пространственной протяженности в пределах конечных геометрических размеров рассматриваемого объекта и его характеристика.

В то же время существует класс объектов, которые принципиально могут быть отнесены к объектам с сосредоточенными параметрами без потери их качественных особенностей. Это объекты, характеристики которых зависят не только от времени, но и от пространственных координат, изменяющихся в пределах области, заданной геометрическими размерами тела.

К таким объектам относится большое число реальных технологических процессов, поведение которых описывается на действии физических полей различной природы (температурных, электромагнитных полей, полей потенциалов, концентраций и т.д).

В этом случае принято говорить не о некотором векторе управляемых величин, зависящих от одной переменной – времени *t*, а о некоторый функции состояния, зависящей и от времени, и от пространственных координат.

Данная статья посвящена исследованию распределения температурных полей режущего элемента при различных управляющих воздействиях по граничным условиям.

Основными формами представления распределенных объектов (систем), как и в случае систем с сосредоточенными параметрами, являются представление в виде дифференциальных уравнений в частных производных, в виде передаточных функций, временных и частотных характеристик.

Отличительной особенностью распределенных систем является наличие пространственных составляющих в сигнале входа и выхода.

Температура является распределенным параметром и часто используемым параметром при управлении технологических процессов. Изучение процесса теплопроводности, т.е. процесса передачи тепла от одной части тела к другой или от одного тела к другому, находящемуся в соприкосновении с первым, по своей сущности требует применения специального математического аппарата.

Процесс теплопередачи, как и всякое физическое явление, протекает во времени и в пространстве и характеризуется (в общем случае) нестационарной пространственно-временной функцией температуры $f(x, y, z, t)$, где x, y, z — пространственные координаты в декартовой системе, t — время. Совокупность значений температуры по всему объему рассматриваемого тела в отдельный момент времени называется температурным полем. В теории теплопроводности различают стационарное и нестационарное температурное поле. Стационарное температурное поле — это такое поле, температура которого в любой точке объема не изменяется во времени, а является функцией только пространственных координат. Такое поведение свойственно установившемуся режиму. Нестационарное температурное поле — это поле, температура которого изменяется не только в пространстве, но и с течением времени, и является функцией, как пространственных координат, так и времени. Такое поведение описывает неустановившееся состояние, переходный режим. Описание процесса теплопроводности, как и многих других физических процессов, может быть осуществлено на основе дифференциальных уравнений в частных производных, называемых уравнениями математической физики.

В общем случае, температурное поле $T = T(x, y, z, t)$, соответствующее уравнению

$$T(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) \qquad (1)$$

является пространственно-распределённым (трёхмерным).

Уравнение теплопроводности или уравнение Фурье:

$$\partial T/\partial t = \mathrm{a}\Delta T, \qquad (2)$$

где а – коэффициент температуропроводности, который зависит от физических свойств материалов, а выражение

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad (3)$$

является оператором Лапласа в декартовой системе координат для трёхмерной пространственной области определения температурного поля (1).

Задачи расчета систем с распределенными параметрами (СРП) заключаются в расчете требуемой величины, значение которой зависит от пространственной координаты. Для аналитического решения таких задач используется математический аппарат теории СРП и уравнения математической физики. Основной особенностью СРП является использование вместо обыкновенных дифференциальных уравнений (для сосредоточенных систем) дифференциальных уравнений в частных производных.

В основе метода площадей лежит предположение, что объект может быть описан линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, а его нормированная (приведенная к 1) переходная характеристика может быть аппроксимирована передаточной функцией вида:

$$W^0(p) = \frac{\sum_{i=1}^{m} b_i p^i + 1}{\sum_{i=1}^{n} b_i p^i + 1}, \qquad (4)$$

Порядок числителя в выражении (4) всегда меньше или равен порядку знаменателя. Для нахождения явного вида выражения (4) для конкретного технологического объекта необходимо определить значения коэффициентов a_i и b_i различными численными методами (метод прямоугольников, метод трапеций и др.), а также значения степеней полиномов n и m.

