ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

А. И. Астровский, доктор физико-математических наук, профессор (БГЭУ);
И. В. Гайшун, доктор физико-математических наук, академик, директор (Институт математики НАН Беларуси)

АППРОКСИМАЦИЯ КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМ ЛИНЕЙНЫХ РАВНОМЕРНО НАБЛЮДАЕМЫХ СИСТЕМ

Для равномерно наблюдаемых линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений доказано, что при условии существования пределов некоторых последовательностей дискретных функций, построенных с помощью коэффициентов канонической формы дискретной системы, которая получена из исходной по схеме Эйлера, эти пределы определяют каноническую форму дифференциальной системы. Установлено, что дискретная аппроксимация по схеме Эйлера равномерно наблюдаемой дифференциальной системы тотально наблюдаема.

It was proved that discrete approximation by Euler scheme of uniformly observed linear system of ordinary differential equations is completely observed and its canonical form (in case of existence of limits for some functions constructed on its coefficients) converges to canonical form of the differential system.

Введение. При исследовании структурных свойств систем управления-наблюдения важно не только получить необходимые и достаточные условия их существования, но и разработать конструктивные способы проверки наличия этих свойств через параметры, задающие изучаемые системы. Оказывается, что поставленные вопросы сравнительно легко решаются для систем в так называемой канонической форме Фробениуса [1, с. 283–284]. Дело в том, что наличие канонической формы или даже утверждение о ее существовании позволяет достаточно просто решить ряд важных вопросов, например, указать условия наблюдаемости, построить алгоритм асимптотического оценивания состояний и др. В случае стационарных систем получение канонической формы не вызывает особого труда. Однако для неавтономных уравнений доказательство критериев ее существования представляет собой довольно сложную задачу. В [1, с. 285–287] такие критерии найдены в предположении определенной гладкости коэффициентов. В работах [2–5] к исследованию задачи существования канонических форм неавтономных систем привлекалась техника квазидифференцирования, что позволило установить необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи. Однако при высоких размерностях фазового пространства применение этих критериев существенно усложняется громоздкостью вычислений. Перечисленные трудности отсутствуют при изучении дискретных систем.

В настоящей работе установлена связь между канонической формой линейной дифференциальной системы и канонической формой ее дискретной аппроксимации, основанной на замене производной конечной разностью Эйлера. Доказано, что при условии существования пределов при неограниченном уменьшении шага дискретизации некоторых последовательностей дискретных функций, построенных с помощью коэффициентов канонической формы дискретной системы, эти пределы определяют каноническую форму дифференциальной системы.

1. Дифференциальная система наблюдения и ее дискретная аппроксимация. Пусть на множестве $(a,b)\subset R$ задана дифференциальная система наблюдения

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t),\quad y(t)=c(t)x(t) \tag{1}$$

со скалярным выходом; здесь $A(t)$ − непрерывная $(n\times n)$-матрица, $c(t)$ − непрерывная n-вектор-строка. Выберем произвольный отрезок

$$T=[t_0,\ t_1]\subset(a,b)$$

и, аппроксимируя производную $\dot{x}(t)$ разностями Эйлера, перейдем к дискретной системе

$$z(\tau+h)=(E+hA(\tau))z(\tau),\ \ y(\tau)=c(\tau)z(\tau). \quad (2)$$

Здесь

$$\tau\in Z_h=\{t_0-(n-1)h,\ \ldots, t_0-h,\ t_0,\ t_0+h,\ t_0+2h,\ \ldots,$$
$$t_1,\ t_1+h,\ \ldots, t_1+(n-1)h\}\subset(a,\ b),$$
$$h=(t_1-t_0)/m,$$

а m – достаточно большое целое число. Считая величину шага h пока фиксированной, предположим, что системы (1), (2) допускают канонические формы, а матрицы $A^0(t), B_h^0(\tau)$ коэффициентов этих форм определены соответственно функциями

$$\alpha_0(t), \alpha_1(t),\ ...,\ \alpha_{n-1}(t)\quad (t\in T),$$
$$\beta_0(\tau,\ h), \beta_1(\tau,\ h),\ ...,\beta_{n-1}(\tau,\ h)\quad (\tau\in Z_h).$$

Хотя матрица $A^0(t)$ и имеет форму Фробениуса, однако матрица $E+hA^0(\tau)$ матрицей Фробениуса не является. Укажем матрицу преобразования подобия $G_0=G_0(h)$, приводящую ее к форме Фробениуса. Для этого зададим верхнетреугольную матрицу $G_0=G_0(h)$ с элементами g_{ij}, которые вычисляются по формуле

$$g_{ij}=C_{j-1}^{i-1}\ h^{i-n},$$

где

$$C_j^i=\frac{j!}{i!(j-i)!}.$$

Нетрудно заметить, что матрица $G_0(h)$ невырождена при каждом $h>0$.

