

УДК 339.138

Секция информационных технологий

Студ. В.В. Мигай, Д.И. Тимановский

Науч. рук. доц. И.Ф. Соловьева
(кафедра высшей математики, БГТУ)

ЧИСЛО Е В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

«Математика есть прообраз красоты мира»
/И. Кеплер/

Всем известно, что математика играет огромную роль во всех дисциплинах и их приложениях. Нет ни одной науки, в которой бы она не участвовала. Как говорится, математика нужна для изучения многих наук, но сама она не нуждается ни в одной из них. Каждое ее понятие интересно и многогранно.

Цель работы: изучить возникновение числа е; применение его в математических моделях, в нашей жизни; способы его определения; отличия и сходства числа е с числом π .

Известно, что экспоненциальный рост имеет место в случае, если какая-то величина постоянно увеличивается пропорционально ее значению, например, путем удвоения: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64... или посредством умножения на три: 1, 3, 9, 27, 81, 243..., или даже посредством увеличения всего лишь на один процент.

Экспоненциальный рост может быть либо пошаговым, либо непрерывным. На представленных рисунках кривые растут экспоненциально и непрерывно. В каждой точке кривая повышается со скоростью, пропорциональной ее высоте.

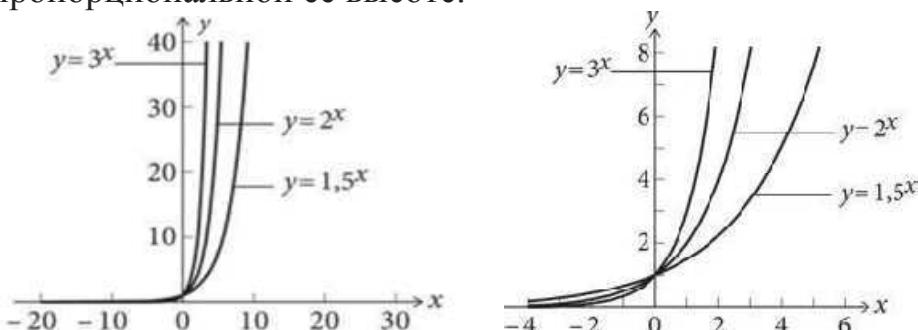


Рис.1. Экспоненциальные кривые

Когда уравнение представлено в виде $y=a^x$, где a -положительное число, кривая демонстрирует непрерывный экспоненциальный рост. Чем дальше мы перемещаемся по экспоненциальной кривой, тем круче она становится, т.е., тем больше будет градиент. Значит, для всех экспоненциальных кривых градиент неизменно представляет собой определенный процент от высоты. Кривая, для которой значения градиента и высоты всегда равны, называется «кривая Златовласки» и выражается уравнением:

$$y=(2,7182818284\ldots)^x \quad \text{или} \quad y = e^x.$$

В данной кривой высота точки на кривой всегда равна градиенту в этой точке. Однако геометрическая красота этой кривой вступает в противоречие с ее хаотической совокупностью цифр десятичного числа, начинающейся с 2,718 и продолжающейся до бесконечности без повторений. Данное число обозначили латинской буквой e и назвали экспоненциальной константой. Открытие числа принадлежит Бернулли. Оно связано с понятием сложного процента.

Сложный процент – это сумма процентных платежей, рассчитываемых за каждый очередной период, с учетом начисленных процентов.

Пример. Допустим, мы взяли кредит в размере 100 фунтов. Банк назначил сложный процент в размере 20 процентов годовых. Проследим, сколько фунтов нам придется платить ежегодно.

$$\text{Первый год: } \text{долг} + \text{проценты} = £100 + (£100 \times \frac{20}{100}) = £120;$$

$$\text{Второй год: } \text{долг} + \text{проценты} = £120 + (£120 \times \frac{20}{100}) = £144; \quad \text{накопленный}$$

$$\text{Третий год: } \text{долг} + \text{проценты} = £144 + (£144 \times \frac{20}{100}) = £172,8. \quad \text{накопленный}$$

Сложный процент растет гораздо быстрее, чем простой, поскольку он увеличивается по экспоненте. Прибавление хпроцентов к основной сумме долга равносильно умножению на $\frac{x}{100}$. Рассчитаем подробно результаты платежей первых трех лет:

$$\text{Первый год: } £100 + (1 + \frac{20}{100});$$

$$\text{Второй год: } £100(1 + \frac{20}{100})(1 + \frac{20}{100}) = £100(1 + \frac{20}{100})^2;$$

$$\text{Третий год: } £100(1 + \frac{20}{100})^2(1 + \frac{20}{100}) = £100(1 + \frac{20}{100})^3 \text{ и т. д.}$$

Эта последовательность подчиняется экспоненциальному закону.

