УДК 517.935.2+519.71

В. М. Марченко, доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой высшей математики (БГТУ);
И. М. Борковская, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ)

УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ*

Для гибридных дискретно-непрерывных линейных стационарных систем исследуются основные задачи качественной теории управления, такие как устойчивость и стабилизация. В общем случае рассматриваемые системы можно интерпретировать как непрерывные системы, управляемые дискретным регулятором. Получен параметрический критерий асимптотической устойчивости открытых дискретно-непрерывных систем. Исследуется проблема стабилизации таких систем при воздействии линейной обратной связи в виде дискретных регуляторов.

Basic qualitative control theory problems such as the problems of stability and stabilization are studied for hybrid discrete-continuous linear stationary systems. In general, the system under consideration can be interpreted as a continuous system controlled by the discrete regulator. Firstly, we obtain a parametric criterion for such a kind of open system to be asymptotically stable. Then we investigate the problem of stabilization for discrete-continuous systems closed by linear feedback discrete type controllers.

Введение. При изучении реальных физических процессов наряду с динамическими (дифференциальными) встречаются и алгебраические (функциональные) зависимости. Такие процессы описываются дифференциально-алгебраическими системами [1–3] (некоторые уравнения которых являются дифференциальными, некоторые – алгебраическими). Их относят к классу гибридных [4–7]. Следует, однако, признать, что термин «гибридные системы» перегружен. В настоящее время, особенно в англоязычной литературе, термин «гибридные» используется в основном в связи с дискретно-непрерывными системами или системами, содержащими логические переменные [7].

Гибридность с нашей точки зрения означает, вообще говоря, неоднородность в природе рассматриваемого процесса или методах его изучения. Термин «гибридные системы» относят к системам, описывающим процессы или объекты с существенно различающимися характеристиками, например, содержащим в основной динамике непрерывные и дискретные переменные (сигналы), детерминированные и случайные величины или воздействия и т. д., что в конечном счете и определяет характер (природу) гибридных систем.

Имеется множество примеров гибридных систем. В области управления известен образец гибридной системы: линейный непрерывный независимый от времени объект, описываемый линейными дифференциальными уравнениями (математическая модель основывается на записывающем устройстве непрерывного действия), управляется дискретным линейным независимым от времени регулятором, описываемым уравнениями в конечных разностях (используется записывающее устройство дискретного действия). Эти типы систем обычно изучаются на слоях под названием систем дискретных данных, или систем цифрового управления.

Другой стандартный пример гибридной системы управления – система коммутации, где поведение может быть описано конечным числом динамических моделей (системы дифференциальных или разностных уравнений) вместе со сводом правил для переключения среди этих моделей.

Еще одна область теории гибридных систем – изучение качественных свойств (например, устойчивость) динамических систем, описываемых дифференциально-разностными уравнениями с разрывными коэффициентами, систем с переменной структурой динамики.

Классический практический пример гибридной системы – система нагревания и охлаждения жилого дома. Печь и кондиционер, наряду с характеристиками теплового потока, формируют систему, которая должна управляться. Термостат – дискретно случайно управляемая система, которая в основном обрабатывает символы: «слишком горячий», «слишком холодный» или нормальный.

Существует много причин для применения гибридных моделей – это, прежде всего, адекватность этих моделей, обоснованное их упрощение, использование цифровых машин (управление с помощью компьютерных программ); гибридные системы возникают при моделировании иерархической структуры реальных

*Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом (S/WI/2/2011).

систем управления, в частности, при описании динамических, дискретных, стохастических подсистем, комплексных систем и т. д.

Более подробная информация относительно гибридных систем может быть найдена в работах [1–13].

В данной статье рассматриваются линейные дискретно-непрерывные стационарные системы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим объект управления, описываемый следующей дискретно-непрерывной системой:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh), t \in [kh, (k+1)h), \quad (1)$$

$$y(kh+h) = A_{21}x(kh) + A_{22}y(kh) + Bu(kh), \quad (2)$$

$$k = 0, 1, 2, ...,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(kh) \in \mathbb{R}^m$, $u(kh) \in \mathbb{R}^r$, $h > 0$; $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B$ – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Начальные условия для системы (1), (2) зададим в виде

$$x(0) = x(+0) = x_0, \; y(0) = y_0. \quad (3)$$

Определение 1. Система (1), (2) при выключенном управлении ($u(kh) = 0, \; k = 0, 1, ...$) называется:

а) устойчивой (по Ляпунову), если для любого положительного числа ε найдется положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что все решения $x(t) = x(t, x_0, y_0)$, $t \geq 0$, $y(kh) = y(kh, x_0, y_0)$, $k = 0, 1, ...,$ с начальными условиями (3), удовлетворяющими ограничению $|x_0| + |y_0| \leq \delta(\varepsilon)$, обладают также свойством

$$|x(t, x_0, y_0)| + |y(kh, x_0, y_0)| \leq \varepsilon, \; t \geq 0, k = 0, 1, ... \quad (4)$$