Справедливо утверждение.

Лемма 1. Пусть $(n\times n)$-матрица Фробениуса $B_h^0(\tau)$ задана функциями

$$\beta_0(\tau,\ h),\ \beta_1(\tau,\ h),\ ...,\beta_{n-1}(\tau,\ h).$$

Тогда

$$G_0(h)B_h^0(\tau)G_0^{-1}(h)=E+hP^0(\tau,\ h),$$

где $P^0(\tau,\ h)$ – матрица Фробениуса, определенная функциями

$$p_0(\tau,\ h)=h^{-n}(\beta_0(\tau,\ h)+\beta_1(\tau,\ h)+\ ...+\ \beta_{n-1}(\tau,\ h)-1),$$
$$p_i(\tau,\ h)=h^{i-n}\left(\sum_{j=i}^{n-1}C_j^i\beta_j(\tau,\ h)-C_n^i\right)(i=1,2,\ldots,n-2),$$
$$p_{n-1}(\tau,\ h)=h^{-1}(\beta_{n-1}(\tau,\ h)-n). \quad (3)$$

2. Предельный переход. Поскольку нашей целью является доказательство сходимости некоторых последовательностей дискретных функций, построенных по коэффициентам канонической формы дискретной системы аппроксимации, к коэффициентам канонической формы исходной дифференциальной системы, то прежде всего введем определение предела (задающего непрерывную функцию) последовательности дискретных функций.

Пусть на действительной прямой R выбран отрезок $[t_0, t_1]$. Рассмотрим конечные наборы

$$T_h=\{\tau_0,\tau_0+h,\tau_0+2h,\ldots,\tau_0+mh\}$$

точек на нем, где

$$\tau_0=t_0,\quad h=(t_1-t_0)/m,\quad m=1,2,\ \ldots$$

Зададим некоторые функции

$$\xi_m: T_h\ \to\ R^n,$$

построим ломаные

$$r_m(t)\ =\frac{(t-\tau_0-ih)\xi_m(\tau_0+(i+1)h)}{h}+$$
$$+\frac{(\tau_0+(i+1)h-t)\xi_m(\tau_0+ih)}{h},$$
$$t\in\ [\tau_0+ih,\tau_0+(i+1)h]\ \ (i=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1),$$

и тем самым определим последовательность $r_m(t)$ непрерывных функций на отрезке $[t_0, t_1]$.

Будем говорить, что последовательность дискретных функций $\xi_m(\tau)$ сходится к непрерывной функции $r_0(t)$ при $m\to\infty$, если к $r_0(t)$ равномерно на отрезке $[t_0, t_1]$ сходится последовательность $r_m(t)$.

Исследуем вопрос, когда при $h\to 0$ каноническая форма системы (2) переходит в каноническую форму системы (1).

Как и в [1, с. 256], систему (1) кратко запишем в виде пары (A, c). Предположим сначала, что система (1) стационарна и наблюдаема. Тогда найдется такая неособая $(n\times n)$-матрица G, что

$$G^{-1}AG=A^0,\ \ cG=c^0.$$

Здесь $A^0=A^0(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})-(n\times n)$-матрица в форме Фробениуса, а $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ – действительные числа. Дискретный аналог системы (A, c) имеет вид

$$(E+hA, c).$$

Несложно показать, что он наблюдаем при всех достаточно малых $h>0$. Поэтому существует невырожденная матрица $G_*=G_*(h)$ такая, что

$$G_*^{-1}(E+hA)G_*=B_h^0,\quad cG_*=c^0,$$

где B_h^0 – матрица Фробениуса, определенная некоторыми числами

$$\beta_0(h), \beta_1(h), ..., \beta_{n-1}(h).$$

В силу леммы 1 при каждом $h > 0$ матрица

$$Q(\tau, h) = (GG_0(h))^{-1}(E + hA)GG_0(h) = \\ = G_0^{-1}(h)(E + hA^0)G_0(h)$$