Бернулли показал, что если частоту начисления процентов бесконечно увеличивать, то процентный доход в случае сложного процента имеет предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad \text{\textbackslash displaystyle} \quad \text{\textbackslash lim} \quad _ \{n\} \text{\textbackslash to} \quad \text{\textbackslash infty}$$

Этот предел равен числу e . Символ e для обозначения экспоненциального роста ввел Леонард Эйлер.

$\text{\textbackslash displaystyle } e \sim (\approx 2,71828)$ В настоящее время число e – это важнейший элемент математики роста и выгодно используется в банковском деле.

Число e красиво выражается в виде факториалов. Вычислим значение $\frac{1}{n!}$ для каждого числа, начиная с 0, а затем подсчитаем сумму всех членов этого ряда. В результате получится число e . В виде равенства это можно записать вот так:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Подсчитывая сумму, получим:
 $1, 2, 2.5, 2.666, \dots, 2.7083, \dots, 2.7166, \dots$

Этот ряд приближается к истинному значению числа e с большой скоростью. Всего после десяти членов ряда значения совпадают с точностью до шести тысячных знаков, что очень хорошо практически для всех научных целей.

Как и в случае со сложным процентом, оно представляет собой предел $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, когда n приближается к бесконечности. Красиво представлено число e в виде второго замечательного предела: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Доказательство очень простое: подставляем вместо n числа 1, 2, 3, ... и, высчитывая полученные значения, приблизимся к числу $e = 2,718281828\dots$

С числом e связаны гиперболические функции: $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $cth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Их приложение огромно.

Например, большой интерес представляет цепная линия. Ее уравнение: $y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$, где a — постоянная, от которой зависит масштаб кривой. Иначе, цепная линия — это среднее значение кривой экспоненциального роста и спада. Перевернутую цепную линию называют также математическим украшением. Возможно, именно благодаря ей, придумали бусы. Перевернутую цепную линию также использовал в своем творчестве известный каталонский архитектор А. Гауди при построении храма Святого семейства в Барселоне. Известные сооружения в форме цепной линии — это арка в Сант-Луисе под названием «Врата на Запад» и мегааэропорт в Кувейте.

Число e — основание натурального логарифма, иррациональное число. Оно используется также в биологии при исследовании роста клеток в организме, в формуле вычисления скорости ракеты [1], и даже — в математике выбора жены или мужа.

Одним из примеров применения гиперболических функций является граничная задача, лежащая в основе физической модели, описывающей процесс ограничения столба плазмы: $y''=k \operatorname{sh} k y$, $y(0)=0$, $y(1)=1$. Эта модель подробно изучалась, ее оценивают в вычислительном отношении, как достаточно сложную и трудную, и проверяют на ней новые численные методы решения прикладных задач. Эта задача решалась сеточными методами, методом прогонки, методом множественной двусторонней пристрелки и т. д.

К числу e приводит и французская карточная игра в совпадения. Если в игре в совпадения колода карт каждого из игроков состоит из одной карты, то вероятность ее выпадения будет 100 процентов. Если в колоде две карты, то вероятность равна 50 процентам. Эйлер составил таблицы перестановок для игр с колодами из трёх и четырёх карт и вывел закономерность. Вероятность совпадения карт при n картах в колоде рассчитывается по формуле: $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$.

Сумма этого ряда в точности равна $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ в случае, если n стремится к бесконечности, но приближение уже хорошее после первых членов ряда. Когда $n=52$, то есть количеству карт в колоде, сумма ряда равна числу $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ с точностью до 70 десятичных знаков.

Интересны соотношения между числами e и π . Они отличаются друг от друга всего на 0,5. Это иррациональные числа, десятичная часть которых содержит бесконечное число не повторяющихся цифр.

Существует ряд удивительных выражений, составленных из данных констант: $\pi^4 + \pi^5 = e^6$, что верно до семи значимых цифр; $e^\pi - \pi = 19.999099979 \dots$, что очень близко к 20; $e^{i\pi} + 1 = 0$. и самое впечатляющее уравнение: $e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743.999999999$, что всего на одну триллионную меньше целого числа.

Вывод: Вспомним слова знаменитого энтомолога Ж.Фарба: «Рассмотрим паутину. Усеянные крохотными капельками, ее липкие нити провисают, образуя цепные линии, и вся сеть похожа на множество ожерелий. При появлении солнца паутина начинает переливаться всеми цветами радуги, превращаясь в сверкающую гроздь бриллиантов, и число e предстает во всем своем великолепии».

ЛИТЕРАТУРА

1. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. Изд. М., 1967, 200 с.