(здесь и далее символ $|z|$ означает норму (модуль) вектора z в конечномерном векторном пространстве;

б) асимптотически устойчивой (по Ляпунову), если она устойчива и наряду с условием (4) дополнительно имеют место соотношения

$$|x(t, x_0, y_0)| \to 0, |y(kh, x_0, y_0)| \to 0$$
$$\text{при } t \to +\infty, \; k \to +\infty;$$

в) экспоненциально устойчивой со степенью устойчивости $\alpha, \alpha > 0$, если найдется такое положительное число M, что всякое решение $x(t) = x(t, x_0, y_0), t \geq 0$, $y(kh) = y(kh, x_0, y_0)$, $k = 0, 1, ...,$ удовлетворяет требованию

$$\max\{|x(t)|, |y(kh)|\} \leq M \max\{|x_0|, |y_0|\} e^{-\alpha t},$$
$$kh \leq t < (k+1)h, \; k = 0, 1, ...$$

Присоединим к системе (1), (2) линейную обратную связь вида

$$u(kh) = Q_1 x(kh) + Q_2 y(kh), k = 0, 1, ..., \quad (5)$$

где Q_1 и Q_2 – постоянные матрицы размеров $r \times n$ и $r \times m$ соответственно.

Непрерывно-дискретную систему (1), (2), (5) можно рассматривать как непрерывную систему (1), управляемую дискретным регулятором (2) при наличии обратной связи (5).

Определение 2. Система (1), (2), (5) называется стабилизируемой, если найдется линейная обратная связь вида (5), т. е. найдутся матрицы Q_1 и Q_2, при которых система (1), (2), замкнутая регулятором (5), является асимптотически устойчивой.

Задача 1. Найти параметрический критерий асимптотической устойчивости системы (1), (2).

Задача 2. Найти параметрические условия стабилизируемости системы (1), (2) регулятором (5).

2. Связь с ГДР-системами. Многие задачи качественной теории управления для дискретно-непрерывных систем требуют одновременного применения непрерывных и дискретных методов, что не всегда оказывается удобным. Покажем, однако, что существует возможность сведения системы вида (1), (2) (путем ее расширения) к гибридной дифференциально-разностной (ГДР) системе и, таким образом, применения методов исследования непрерывных систем.

На основании формулы Коши решение $x(kh+h), k = 0, 1, ...$ системы (1) запишем в виде

$$x(kh+h) = e^{A_{11}(kh+h-kh)}x(kh) + \int_{kh}^{kh+h} e^{A_{11}(kh+h-\tau)}A_{12}y(kh)d\tau = e^{A_{11}h}x(kh) + \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}d\tau A_{12}y(kh). \quad (6)$$

Полагая $z(t) = \begin{bmatrix} x(kh) \\ y(kh) \end{bmatrix}$, $u(kh) = 0$ для $t \in [kh, (k+1)h), k = 0, 1, \ldots,$ а также вводя обозначение

$$\Sigma_h = \begin{bmatrix} e^{A_{11}h} & \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}d\tau A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

приходим к ГДР-системе вида

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = A_{11}x(t) + \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \end{bmatrix} z(t), t \in [kh, (k+1)h), \\ z(t+h) = \Sigma_h z(t), k = 0, 1, ... \end{gathered} \quad (8)$$

Тогда к исследованию устойчивости системы (1), (2) можно применить методы [12] исследования ГДР-систем. Однако пространство состояний ГДР-системы (8) в общем случае бесконечномерное, в то время как исходная дискретно-непрерывная система (1), (2) является конечномерной. Ниже предлагается другой подход к исследованию задач устойчивости и стабилизации дискретно-непрерывных систем (1), (2) путем сведения этих задач к соответствующим задачам для дискретных систем.

3. Устойчивость. Из определения 1 вытекает, что если решение $x(t) = x(t, x_0, y_0)$, $t \geq 0$, $y(kh) = y(kh, x_0, y_0)$, $k = 0, 1, \ldots$, дискретно-непрерывной системы (1), (2) обладает тем или иным свойством устойчивости, то таким же свойством устойчивости обладают и вектор-функции $x(kh, x_0, y_0)$, $y(kh, x_0, y_0)$, $k = 0, 1, \ldots$

Тогда, полагая $z(k) = \begin{bmatrix} x(kh) \\ y(kh) \end{bmatrix}$, $u(kh) = 0$, по аналогии с (6)–(8) для описания $z[k]$ получаем дискретную систему вида

$$z[k+1] = \Sigma_h\, z[k], k = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

которая также должна быть устойчивой в рассматриваемом смысле. Оказывается верно и обратное. Таким образом, имеет место теорема 1.