имеет каноническую форму Фробениуса, заданную величинами

$$q_0(h) = h^n\alpha_0 - h^{n-1}\alpha_1 + \ldots + (-1)^{n-1}h\alpha_{n-1} + (-1)^{n-1},$$

$$q_i(h) = \sum_{j=i}^{n-1}(-1)^{i+j}C_j^i h^{n-j}\alpha_j + (-1)^{n-i+1}C_n^i,$$

$$q_{n-1}(h) = h\alpha_{n-1} + n.$$

Кроме того, $cGG_0(h) = c^0$. Поскольку каноническая форма единственна, то $B_h^0(\tau) = Q(\tau, h)$ и поэтому

$$\beta_i(h) = q_i(h)\ (i = 0, 1, ..., n-1).$$

Тогда из леммы 1 следует, что коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ определяются равенствами

$$\alpha_0 = h^{-n}(\beta_0(h) + \beta_1(h) + ... + \beta_{n-1}(h) - 1),$$

$$\alpha_i = h^{i-n}\left(\sum_{j=i}^{n-1}C_j^i\beta_j(h) - C_n^i\right)(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2),$$

$$\alpha_{n-1} = h^{-1}(\beta_{n-1}(h) - n).$$

Таким образом, если стационарная система наблюдаема, то ее дискретный аналог наблюдаем при любом достаточно малом $h > 0$.

Распространим вышеописанный подход на нестационарные системы. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. Пусть системы (A, c) и (D, d), заданные на (a, b), связаны равенствами

$$G^{-1}(t)A(t)G(t) - G^{-1}(t)\dot{G}(t) = D(t), \quad c(t)G(t) = d(t),$$

где $G(t)$ – невырожденная при всех $t \in (a, b)$ непрерывно дифференцируемая $(n \times n)$-матрица. Тогда для каждого отрезка $[t_0, t_1] \subset (a, b)$ и достаточно больших целых чисел m при

$$\tau \in Z_h, \quad h = (t_1 - t_0)/m,$$

верно соотношение

$$G^{-1}(\tau + h)(E + hA(\tau))G(\tau) = E + hD(\tau,\ h) + o(\tau,\ h), \quad (4)$$

в котором $(n \times n)$-матрица $o(\tau,\ h)$ обладает свойством

$$\lim_{h \to 0}(o(\tau,\ h)/h) = 0.$$

Теорема 1. Пусть дифференциальная система (1) равномерно наблюдаема на (a, b). Тогда для любого отрезка

$$T = [t_0, t_1] \subset (a, b)$$

существует такое число $h_0 > 0$, что дискретная система (2) тотально наблюдаема на Z_h для всех $0 < h < h_0$ и, следовательно, имеет на Z_h каноническую форму

$$(B_h^0, c^0) = (B_h^0(\beta_0(\tau,h), \beta_1(\tau,h), \ldots, \beta_{n-1}(\tau,h)), c^0).$$

Если функции $p_i(\tau,\ h)$ сходятся, то на отрезке T существует каноническая форма

$$(A^0, c^0) = (A^0(\alpha_0(t), \alpha_1(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t)), c^0)$$

системы (1), причем $\alpha_i(t) = \lim_{h \to 0} p_i(\tau,\ h).$

Доказательство. Напомним, что дифференциальная система (1) равномерно наблюдаема [3] на (a, b), если существует такая нижнетреугольная $(n \times n)$-матрица $P(t)$ с непрерывными на (a, b) элементами $p_{ki}(t)$, удовлетворяющими условию $p_{kk}(t) \neq 0$, что каждая выходная функция $y(t)$ системы (1) имеет непрерывные квазипроизводные [6] ${}^{k}_{P}y(t)$ до порядка $n-1$ включительно и отображение

$$x(\sigma) \to ({}^{0}_{P}y(\sigma), {}^{1}_{P}y(\sigma), \ldots, {}^{n-1}_{P}y(\sigma))$$

инъективно при любом $\sigma \in (a, b)$. Критерием равномерной наблюдаемости системы (1) служит [3] равенство

$$\mathrm{rank}\, S_P(t) = n \quad (t \in (a, b)),$$

где $(n \times n)$-матрица $S_P(t)$ составлена из строк

$$s_0(t) = p_{00}(t)c(t),$$

$$s_k(t) = p_{kk}(t)(s_{k-1}(t)A(t) + \dot{s}_{k-1}(t)) + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}(t)s_j(t).$$

