

УДК 517.935.2+519.71

**В. М. Марченко**, доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой высшей математики (БГТУ);  
**О. Н. Пыжкова**, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ)

### ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ДОСТИЖИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ, УПРАВЛЯЕМЫХ ДИСКРЕТНЫМ РЕГУЛЯТОРОМ\*

Анализируются линейные гибридные дискретно-непрерывные системы с точки зрения их относительной управляемости и достижимости. Для таких систем рассматриваемые задачи управляемости и достижимости сводятся к соответствующим проблемам для специальных дискретных систем, что позволяет получить ранговые критерии разрешимости этих задач.

Linear hybrid discrete-continuous systems are studied from the point of view of relative controllability and assignability property. For such systems, we reduce the problems under investigation to the corresponding ones for a special discrete and, as a result, we obtain the controllability and assignability criteria in a rank matrix form.

**Введение.** Математическое моделирование и исследование реальных физических процессов в современных задачах автоматизации и телемеханики, теории передачи информации, радиологии и химической кинетики, моделирования технологических процессов в ядерных реакторах, плазме и лазерах, задачах демографии и экономики и т. д. предъявляют все более возрастающие требования к математическим моделям реальных систем автоматического регулирования. Все вышперечисленное, а также прогресс средств вычислительной техники, широкое распространение микропроцессоров в производстве диктуют необходимость изучения фундаментальных проблем математической теории управления, ставят новые задачи для более широкого класса динамических систем. Кроме того, появляется потребность в разработке новых более эффективных методов изучения таких систем, в частности динамических систем с алгебраическими связями и дискретно-непрерывных систем, описывающих процессы, в которых как эффектом дискретности, так и алгебраическими связями пренебречь нельзя. Особый класс составляют динамические аналого-цифровые системы, моделирующие динамические процессы, рассматриваемые на дискретных слоях. Большинство из перечисленных процессов приводят к математическим моделям в виде сингулярных (вырожденных, неразрешенных относительно производной и т. д.), в частности, гибридных систем: дифференциально-алгебраических, с присутствием импульсных и логических переменных, дифференциально-разностных, дискретно-непрерывных и др. Следует, однако, признать, что термин «гибридные системы» перегружен (см. работу [1] и ссылки к ней).

Ниже рассматриваются гибридные дискретно-непрерывные системы, в которые управление входит только в дискретную составляющую, что в совокупности можно квалифицировать как непрерывные системы, управляемые дискретным регулятором. Такие системы [2] могут оказаться полезными и при исследовании различных квантованных [3] динамических систем, а также систем с импульсными воздействиями [4, 5]. Работа в целом продолжает начатое в [1] исследование основных проблем качественной теории управления в дискретно-непрерывных системах.

Вопросы управляемости и наблюдаемости гибридных дифференциально-разностных систем рассматривались ранее в [6–8].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим объект управления, описываемый следующей дискретно-непрерывной системой:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh), t \in [kh, (k+1)h), \quad (1)$$

$$y(kh+h) = A_{21}x(kh) + A_{22}y(kh) + Bu(kh), \quad (2)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(kh) \in \mathbb{R}^m$ ,  $u(kh) \in \mathbb{R}^r$ ,  $h > 0$ ;  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $B$  – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Начальные условия для системы (1), (2) зададим в виде

$$x(0) = x(+0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (3)$$

**Определение.** При заданном моменте времени  $t_1 = qh$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , система (1), (2) называется:

а)  $t_1$ -относительно управляемой, если для любых начальных данных  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  в (3) найдется управление  $u(kh) \in \mathbb{R}^r$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-1$ , такое, что соответствующее решение  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $y(kh)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , системы (1), (2) с начальными

\*Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом (S/WI/2/2011).

условиями (3) обладает свойством  $x(t_1) = 0$ ,  $y(t_1) = 0$ ;

б)  $t_1$ -относительно управляемой по  $x$ , если для любых начальных данных  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  в (3) найдется такое управление  $u(kh) \in \mathbb{R}^r$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-1$ , что соответствующее решение  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $y(kh)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством  $x(t_1) = 0$ ;

в)  $t_1$ -относительно управляемой по  $y$ , если для любых начальных данных  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  в (3) найдется такое управление  $u(kh) \in \mathbb{R}^r$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-1$ , что соответствующее решение  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $y(kh)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством  $y(t_1) = 0$ ;

г)  $t_1$ -относительно достижимой, если для любых векторов  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ ;  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^m$  в (3) найдется управление  $u(kh) \in \mathbb{R}^r$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-1$ , такое, что соответствующее решение  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $y(kh)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством  $x(t_1) = x_1$ ,  $y(t_1) = y_1$ ;

д)  $t_1$ -относительно достижимой по  $x$ , если для любых векторов  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ ;  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  в (3) найдется управление  $u(kh) \in \mathbb{R}^r$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-1$ , такое, что соответствующее решение  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $y(kh)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством  $x(t_1) = x_1$ ;

е)  $t_1$ -относительно достижимой по  $y$ , если для любых векторов  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ;  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^m$  в (3) найдется управление  $u(kh) \in \mathbb{R}^r$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-1$ , такое, что соответствующее решение  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $y(kh)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством  $y(t_1) = y_1$ .