Переход от нормированной передаточной функции к обычной осуществляется путем ее умножения на коэффициент передачи $K = h(\infty)/x(\infty)$

$$W(p) = K \cdot W^0(p), \qquad (5)$$

Нахождение общей передаточной функции объекта, у которой величины коэффициентов усиления, постоянная времени и величина запаздывания зависят от координаты x, осуществляется путем рассмотрения 5 разных блоков, каждый из которых характеризует изменение температуры в своих собственных точках.

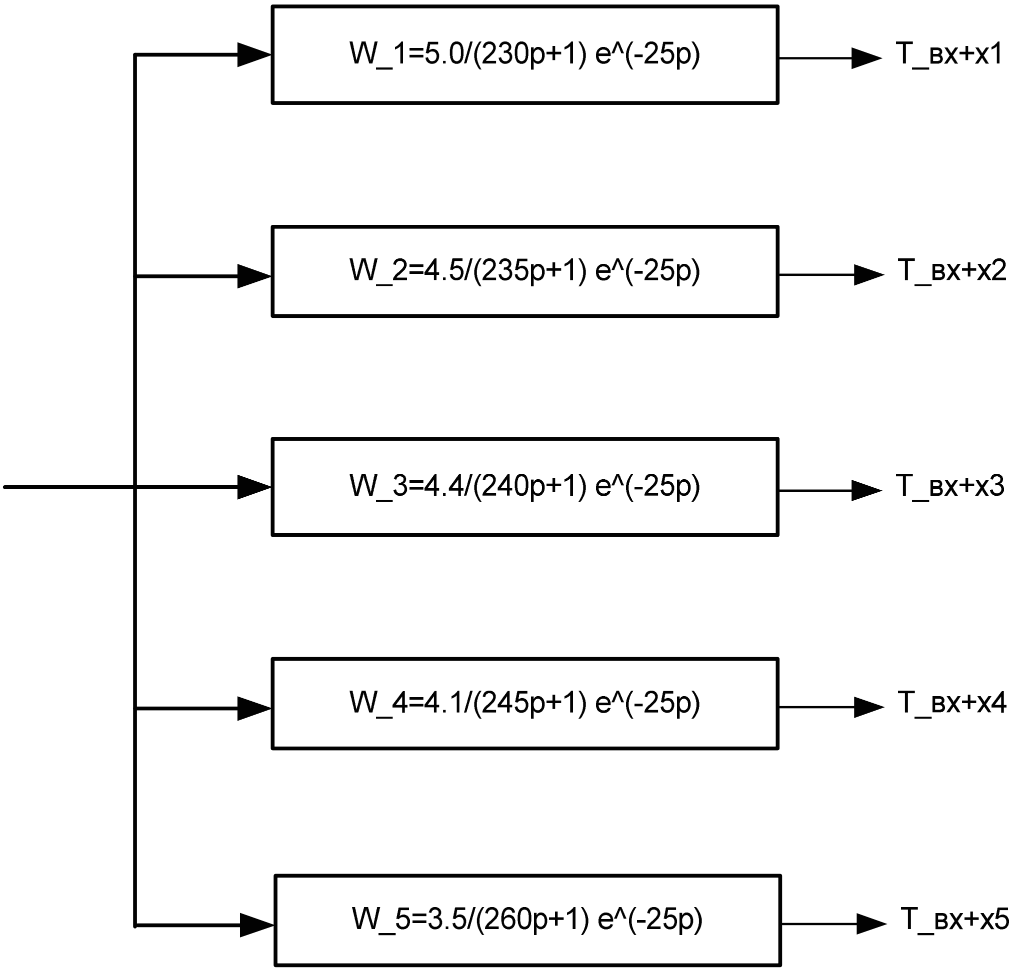

Рисунок 4 – Обобщенный нормированный график динамического изменения температуры

Аппроксимируем и находим усредненные коэффициенты передач, постоянные времени и величины запаздывания, которые линейно зависит от координаты x – расстояние от зоны нагрева (зоны резания) до точки измерения.

Таким образом, получаем передаточную функцию объекта в которой присутствуют две координаты: время в виде оператора Лапласа и координата x, линейная зависимость:

$$W_{об}(p) = \frac{(4.9697 - 0.0246 \cdot x)}{(228.97 + 0.4498 \cdot x)p + 1} e^{-25p},$$

где x – линейная координата зависящая от длины рубильного ножа.