Заменив в функциях $s_k(t)$ производные разностями Эйлера и проведя простые алгебраические вычисления, легко убедиться в том, что из условия

$$\det S_P(t) \neq 0 \quad (t \in (a, b))$$

при достаточно малых $h > 0$ следует невырожденность матрицы наблюдаемости системы (2) для каждого $\tau \in Z_h$, т. е. система (2) тотально наблюдаема на Z_h. Поэтому пара

$$(E + hA(\tau), c(\tau))$$

обладает [7] канонической формой (B_h^0, c^0) на Z_h. Согласно лемме 1, справедливо равенство

$$G_0(h)\frac{B_h^0(\tau) - E}{h}G_0^{-1}(h) = P^0(\tau, h),$$

где фробениусова матрица $P^0(\tau, h)$ определена по формулам (3). В силу сходимости функций

$p_i(\tau, h)$ из этого равенства следует существование предела

$$\lim_{h\to 0} P^0(\tau,h) = \lim_{h\to 0} G_0(h)\frac{B_h^0(\tau)-E}{h}G_0^{-1}(h),$$

который представляет собой матрицу $Q^*(t)$ в форме Фробениуса с непрерывными элементами. Очевидно, теорема будет доказана, если установим, что система (Q^*, c^0) принадлежит орбите пары (A, c).

Рассмотрим две системы

$$(E + hA(\tau), c(\tau)), \quad (G_0(h)B_h^0(\tau)G_0^{-1}(h), c^0) \quad (5)$$

и представим их соответственно в виде

$$\frac{z(\tau+h)-z(\tau)}{h} = \frac{E+hA(\tau)-E}{h}z(\tau) = A(\tau)z(\tau),$$

$$\frac{v(\tau+h)-v(\tau)}{h} = G_0(h)\frac{B_h^0(\tau)-E}{h}G_0^{-1}(h)v(\tau),$$

$$y(\tau) = c(\tau)z(\tau), \quad y(\tau) = c^0 v(\tau).$$

Согласно лемме 2 из [8], при любых начальных условиях

$$z(t_0) = z_0, \quad v(t_0) = v_0$$

решения этих систем сходятся к решениям дифференциальных систем

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t), \quad \dot{v}(t) = Q^*(t)v(t).$$

Поскольку пары (5) приводятся одна к другой невырожденной матрицей, то множества их выходных функций совпадают, значит, совпадают и множества выходных функций дифференциальных систем (A, c) и (Q^*, c^0). Согласно [5], эти системы лежат в одной орбите и поэтому пара (Q^*, c^0) является канонической для системы (A, c). Теорема доказана.

Заключение. Из теоремы 1 вытекает следующий алгоритм построения канонической формы равномерно наблюдаемой дифференциальной системы (1):

1) перейти к дискретной системе (2) и определить ее каноническую форму (B_h^0, c^0);

2) построить функции $p_i(\tau, h)$ по формулам (3) и убедиться в их сходимости;

3) после этого найти предел

$$\lim_{h\to 0} G_0(h)\frac{B_h^0(\tau)-E}{h}G_0^{-1}(h) =$$
$$= A^0(\alpha_0(t), \alpha_1(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t)).$$

Пара (A^0, c^0) и будет искомой канонической формой системы (A, c).

Литература

1. Гайшун, И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем / И. В. Гайшун. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 409 с.

2. Астровский, А. И. Квазидифференцируемость и наблюдаемость линейных нестационарных систем / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 11. – С. 1567–1576.

3. Астровский, А. И. Квазидифференцируемость и канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 423–431.

4. Астровский, А. И. Один способ построения канонических форм Фробениуса линейных нестационарных систем наблюдения / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 10. – С. 1479–1487.

5. Астровский, А. И. Канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения с квазидифференцируемыми коэффициентами относительно различных групп преобразований / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 254–263.

6. Дерр, В. Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения / В. Я. Дерр // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. – 1999. – Вып. 1 (16). – С. 3–105.

7. Гайшун, И. В. Системы с дискретным временем / И. В. Гайшун. – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2001. – 400 с.

8. Тептин, А. Л. О некоторых свойствах решений линейных разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальные уравнения в промежутке неосцилляции / А. Л. Тептин // Дифференциальные уравнения. – 1965. – Т. 1, № 4. – С. 478–498.

Поступила 05.03.2012