**Задача.** Найти параметрические критерии относительной  $t_1$ -управляемости и достижимости системы (1), (2).

**2. Относительная управляемость.** Применяя формулу Коши к системе (1), для решения  $x(kh+h)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , получаем представление

$$\begin{aligned} x(kh+h) &= e^{A_{11}(kh+h-kh)} x(kh) + \\ &+ \int_{kh}^{kh+h} e^{A_{11}(kh+h-\tau)} A_{12} y(kh) d\tau = e^{A_{11}h} x(kh) + \\ &+ \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)} d\tau A_{12} y(kh). \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая (2) и вводя обозначения

$$\begin{aligned} z[k] &= \begin{bmatrix} x(kh) \\ y(kh) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} = \Delta, \\ \Sigma_h &= \begin{bmatrix} e^{A_{11}h} & \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)} d\tau A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

для описания  $z[k]$  получаем дискретную систему вида

$$z[k+1] = \Sigma_h z[k] + \Delta u(kh), \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Отсюда нетрудно видеть, что задача относительной управляемости дискретно-непрерывной системы (1), (2) сводится к задаче полной управляемости (в смысле Калмана [9]) дискретной системы (5).

Из (5) с учетом начальных условий (3) получаем

$$\begin{aligned} z[q] &= \Sigma_h z[q-1] + \Delta u((q-1)h) = \\ &= (\Sigma_h)^{q-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + (\Sigma_h)^{q-1} \Delta u(0) + (\Sigma_h)^{q-2} \Delta u(h) + \\ &+ \dots + \Delta u((q-1)h), \quad q = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

По аналогии с развитой для линейных динамических систем техникой [9] получения критериев полной управляемости, в частности, используя представление (6), приходим к следующему условию  $qh$ -относительной управляемости дискретно-непрерывной системы (1), (2).

**Теорема 1.** Условие

$$\begin{aligned} \text{rank}[\Delta, \Sigma_h \Delta, \dots, (\Sigma_h)^{q-1} \Delta, (\Sigma_h)^{q-1}] = \\ = \text{rank}[\Delta, \Sigma_h \Delta, \dots, (\Sigma_h)^{q-1} \Delta] \end{aligned} \quad (7)$$

является необходимым и достаточным для  $qh$ -относительной управляемости системы (1), (2).

Действительно, анализируя представление (6), нетрудно заключить, что система (1), (2)  $qh$ -относительно управляема тогда и только тогда, когда линейная оболочка столбцов матрицы  $\Sigma_h$  содержится в линейной оболочке столбцов матриц  $\Delta, \Sigma_h \Delta, \dots, (\Sigma_h)^{q-1} \Delta$ , что в свою очередь равносильно ранговому условию (7). На этом доказательство теоремы 1 завершается.

В качестве следствия теоремы 1 имеем теорему 2.

**Теорема 2.** Условие

$$\begin{aligned} \text{rank}(H[\Delta, \Sigma_h \Delta, \dots, (\Sigma_h)^{q-1} \Delta, (\Sigma_h)^{q-1}]) = \\ = \text{rank}(H[\Delta, \Sigma_h \Delta, \dots, (\Sigma_h)^{q-1} \Delta]) \end{aligned} \quad (8)$$

является необходимым и достаточным:

а) для  $gh$ -относительной управляемости по  $x$  системы (1), (2) при  $H = [I_n \quad 0]$ ;

б) для  $gh$ -относительной управляемости по  $y$  системы (1), (2) при  $H = [0 \quad I_m]$ , где символ  $I_k$  обозначает единичную  $k \times k$ -матрицу.

**Замечание 1.** Нетрудно видеть, что свойство  $qh$ -относительной управляемости со временем «насыщается». Оказывается, если система (1), (2) не является  $qh$ -относительно управляемой при  $q = n + m$ , то она не будет  $qh$ -относительно управляемой и при  $q > n + m$ .