Теорема 1. Система (1), (2) с $B = 0$ является асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы Σ_h из (7) находятся внутри единичного круга (с центром в начале координат) на комплексной плоскости, что равносильно условию $\rho(\Sigma_h) < 1$, где символ $\rho(A)$ означает спектральный радиус матрицы A.

Действительно, как вытекает из предыдущего с учетом критерия асимптотической устойчивости [14, с. 19–21] дискретной системы (9), в доказательстве нуждается только достаточная часть. Полагая $t \in [kh, kh+h)$ и используя формулу Коши, для решения $x(t)$ системы (1) получаем представление

$$x(t) = e^{A_{11}(t-kh)} x(kh) + \int_{kh}^{t} e^{A_{11}(t-\tau)} d\tau A_{12} y(kh),$$

откуда

$$|x(t)| \leq e^{\|A_{11}\| h} |x(kh)| + h e^{\|A_{11}\| h} \| A_{12} \| |y(kh)|, \tag{10}$$

где символ $\| A \|$ означает норму матрицы A.

Если теперь предположить, что условие $\rho(\Sigma_h) < 1$ выполнено, то дискретная система (9) будет асимптотически устойчива и поэтому, в частности, $|x(kh)| \to 0$, $|y(kh)| \to 0$ при $k \to +\infty$. Отсюда вытекает, что дискретно-непрерывная система (1), (2) также является асимптотически устойчивой. На этом доказательства достаточности, а с ней и всей теоремы, завершается.

Теорема 2. Система (1), (2) с $B = 0$ является экспоненциально устойчивой тогда и только тогда, когда она асимптотически устойчива.

Для доказательства теоремы 2, очевидно, достаточно убедиться, что асимптотическая устойчивость системы (1), (2) влечет ее экспоненциальную устойчивость. Итак, предположим, что система (1), (2) асимптотически устойчива. Тогда $\rho(\Sigma_h) < 1$. Поэтому все собственные числа λ_i матрицы Σ_h по модулю не превосходят некоторого положительного числа q: $|\lambda_i| \leq q < 1$. Тогда, учитывая структуру [14, с. 19–21] решений системы (9), заключаем, что найдется такое положительное число K, что

$$|z(k)| = \left| (\Sigma_h)^k \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right| \leq K \max\{|x_0|, |y_0|\} (\rho(\Sigma_h))^k \leq$$

$$\leq K \max\{|x_0|, |y_0|\} q^k \leq K \max\{|x_0|, |y_0|\} e^{k \ln q}. \tag{11}$$

Отсюда, учитывая неравенство (10), получаем

$$\max\{|x(t)|, |y(kh)|\} \leq e^{\|A_{11}\| h} (1 + h \| A_{12} \|) K \max\{|x_0|,$$

$$|y_0|\}\, e^{-\ln q}\, e^{(k+1)\ln q} \leq M \max\{|x_0|, |y_0|\} e^{-\alpha t}, \ \alpha = -\frac{\ln q}{h},$$

$$M = e^{\|A_{11}\| h - \ln q} (1 + h \| A_{12} \|) K, \ kh \leq t < kh + h.$$

Таким образом, все решения системы (1), (2) экспоненциально убывают, что свидетельствует о ее экспоненциальной устойчивости. Теорема 2 доказана.

Следствие. Система (1), (2) (с $B = 0$) является экспоненциально устойчивой со степенью устойчивости $\alpha, \alpha > 0$, тогда и только тогда, когда $\rho(\Sigma_h) \leq e^{-\alpha h}$.

Анализируя условие устойчивости [14, с. 21] дискретной системы (9) и используя технику доказательств теорем 1, 2, получаем теорему 3.

Теорема 3. Система (1), (2) с $B = 0$ является устойчивой тогда и только тогда, когда $\rho(\Sigma_h) \leq 1$, причем всем собственным числам матрицы Σ_h, по модулю равным 1, соответствуют простые элементарные делители, т. е. таким собственным значениям отвечают жордановы клетки размерности 1.