**Замечание 2.** Система (1), (2) считается относительно управляемой, если она  $qh$ -относительно управляема хотя бы при одном натуральном числе  $q$ . Из теоремы 1 вытекает, что необходимый и достаточный критерий относительной управляемости системы (1), (2) заключается в требовании

$$\begin{aligned} \text{rank}[\Delta, \Sigma_h \Delta, \dots, (\Sigma_h)^{m+n-1} \Delta, (\Sigma_h)^{m+n-1} \Delta] = \\ = \text{rank}[\Delta, \Sigma_h \Delta, \dots, (\Sigma_h)^{m+n-1} \Delta]. \end{aligned}$$

Аналогично условие

$$\begin{aligned} \text{rank}(H[\Delta, \Sigma_h \Delta, \dots, (\Sigma_h)^{m+n-1} \Delta, (\Sigma_h)^{m+n-1} \Delta]) = \\ = \text{rank}(H[\Delta, \Sigma_h \Delta, \dots, (\Sigma_h)^{m+n-1} \Delta]) \end{aligned}$$

является необходимым и достаточным для относительной управляемости по  $x$  системы (1), (2) при  $H = [I_n \ 0]$  и для относительной управляемости по  $y$  при  $H = [0 \ I_m]$ .

**3. Относительная достижимость.** Применяя стандартную технику [9] получения ранговых критериев разрешимости задачи достижимости в линейных стационарных системах, получаем следующие условия  $t_1$ -относительной достижимости системы (1), (2).

**Теорема 3.** Условие

$$\text{rank}[\Delta, \Sigma_h \Delta, \dots, (\Sigma_h)^{q-1} \Delta] = n + m \quad (9)$$

является необходимым и достаточным для  $qh$ -относительной управляемости системы (1), (2).

**Теорема 4.** Условие

$$\begin{aligned} \text{rank}(H[\Delta, \Sigma_h \Delta, \dots, (\Sigma_h)^{q-1} \Delta, (\Sigma_h)^{q-1} \Delta]) = \\ = \text{rank} H \end{aligned} \quad (10)$$

является необходимым и достаточным:

- а) для  $qh$ -относительной достижимости по  $x$  системы (1), (2) при  $H = [I_n \ 0]$ ;
- б) для  $qh$ -относительной достижимости по  $y$  системы (1), (2) при  $H = [0 \ I_m]$ .

Как и в случае управляемости свойство  $qh$ -относительной достижимости со временем «насыщается»: если система (1), (2) не является  $qh$ -относительно достижимой при  $q = n + m$ , то она не будет  $qh$ -относительно управляемой и при  $q > n + m$ . Отсюда, вводя понятие относительной достижимости как  $qh$ -относительной достижимости хотя бы при одном натуральном числе  $q$ , получаем ранговый критерий относительной достижимости: система (1), (2) является относительно достижимой тогда и только тогда, когда выполняется ранговое условие

$$\text{rank}[\Delta, \Sigma_h \Delta, \dots, (\Sigma_h)^{n+m-1} \Delta] = n + m.$$

По аналогии с замечанием 2 можно сформулировать необходимые и достаточные усло-

вия относительной достижимости системы (1), (2) по  $x$  и по  $y$ .

**Заключение.** В работе рассмотрен ряд задач относительной управляемости и достижимости гибридных дискретно-непрерывных динамических систем. Предложенная методика исследования позволила получить эффективные ранговые критерии разрешимости этих задач, а также по аналогии с [6–8] может быть успешно применена к исследованию соответствующих двойственных задач наблюдаемости. Остаются пока не изученными вопросы полной управляемости дискретно-непрерывных систем, когда траекторию требуется не только перевести в нулевое начальное состояние системы, но и «успокоить» в нем, а также вопросы  $qh$ -относительной управляемости и достижимости по  $x$  в случае произвольного конечного момента времени  $t_1 \neq qh, q \in \mathbb{N}$ . Однако это предмет другой статьи.

## Литература

1. Марченко, В. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем / В. М. Марченко, И. М. Борковская // Труды БГТУ. – 2012. – № 6: Физ.-мат. науки и информатика. – С. 7–10.
2. Афанасьев, В. Н. Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – М.: Высш. шк., 1989. – 447 с.
3. De la Sen, M. The reachability and observability of hybrid multirate sampling linear systems / M. De la Sen // Computers Math. Applic. – 1996. – Vol. 31, № 1. – P. 109–122.
4. Цыпкин, Я. З. Теория линейных импульсных систем / Я. З. Цыпкин. – М.: Госиздат. физ.-мат. лит.-ры, 1963. – 968 с.
5. Халанай, А. Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
6. Marchenko, V. M. On the observability of linear differential-algebraic systems with delays / V. M. Marchenko, O. N. Poddubnaya, Z. Zaczekiewicz // IEEE Trans. Automat. Control. – 2006. – Vol. 51, № 8. – P. 1387–1392.
7. Марченко, В. М. О полной наблюдаемости гибридных дифференциально-разностных систем / В. М. Марченко // Доклады РАН. – 2011. – Т. 441, № 2. – С. 179–182.
8. Марченко, В. М. Полная наблюдаемость гибридных дифференциально-разностных систем / В. М. Марченко // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 11. – С. 1608–1620.
9. Габасов, Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – М.: Наука, 1971. – 508 с.

Поступила 01.03.2012