4. Стабилизируемость. Рассмотрим задачу стабилизации системы (1), (2) дискретным регулятором (5). Соответствующая замкнутая система имеет вид

$$\dot{x}(t) = A_{11} x(t) + A_{12} y(kh), t \in [kh, (k+1)h), \tag{12}$$

$$y(kh+h) = (A_{21} + BQ_1) x(kh) + \\ + (A_{22} + BQ_2) y(kh). \tag{13}$$

Тогда задача стабилизации системы (1), (2) регулятором (5) сводится к нахождению матриц Q_1, Q_2, при которых система (12), (13) является асимптотически устойчивой, что, в свою очередь, сводится к решению задачи асимптотической устойчивости для дискретной системы

$$\begin{bmatrix} x(kh+h) \\ y(kh+h) \end{bmatrix} = (\Sigma_h + \Delta Q) \begin{bmatrix} x(kh) \\ y(kh) \end{bmatrix}, k = 0, 1, ..., \quad (14)$$

где $\Delta = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}$, $Q = [Q_1 \quad Q_2]$.

Тогда система (1), (2) стабилизируема регулятором (5) в том и только в том случае, когда найдется $r \times (m+n)$ матрица Q такая, что $\rho(\Sigma_h + \Delta Q) \le 1$. Отсюда, используя стандартную методику решения задач стабилизации и модального управления в линейных стационарных системах на основе приведения их к каноническому виду, например к канонической форме Бруновского, приходим к заключению, что система (1), (2) стабилизируема регулятором (5) тогда и только тогда, когда все неустойчивые собственные значения (т. е. равные или превосходящие 1 по модулю) матрицы Σ_h принадлежат управляемой части (в соответствии с канонической формой Калмана) матричной пары (Σ_h, Δ). Таким образом, имеет место теорема 4.

Теорема 4. Система (1), (2) является стабилизируемой дискретным регулятором (5) тогда и только тогда, когда

$$rank[\lambda I_{n+m} - \Sigma_h, \Delta] = n + m \quad (15)$$

для всех комплексных чисел λ таких, что $|\lambda| \ge 1$.

Условие (15) достаточно проверять на спектре системы (9), т. е. на множестве собственных значений (чисел) матрицы Σ_h.

Заключение. В работе рассмотрены задачи устойчивости, асимптотической и экспоненциальной устойчивости, а также задача стабилизации для линейных стационарных дискретно-непрерывных систем. Разработана техника исследования разрешимости таких задач путем сведения их к соответствующим задачам для чисто дискретных систем, что в конечном счете позволило получить эффективные ранговые критерии разрешимости поставленных задач.

Литература

1. Dai, L. Singular control systems / L. Dai // Lecture notes in control and information sciences: 118. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. – 319 p.

2. Kunkel, P. Differential-algebraic equations: analysis and numerical solutions / P. Kunkel, W. L. Mehrmann // European Mathematical Society. – Zürich: Switzerland, 2006. – 377 p.

3. März, R. Solvability of linear differential algebraic equations with properly stated leading terms / R. März // Results in Mathematics 45(2004). – Basel: Birkhauser Verlag. – 2004. – P. 88–95.

4. Кириллова, Ф. М. Необходимые условия оптимальности управлений в гибридных системах / Ф. М. Кириллова, С. В. Стрельцов // Управляемые системы: сб. тр. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1975. – Вып. 14. – С. 24–33.

5. Ахундов, А. А. Управляемость линейных гибридных систем / А. А. Ахундов // Управляемые системы: сб. ст. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1975. – Вып. 14. – С. 4–10.

6. De la Sen, M. A note about total stability of a class of hybrid systems / M. De la Sen // Informatica. – 2006. – Vol. 17, № 4. – P. 565–576.

7. Van der Schaft, A. An introduction to hybrid dynamical systems / A. Van der Schaft, H. Schumacher. – Berlin: Springer, 2000. – 324 p.

8. Куржанский, А. Б. Отчет о 16-м международном конгрессе ИФАК (IFAC) – международной федерации по автоматическому управлению / А. Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 1. – С. 183–189.

9. Gertler, J. J. Hybrid Systems / J. J. Gertler, J. B. Cruz, M. Peshkin (Eds.) // Prepr. 13th World Congr. IFAC. – 1996. – Vol. J. – P. 275–311, 473–476.

10. Baker, C. T. H. Differential-algebraic equations with after-effect / C. T. H. Baker, C. A. Paul, H. Tian // J. Comput. and Appl. Math. – 2002. – Vol. 140. – P. 63–80.

11. Марченко, В. М. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями / В. М. Марченко, О. Н. Поддубная // Доклады РАН. – 2005. – Т. 404, № 4. – С. 465–469.

12. Марченко, В. М. Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем / В. М. Марченко, Ж.-Ж. Луазо // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 5. – С. 728–740.

13. Марченко, В. М. Относительная достижимость линейных стационарных систем, управляемых дискретным регулятором / В. М. Марченко, О. Н. Пыжкова // Труды БГТУ. – 2012. – № 6: Физ.-мат. науки и информатика. – С. 11–13.

14. Халанай, А. Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. – М.: Мир, 1971. – 309 с.

Поступила 05.03.2012